



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ Η.Μ.Μ.Υ.

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗΣ Η/Υ

Διπλωματική Εργασία

Ταυτοποίηση μοντέλου για την περιγραφή
θερμικής συμπεριφοράς κτηρίου και εφαρμογή
βέλτιστου τετραγωνικού ελέγχου σ' αυτό.

Σηφάκης Ιωάννης

Εξεταστική Επιτροπή:

Καθηγητής Σταυρακάκης Γεώργιος (επιβλέπων)

Καθηγητής Καλαϊτζάκης Κωνσταντίνος

Δρ. Κουτρούλης Ευτύχιος , Διδάσκων ΠΔ 407/80

ΧΑΝΙΑ 2006

Ευχαριστώ για την πολύτιμη βοήθειά τους, τους καθηγητές

Σταυρακάκη Γεώργιο

Κολοκοτσά Διονυσία

και την διδακτορικό φοιτήτρια, Νικολάου Τριανταφυλλιά

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή.....	5
1.1 Γενικά.....	5
1.2 Επιστημονική συνεισφορά.....	7
1.3 Περιγραφή κεφαλαίων.....	8
Κεφάλαιο 2 – Περιγραφή προβλήματος.....	10
2.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	10
Κεφάλαιο 3 – Βασικές έννοιες μετάδοσης και θερμικά δίκτυα.....	13
3.1 Γενικά.....	13
3.2 Βασικές έννοιες μετάδοσης θερμότητας.....	14
3.3 Θερμικά δίκτυα.....	16
3.4 Το RC δίκτυο και σταθερά χρόνου.....	19
Κεφάλαιο 4 - Θεωρία εκτίμησης παραμέτρων με τη μέθοδο Recursive Least Squares.....	22
4.1 Γενικά.....	22
4.2 Least Squares Estimation.....	22
4.3 Recursive Least Squares.....	24
Κεφάλαιο 5 - Θεωρία Βέλτιστου Τετραγωνικού ελέγχου.....	28
5.1 Γενικά.....	28
5.2 Linear Quadratic Control.....	28
Κεφάλαιο 6 - Ταυτοποίηση του μοντέλου του συστήματος (System Identification).....	33
6.1 Σύστημα προς ταυτοποίηση.....	33
6.2 Επεξεργασία μετρήσεων.....	35
6.3 Εκτίμηση παραμέτρων.....	40
6.4 Υλοποίηση στο Simulink.....	47
Κεφάλαιο 7 – Εφαρμογή βέλτιστου ελέγχου στο σύστημα που εκτιμήθηκε.....	50
7.1 Ενσωμάτωση της παραμέτρου στο διάνυσμα κατάστασης.....	51
7.2 Η ως εξωτερική διαταραχή.....	58
7.3 Εκτίμηση δυναμικού μοντέλου της εξωτερικής θερμοκρασίας και βέλτιστος	

έλεγχος με ένταξη της στο διάλυμα κατάστασης.....	64
Κεφάλαιο 8 – Σχολιασμός και σύγκριση των αποτελεσμάτων.....	67
8.1 –Γενικά.....	67
8.2 – Σχολιασμός και σύγκριση των αποτελεσμάτων.....	68
Βιβλιογραφία.....	75

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Τις δύο τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί μια διεξοδική, σε παγκόσμιο επίπεδο έρευνα πάνω στα κτήρια και η ανάπτυξη της επιστήμης της σχεδίασης συστημάτων κτηρίων είναι αισθητή. Στην αρχή η έρευνα έδωσε έμφαση στην εξοικονόμηση ενέργειας, αλλά γρήγορα στράφηκε στην προσπάθεια βελτίωσης της απόδοσης των κτηρίων, της άνεσης και παραγωγικότητας των ενοίκων, πλεονεκτήματα που απορρέουν από το σωστό σχεδιασμό.

Στάδιο του σχεδιασμού συστημάτων κτηρίων αποτελεί ο υπολογισμός της απόδοσης, που ήδη αναφέραμε. Την απόδοση μπορούμε να την υπολογίσουμε παραδοσιακά, βασιζόμενοι στη λεπτομερή περιγραφή του κτηρίου, που περιέχεται στα αρχιτεκτονικά σχέδια (blueprints). Αυτό είναι μια περίπτωση του προβλήματος που συχνά ονομάζουμε πρόβλημα “προς τα εμπρός” (forward problem), σε αντίθεση με το αντίστροφο πρόβλημα (inverse problem) όπου κάποιος έχει δεδομένα της απόδοσης ενός κτηρίου και επιθυμεί να προβεί στην περιγραφή του. Η δεύτερη περίπτωση είναι παράδειγμα ενός πολύ γενικού αντικειμένου, που συναντάμε σε διάφορα επιστημονικά πεδία και είναι γνωστό σαν ταυτοποίηση συστήματος (system identification). Στα υπάρχοντα κτήρια, αυτό το πρόβλημα εμφανίζεται όταν κάποιος ψάχνει απαντήσεις σε ερωτήματα, όπως:

1. Πως συγκρίνονται τα δεδομένα με τις προβλέψεις της σχεδίασης (και σε περίπτωση ασυμφωνίας, οφείλεται στις τυχόν ανωμαλίες του καιρού, σε λανθασμένες ρυθμίσεις του θερμοστάτη, σε βλάβες του εξοπλισμού ή σε άλλες αιτίες);

2. Πως θα μεταβληθεί η κατανάλωση ενέργειας αν αλλάξουν οι ρυθμίσεις του θερμοστάτη ή ο ρυθμός εξαερισμού (με άλλα λόγια ποιο είναι το κόστος της άνεσης);

3. Πόση ενέργεια θα εξοικονομήσουμε με κάποια μετατροπή στο σύστημα;

4. Πριν πραγματοποιηθεί η μετατροπή στο σύστημα πως μπορεί να επαληθεύσει κάποιος την εξοικονόμηση ενέργειας;

5. Πως μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε τον έλεγχο και τη λειτουργία του εξοπλισμού μας;

Ας υποθέσουμε ότι καταφεύγουμε στην παραδοσιακή μέθοδο περιγραφής του κτηρίου, χρησιμοποιώντας τα blueprints (εφόσον υπάρχουν). Σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα που προκύπτει συνήθως, είναι ότι τα υλικά που συνθέτουν το κτήριο έχουν ιδιότητες που στην πραγματικότητα διαφέρουν απ' αυτές που αναγράφονται στα αντίστοιχα καινούρια υλικά. Επίσης, η κατασκευή του κτηρίου ενδέχεται να παρεκκλίνει από τις προδιαγραφές των blueprints, λόγω μετατροπών που έκανε ο εργολάβος χωρίς να αφήσει κάποιο τεκμήριο. Υπό αυτές τις συνθήκες είναι προτιμότερο να βασίσουμε το μοντέλο μας σε δεδομένα μετρήσεων.

Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για το αντίστροφο πρόβλημα (inverse problem) μπορεί να είναι πολύ διαφορετικό από ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για το πρόβλημα “προς τα εμπρός” (forward problem). Είναι δυνατόν να αποτελείται από ένα πολύ μικρό αριθμό από ρυθμιζόμενες παραμέτρους (adjustable parameters), αφού η πληροφορία που περιέχεται στα δεδομένα είναι πολύ περιορισμένη (εξαιτίας των συνθηκών που πραγματοποιούνται οι μετρήσεις και των σφαλμάτων που υπόκεινται). Έτσι, το μοντέλο από μόνο του μπορεί να είναι αρκετά απλό, αν και απαιτείται μια ευέλικτη διαδικασία που θα εγγυάται την αξιοπιστία της εκτίμησης των γειτονικών παραμέτρων. Ενώ τα “προς τα εμπρός” μοντέλα (forward models) και τα αντίστροφα μοντέλα (inverse models) από μόνα τους αποτελούν ακραίες περιπτώσεις, μια μέση προσέγγιση υπόσχεται την καλύτερη ακρίβεια: εκμετάλλευση της a priori πληροφορίας για την εξαγωγή του αρχικού μοντέλου και βελτίωση του με τα δεδομένα μετρήσεων της απόδοσης.

1.2 Επιστημονική συνεισφορά

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σαν κύριο στόχο την ταυτοποίηση των παραμέτρων μοντέλου που περιγράφει θερμικά ένα κτήριο, χρησιμοποιώντας πραγματικές μετρήσεις που αφορούν το κτήριο αυτό, Εργαστήριο Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων και Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας (ΕΗΚΑΠΕ) και την εφαρμογή ελέγχου (control) στο ταυτοποιημένο μοντέλο ώστε οι περιβαλλοντικές συνθήκες στον εσωτερικό χώρο να είναι οι επιθυμητές.

Με την εφαρμογή της μεθόδου των Αναδρομικών Ελαχίστων Τετραγώνων (Recursive Least Squares) στο μοντέλο που διαθέτουμε, κάνοντας χρήση δεδομένων που αφορούν την απόδοση υπάρχοντος κτηρίου, εκπαιδεύουμε το μοντέλο μας να συμπεριφέρεται όπως το κτήριο που μας ενδιαφέρει, στην προκειμένη περίπτωση το εργαστήριο ηλεκτρονικής του Πολυτεχνείου Κρήτης, για το οποίο έγιναν οι μετρήσεις στα πλαίσια παλαιότερης διπλωματικής εργασίας. Η εργασία αυτή αφορούσε την εφαρμογή και την ποιοτική αξιολόγηση αλγορίθμων, που υλοποιούν κλασικούς και ελεγκτές ασαφούς λογικής, για τον έλεγχο των περιβαλλοντικών συνθηκών σε ένα κτίριο και πραγματοποιήθηκε από τους φοιτητές Καφετζή Γεώργιο και Πατέλη Πέτρο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μετρήσεις έγιναν κατά την περίοδο του καλοκαιριού και επομένως το ταυτοποιημένο μοντέλο που θα προκύψει εσωκλείει την συμπεριφορά του κτηρίου σε καλοκαιρινούς μήνες. Το γεγονός αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε την συμπεριφορά και την απόδοση του κτηρίου σε μία ενεργειακά απαιτητική εποχή για τη χώρα μας εφόσον, λόγω των υψηλών θερμοκρασιών, οι ανάγκες για ψύξη των κτηρίων είναι μεγάλες και δαπανηρές. Παράλληλα, διαφαίνεται πως επηρεάζεται η απόδοση του κτηρίου από διάφορες πηγές ενέργειας, όπως ο ήλιος, και πως μπορούμε να επιτύχουμε τις συνθήκες που έχουμε ορίσει, σε συνδυασμό με τις κλασικές πηγές ενέργειας (θέρμανση-ψύξη).

Οι μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αρκετά πυκνές (ανά οκτάλεπτο) και το πλήθος των τιμών ικανοποιητικό έτσι ώστε η ταυτοποίηση του μοντέλου να είναι όσο γίνεται πιο πιστή στη συμπεριφορά του ίδιου του κτιρίου. Έτσι, μπορούμε να ξέρουμε

πως αντιδρά σε οποιεσδήποτε συνθήκες ηλιοφάνειας, εξωτερικής θερμοκρασίας σε συνδυασμό με κάποια εγκατάσταση κλιματισμού.

Η εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (Recursive Least Squares) έγινε σε περιβάλλον Matlab. Αφού πραγματοποιήθηκε ο υπολογισμός των παραμέτρων του μοντέλου (estimation), έγινε η υλοποίηση στο Simulink του Matlab, από όπου και εξήχθησαν τα γραφήματα των εσωτερικών θερμοκρασιών-προσομοίωση της συμπεριφοράς του κτιρίου. Στη συνέχεια, πάλι σε περιβάλλον Matlab, εφαρμόστηκε Βέλτιστος Τετραγωνικός Έλεγχος (Linear Quadratic Control) με σκοπό, η εσωτερική θερμοκρασία του κτιρίου να παρακολουθεί μια επιθυμητή πορεία, ελέγχοντας την είσοδο του μοντέλου.

Στο στάδιο αυτό, του ελέγχου, χρειάστηκε κάποια μετατροπή του μοντέλου λόγω του ότι στο διάνυσμα της εισόδου περιέχεται και η εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, μεταβλητή μη ελεγχόμενη που δεν μπορούμε να συμπεριλάβουμε στο διάνυσμα ελέγχου. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκαν δύο εκδοχές του τροποποιημένου μοντέλου, έτσι ώστε η εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος να μην συμπεριλαμβάνεται στο έλεγχο και συγχρόνως το σύστημα να μην αλλάξει τη συμπεριφορά του. Στην πρώτη περίπτωση, υλοποιούμε τον έλεγχο, μεταφέροντας την θερμοκρασία περιβάλλοντος στο διάνυσμα κατάστασης και κάνουμε την υπόθεση ότι είναι σταθερή, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τη θεωρούμε εξωτερική διαταραχή (external disturbance).

1.3 Σύντομη παρουσίαση των κεφαλαίων

Στο Κεφάλαιο 2, γίνεται η αναλυτική περιγραφή του προβλήματος, αναλύοντας τον σκοπό της διπλωματικής. Γίνεται αναφορά επίσης, στα προβλήματα που έπρεπε να ξεπεραστούν όσον αφορά τα δεδομένα απόδοσης του κτηρίου που απαιτούσε η εξαγωγή του ταυτοποιημένου μοντέλου και στα προβλήματα που προέκυψαν κατά την εφαρμογή του ελέγχου.

Στο Κεφάλαιο 3, αρχικά εκθέτονται κάποιες βασικές έννοιες όσον αφορά τη μετάδοση θερμότητας στα κτήρια, όπως η θερμική αντίσταση (thermal resistant), η θερμική χωρητικότητα (thermal capacity) κτλ. Στη συνέχεια παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος αναπαράστασης κτηρίων μέσω των θερμικών δικτύων (thermal networks) και γίνεται αναφορά στη σταθερά χρόνου (time constant), με σκοπό την κατανόηση του μοντέλου που θέλουμε να ταυτοποιήσουμε.

Στο κεφάλαιο 4, γίνεται λόγος για την μέθοδο εκτίμησης που θα χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου. Στην υποενότητα 4.2 υπολογίζεται η εκτίμηση Least Squares, ενώ η υποενότητα 4.3 χρησιμοποιεί την εκτίμηση Least Squares για να καταλήξει στο αλγόριθμο της μεθόδου Recursive Least Squares.

Στο κεφάλαιο 5, περιέχεται η θεωρία για τον έλεγχο που πρόκειται να εφαρμόσουμε στις εισόδους του ταυτοποιημένου μοντέλου. Συγκεκριμένα δίνεται λύση στο πρόβλημα της παρακολούθησης, δηλαδή πως θα εφαρμόσουμε τον έλεγχο στις εισόδους του μοντέλου έτσι ώστε η έξοδος να ακολουθεί μια προδιαγεγραμμένη επιθυμητή πορεία.

Στο κεφάλαιο 6, περιγράφεται η διαδικασία της εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος. Αρχικά, παρουσιάζεται το μοντέλο προς ταυτοποίηση, δηλαδή το μοντέλο στο οποίο θα δώσουμε υπόσταση για να πλησιάσουμε τη θερμική συμπεριφορά του εργαστηρίου Ηλεκτρονικής. Στη συνέχεια γίνεται λόγος για τα δεδομένα απόδοσης του κτηρίου και για την επεξεργασία που υπέστησαν οι μετρήσεις που είχαμε στη διάθεσή μας. Ακολουθεί η διαδικασία ταυτοποίησης και η υλοποίηση του μοντέλου στο Simulink του Matlab.

Το κεφάλαιο 7, αναφέρεται στο πρόβλημα που προέκυψε κατά την εφαρμογή ελέγχου, λόγω της ύπαρξης εξωτερικής διαταραχής (external disturbance) στο διάνυσμα της εισόδου του συστήματος και στις λύσεις που δόθηκαν. Περιλαμβάνει τη σχεδίαση των ελεγχτών και την απόκριση του συστήματος ελέγχου στις διάφορες εισόδους αναφοράς (reference inputs).

Στο κεφάλαιο 8, εκθέτονται κάποια συμπεράσματα όσον αφορά την απόκριση του ταυτοποιημένου μοντέλου και γίνεται μια προσπάθεια σύγκρισης και σχολιασμού των αποτελεσμάτων της εφαρμογής ελέγχου.

Κεφάλαιο 2 - Περιγραφή προβλήματος

2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Η παρούσα διπλωματική εργασία, σαν στόχο έχει την ταυτοποίηση μοντέλου θερμικού δικτύου ενός κτιρίου με πραγματικές μετρήσεις και την εφαρμογή ελέγχου στις εισόδους του μοντέλου ώστε να λάβουμε τις επιθυμητές περιβαλλοντικές συνθήκες στο εσωτερικό του κτιρίου.

Το πρώτο σκέλος του προβλήματος απαιτούσε μετρήσεις όπως, εσωτερική θερμοκρασία κτιρίου, θερμοκρασία πατώματος, εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, μετρήσεις λειτουργίας εγκατάστασης κλιματισμού σε Kwh και μετρήσεις ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε κάθετη επιφάνεια. Τα δύο πρώτα μεγέθη αποτέλεσαν την έξοδο του συστήματός μας, οπότε περιέχονταν στο διάνυσμα κατάστασης του State space μοντέλου. Τα υπόλοιπα μεγέθη αποτέλεσαν την είσοδο του συστήματος και επομένως περιέχονταν στο διάνυσμα εισόδου του μοντέλου.

Στη διάθεσή μας είχαμε μετρήσεις εσωτερικής θερμοκρασίας κτιρίου, εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος και τιμές που μας έδιναν το ποσοστό του χρόνου, από μέτρηση σε μέτρηση, που δούλεψε η εγκατάσταση κλιματισμού. Ο χρόνος αυτός ήταν διάρκειας οκτώ λεπτών και το πλήθος των τιμών ήταν 207 μετρήσεις από κάθε μέγεθος, συνολικά 28 ώρες μετρήσεων. Συνεπώς, η εφαρμογή απαιτούσε ακόμη τιμές λειτουργίας εγκατάστασης κλιματισμού σε Kwh, θερμοκρασία πατώματος και τιμές ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε κάθετη επιφάνεια. Δεδομένου ότι το εργαστήριο ΕΗΚΑΠΕ του Πολυτεχνείου Κρήτης διαθέτει δύο μονάδες κλιματισμού των 7 Kw, συνολικά 14 Kw, προέκυψαν οι τιμές λειτουργίας εγκατάστασης κλιματιστικού σε Kwh από τις τιμές που μας έδιναν το ποσοστό του κάθε 8-λέπτου που δούλεψε η εγκατάσταση. Έχοντας στη κατοχή μας τις ωριαίες τιμές της ολικής ηλιακής ακτινοβολίας της πόλης των Χανίων τον μήνα Ιούλιο (κατά τη διάρκεια του οποίου έγιναν οι υπόλοιπες μετρήσεις) μπορέσαμε με την κατάλληλη μετατροπή, ανατρέχοντας

στις σημειώσεις του μαθήματος Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας, να συνθέσουμε το δεύτερο μέγεθος του διανύσματος εισόδου, δηλαδή την ηλιακή ακτινοβολία σε W/m^2 που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο. Τέλος, έγινε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας πατώματος, θέτοντάς την να είναι λίγο χαμηλότερη από την εσωτερική θερμοκρασία του κτιρίου.

Μετά από αυτή την προεργασία, ακολούθησε η ταυτοποίηση των παραμέτρων του μοντέλου (Identification), έτσι ώστε να πλησιάζει τη συμπεριφορά του κτιρίου που μας ενδιαφέρει. Με τη βοήθεια της επαναληπτικής μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (Recursive Least Squares) και των δεδομένων που αναφέρονται παραπάνω, προέκυψαν από το Matlab οι τιμές για κάθε μια από τις παραμέτρους που απαρτίζουν το State space μοντέλο μας. Κατόπιν, το μοντέλο με τις τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία προγραμματίστηκε στο Simulink του Matlab. Διαλέγοντας χρόνο προσομοίωσης 28 ωρών (όσο διαρκούν και οι μετρήσεις που διαθέτουμε) και θέτοντας σαν είσοδο εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, λειτουργία εγκατάστασης κλιματιστικού (Kwh) και ηλιακή ακτινοβολία που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο (W/m^2) μπορέσαμε να επαληθεύσουμε και να ελέγξουμε την επιτυχία της μεθόδου ταυτοποίησης.

Το επόμενο βήμα της εργασίας ήταν να εφαρμόσουμε έλεγχο στην είσοδο του μοντέλου που καταλήξαμε, ούτως ώστε η εσωτερική θερμοκρασία του κτιρίου (μέγεθος που περιέχεται στο διάνυσμα κατάστασης του μοντέλου) να ακολουθεί μια προδιαγεγραμμένη πορεία. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήσαμε Linear Quadratic Control, μέσω του Matlab, και δοκιμάσαμε διάφορες εισόδους αναφοράς που έπρεπε να ακολουθήσει η έξοδος. Κατά τη διαδικασία αυτή, διαπιστώθηκε ότι η εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι φυσικό, δεν μπορεί να υποστεί έλεγχο, γεγονός που ζητούσε λύση. Έτσι, προκειμένου να εφαρμοστεί ο έλεγχος έγιναν οι εξής μετατροπές και υποθέσεις:

Α) Στην πρώτη περίπτωση, η εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος μεταφέρθηκε από το διάνυσμα της εισόδου στο διάνυσμα κατάστασης. Παράλληλα, έγινε η υπόθεση ότι είναι σταθεροποιημένη σε μια λογική τιμή για τα δεδομένα της περιόδου που έγιναν οι μετρήσεις. Επομένως, δώσαμε μια αρχική τιμή εξωτερικής

θερμοκρασίας περιβάλλοντος, σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος.

B) Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε την εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος σαν εξωτερική διαταραχή στο σύστημά μας (external disturbance). Η προσπάθειά μας εστιάζεται στην απαλοιφή της εξωτερικής αυτής διαταραχής, προσθέτοντας το κατάλληλο διάνυσμα στην ανάδραση (feedback) του συστήματος ελέγχου.

Κεφάλαιο 3 - Βασικές έννοιες μετάδοσης θερμότητας και θερμικά δίκτυα

3.1 Γενικά

Η μετάδοση της θερμότητας (Heat Transfer) είναι ο κύριος μηχανισμός βάσει του οποίου εκδηλώνονται όλα τα περιβαλλοντικά φαινόμενα που αφορούν ένα κτίριο. Η αγωγή της θερμότητας δια μέσω των τοίχων ενός κτιρίου, η μετάδοση της ηλιακής ακτινοβολίας μέσω των παραθύρων και η ψύξη μέσω εξαερισμού (Ventilation) είναι μόνο λίγα παραδείγματα που δείχνουν πως η μετάδοση θερμότητας επηρεάζει την θερμική συμπεριφορά του κτιρίου αλλά και τους ίδιους του κατοίκους. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τύποι μετάδοσης θερμότητας:

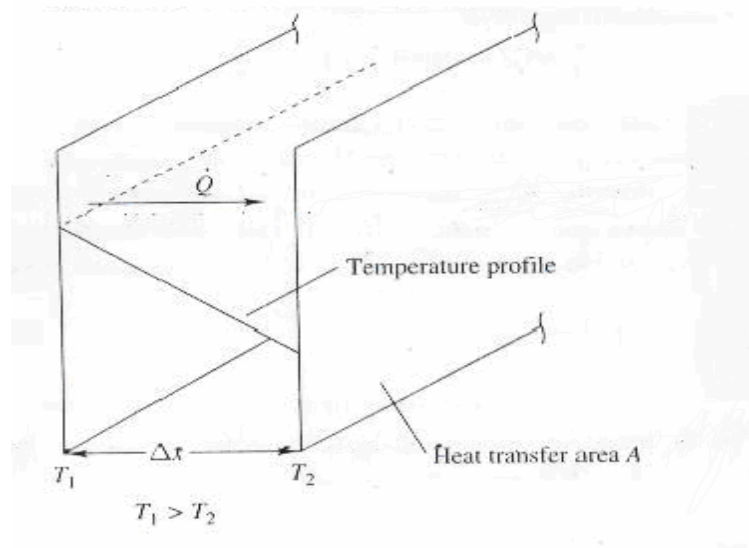
-Μετάδοση θερμότητας με αγωγιμότητα (Conduction Heat Transfer). Είναι αποτέλεσμα της μετάδοσης της κινητικής ενέργειας της στοιχειώδους δομής των στερεών, υγρών και αερίων σωμάτων. Η θερμική αγωγιμότητα συνδέεται πολύ στενά με την ηλεκτρική αγωγιμότητα στα στερεά. Η ροή της θερμότητας, λόγω αγωγιμότητας, παρατηρείται στην κατεύθυνση που μειώνεται η θερμοκρασία. Ένα πολύ κατανοητό παράδειγμα μετάδοσης της θερμότητας με αγωγιμότητα είναι η απώλεια της θερμότητας μέσω των τοίχων ενός κτιρίου το χειμώνα.

-Μετάδοση θερμότητας με μεταφορά (Convection Heat Transfer). Είναι αποτέλεσμα της κίνησης, σε μεγάλη κλίμακα, ενός ρευστού σώματος είτε αυτό είναι υγρό είτε αυτό είναι αέριο. Γενικά, όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα της ροής του ρευστού, τόσο μεγαλύτερος είναι και ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνει η μετάδοση της θερμότητας με μεταφορά. Όταν κρύος αέρας φυσάει πάνω μας και αφαιρεί θερμότητα από το σώμα μας είναι ένα παράδειγμα μετάδοσης θερμότητας με μεταφορά.

-Μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία (Radiation Heat Transfer). Είναι η μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Βασική προϋπόθεση για να έχουμε μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία είναι η ύπαρξη δύο επιφανειών με διαφορά θερμοκρασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο ήλιος ο οποίος μεταδίδει ενέργεια στη γη μέσω της ακτινοβολίας.

3.2 Βασικές έννοιες μετάδοσης θερμότητας

Συνήθως, τρία είναι τα μεγέθη που υπεισέρχονται: α)Καταρχάς, η θερμική ενέργεια (heat) Q που μετριέται σε μονάδες των joules ή μονάδες των kilowatt-hours, β)ο ρυθμός μεταβολής της θερμότητας ή αλλιώς θερμική ισχύς (heat rate) \dot{Q} που μετριέται σε μονάδες των watts και γ)η ροή θερμότητας (heat flux) \dot{q} που έχει μονάδες των watts ανά τετραγωνικό μέτρο (W/m^2).



Σχήμα 3.1-Ροή της θερμότητας δια μέσω επίπεδου τοίχου.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τοίχο επιφάνειας A , ο οποίος χωρίζει δύο περιοχές με θερμοκρασίες T_1 και T_2 , προϋποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν πηγές θερμότητας μέσα στο υλικό του τοίχου και ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή (σχήμα 3.1). Ο ρυθμός μεταβολής της θερμότητας, που ρέει προς την περιοχή με τη χαμηλότερη θερμοκρασία, δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Όπου, k είναι η θερμική αγωγιμότητα (thermal conductivity) ($W/(m^{\circ}K)$), T_1 η θερμοκρασία της περιοχής από την οποία ρέει η θερμότητα (υψηλότερη θερμοκρασία),

T_2 η θερμοκρασία της περιοχής προς την οποία ρέει η θερμότητα (χαμηλότερη θερμοκρασία), A το εμβαδόν της επιφάνειας μέσω της οποίας συμβαίνει η μετάδοση και Δx το πάχος του υλικού.

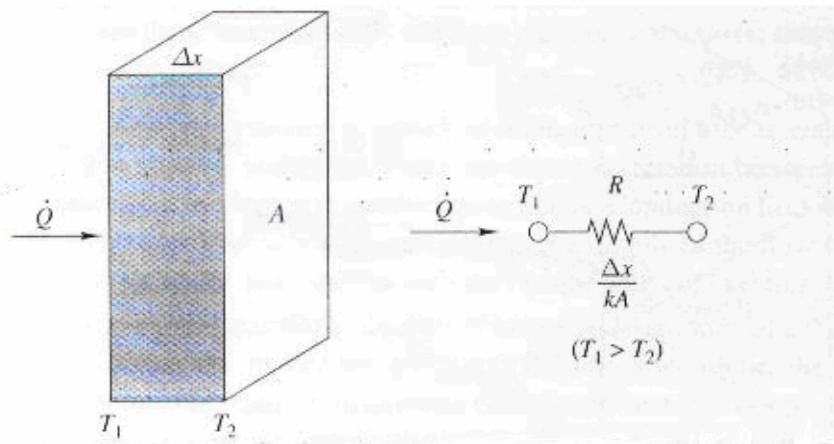
Εύκολα, η σχέση (3.1) μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta x / (kA)} \quad (3.2)$$

Ο παρονομαστής της σχέσης (3.2) είναι αυτό που καλούμε αντίσταση στη μετάδοση θερμότητας (resistance to heat transfer) ($^{\circ}K / W$):

$$R = \frac{\Delta x}{kA} \quad (3.3)$$

Ονομάζουμε το μέγεθος R αντίσταση, αναφορικά με την έννοια της ηλεκτρικής αντίστασης η οποία μας δίνει τη σχέση της τάσης με τη ροή του ρεύματος, μέσω του νόμου του Ohm. Πραγματικά, αν αναλογιστούμε τη διαφορά θερμοκρασίας του αριθμητή της σχέσης (3.2) σαν τάση και τη ροή της θερμότητας σαν ροή ρεύματος, η R είναι η θερμική αναλογία της ηλεκτρικής αντίστασης. Στο σχήμα 3.2 φαίνεται παραστατικά η αντίσταση στη ροή της θερμότητας που συμβαίνει από την περιοχή με τη υψηλότερη θερμοκρασία προς την περιοχή με τη χαμηλότερη θερμοκρασία.



Σχήμα 3.2-Αντίσταση στη ροή της θερμότητας.

Ας θεωρήσουμε πάλι \dot{Q} τον καθαρό ρυθμό μεταβολής της θερμότητας, σ' ένα χώρο όγκου V με υλικό πυκνότητας ρ και ειδική θερμοχωρητικότητα c_p . Ειδική θερμοχωρητικότητα είναι η θερμική ενέργεια που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας κατά 1° στη μονάδα της μάζας. Αυτός ο καθαρός ρυθμός μεταβολής της θερμότητας \dot{Q} ισούται με το ρυθμό μεταβολής της θερμότητας που αποθηκεύεται στον όγκο V και δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{Q} = M \cdot c_p \cdot \dot{T} = (\rho V c_p) \dot{T} \quad (3.4)$$

Θερμική χωρητικότητα ονομάζουμε το μέγεθος C το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$C = M \cdot c_p = \rho V c_p \quad (3.5)$$

3.3 Θερμικά δίκτυα

Σε αυτή την υποενότητα γίνεται λόγος για την προσέγγιση που χρησιμοποιούμε για να μοντελοποιήσουμε δυναμικά ένα κτίριο. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στα θερμικά δίκτυα και περιλαμβάνει το πως σχεδιάζεται ένα διάγραμμα θερμικού δικτύου, όπως επίσης και το πως εξάγονται οι αντίστοιχες εξισώσεις. Είναι μια διαισθητική μέθοδος που μας επιτρέπει, όμως, να μοντελοποιούμε συστηματικά και να δίνουμε λύση σε γενικευμένα και πολύπλοκα προβλήματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ένα κτίριο προσεγγίζεται σαν να αποτελείται από N τμήματα, τους κόμβους (nodes) οι οποίοι θεωρούνται ισοθερμικοί. Για την αναπαράσταση της ανταλλαγής θερμότητας, οι κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους μέσω αντιστάσεων συνθέτοντας έτσι το θερμικό δίκτυο. Γειτονικοί κόμβοι συνδέονται άμεσα μεταξύ τους μέσω της αγωγιμότητας (conduction), της μεταγωγής (convection) και της ακτινοβολίας (radiation). Η ροή της θερμότητας μεταξύ των γειτονικών κόμβων δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{Q}_{n'-n} = \frac{T_{n'} - T_n}{R_{n'n}} \quad (3.6)$$

Όπου, $R_{n'n}$ είναι η αντίσταση μεταξύ του n' και n κόμβου. Επιπροσθέτως, ενδέχεται να υπάρχει απευθείας παροχή θερμότητας \dot{Q}_n στον κόμβο n , από κάποια πηγή θερμότητας όπως η ηλιακή ακτινοβολία, οι ηλεκτρικές συσκευές φωτισμού ή ηλεκτρικές συσκευές θέρμανσης. Ας θεωρήσουμε τη θερμική χωρητικότητα C_n του κόμβου n και T_n τη θερμοκρασία του. Κάνοντας την παραδοχή ότι η θερμική χωρητικότητα C_n του κόμβου είναι σταθερή, ο ρυθμός της μεταβολής της θερμότητας που αποθηκεύεται στον κόμβο n είναι $C_n \dot{T}_n$ και σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής πρέπει να ισούται με το συνολικό ρυθμό μεταβολής της θερμότητας που εισέρχεται στον κόμβο. Έτσι, η θερμική ισορροπία του κόμβου n εκφράζεται με την πρώτης-τάξης διαφορική εξίσωση του T_n :

$$C_n \dot{T}_n = \sum_{n'=1}^N \frac{T_{n'} - T_n}{R_{n'n}} + \dot{Q}_n \quad (3.7)$$

Όσον αφορά τα πρόσημα, εάν η διαφορά $T_{n'} - T_n$ είναι θετική, η θερμότητα ρέει από τον κόμβο n' στον κόμβο n , συνεισφέροντας θετικά στην ποσότητα \dot{T}_n . Στις περισσότερες των περιπτώσεων, ένας κόμβος μπορεί να αλληλεπιδρά απευθείας με ένα σχετικά μικρό μόνο αριθμό κόμβων και επομένως ο αριθμός των μη μηδενικών όρων σε αυτό το άθροισμα είναι πολύ μικρότερος από N . Για παράδειγμα, ένας ομοιογενής τοίχος μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα θερμικό δίκτυο μιας διάστασης, όπου κάθε κόμβος έχει μόνο δύο γειτονικούς κόμβους.

Αν εφαρμόσουμε την έκφραση (3.7) για κάθε κόμβο, του θερμικού δικτύου, θα δημιουργηθεί ένα σύστημα N διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με N αγνώστους, τις θερμοκρασίες των κόμβων T_n . Για να είναι η σχεδίαση των θερμικών δικτύων πιο παραστατική χρησιμοποιούμε, όπως και στα ηλεκτρικά κυκλώματα, διαγράμματα όπου :

Το σύμβολο $-||-$ αναπαριστά τη χωρητικότητα C .

Το σύμβολο $-\wedge\wedge-$ αναπαριστά την αντίσταση R .

Οι θερμοκρασίες T είναι ανάλογες των τάσεων.

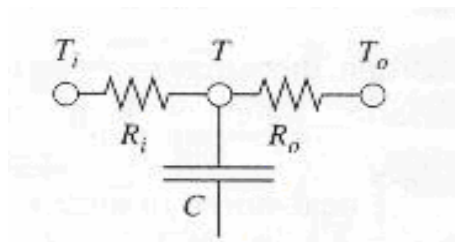
Οι ροές θερμότητας \dot{Q} είναι ανάλογες των ρευμάτων.

Μεταξύ των εξισώσεων που περιγράφουν το θερμικό δίκτυο και του διαγράμματος του θερμικού δικτύου υπάρχει ακριβής αντιστοιχία. Το διάγραμμα έχει το πλεονέκτημα ότι είναι περισσότερο κατανοητό αλλά οι εξισώσεις χρειάζονται γιατί από αυτές θα προκύψει η λύση που ζητάμε. Εφόσον το διάγραμμα θερμικού δικτύου σχεδιαστεί, οι εξισώσεις προκύπτουν εύκολα. Υπάρχει μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για κάθε κόμβο.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της προσέγγισης που συζητάμε. Θεωρούμε ένα απλό τζάμι παραθύρου που χωρίζει τον εσωτερικό χώρο θερμοκρασίας T_i από το περιβάλλον με εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος T_o . Μπορούμε να προσεγγίσουμε το τζάμι με ένα απλό ισοθερμικό κόμβο, χωρητικότητας:

$$C = \rho c_p A \Delta x \quad (3.8)$$

Όπου, ρ είναι η πυκνότητα, c_p είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα, A είναι η επιφάνεια και Δx είναι το πάχος του τζαμιού. Το θερμικό δίκτυο που αντιστοιχεί στο παράδειγμά μας φαίνεται στο σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.3-Αναπαράσταση τζαμιού με ένα ισοθερμικό κόμβο.

Αν δεν έχουμε καθόλου απορρόφηση της ακτινοβολίας από το τζάμι, ο παράγοντας \dot{Q} ισούται με μηδέν και η εξίσωση (3.7) για τη θερμοκρασία T του τζαμιού γίνεται:

$$C\dot{T} = \frac{T_i - T}{R_i} + \frac{T_o - T}{R_o} \quad (3.9)$$

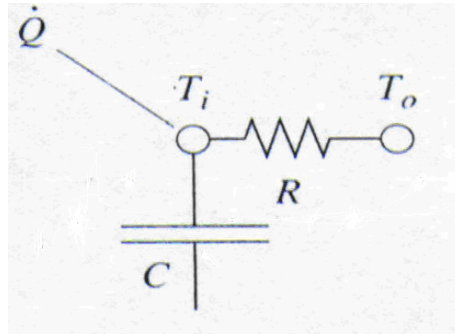
Αν θεωρήσουμε h_i και h_o τους θερμικούς συντελεστές μετάδοσης κάθε επιφάνειας (συνδυάζοντας ακτινοβολία και μεταγωγή), ισχύει για τις αντιστάσεις R_i και R_o :

$$\frac{1}{R_i} = Ah_i \quad \text{και} \quad \frac{1}{R_o} = Ah_o$$

Παρότι το παράδειγμα με το τζάμι είναι αρκετά απλοποιημένο, μας έδωσε μια πρώτη γεύση ως αναφορά τη σχεδίαση των θερμικών δικτύων και την εξαγωγή των εξισώσεων απ' αυτά. Μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια και να μοντελοποιήσουμε τη θερμική συμπεριφορά μιας κατοικίας με όση λεπτομέρεια επιθυμούμε.

3.4 Το RC δίκτυο και σταθερά χρόνου

Για να μοντελοποιήσουμε τη θερμική αδράνεια, ένα θερμικό δίκτυο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μια χωρητικότητα. Η πιο απλή περίπτωση θερμικού δικτύου είναι αυτή του σχήματος 3.4 και περιλαμβάνει μια αντίσταση R και μια χωρητικότητα C . Το μέγεθος T_i αναπαριστά την εσωτερική θερμοκρασία του κτιρίου, T_o είναι η εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος ενώ R είναι η αντίσταση στη μετάδοση της θερμότητας.



Σχήμα 3.4-Το RC δίκτυο.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της θερμικής ισορροπίας (3.7) για το θερμικό δίκτυο του σχήματος, προκύπτει:

$$C\dot{T}_i = \frac{T_o - T_i}{R} + \dot{Q} \quad (3.10)$$

Είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μεταβλητής T_i . Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.10) με R , μπορούμε να θέσουμε:

$$\tau = RC \quad (3.11)$$

Η ποσότητα τ ονομάζεται σταθερά χρόνου (time constant) και για να αιτιολογήσουμε την ονομασία, ξαναγράφουμε την εξίσωση (3.10) στη μορφή:

$$\tau\dot{T}_i + T_i = T_o + R\dot{Q} \quad (3.12)$$

Στην ειδική περίπτωση που οι όροι T_o και \dot{Q} είναι σταθεροί, η παράγωγος της μεταβλητής

$$T(t) = T_i(t) - T_o - R\dot{Q} \quad (3.13)$$

ισούνται με το \dot{T}_i , οπότε η εξίσωση (3.12) γίνεται:

$$\tau \dot{T} + T = 0 \quad (3.14)$$

Η λύση της (3.14) είναι απλή εκθετική:

$$T(t) = T(0) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (3.15)$$

Όπου $T(0)$, είναι η αρχική τιμή. Επομένως, η σταθερά χρόνου τ μας δίνει την κλίμακα του χρόνου σύμφωνα με την οποία χάνεται η θερμοκρασία (cooldown). Μετά από μια σταθερά χρόνου, έχουμε εξασθένιση της θερμοκρασίας $T(t)$ κατά $1/e \approx 0.368$ από την αρχική της τιμή $T(0)$. Όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά χρόνου, τόσο περισσότερο χρειάζεται για να δροσερέψει ή να ζεσταθεί η κατοικία που μελετάμε.

Το μοντέλο που μελετήσαμε σε αυτή τη υποενότητα, αποτελεί ένα χονδροειδές μοντέλο κατοικίας που όμως είναι ικανό να αποδώσει απλά τη θερμική της συμπεριφορά.

Κεφάλαιο 4 – Θεωρία εκτίμησης παραμέτρων με τη μέθοδο Recursive Least Squares

4.1 Γενικά

Ένα βασικό ερώτημα που ανακύπτει πολύ συχνά στην ανάλυση συστημάτων είναι το πως θα δώσουμε τιμές στις άγνωστες καταστάσεις ή παραμέτρους ενός συστήματος, δεδομένων κάποιων μετρήσεων οι οποίες είναι στην ουσία συναρτήσεις των καταστάσεων και παραμέτρων του συστήματος.

Εάν θεωρήσουμε ένα σύνολο μετρήσεων (ή δειγματοληπτημένων τιμών) y_1, y_2, \dots, y_n οι οποίες εξαρτώνται απ' την παράμετρο θ , θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $T_N(y_1, y_2, \dots, y_N)$ η οποία ονομάζεται εκτίμηση (estimate) του θ . Επειδή οι μετρήσεις y_i είναι γενικά τυχαίες, η εκτίμηση $T_N(\cdot)$ θα είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή.

Επιπλέον, λόγω του ότι κάθε συνάρτηση του y_i θα μπορούσε να αποτελεί εκτίμηση, το πρόβλημα που ανακύπτει είναι να βρεθεί η βέλτιστη εκτίμηση του θ που θα είναι συγχρόνως κοντά στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος. θ ονομάζουμε την πραγματική τιμή της παραμέτρου, ενώ $\hat{\theta}_N$ την εκτίμησή της, η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας τις N μετρήσεις y_1, y_2, \dots, y_N .

4.2 Least Squares Estimation

Ας θεωρήσουμε ένα μοντέλο το οποίο περιγράφεται από τη σχέση:

$$\underline{Y} = X\underline{\theta} + \underline{e} \quad (4.1)$$

Το διάνυσμα \underline{Y} αναπαριστά το διάνυσμα των παρατηρήσεων (vector of observations), $\underline{\theta}$ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων και \underline{e} ένα τυχαίο διάνυσμα με τη βοήθεια του οποίου λαμβάνουμε υπόψη μας τα σφάλματα της παρατήρησης. Ο πίνακας X ονομάζεται πίνακας παρατήρησης (observation matrix) του οποίου τα στοιχεία είναι γνωστά.

Για να εφαρμόσουμε την maximum likelihood προσέγγιση κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

Το \underline{e} είναι ένα τυχαίο γκαουσιανό διάνυσμα με μηδενική μέση τιμή (zero mean Gaussian random vector), του οποίου τα στοιχεία έχουν την ίδια τυπική απόκλιση και είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους:

$$E[\underline{e}] = 0 \quad E[\underline{e}\underline{e}^T] = \sigma^2 I$$

Το $\bar{\theta}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και στην περίπτωση μας το θεωρούμε ανεξάρτητο από το \bar{e} .

Η συνάρτηση likelihood (likelihood function) θα προκύψει αφού κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

$$E[\underline{Y} | \underline{\theta}] = X \underline{\theta}$$

$$E[(\underline{Y} - X \underline{\theta})(\underline{Y} - X \underline{\theta})^T] = E[\underline{e}\underline{e}^T | \underline{\theta}] = E[\underline{e}\underline{e}^T] = \sigma^2 I$$

Έτσι, προκύπτει:

$$p(\underline{Y} | \underline{\theta}) = Ke^{-\frac{1}{2}[(\underline{Y} - X \underline{\theta})^T (\sigma^2 I)(\underline{Y} - X \underline{\theta})]} \quad (4.2)$$

Αυτό που ζητάμε είναι η τιμή του $\bar{\theta}$ η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εξίσωσης (4.2):

$$\frac{\partial \text{Log}(p(\underline{Y} | \underline{\theta}))}{\partial \underline{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \left[(\underline{Y} - X \underline{\theta})^T \frac{1}{\sigma^2} (\underline{Y} - X \underline{\theta}) \right] = 0 \quad (4.3)$$

Έτσι, λαμβάνουμε εκτίμηση least squares (least squares estimate):

$$\hat{\underline{\theta}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y} \quad (4.4)$$

4.3 Recursive Least Squares

Στην περίπτωση που τα δεδομένα φτάνουν σειριακά, η μέθοδος least squares δεν μας ικανοποιεί αρκετά εφόσον απαιτεί την επανάληψη των υπολογισμών με όλα τα δεδομένα που προηγήθηκαν, κάθε φορά που ένα καινούριο τμήμα δεδομένων γίνεται διαθέσιμο. Θα ήταν επιθυμητό να γίνεται ο υπολογισμός των παραμέτρων επαναληπτικά κάθε φορά που έχουμε καινούργια δεδομένα στη διάθεσή μας.

Η μέθοδος recursive least squares λειτουργεί επαναληπτικά, έτσι ώστε να γίνεται η εκτίμηση της παραμέτρου τη χρονική στιγμή t συναρτήσει της εκτίμησης που πραγματοποιήθηκε τη χρονική στιγμή $t-1$ και της πληροφορίας που φτάνει τη στιγμή t . Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο (4.4) της προηγούμενης υποενότητας, με t παρατηρήσεις (observations) διαθέσιμες, η least squares εκτίμηση (least squares estimate) είναι:

$$\hat{\theta}(t) = [X^T(t)X(t)]^{-1} X^T(t)Y(t) \quad (4.5)$$

Όπου $Y(t)$ είναι, όπως προείπαμε, το διάνυσμα παρατήρησης (vector of observations) και $X(t)$ ο πίνακας παρατήρησης (observation matrix):

$$Y^T(t) = [y(1) \dots y(t)]$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x^T(1) \\ \vdots \\ x^T(t) \end{bmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι μια καινούργια παρατήρηση (observation) γίνεται διαθέσιμη. Το ζητούμενο τώρα είναι να προσδιορίσουμε το $\hat{\theta}(t+1)$ σαν συνάρτηση του $\hat{\theta}(t)$ και του $y(t+1)$. Για το λόγο αυτό ας ορίσουμε τον πίνακα $X(t+1)$ και το διάνυσμα $Y(t+1)$ ως εξής:

$$X(t+1) = \begin{bmatrix} X(t) \\ x^T(t+1) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$Y(t+1) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Επίσης, ας ορίσουμε τους πίνακες $P(t)$ και $P(t+1)$ ως εξής:

$$P(t) = [X^T(t)X(t)]^{-1}$$

$$P(t+1) = [X^T(t+1)X(t+1)]^{-1} \quad (4.8)$$

Από την εξίσωση (4.6) σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.8), εύκολα καταλήγουμε στη σχέση:

$$P(t+1) = [X^T(t)X(t) + x(t+1)x^T(t+1)]^{-1} \quad (4.9)$$

Επιπλέον, η εξίσωση (4.5) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (4.6), (4.7) και (4.9) μπορεί να μας δώσει:

$$\hat{\theta}(t+1) = P(t+1)[X^T(t)Y(t) + x(t+1)y(t+1)] \quad (4.10)$$

Ας ανατρέξουμε τώρα σε μια ιδιότητα αντιστροφής πινάκων (matrix inversion lemma). Αν οι πίνακες A , D και $[D^{-1} + CA^{-1}B]$ είναι μη μοναδιαίοι τετραγωνικοί πίνακες, τότε ο πίνακας $A + BDC$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του ισούται με :

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (4.11)$$

Απόδειξη: Ο πιο εύκολος τρόπος να το αποδείξουμε είναι με απευθείας πολλαπλασιασμό:

$$\begin{aligned} & (A + BDC) \left(A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right) \\ &= I + BDCA^{-1} - B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} - BDCA^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B) \left(D^{-1} + CA^{-1}B \right)^{-1} CA^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, για να καταλήξουμε στον αλγόριθμο recursive least squares, θα θεωρήσουμε ότι οι πίνακες B και C έχουν διαστάσεις $n \times 1$ και $1 \times n$ αντίστοιχα (πίνακας στήλη και πίνακας γραμμή). Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα στη μορφή:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}BCA^{-1}}{1 + CA^{-1}B} \quad (4.12)$$

Ας θυμηθούμε, τώρα, την εξίσωση (4.9)

$$P(t+1) = [X^T(t)X(t) + x(t+1)x^T(t+1)]^{-1}$$

και ας θέσουμε:

$$A = X^T(t)X(t) \quad B = x(t+1) \quad C = x^T(t+1)$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας αντιστροφής πινάκων (matrix inversion lemma) και κάποιους απλούς χειρισμούς, εύκολα κανείς μπορεί να καταλήξει στον αλγόριθμο RLS (recursive least squares):

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)[y(t+1) - x^T(t+1)\hat{\theta}(t)] \quad (4.13)$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)x(t+1)}{1 + x^T(t+1)P(t)x(t+1)} \quad (4.14)$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)x(t+1)x^T(t+1)P(t)}{1 + x^T(t+1)P(t)x(t+1)} \quad (4.15)$$

Ο RLS αλγόριθμος είναι υπολογιστικά πολύ αποτελεσματικός. Κατά τη διάρκεια εκτέλεσής του οι πίνακες δεν αλλάζουν μέγεθος και δεν απαιτεί καμία αντιστροφή. Ο πίνακας P είναι ανάλογος με τον πίνακα συμεταβλητότητας (covariance matrix) εκτίμησης, οπότε καλείται πίνακας συμεταβλητότητας. Ο αλγόριθμος πρέπει να αρχικοποιηθεί με $\hat{\theta}(0)$ και $P(0)$. Γενικά, το $P(0)$ αρχικοποιείται σε aI , όπου I είναι ένας μοναδιαίος πίνακας και a ένας μεγάλος θετικός αριθμός. Όσο μεγαλύτερο είναι το

a , έχουμε το περιθώριο η τιμή που δίνουμε στην αρχική εκτίμηση $\hat{\theta}(0)$ να μην είναι αρκετά συνεπής.

Κεφάλαιο 5 – Θεωρία Βελτίστου Τετραγωνικού Ελέγχου

5.1 Γενικά

Τα συστήματα ελέγχου μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ευρείες κατηγορίες: ρύθμισης και παρακολούθησης. Τα συστήματα αυτόματης ρύθμισης ή ρυθμιστές προσπαθούν να διατηρήσουν σταθερή την έξοδο του συστήματος υπό την επήρεια διαταραχών, μεταβολών στις παραμέτρους της εγκατάστασης κλπ.

Στα συστήματα παρακολούθησης η έξοδος πρέπει να ακολουθεί, με ελάχιστο σφάλμα, μία προδιαγεγραμμένη πορεία που αναπαρίσταται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Η ενότητα που ακολουθεί, διαπραγματεύεται το πρόβλημα της παρακολούθησης.

5.2 Linear Quadratic Control

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις (5.1) και (5.2):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (5.2)$$

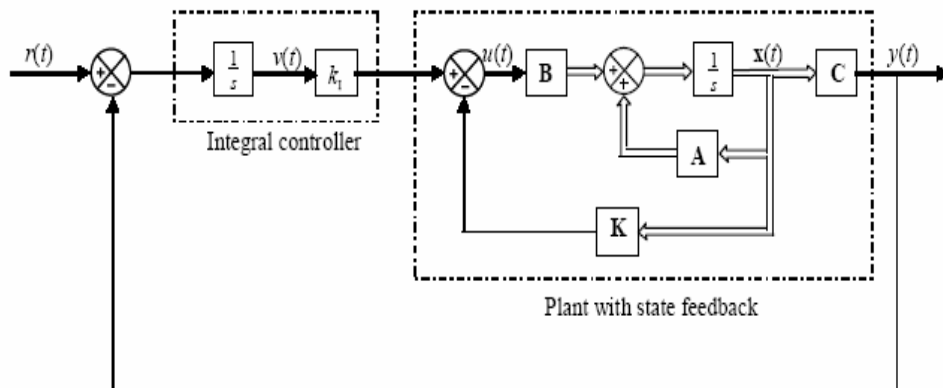
Το πρόβλημα του τετραγωνικού βέλτιστου ελέγχου (quadratic optimal control problem) επιτάσσει την εύρεση ενός κανόνα για το σήμα ελέγχου $u(t)$, ο οποίος θα ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους της εξίσωσης (5.3):

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + \rho u(t)^2\} dt \quad (5.3)$$

Όπου Q και ρ είναι ένας συντελεστής βάρους (weighting factor) και ένας συντελεστής κλίμακας (scale factor), αντίστοιχα, της επιλογής του σχεδιαστή. Το Q είναι ένας θετικά ορισμένος ή θετικά ημιορισμένος Ερμιτιανός (Hermitian) πίνακας. Συχνά το Q είναι διαγώνιος πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι επιλεγμένα να δίνουν βάρος σε διαφορετικές καταστάσεις (states) με διαφορετικά ποσοστά. Ο βέλτιστος κανόνας ελέγχου που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους J , δίνεται από την ανάδραση γραμμικής-κατάστασης (linear-state feedback) της εξίσωσης (5.4):

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5.4)$$

Η σχεδίαση, λοιπόν, του συστήματος βέλτιστου ελέγχου έγκειται στον καθορισμό των στοιχείων του πίνακα κέρδους K . Ένα πλεονέκτημα που έχουμε εφαρμόζοντας την προσέγγιση του τετραγωνικού βέλτιστου ελέγχου (quadratic optimal control scheme) είναι ότι τα συστήματα που σχεδιάζονται είναι σταθερά (stable), εκτός από την περίπτωση που το αρχικό σύστημα δεν είναι ελέγξιμο (not controllable).



Σχήμα 5.1

Ας ξεκινήσουμε εκφράζοντας το σύστημα ελέγχου του σχήματος 5.1 σε state space μορφή:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad y = Cx$$

$$\dot{v} = r - y = r - Cx$$

$$u = -Kx + k_I v$$

Όπου $K = [k_1 \quad k_2]$. Από το σχήμα γίνεται εύκολα κατανοητό ότι το r αποτελεί το σήμα αναφοράς (την προδιαγεγραμμένη πορεία της εξόδου που θέλουμε να πετύχουμε), το y είναι η έξοδος του συστήματος, \dot{v} είναι το σφάλμα και u η είσοδος ελέγχου. Με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(t) \quad (5.5)$$

Καθώς το t τείνει στο άπειρο, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{v}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(\infty) \quad (5.6)$$

Σε αυτό το σημείο ας ορίσουμε τα εξής:

$$x_e = x(t) - x(\infty)$$

$$v_e = v(t) - v(\infty)$$

$$u_e = u(t) - u(\infty)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (5.6) από την εξίσωση (5.5), η συνάρτηση σφάλματος (error equation) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{v}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_e \\ v_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_e \quad (5.7)$$

Για το u_e ισχύει:

$$u_e = -Kx_e + k_I v_e = -\begin{bmatrix} K & k_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_e \\ v_e \end{bmatrix}$$

Οπότε, προκύπτει το σύστημα:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u_e \quad (5.8)$$

$$u_e = -\bar{K}\bar{x} \quad (5.9)$$

Όπου:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} K & -k_I \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_e \\ v_e \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, η προσοχή μας τώρα επικεντρώνεται στον καθορισμό των στοιχείων του πίνακα \bar{K} έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συναρτησιακό:

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \bar{x}(t)^T Q \bar{x}(t) + \rho u_e^2(t) \right\} dt$$

Τα Q και ρ θα πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα απ' το σχεδιαστή έτσι ώστε η απόκριση του συστήματος να είναι επιθυμητή. Επίσης, ο πίνακας κέρδους (feedback gain matrix) K και το σταθερό κέρδος (integral gain constant) k_I , θα πρέπει να υπολογιστούν από τη λύση της εξίσωσης Riccati (steady-state Riccati equation).

Για να παράγουμε την απόκριση του συστήματος στο σήμα αναφοράς, ορίζουμε την εξίσωση κατάστασης:

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Bk_I v$$

Αν υποθέσουμε ότι το σήμα αναφοράς (reference signal) είναι σταθερό (όπως για παράδειγμα μια βηματική συνάρτηση), παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r \quad (5.10)$$

$$y = [C \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Οι εξισώσεις (5.10) και (5.11) αποτελούν σύστημα της τυπικής μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}r(t) \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

Όπου:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0] \quad \text{και} \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}.$$

Κεφάλαιο 6 - Ταυτοποίηση του μοντέλου του συστήματος (System Identification)

6.1 Σύστημα προς ταυτοποίηση

Στην υποενότητα αυτή, παρουσιάζεται το μοντέλο που πρόκειται να ταυτοποιηθεί. Χρησιμοποιήσαμε ένα απλό μοντέλο για να πλησιάσουμε τη θερμική συμπεριφορά του εργαστηρίου ηλεκτρικών κυκλωμάτων και ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (ΕΗΚΑΠΕ), εκτιμώντας τις παραμέτρους με τη βοήθεια μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν σ' αυτό.

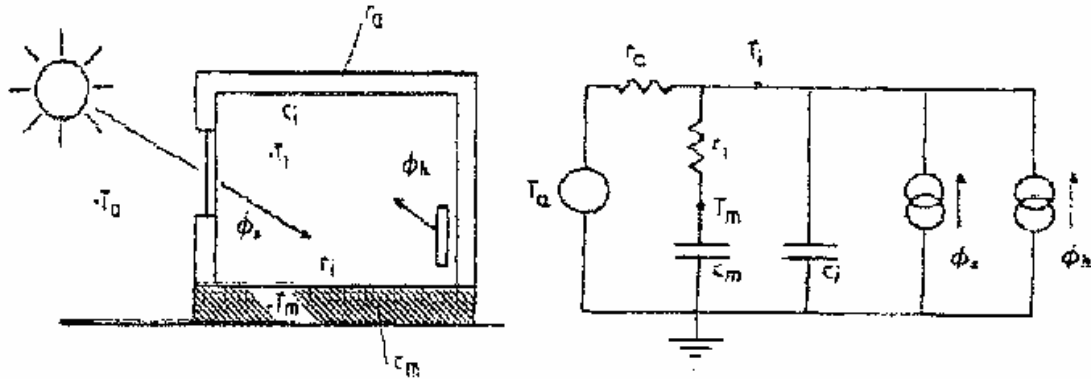
Το κτήριο μας θα μπορούσε να περιγράφεται μέσω της εσωτερικής θερμοκρασίας T από το απλοποιημένο μοντέλο μιας σταθεράς χρόνου (one time constant) της εξίσωσης (6.1):

$$C \frac{dT}{dt} = -\frac{T}{r} + bU \quad (6.1)$$

Σε αυτή την περίπτωση το C αναπαριστά όλη τη θερμική χωρητικότητα του κτηρίου, το r την αντίσταση στη ροή της θερμότητας ανάμεσα στον εσωτερικό και περιβάλλον χώρο και το U εισάγει στο σύστημα εξωτερικές μεταβλητές όπως εξωτερική θερμοκρασία, θέρμανση-ψύξη από ηλεκτρικές εγκαταστάσεις και ηλιακή ακτινοβολία. Το διάνυσμα b ορίζει πως οι εξωτερικές επιρροές εισχωρούν στο σύστημα. Το μοντέλο της εξίσωσης (6.1) είναι παρόμοιο με το μοντέλο μιας σταθεράς χρόνου που συζητήθηκε στην υποενότητα 3.4.

Το ταυτοποιημένο μοντέλο που θα προκύψει θα πρέπει να είναι κοντά στη δυναμική συμπεριφορά του κτηρίου που μας ενδιαφέρει. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο δυο σταθερών χρόνου (two time constant) του σχήματος 6.1,

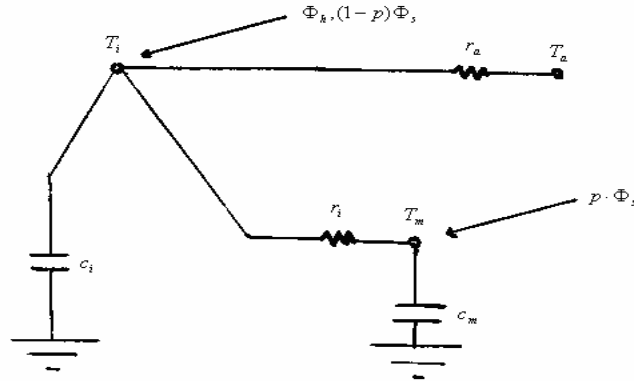
το οποίο έχει σχεδιαστεί σύμφωνα με τη θερμική-ηλεκτρική αναλογία (thermal-electrical analogy).



Σχήμα 6.1-Μοντέλο δύο σταθερών χρόνου για δυναμική συμπεριφορά κτηρίου.

Το T_m αποτελεί τη θερμοκρασία πατώματος με θερμική χωρητικότητα c_m και το T_i την εσωτερική θερμοκρασία δωματίου και πιθανώς των εσωτερικών τμημάτων των τοίχων με θερμική χωρητικότητα c_i . r_i είναι η αντίσταση ενάντια στη μετάδοση θερμότητας ανάμεσα στον εσωτερικό χώρο και το πάτωμα, ενώ r_a είναι η αντίσταση ενάντια στη μετάδοση θερμότητας από το δωμάτιο προς τον εξωτερικό περιβάλλον χώρο με θερμοκρασία T_a .

Ενέργεια στο σύστημα παρέχεται μέσω των ηλεκτρικών εγκαταστάσεων θέρμανσης-ψύξης, Φ_h και μέσω της ηλιακής ακτινοβολίας που διαπερνά τα παράθυρα, $A_w \Phi_s$, όπου A_w είναι η συνολική επιφάνεια των παραθύρων. Το θερμικό δίκτυο που αντιστοιχεί στην περίπτωση μας φαίνεται στο σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2-Θερμικό δίκτυο.

Είτε αν εργαστεί κανείς κυκλωματικά, είτε μέσω θερμικού δικτύου το μοντέλο που προτείνεται για την περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς του κτηρίου δίνεται από την εξίσωση (6.2):

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_m}{dt} \\ \frac{dT_i}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{1}{r_i c_i} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{r_a c_i} & \frac{1}{c_i} & \frac{A_w (1-p)}{c_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_a \\ \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Η θερμοκρασία T_i του εσωτερικού χώρου του κτηρίου (και των εσωτερικών τμημάτων των τοίχων) και η θερμοκρασία T_m του πατώματος αποτελούν τις δυο καταστάσεις του μοντέλου. Οι σταθερές c_m, c_i, r_a, r_i, A_w και p αποτελούν τις ισοδύναμες θερμικές παραμέτρους (equivalent thermal parameters), οι οποίες περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά του κτηρίου. p είναι το ποσοστό της ηλιακής ακτινοβολίας που εισέρχεται μέσω πατώματος και επηρεάζει απευθείας τη θερμοκρασία T_m .

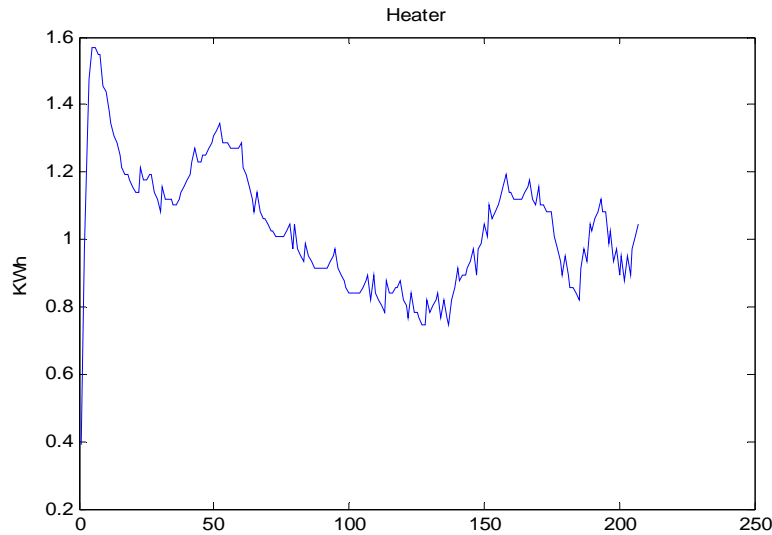
6.2 Επεξεργασία μετρήσεων

Η εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (recursive least squares) στο σύστημα της εξίσωσης (6.2) απαιτούσε την ύπαρξη διανυσμάτων που θα περιείχαν μετρήσεις όπως εσωτερική θερμοκρασία δωματίου, θερμοκρασία πατώματος, εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, λειτουργία της εγκατάστασης κλιματισμού σε Kwh και τιμές ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο. Κάποιες μετρήσεις απ' αυτές χρησιμοποιήθηκαν αυτούσιες, όπως τις βρήκαμε από προηγούμενη διπλωματική εργασία, ενώ άλλες υπέστησαν επεξεργασία.

Λειτουργία εγκατάστασης κλιματισμού.

Οι μετρήσεις που είχαμε στη διάθεσή μας, περιείχαν για κάθε μέγεθος που μας ενδιαφέρει, 207 τιμές με περίοδο οκτώ λεπτών. Αφού μεταξύ των μετρήσεων διαμεσολαβούσε χρόνος ίσος με 0.133 της ώρας είχαμε συνολικά 28 ώρας μετρήσεων. Οι μετρήσεις για την εγκατάσταση κλιματισμού αφορούσαν το επί της εκατό ποσοστό του 8-λέπτου που δούλεψε η εγκατάσταση για κάθε μέτρηση. Δεδομένου ότι το εργαστήριο Ηλεκτρονικής διαθέτει δύο εγκαταστάσεις κλιματισμού των $7 Kwh$ η κάθε μια, συνολικά $14 Kwh$ και με την κατάλληλη μετατροπή στις μονάδες προέκυψε το διάνυσμα τιμών για την απ' ευθείας παροχή θερμότητας μέσω της εγκατάστασης κλιματισμού στο σύστημα.

Στο σχήμα (6.3) φαίνεται η παροχή ενέργειας (παροχή ψύξης στην περίπτωση μας) από την εγκατάσταση, με τη βοήθεια του Matlab.



Σχήμα 6.3-Εγκατάσταση κλιματισμού.

Ηλιακή ακτινοβολία.

Η εφαρμογή απαιτούσε επιπλέον, τιμές ηλιακής ακτινοβολίας σε w/m^2 που προσπίπτει σε κάθετη επιφάνεια. Πολύ καλή πηγή αποτέλεσε η μηχανογραφική επεξεργασία στοιχείων ηλιοφάνειας και ηλιακής ακτινοβολίας της ΔΕΗ απ' την οποία λάβαμε τις ωριαίες τιμές ολικής ηλιακής ακτινοβολίας στην πόλη των Χανίων, για το μήνα και τη μέρα που έγιναν οι υπόλοιπες μετρήσεις.

Στο σχήμα 6.4 δίνονται οι ωριαίες τιμές ολικής ηλιακής ακτινοβολίας για την πόλη των Χανίων το μήνα Ιούλιο. Οι μετρήσεις μας αντιστοιχούν στις τιμές από τις 11:00 της εικοστής-πρώτης ημέρας, μέχρι τις 3:00 της εικοστής-δεύτερης ημέρας του Ιουλίου. Οι τιμές δίνονται σε μονάδες των $cal/cm^2 \cdot h$, οπότε απαιτείται η κατάλληλη μετατροπή.

ΗΜ.	ΗΑΙΟΘ (+)	ΜΕΘΗ ΘΕΡΜ	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	ΗΜΕΡ ΑΘΡ
			6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1	11.0	27.0	0	6	18	31	42	59	66	71	69	65	55	42	28	12	2	566	
2	11.5	27.3	0	6	22	37	48	58	66	72	72	66	59	47	33	17	5	608	
3	11.5	26.4	0	8	26	41	47	63	69	73	72	67	58	45	31	12	0	612	
4	11.8	26.2	0	7	25	40	53	65	73	77	72	66	60	47	31	14	1	631	
5	11.5	25.6	0	9	28	40	53	64	72	76	73	67	55	44	30	13	1	625	
6	11.8	25.1	0	7	26	40	53	64	69	73	72	68	60	48	33	14	2	629	
7	11.5	25.8	0	5	22	35	48	57	64	68	67	63	54	42	31	14	4	574	
8	11.1	27.8	0	7	24	39	49	60	67	71	69	66	57	42	28	12	2	593	
9	10.6	29.9	0	6	21	34	46	55	63	66	66	63	53	41	27	12	2	555	
10	11.4	28.1	0	7	24	39	51	60	67	71	71	66	58	45	31	14	4	608	
11	10.7	26.0	0	6	21	35	47	57	65	68	67	63	55	42	28	12	2	568	
12	10.0	26.4	0	5	14	18	38	57	61	66	64	59	51	37	22	8	2	502	
13	10.9	26.4	0	7	22	38	51	60	66	69	69	64	54	42	28	12	4	586	
14	11.3	26.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
15	11.3	26.7	0	9	26	40	52	61	68	71	69	64	55	40	24	9	2	590	
16	9.1	25.7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
17	10.9	27.4	0	7	24	38	49	60	66	68	67	64	55	41	26	9	0	574	
18	11.3	26.0	0	7	26	41	49	51	67	67	68	61	57	44	28	12	2	580	
19	8.4	24.9	0	5	12	31	8	13	37	60	66	60	52	45	30	12	2	433	
20	11.3	24.2	0	5	18	30	47	59	66	71	69	64	54	40	24	8	2	557	
21	11.1	24.3	0	6	21	31	49	52	66	69	69	57	52	40	24	7	0	543	
22	11.3	25.1	0	5	18	35	48	60	68	71	71	66	57	42	26	9	0	576	
23	11.4	26.3	0	7	26	41	53	63	69	71	68	63	52	38	22	7	0	570	
24	11.6	26.1	0	6	22	39	52	61	68	73	72	67	57	45	28	11	2	603	
25	9.3	25.3	0	4	19	35	47	58	66	68	67	61	52	38	12	4	0	521	
26	10.2	25.0	0	5	17	24	47	57	64	71	69	64	53	40	24	7	0	542	
27	10.4	23.5	0	4	14	31	42	63	68	73	72	67	58	46	30	12	2	582	
28	11.2	23.6	0	2	18	33	44	60	67	71	69	66	57	42	27	9	0	565	
29	10.4	22.8	0	2	15	33	47	60	65	69	69	64	54	40	25	7	0	550	
30	10.5	23.4	0	5	19	33	47	53	63	68	66	60	48	35	17	4	0	518	

Σχήμα 6.4-Ωριαίες τιμές ολικής ηλιακής ακτινοβολίας.

Για τη μετατροπή της ολικής ηλιακής ακτινοβολίας σε ηλιακή ακτινοβολία που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο, χρειάζεται να ανατρέξουμε στις σημειώσεις του μαθήματος Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας. Αν θεωρήσουμε I την ωριαία ολική ακτινοβολία οριζοντίου επιπέδου και I_T την ωριαία ολική ακτινοβολία κεκλιμένου επιπέδου (γωνίας 90° στην περίπτωση μας), ισχύει

$$\frac{I_T}{I} = R \quad (6.3)$$

όπου το R δίνεται απ' τον τύπο:

$$R = \frac{I_b}{I} R_b + \frac{I_d}{I} \cdot \left(\frac{1 + \cos \beta}{2} \right) + \rho \cdot \frac{(1 - \cos \beta)}{2} \quad (6.4)$$

Για τα I_b, I_d και ρ ισχύει

$$I_b = 0.4I$$

$$I_d = 0.6I$$

$$\rho = 0.2$$

ενώ το R_b δίνεται απ' τον τύπο της εξίσωσης (6.5):

$$R_b = \frac{\sin \delta \cdot \sin(\phi - \beta) + \cos \delta \cdot \cos(\phi - \beta) \cos \omega}{\sin \delta \cdot \sin \phi + \cos \delta \cdot \cos \phi \cdot \cos \omega} \quad (6.5)$$

Το δ εξάγεται από τον τύπο της εξίσωσης (6.6)

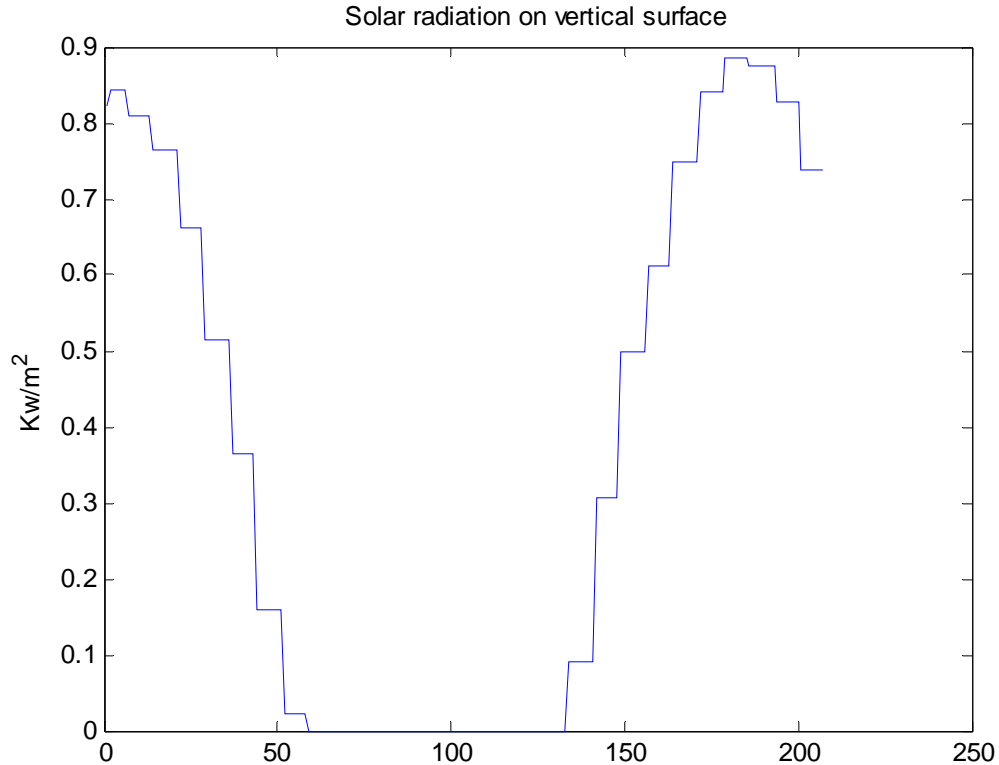
$$\delta = 23.45 \cdot \sin\left(\frac{360(284 + n)}{365}\right) \quad (6.6)$$

όπου n είναι η ημέρα του έτους. Εφόσον μας ενδιαφέρει η εικοστή-πρώτη ημέρα του Ιουνίου το n ισούται με $151 + 21 = 172$, ενώ για την εικοστή-δεύτερη το $n = 151 + 22 = 173$. Το μέγεθος ϕ στον τύπο της εξίσωσης (6.5) δηλώνει το γεωγραφικό πλάτος που βρισκόμαστε και στην προκειμένη περίπτωση ισούται με 35.5, δηλαδή το γεωγραφικό πλάτος Χανίων. Το β είναι η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου στο οποίο προσπίπτει η ηλιακή ακτινοβολία και συνεπώς ισούται με 90° . Το ω μεταβάλλεται ανά ώρα και δίνεται από τον τύπο (6.7). Μετράμε σε λεπτά πόσο απέχουμε απ' το ηλιακό μεσημέρι (δηλαδή στις 12:00) και χρησιμοποιούμε θετικό πρόσημο όταν αναφερόμαστε σε ώρες μετά μεσημβρίας (μ.μ.) ενώ αρνητικό όταν αναφερόμαστε σε ώρες προ μεσημβρίας (π.μ.).

$$\omega = \pm 0.25(\text{min απ' το ηλιακό μεσημέρι}) \quad (6.7)$$

Το σχήμα 6.5 δείχνει τη γραφική παράσταση των τιμών ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο, για την πόλη των Χανίων το μήνα

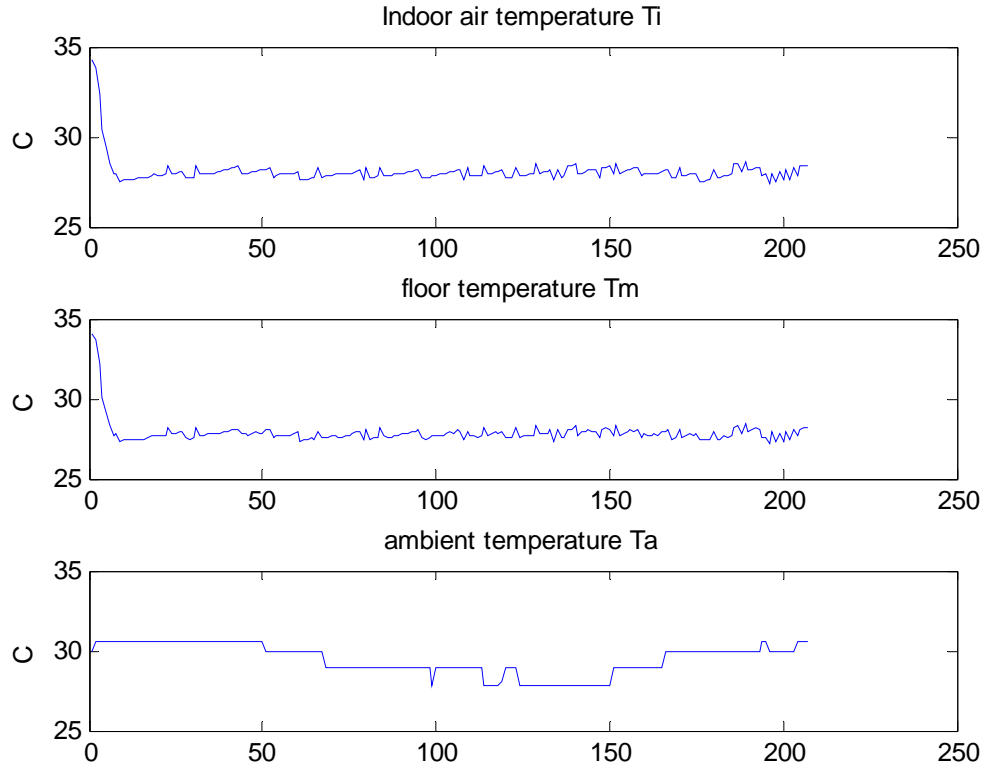
Ιούλιο.



Σχήμα 6.5-Ηλιακή ακτινοβολία που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο.

Μετρήσεις θερμοκρασιών.

Παράλληλα, η εφαρμογή της μεθόδου ταυτοποίησης απαιτούσε μετρήσεις εσωτερικής θερμοκρασίας και θερμοκρασίας πατώματος-μεγέθη που αποτελούσαν το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος-και επιπλέον εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος. Λόγω του ότι δεν υπήρχαν στη διάθεσή μας μετρήσεις θερμοκρασίας πατώματος έγινε μια εκτίμηση με βάση τη θερμοκρασία δωματίου. Στο σχήμα 6.6 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της θερμοκρασίας δωματίου T_i , της θερμοκρασίας πατώματος T_m και της εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος T_a .



Σχήμα 6.6-Θερμακρασία δωματίου, πατώματος και εξωτερικού περιβάλλοντος.

6.3 Εκτίμηση παραμέτρων

Ας θεωρήσουμε το σύστημα της εξίσωσης (6.2) το οποίο πρόκειται να ταυτοποιήσουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_m}{dt} \\ \frac{dT_i}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{1}{r_i c_i} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{r_a c_i} & \frac{1}{c_i} & \frac{A_w (1-p)}{c_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_a \\ \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Είναι ένα σύστημα σε state-space μορφή, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{1}{r_i c_i} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{r_a c_i} & \frac{1}{c_i} & \frac{A_w (1-p)}{c_i} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$u^T = [T_a \quad \Phi_h \quad \Phi_s] \quad (6.11)$$

και

$$y^T = [T_m \quad T_i] \quad (6.12)$$

Προκειμένου να γίνει η εκτίμηση των παραμέτρων το σύστημα της εξίσωσης (6.8) θα πρέπει να έρθει στη μορφή της εξίσωσης (6.13), όπου το διάνυσμα y αναπαριστά το διάνυσμα των παρατηρήσεων (vector of observations), θ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων και ο πίνακας h^T είναι ο πίνακας παρατήρησης (observation matrix) του οποίου τα στοιχεία είναι γνωστά.

$$y = h^T \cdot \theta + e \quad (6.13)$$

Συγκεκριμένα, θα προκύψουν δύο εξισώσεις παρατήρησης (observation equations), μια για το \dot{T}_m και μια για το \dot{T}_i :

$$y_1 = h_1^T \cdot \theta_a + e_1 \quad (6.14.a)$$

$$y_2 = h_2^T \cdot \theta_b + e_2 \quad (6.14.β)$$

Για να εκφράσουμε το \dot{T}_m με τη μορφή της εξίσωσης (6.14.α), αρκούν λίγες πράξεις γραμμικής άλγεβρας στο state-space σύστημα της εξίσωσης (6.8):

$$\begin{aligned}
\dot{T}_m &= -\frac{1}{r_i c_m} \cdot T_m + \frac{1}{r_i c_m} \cdot T_i + \frac{A_w \cdot p}{c_m} \cdot \Phi_s \\
&= ((T_i - T_m) \quad \Phi_s) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{A_w \cdot p}{c_m} \end{pmatrix} + e_1
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Επομένως, για τον πίνακα h_1^T της εξίσωσης (6.14.α) έχουμε

$$h_1^T = [(T_i - T_m) \quad \Phi_s] \tag{6.16}$$

ενώ για τον θ_a

$$\theta_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

με:

$$\theta_1 = \frac{1}{r_i c_m} \quad \text{και} \quad \theta_2 = \frac{A_w \cdot p}{c_m}$$

Για να εκφράσουμε το \dot{T}_i με τη μορφή της εξίσωσης (6.14.β) ακολουθούμε την ίδια διαδικασία. Από το state-space σύστημα της εξίσωσης (6.8) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\dot{T}_i &= \frac{1}{r_i c_i} \cdot T_m - \frac{1}{r_a c_i} \cdot T_i - \frac{1}{r_i c_i} \cdot T_i + \frac{1}{r_a c_i} \cdot T_a + \frac{1}{c_i} \cdot \Phi_h + \frac{A_w(1-p)}{c_i} \cdot \Phi_s \\
&= (T_m - T_i) \cdot \frac{1}{r_i c_i} + (T_a - T_i) \cdot \frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{c_i} \cdot \Phi_h + \frac{A_w(1-p)}{c_i} \cdot \Phi_s \\
&= \begin{pmatrix} (T_m - T_i) & (T_a - T_i) & \Phi_h & \Phi_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{r_i c_i} \\ \frac{1}{r_a c_i} \\ \frac{1}{c_i} \\ \frac{A_w(1-p)}{c_i} \end{pmatrix} + e_2
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Συνεπώς, για τον πίνακα h_2^T της εξίσωσης (6.14.β) έχουμε

$$h_2^T = \begin{bmatrix} (T_m - T_i) & (T_a - T_i) & \Phi_h & \Phi_s \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

ενώ για τον θ_b

$$\theta_b = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

με

$$\theta_3 = \frac{1}{r_i c_i} \quad \theta_4 = \frac{1}{r_a c_i} \quad \theta_5 = \frac{1}{c_i} \quad \text{και} \quad \theta_6 = \frac{A_w(1-p)}{c_i}$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων είναι αυτή της επαναληπτικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (recursive least squares), η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.13), (4.14) και (4.15) της παραγράφου 4.3. Ο αλγόριθμος της μεθόδου recursive least squares σε περιβάλλον matlab φαίνεται παρακάτω:

```

function [thetaest,P]=rls(y,x,thetaest,P)
K= P*x/(1+x'*P*x);
P= P- (P*x*x'*P)/(1+x'*P*x);
thetaest= thetaest +K*(y-x'*thetaest);
% end

```

Η μεταβλητή y αντιστοιχεί στο διάνυσμα των παρατηρήσεων (vector of observations), το x είναι ο πίνακας παρατήρησης (observation matrix), το K είναι ο πίνακας κέρδους (gain matrix), το P είναι ο πίνακας συμεταβλητότητας (covariance matrix) και το θ_{est} είναι το διάνυσμα εκτίμησης των παραμέτρων (parameter estimates).

Καθώς το σύστημα περιείχε δύο μεταβλητές κατάστασης, την T_m και την T_i , ο αλγόριθμος της επαναληπτικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (recursive least squares) εφαρμόστηκε δύο φορές. Μια φορά για τη μεταβλητή κατάστασης T_m και μια φορά για τη μεταβλητή κατάστασης T_i . Επιπλέον, δόθηκαν τυπικές τιμές στις μεταβλητές c_i, c_m, r_i, r_a, A_w και p που θέλουμε να εκτιμήσουμε, με σκοπό να έχουμε αρχικές τιμές για τα διανύσματα θ_a και θ_b . Οι τιμές που δόθηκαν στις παραμέτρους φαίνονται στον πίνακα του σχήματος 6.7.

c_i	$1.183 \text{ kWh}/^{\circ}\text{C}$
c_m	$4.005 \text{ kWh}/^{\circ}\text{C}$
r_i	$0.4789 ^{\circ}\text{C} / \text{kW}$
r_a	$29.25 ^{\circ}\text{C} / \text{kW}$
A_w	2.866 m^2
p	0.0101

Σχήμα 6.7-Τυπικές τιμές παραμέτρων για την αρχικοποίηση των διανυσμάτων εκτίμησης.

Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου εκτίμησης για τη μεταβλητή κατάσταση T_m το διάνυσμα θ_a αρχικοποιήθηκε, σύμφωνα με τις τιμές του σχήματος 6.7, με το διάνυσμα:

$$\theta_a^{initial} = [0.5214 \quad 0.0072]$$

Παράλληλα, ο πίνακας P αρχικοποιήθηκε σε aI (I είναι ένας μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας), όπου το a αντιστοιχούσε σε μεγάλο θετικό στο πρόσημο αριθμό, έτσι ώστε αν η επιλογή μας για το αρχικό διάνυσμα $\theta_a^{initial}$ δεν είναι συνεπής με τις πραγματικές τιμές να μην επηρεάσει το αποτέλεσμα της εκτίμησης.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου της μεταβλητής T_m , \dot{T}_m χρησιμοποιήθηκε η εξής φόρμα (third order backward formula):

$$\dot{T}_m(t) = \frac{1}{2h} \{3T_m(t) - 4T_m(t-1) + T_m(t-2)\}$$

Όπου h είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στις μετρήσεις, δηλαδή 0,1333 της ώρας. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε προγραμματιστικά ένα “κινούμενο παράθυρο” το οποίο κατείχε τρεις συνεχόμενες τιμές του διανύσματος T_m , ενώ σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου άφηνε την τελευταία μέτρηση και προχωρούσε στην επόμενη.

Επομένως, ο αλγόριθμος, σε κάθε επανάληψή του, διαμόρφωνε τους πίνακες y_1 και h_1^T , δηλαδή το διάνυσμα των παρατηρήσεων και τον πίνακα παρατήρησης αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις καινούριες τιμές που έφταναν. Με βάση αυτούς τους πίνακες υπολόγιζε τον καινούριο πίνακα κέρδους K , ενημέρωνε τον πίνακα συμεταβλητότητας P και φυσικά την καινούρια εκτίμηση θ_a , συναρτήσε της παλιάς εκτίμησης και της καινούριας πληροφορίας.

Παρόμοια ήταν η διαδικασία και για τη μεταβλητή κατάσταση T_i . Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου εκτίμησης για τη μεταβλητή κατάσταση T_i το διάνυσμα θ_b αρχικοποιήθηκε, σύμφωνα με τις τιμές του σχήματος 6.7, με το διάνυσμα

$$\theta_b^{initial} = [1.7651 \quad 0.0289 \quad 0.8453 \quad 2.3982]$$

ενώ για τον υπολογισμό της παραγώγου της μεταβλητής, \dot{T}_i χρησιμοποιήθηκε η εξής φόρμα (third order backward formula):

$$\dot{T}_i(t) = \frac{1}{2h} \{3T_i(t) - 4T_i(t-1) + T_i(t-2)\}$$

Με την εφαρμογή της διαδικασίας που προαναφέρθηκε, μετά από αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου, ίσο με τον αριθμό των μετρήσεων που είχαμε στη διάθεσή μας, προέκυψαν οι εξής τελικές τιμές των διανυσμάτων εκτίμησης θ_a και θ_b :

$$\theta_a = \begin{bmatrix} 0.2354 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_b = \begin{bmatrix} 1.7651 \\ 0.0296 \\ 1.342 \\ 2.0773 \end{bmatrix}$$

Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να εκφράσουμε τις παραμέτρους c_i, c_m, r_i, r_a, A_w και p συναρτήσει των θ_i , που περιέχονται στα διανύσματα εκτίμησης θ_a και θ_b . Οπότε:

$$c_i = \frac{1}{\theta_5} \quad r_a = \frac{\theta_5}{\theta_4} \quad r_i = \frac{\theta_5}{\theta_3} \quad c_m = \frac{\theta_3}{\theta_1 \cdot \theta_5}$$

Επιπλέον, αν θέσουμε $\kappa = \frac{\theta_6}{\theta_5}$ και $\lambda = \frac{\theta_2 \cdot \theta_3}{\theta_1 \cdot \theta_5}$ προκύπτει:

$$A_w = \kappa + \lambda \quad \text{και} \quad p = \frac{\lambda}{\kappa + \lambda}$$

Οι τιμές που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις για τις παραμέτρους που εκτιμήθηκαν περιέχονται στον πίνακα του σχήματος 6.8.

c_i	$0.7452 \text{ kWh}/^{\circ}\text{C}$
c_m	$5.5885 \text{ kWh}/^{\circ}\text{C}$
r_i	$0.7603 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{ kW}$
r_a	$45.3917 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{ kW}$
A_w	1.5477 m^2
p	0.0000

Σχήμα 6.8-Τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν απ' τη διαδικασία εκτίμησης.

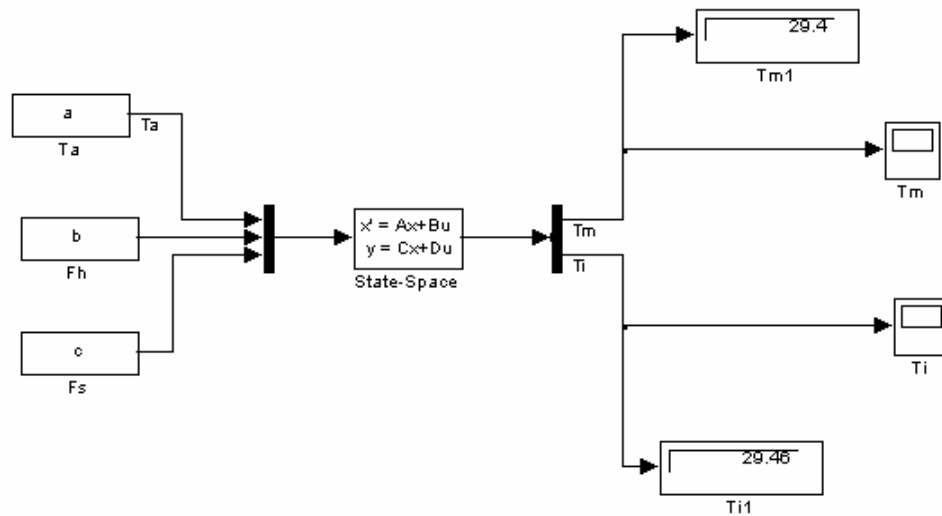
6.4 Υλοποίηση στο Simulink

Αφού πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος, το ταυτοποιημένο μοντέλο που προέκυψε υλοποιήθηκε στο Simulink του Matlab. Αυτό έγινε με στόχο τη σύγκριση της απόκρισης του συστήματος, με τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διαδικασία εκτίμησης, όταν εφαρμόζεται στο σύστημα είσοδος ίση με τα διανύσματα των μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διαδικασία αυτή. Με άλλα λόγια, να ελέγξουμε αν με τις ίδιες τιμές εισόδου που έγινε η ταυτοποίηση, το σύστημά μας παράγει την ίδια έξοδο. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε το πόσο καλά λειτούργησε ο αλγόριθμος εκτίμησης που υλοποιήσαμε.

Ένα state-space block από τη “linear” βιβλιοθήκη του Simulink προσομοίωσε τη θερμική συμπεριφορά του κτιρίου που μας ενδιαφέρει. Οι πίνακες του συστήματος και τα διανύσματα της εισόδου (εξωτερική θερμοκρασία, παροχή ενέργειας από το κλιματιστικό και ηλιακή ακτινοβολία) προγραμματίστηκαν σε ένα mat αρχείο του Matlab, το οποίο τροφοδοτούσε το state-space block του Simulink. Τα διανύσματα εισόδου αποτελούνταν από δύο στήλες, μια στήλη που περιείχε την κλίμακα του χρόνου και μια άλλη με τις

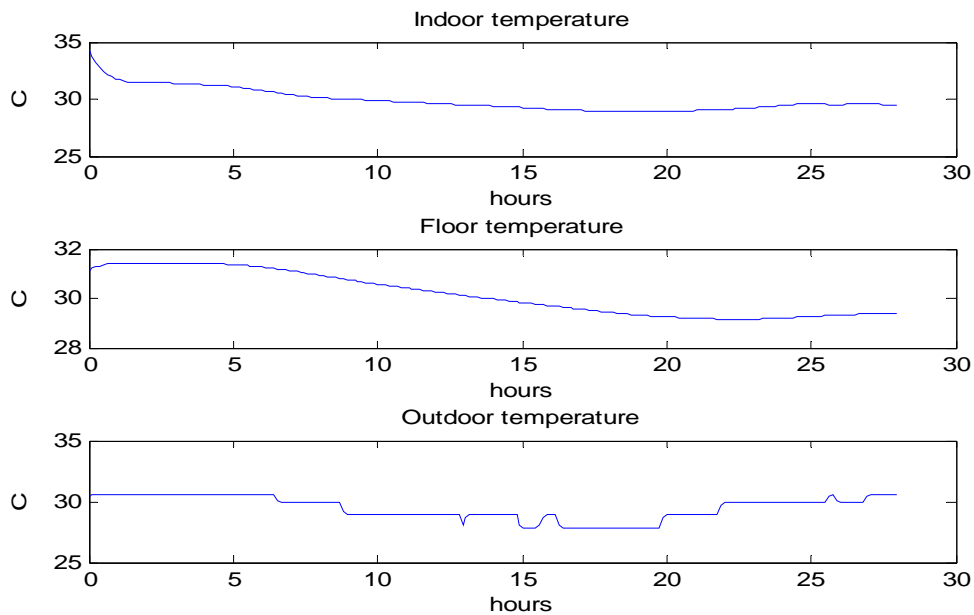
τιμές των μετρήσεων. Ο χρόνος αυξανόταν ανά 0.1333 ώρες, όσο ήταν και το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις μετρήσεις. Εφόσον το πλήθος των μετρήσεων ήταν 207 τιμές για κάθε μέγεθος, η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε για 28 ώρες. Για τις παραγώγους, το τρίτης τάξης Bogacki-Shampine σχήμα φάνηκε να δουλεύει καλά. Επίσης, το διάνυσμα κατάστασης του state-space block αρχικοποιήθηκε με τις αρχικές τιμές των διανυσμάτων T_i και T_m που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκτίμηση των παραμέτρων.

Στο σχήμα 6.9 φαίνεται η δομή του συστήματός μας, υλοποιημένο στο Simulink του Matlab.

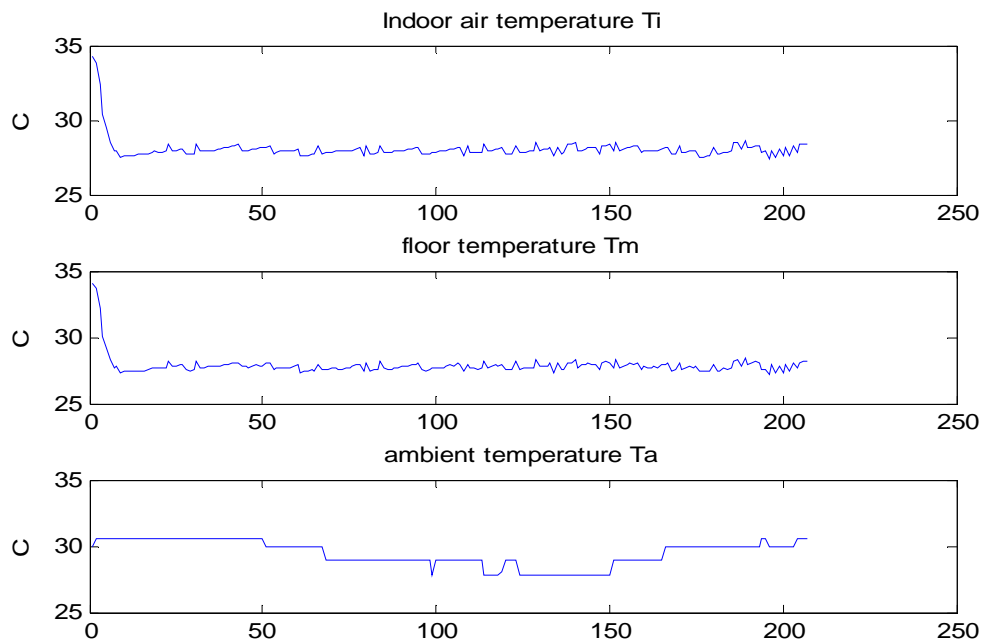


Σχήμα 6.9-Υλοποίηση του μοντέλου στο Simulink.

Στο σχήμα 6.10 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των μεταβλητών T_i και T_m , δηλαδή η έξοδος του state-space μοντέλου του σχήματος 6.9, όταν στην είσοδο του εφαρμόζονται τα διανύσματα T_a , Φ_h και Φ_s . Μπορούμε να παρατηρήσουμε τις ομοιότητες αλλά και τις διαφορές που παρουσιάζουν οι καμπύλες με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του σχήματος 6.11, οι οποίες αποτελούν την πραγματική συμπεριφορά του κτηρίου. Συνεπώς, ο αλγόριθμος της επαναληπτικής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (recursive least squares) λειτούργησε σωστά και το ταυτοποιημένο μοντέλο προσομοιώνει ικανοποιητικά τη δυναμική συμπεριφορά του εργαστηρίου ηλεκτρικών κυκλωμάτων και ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (ΕΗΚΑΠΕ).



Σχήμα 6.10-Εσωτερική θερμοκρασία, θερμοκρασία πατώματος (έξοδοι του ταυτοποιημένου μοντέλου) και εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος.



Σχήμα 6.11-Μετρήσεις εσωτερικής θερμοκρασίας, πατώματος και εξωτερικού περιβάλλοντος.

Κεφάλαιο 7 - Εφαρμογή βελτίστου ελέγχου στο σύστημα που εκτιμήθηκε

Στο σημείο αυτό το ζητούμενο είναι η εφαρμογή ελέγχου στο σύστημα που εξάγαμε. Επιθυμούμε να εφαρμόσουμε βέλτιστο τετραγωνικό έλεγχο (linear quadratic control) στις εισόδους του συστήματός μας, έτσι ώστε η έξοδος και συγκεκριμένα η εσωτερική θερμοκρασία T_i να ακολουθεί μια προδιαγεγραμμένη-επιθυμητή πορεία.

Κατά το στάδιο αυτό, τροχοπέδη αποτέλεσε η ύπαρξη της εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος στο διάνυσμα της εισόδου. Όπως είναι φυσικό η εξωτερική θερμοκρασία T_a δεν μπορεί να υποστεί έλεγχο όπως οι υπόλοιπες μεταβλητές του διανύσματος εισόδου. Στο να ελέγχουμε την παροχή θερμότητας από την εγκατάσταση κλιματισμού δεν υπάρχει κάποια δυσκολία. Το ίδιο ισχύει και για τον έλεγχο την ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε κάθετο επίπεδο, αν θεωρήσουμε κάποιες τεχνικές σκίασης. Πρέπει όμως οπωσδήποτε να απομονώσουμε την παράμετρο T_a απ' το διάνυσμα της εισόδου.

Για το λόγο αυτό, η εφαρμογή απαιτεί κάποια μετατροπή στο αρχικό σύστημα της εξίσωσης (6.8) έτσι ώστε η θερμοκρασία T_a να μην συμπεριληφθεί στον έλεγχο. Δύο περιπτώσεις διακρίναμε:

Στην πρώτη περίπτωση έγινε η σύμβαση ότι η εξωτερική θερμοκρασία T_a διατηρεί σταθερές τιμές και μεταφέρθηκε από το διάνυσμα της εισόδου στο διάνυσμα κατάστασης. Έτσι, δόθηκε μια αρχική τιμή στην παράμετρο T_a , σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος.

Στην άλλη περίπτωση το μέγεθος T_a θεωρήθηκε εξωτερική διαταραχή (external disturbance) και επιδιώξαμε την εξουδετέρωσή του με την πρόσθεση του κατάλληλου διανύσματος b στην ανάδραση του ελέγχου.

7.1 Ενσωμάτωση της παραμέτρου T_a στο διάνυσμα κατάστασης

Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημά μας είναι της μορφής που περιγράφει η εξίσωση (7.1) και θεωρήσουμε T_o την μεταβλητή που επηρεάζει αρνητικά την εφαρμογή του ελέγχου, τότε η T_o μπορεί να συμπεριληφθεί στο διάνυσμα κατάστασης με ταυτόχρονη μετακίνηση της στήλης που περιέχει τα στοιχεία b_{11} και b_{21} από τον πίνακα B στον πίνακα A .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_o \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Το σύστημα της εξίσωσης (7.1) παίρνει τη μορφή του συστήματος της εξίσωσης (7.2):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ T_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Επομένως, αν το σύστημά μας αρχικά έχει τη μορφή της εξίσωσης (7.3), το σύστημα στο οποίο θα εφαρμοστεί ο έλεγχος δίνεται απ' την εξίσωση (7.4).

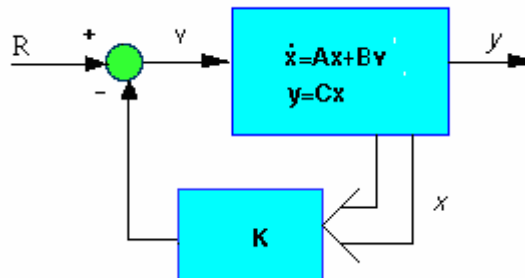
$$\begin{bmatrix} \frac{dT_m}{dt} \\ \frac{dT_i}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{1}{r_i c_i} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{r_a c_i} & \frac{1}{c_i} & \frac{A_w(1-p)}{c_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_a \\ \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_m \\ \dot{T}_i \\ \dot{T}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} & 0 \\ \frac{1}{r_i c_m} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) & \frac{1}{r_a c_i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \\ T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{c_i} & \frac{A_w (1-p)}{c_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να εφαρμόσουμε έλεγχο και συγκεκριμένα linear quadratic control στο σύστημα της εξίσωσης (7.4), ώστε ελέγχοντας τις εισόδους Φ_h και Φ_s του συστήματος, η έξοδος να παρακολουθεί μια πορεία που εμείς έχουμε ορίσει. Η έξοδος που μας ενδιαφέρει να ακολουθεί την επιθυμητή πορεία είναι η εσωτερική θερμοκρασία του κτηρίου T_i . Για τη σχεδίαση του συστήματος ελέγχου, η προσοχή μας επικεντρώνεται στην εύρεση του κανόνα $u(t) = -Kx(t)$ που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους:

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + \rho u(t)^2\} dt \quad (7.5)$$

Στο σχήμα 7.1 διακρίνουμε το σχηματικό διάγραμμα του controller που θα χρησιμοποιήσουμε. R είναι το σήμα αναφοράς που ορίζουμε να παρακολουθεί η έξοδος y , x είναι το σήμα ελέγχου και K είναι ο πίνακας κέρδους που αναζητάμε. Το state-space block που διαφαίνεται είναι το σύστημα (plant) στο οποίο θα εφαρμοστεί ο έλεγχος.



Σχήμα 7.1

Καταρχάς, για να εξαλείψουμε την μη ελέγξιμη κατάσταση (uncontrollable state) του συστήματός μας (T_a), ανακαλούμε την εντολή `sysr = minreal(sys)`. Η εντολή `minreal` εξαλείφει τις μη ελέγξιμες καταστάσεις σε ένα state-space μοντέλο και επιστρέφει σαν έξοδο το σύστημα `sysr`, μικρότερης τάξης αλλά με τα χαρακτηριστικά απόκρισης του πραγματικού μοντέλου `sys`. Μετά την ανάκληση της εντολής `minreal`, ο `compiler` της `matlab` μας στέλνει μήνυμα ότι μια κατάσταση απομακρύνθηκε και λαμβάνουμε τους πίνακες του συστήματος προς έλεγχο:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2354 & 0.2354 \\ 1.765 & -1.795 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3.029e-005 \\ 1.342 & 2.077 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον πίνακα κέρδους K που ορίζει τον κανόνα ανάδρασης ελέγχου (feedback control law). Ο πιο προσιτός τρόπος είναι μέσω της συνάρτησης `lqr` η οποία θα μας δώσει τον βέλτιστο ελεγχτή. Η συνάρτηση `lqr` αφήνει το περιθώριο στο σχεδιαστή να διαλέξει τιμές για δύο παραμέτρους, την παράμετρο R και την παράμετρο Q . Όπως έχει αναφερθεί ήδη, το Q συχνά είναι διαγώνιος πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία δίνουν βάρος σε διάφορες καταστάσεις με διαφορετικά ποσοστά. Η πιο απλή περίπτωση είναι να υποθέσουμε $R = I$ (μοναδιαίος πίνακας) και $Q = C^*C$. Μέσω του Q ο controller μας επιτρέπει να αλλάζουμε τα μη μηδενικά στοιχεία (του Q) έτσι ώστε να πετυχαίνουμε την επιθυμητή απόκριση. Πραγματικά, αν πληκτρολογήσουμε την εντολή `C'*C`, θα λάβουμε:

ans =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

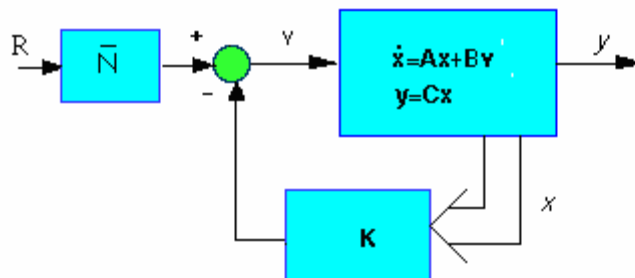
Το στοιχείο της θέσης 1,1 θα χρησιμεύσει για να δώσει βάρος στην θερμοκρασία πατώματος T_m , ενώ το στοιχείο της θέσης 2,2 θα χρησιμεύσει για να δώσει βάρος στη

εσωτερική θερμοκρασία T_i . Μπορούμε να πειραματιστούμε με διάφορες τιμές του πίνακα Q για να βρούμε τον πίνακα K που θα μας δώσει ένα καλό ελεγχτή.

Για $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ο πίνακας ελέγχου K ισούται με τον πίνακα της σχέσης (7.6):

$$K = \begin{bmatrix} 2.5986 & 5.0716 \\ 4.0170 & 7.8502 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να προσθέσουμε την είσοδο αναφοράς έτσι ώστε η έξοδος του συστήματος να παρακολουθεί την προδιαγεγραμμένη πορεία που εμείς έχουμε επιλέξει. Αυτό το επιτυγχάνουμε με την υλοποίηση του ελεγχτή που φαίνεται στο σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2

Το \bar{N} είναι ένας συντελεστής κλίμακας (scale factor), ο οποίος δεδομένου του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

και του πίνακα ανάδρασης K , εξαλείφει το steady-state σφάλμα (steady-state error) σε μια είσοδο αναφοράς, σύμφωνα με το σχηματικό διάγραμμα του σχήματος 7.2. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του \bar{N} φαίνεται παρακάτω:

```
α)  s = size(A,1);
β)  Z = [zeros([1,s]) 1 1];
γ)  N = inv([A,B;C,D])*Z';
δ)  Nx = N(1:s);
ε)  Nu = N(1+s);
στ) Nbar=Nu + K*Nx;
```

Ο κώδικας της γραμμής α) κρατάει στη μεταβλητή s το πλήθος των γραμμών του πίνακα A . Στη γραμμή β) δημιουργείται ο πίνακας Z διαστάσεων $1 \times (s+2)$, με τα s πρώτα στοιχεία να είναι ίσα με μηδέν και τα υπόλοιπα ίσα με 1. Η γραμμή γ) υπολογίζει τον αντίστροφο του συσκευασμένου πίνακα $[A, B; C, D]$ και υπολογίζει το γινόμενό του με τον ανάστροφο του Z . Η γραμμή δ) εξισώνει τον πίνακα Nx με τα s πρώτα στοιχεία-γραμμές του πίνακα N . Το Nu , στη γραμμή ε), γίνεται ίσο με το $1+s$ στοιχείο-γραμμή του πίνακα N . Στη γραμμή στ) ακολουθεί το γινόμενο του πίνακα K με το Nx και άθροισμα με το Nu .

Με την εκτέλεση του παραπάνω κώδικα προέκυψε η τιμή του συντελεστή N_{bar} , ίση με:

$$N_{bar} = \begin{bmatrix} 0.7830 \\ 1.1999 \end{bmatrix}$$

Για να παράγουμε την απόκριση του συστήματος στην είσοδο αναφοράς a_s εργαστούμε ως εξής: Με τη βοήθεια του σχήματος 7.2 ισχύει για το σήμα ελέγχου v :

$$v = -Kx + R \cdot N_{bar}$$

Επομένως, για την εξίσωση κατάστασης του συστήματος προκύπτει:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(-Kx + RN_{bar}) \\ &= Ax - BKx + BRN_{bar} \\ &= (A - BK)x + (B \cdot N_{bar})R\end{aligned}\tag{7.7}$$

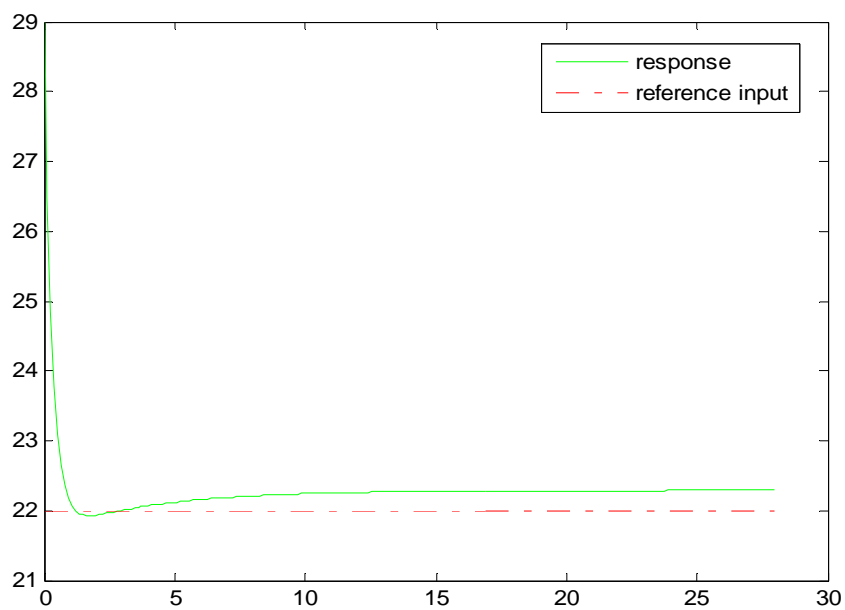
Το σύστημα της εξίσωσης (7.7) είναι της τυπικής μορφής :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}r(t) \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

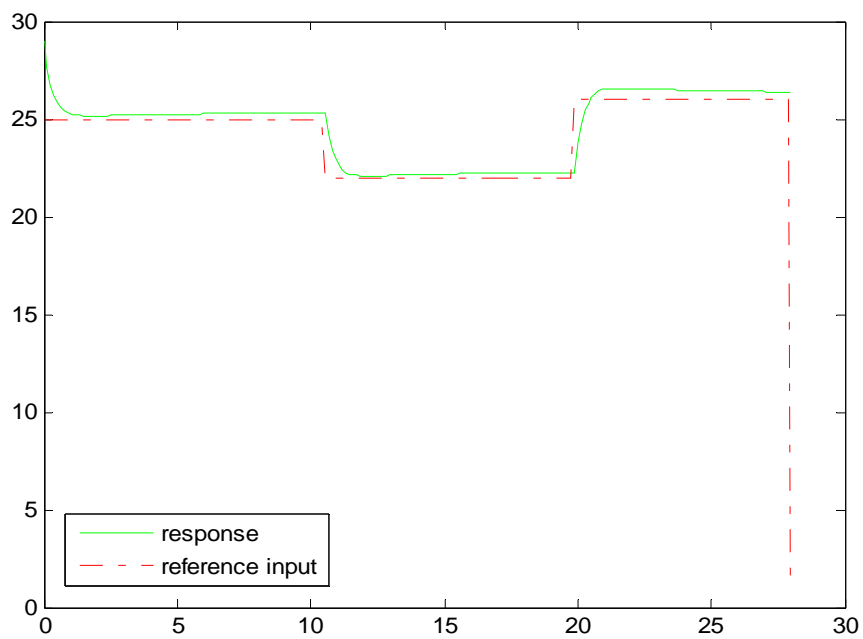
Όπου:

$$\tilde{A} = [A - BK] \quad \text{και} \quad \tilde{B} = [B \cdot N_{bar}]$$

Με την ανάκληση της εντολής `[Y,X]=lsim(A,B,C,D,U,T,xo)` στο matlab, βάζοντας στη θέση του A τον πίνακα \tilde{A} , στη θέση του B τον \tilde{B} , στη θέση του C τον μοναδιαίο $I_{2 \times 2}$, όπου D έναν $0_{2 \times 2}$, όπου U την επιθυμητή τροχιά της εξόδου, στη θέση του T το διάνυσμα του χρόνου και στο xo τις αρχικές τιμές των καταστάσεων, θα λάβουμε την απόκριση του ελεγκτή στη είσοδο αναφοράς που ορίζουμε. Το σχήμα 7.3 περιέχει την απόκριση του συστήματος σε ένα σήμα αναφοράς με σταθερή θερμοκρασία, ενώ το σχήμα 7.4 την απόκριση του συστήματος σε ένα σήμα αναφοράς που κάνει “σκαλοπάτια”.



Σχήμα 7.4-Είσοδος αναφοράς (σταθερή) και απόκριση συστήματος.



Σχήμα 7.4-Είσοδος αναφοράς (μεταβαλλόμενη) και απόκριση συστήματος.

7.2 Η T_a ως εξωτερική διαταραχή

Στην παρούσα υποενότητα, σκοπός μας και πάλι είναι η εφαρμογή ελέγχου στις εισόδους του συστήματος με στόχο την επιθυμητή απόκριση, με τη διαφορά ότι εξετάζουμε το σύστημα από άλλη οπτική γωνία. Εδώ θεωρούμε την εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος T_a εξωτερική διαταραχή (external disturbance) και προσπαθούμε με κάποιες ενέργειες να την εξουδετερώσουμε. Αφού θεωρούμε ότι το σύστημα περιέχει εξωτερική διαταραχή, θα εργασθούμε πάνω σε ένα μοντέλο της μορφής που περιγράφεται απ' την εξίσωση (7.8):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Dw \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{7.8}$$

Για το λόγο αυτό θα πρέπει να εκφράσουμε το σύστημά μας στη μορφή που περιγράφει η εξίσωση (7.8). Αυτό γίνεται παρόμοια με τη μετατροπή που έγινε στο σύστημα στην προηγούμενη υποενότητα. Παίρνουμε τους συντελεστές του πίνακα B του συστήματός μας, που αφορούν την είσοδο T_a και τους τοποθετούμε στον πίνακα D του μοντέλου της εξίσωσης (7.8), αφού το διάνυσμα w παριστάνει την εξωτερική διαταραχή T_a . Έτσι, αν το αρχικό σύστημα είναι της μορφής που φαίνεται στην εξίσωση (7.9), εμείς θα εργαστούμε πάνω στο σύστημα της εξίσωσης (7.10).

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_m}{dt} \\ \frac{dT_j}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_j c_m} & \frac{1}{r_j c_m} \\ \frac{1}{r_j c_j} & -\left(\frac{1}{r_a c_j} + \frac{1}{r_j c_j}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{r_a c} & \frac{1}{c_j} & \frac{A_w(1-p)}{c_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix}\tag{7.9}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_m}{dt} \\ \frac{dT_i}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} \\ \frac{1}{r_i c_i} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{c_i} & \frac{A_w(1-p)}{c_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r_a c_i} \end{bmatrix} \cdot T_a \quad (7.10)$$

Ξεκινώντας τη σχεδίαση του ελεγκτή, θα πρέπει να βρούμε τον κατάλληλο κανόνα ανάδρασης ελέγχου (feedback control law). Εμείς, για το σήμα ελέγχου u θα ορίσουμε

$$u = -Kx + \underline{b} \quad (7.11)$$

όπου \underline{b} είναι ένα διάνυσμα της μορφής:

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (7.11) στην εξίσωση κατάστασης (7.8) θα προκύψει:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BKx + Bb + Dw \\ &= (A - BK)x + Bb + Dw \end{aligned} \quad (7.13)$$

Αυτό που ψάχνουμε να βρούμε, είναι το διάνυσμα \underline{b} το οποίο όταν προστίθεται στον κανόνα ανάδρασης ελέγχου να μηδενίζει το άθροισμα της εξίσωσης (7.13):

$$Bb + Dw = 0 \quad (7.14)$$

Αντικαθιστώντας τους πίνακες στην εξίσωση (7.14) θα πάρουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{c_i} & \frac{A_w(1-p)}{c_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{T_a}{r_a c_i} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Μετά από λίγες πράξεις γραμμικής άλγεβρας προκύπτει ότι το $b_1 = -\frac{T_a}{r_a}$, ενώ το $b_2 = 0$. Επομένως, το διάνυσμα \underline{b} που θα προσθέσουμε στον κανόνα ελέγχου είναι το

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} -\frac{T_a}{r_a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

ενώ ο κανόνας ανάδρασης ελέγχου διαμορφώνεται ως εξής:

$$u = -Kx + \begin{pmatrix} -\frac{T_a}{r_a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

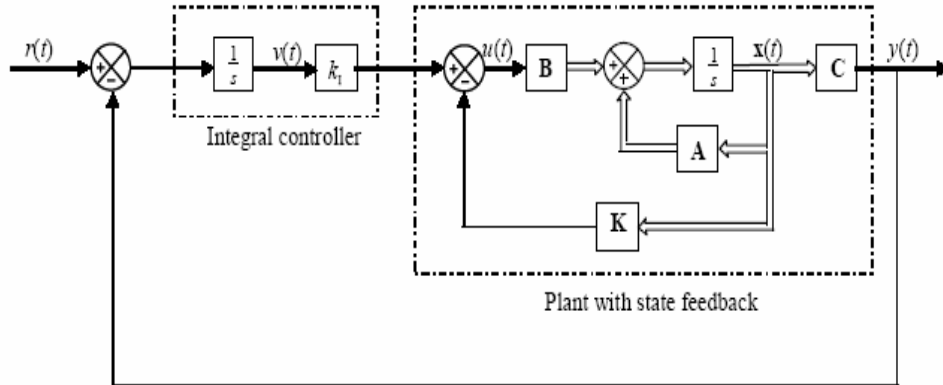
Καταρχάς, θα θεωρήσουμε το T_a σταθερό, ενώ στη συνέχεια θα προσθέσουμε στους υπολογισμούς μας το διάνυσμα των μετρήσεων της εξωτερικής θερμοκρασίας που χρησιμοποιήσαμε κατά την διαδικασία της ταυτοποίησης.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην εφαρμογή του ελέγχου και ας θυμηθούμε την εξίσωση σφάλματος της παραγράφου 5.2 για τον ελεγχτή του σχήματος 7.5. Αυτή θα προκύψει εάν φέρουμε το σύστημα στη μορφή

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u_e$$

με

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 7.5

Η έκφραση (7.18) είναι εξίσωση σφάλματος της εξόδου y σε σχέση με το σήμα αναφοράς r , που θα μας δώσει το τροποποιημένο μοντέλο του συστήματός μας, με την επιπλέον κατάσταση v_e να παριστάνει το σφάλμα της εξόδου σε σχέση με την επιθυμητή πορεία που ορίζουμε.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{v}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_e \\ v_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_e \quad (7.18)$$

Αν αντικαταστήσουμε τους πίνακες του συστήματός μας θα προκύψουν οι νέοι πίνακες \bar{A} και \bar{B} με τιμές:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0.2354 & 0.2354 & 0 & 0 \\ 1.7650 & -1.7946 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.3419 & 2.0769 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την εντολή dlqr για τους παραπάνω πίνακες, με $Q = 100 \cdot I_{4 \times 4}$ και $R = I_{2 \times 2}$, όπου I είναι ο μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας, προκύπτει ο πίνακας κέρδους:

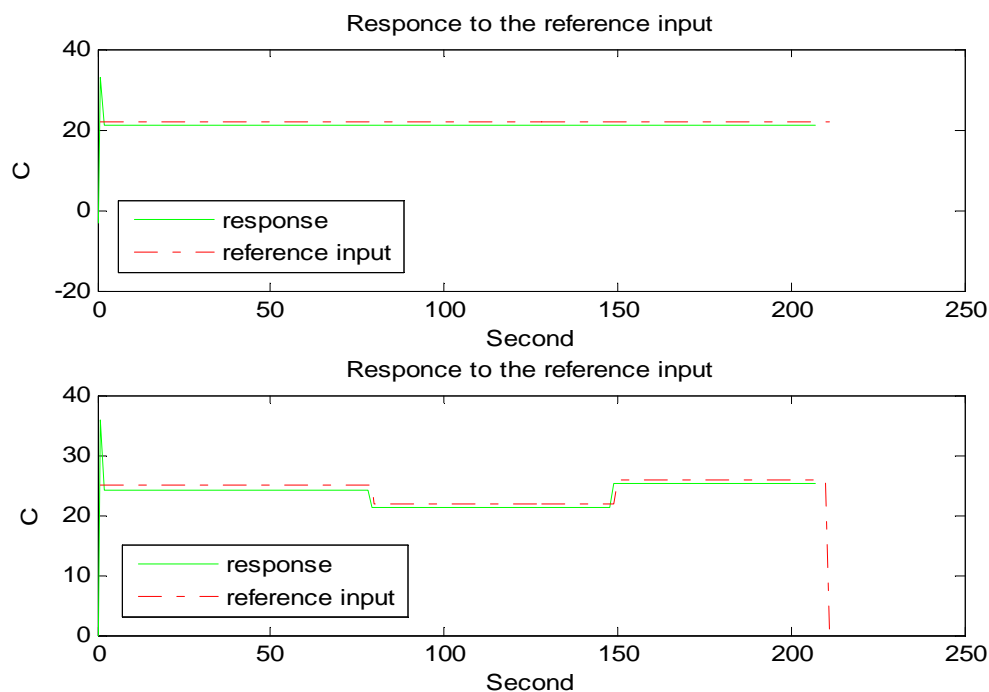
$$K = \begin{bmatrix} 0.3900 & -0.3965 & 0 & 0 \\ 0.6037 & -0.6137 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο έλεγχος υλοποιήθηκε με μια επαναληπτική ρουτίνα (for loop) , σε κάθε επανάληψη της οποίας γίνονταν οι εξής ενέργειες:

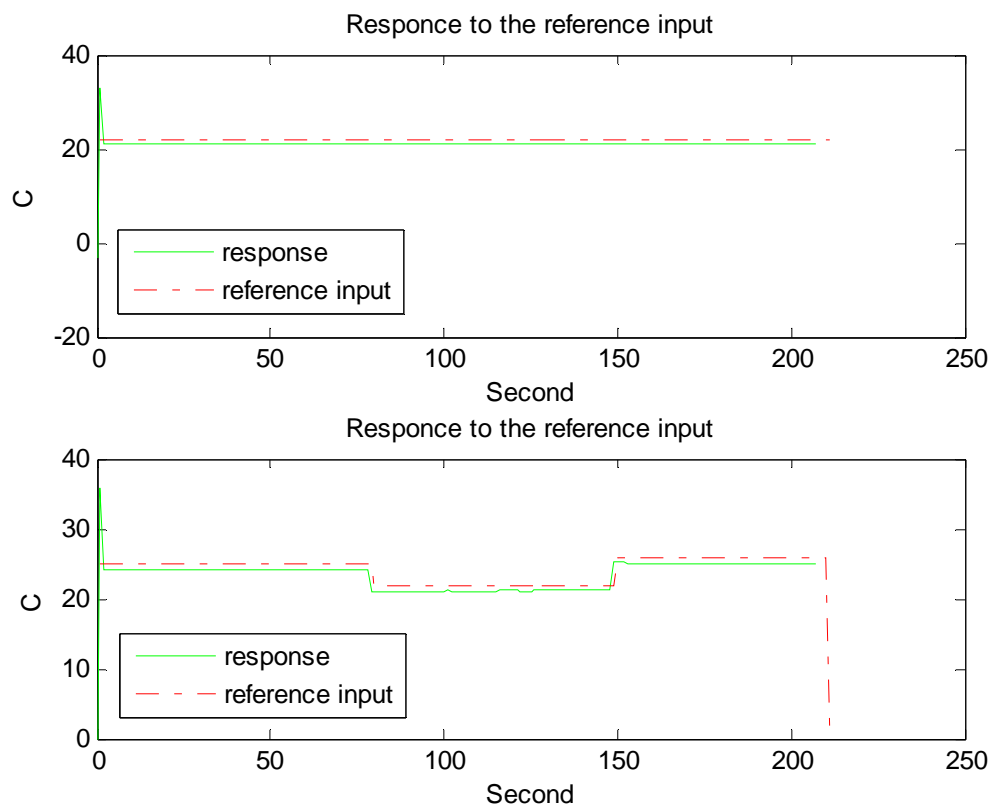
$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u_e$$

$$u_e = -Kx + b$$

Η απόκριση του συστήματος παράγεται αν αφαιρέσουμε το σφάλμα της εξόδου που προκύπτει από την επιθυμητή θερμοκρασία που διαλέγουμε. Το σχήμα 7.6 δείχνει την απόκριση του συστήματος σε δύο διαφορετικές εισόδους, θεωρώντας την εξωτερική θερμοκρασία T_a του διανύσματος b σταθερή και ίση με $28^\circ C$. Το σχήμα 7.7 δείχνει την απόκριση του συστήματος, αν σε κάθε πρόσθεση του διανύσματος b στο σήμα ελέγχου χρησιμοποιούμε και μια τιμή από το διάνυσμα εξωτερικής θερμοκρασίας T_a με το οποίο έγινε η ταυτοποίηση.



Σχήμα 7.6-Απόκριση του συστήματος με την θερμοκρασία T_a σταθερή.



Σχήμα 7.7-Απόκριση του συστήματος χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις T_a .

7.3 Εκτίμηση δυναμικού μοντέλου της εξωτερικής θερμοκρασίας T_a και βέλτιστος έλεγχος με ένταξή της στο διάνυσμα κατάστασης

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής ελέγχου θα μπορούσαν να βελτιωθούν αν, επιστρέφοντας στο τροποποιημένο μοντέλο της παραγράφου 7.1, τοποθετούσαμε στον πίνακα A τον κατάλληλο συντελεστή για την κατάσταση T_a . Αυτός ο συντελεστής είναι δυνατόν να προκύψει αν επαναλάβουμε τη διαδικασία της εκτίμησης για την εξωτερική θερμοκρασία T_a , και την εκφράσουμε με τη μορφή της εξίσωσης (7.19):

$$\dot{T}_a = \alpha \cdot T_a \quad (7.19)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της υποενότητας 6.3 με τη βοήθεια του διανύσματος τιμών από τις μετρήσεις για την εξωτερική θερμοκρασία T_a , προκύπτει η εκτίμηση:

$$\alpha = -0.0011$$

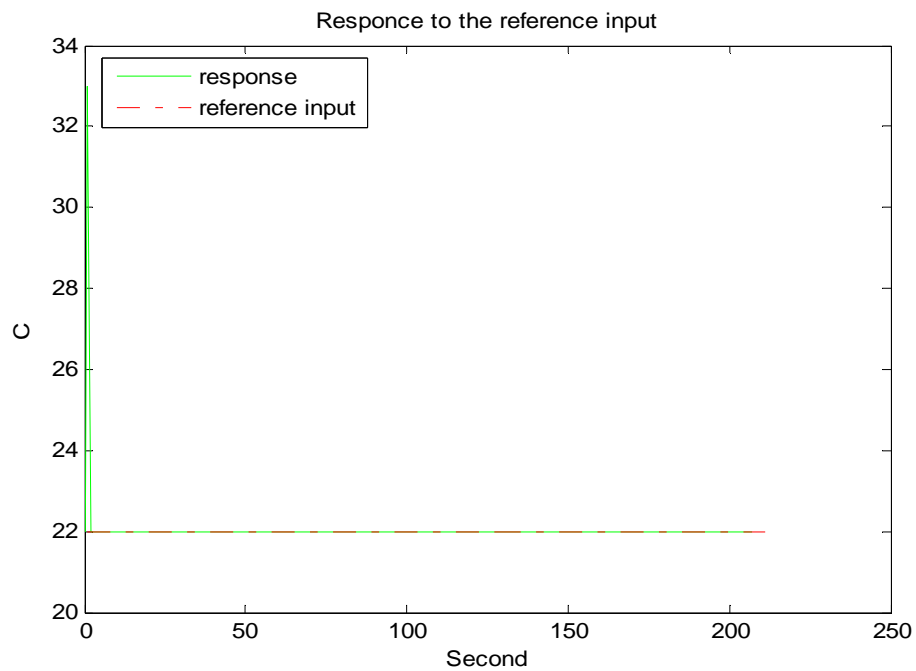
Ας θεωρήσουμε και πάλι το τροποποιημένο μοντέλο της εξίσωσης (7.4). Αν τοποθετήσουμε την εκτίμηση α στον πίνακα A του μοντέλου, σαν συντελεστή της κατάστασης T_a , θα προκύψει το νέο μοντέλο της εξίσωσης (7.20):

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_m \\ \dot{T}_i \\ \dot{T}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_i c_m} & \frac{1}{r_i c_m} & 0 \\ \frac{1}{r_i c_m} & -\left(\frac{1}{r_a c_i} + \frac{1}{r_i c_i}\right) & \frac{1}{r_a c_i} \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m \\ T_i \\ T_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{A_w p}{c_m} \\ \frac{1}{c_i} & \frac{A_w (1-p)}{c_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_h \\ \Phi_s \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

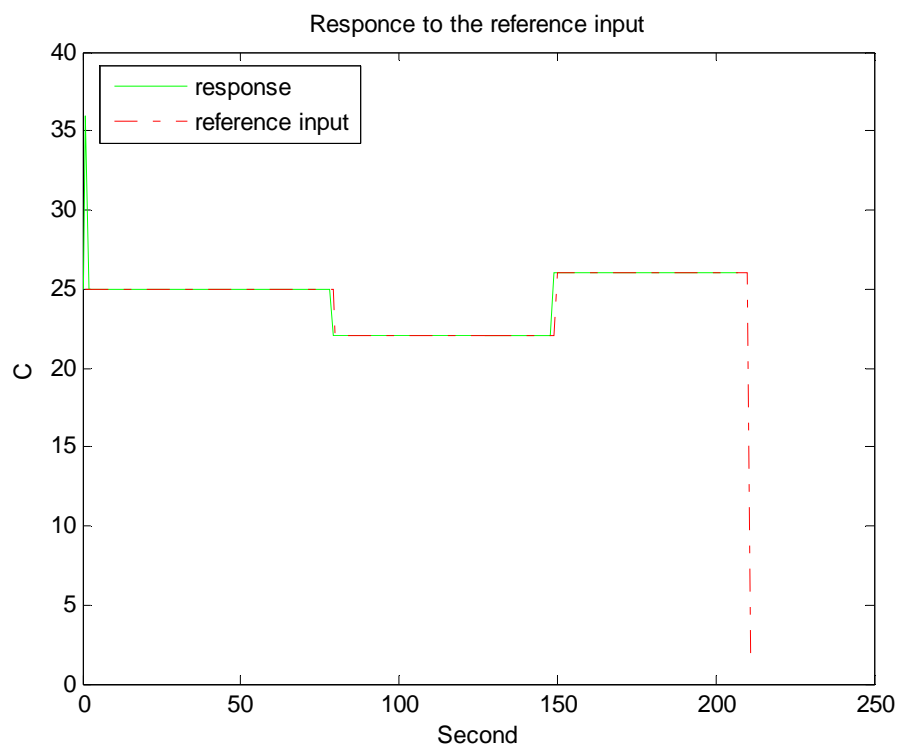
Η ανάκληση της εντολής dlqr με ορίσματα τους πίνακες της εξίσωσης σφάλματος του μοντέλου (7.20) θα μας δώσει τον πίνακα κέρδους:

$$K = \begin{bmatrix} 0.3873 & -0.3938 & 0.0065 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5995 & -0.6096 & 0.0100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Το σχήμα 7.8 περιέχει την απόκριση του συστήματος σε ένα σήμα αναφοράς με σταθερή θερμοκρασία, ενώ το σχήμα 7.9 την απόκριση του συστήματος σε ένα σήμα αναφοράς που κάνει “σκαλοπάτια”.



Σχήμα 7.8-Απόκριση του συστήματος ελέγχου σε σήμα αναφοράς με σταθερή θερμοκρασία.



Σχήμα 7.9-Απόκριση του συστήματος σε μεταβλητό σήμα αναφοράς.

Κεφάλαιο 8 - Σχολιασμός και σύγκριση των αποτελεσμάτων

8.1 Γενικά

Αφού πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος, υλοποιήθηκε στο Simulink του Matlab και εφαρμόστηκε ο έλεγχος, είμαστε σε θέση να επιχειρήσουμε κάποιο σχολιασμό των αποτελεσμάτων και συγχρόνως να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Δεδομένου του ταυτοποιημένου μοντέλου που καταλήξαμε, ανακύπτουν κάποια ερωτήματα που αφορούν τη θερμική συμπεριφορά του κτηρίου που προσομοιώσαμε και τις συνθήκες που συμπεριλάβαμε στους υπολογισμούς μας. Ανακύπτουν, λοιπόν, ερωτήματα όπως: τι εκφράζει το ταυτοποιημένο μοντέλο που έχουμε, και υπό ποιες συνθήκες το κτήριο συμπεριφέρεται όπως περιγράφει το μοντέλο; Για να απαντηθούν τέτοιου είδους ερωτήματα πρέπει να ανατρέξουμε στα δεδομένα, δηλαδή στις μετρήσεις που χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να αποκτήσουν οι παράμετροι του συστήματός μας τιμές.

Αφού γίνει κατανοητό το τι εκφράζει το μοντέλο στο οποίο δώσαμε τιμές, πρέπει να σχολιάσουμε την απόδοση της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε για την ταυτοποίηση του. Αυτό σημαίνει να αξιολογήσουμε το κατά πόσο το μοντέλο μας πλησιάζει την συμπεριφορά του κτηρίου, στις συνθήκες με τις οποίες έγινε η εκτίμηση των παραμέτρων.

Τέλος, αφού χρησιμοποιήσαμε δύο τροποποιημένες μορφές του αρχικού συστήματος για την εφαρμογή ελέγχου, καλούμαστε να σχολιάσουμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του ελεγκτή στη μια περίπτωση και στην άλλη.

8.2 Σχολιασμός και σύγκριση των αποτελεσμάτων

Προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα ασφαλές συμπέρασμα για το τι εκφράζει το ταυτοποιημένο μοντέλο που προέκυψε, απαιτείται να γυρίσουμε πίσω και να εξετάσουμε τα δεδομένα στα οποία βασίστηκε ο αλγόριθμος εκτίμησης. Για το λόγο αυτό ας θυμηθούμε τι δεδομένα απαιτούσε το μοντέλο για την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Ως έξοδο, το σύστημα συμπεριλάμβανε την εσωτερική θερμοκρασία του κτηρίου και την θερμοκρασία πατώματος. Η είσοδος περιείχε την εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος, την παροχή θερμότητας από το κλιματιστικό και την ηλιακή ακτινοβολία που προσπίπτει σε κάθετη επιφάνεια. Για τις μετρήσεις της εσωτερικής θερμοκρασίας, της εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος και της παροχής ενέργειας από την εγκατάσταση κλιματισμού, ως πηγή θεωρήσαμε τα αποτελέσματα προηγούμενης διπλωματικής εργασίας που αφορούσε το εργαστήριο ηλεκτρικών κυκλωμάτων και ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (ΕΗΚΑΠΕ) του Πολυτεχνείου Κρήτης. Η εργασία αυτή περιλάμβανε την εφαρμογή ελεγχτών για την επίτευξη επιθυμητών περιβαλλοντικών συνθηκών μέσα στο κτήριο του εργαστηρίου.

Ανάμεσα στους στόχους της εφαρμογής των ελεγχτών ήταν και η προσπέλαση επιθυμητών τιμών εσωτερικής θερμοκρασίας. Με βάση τις μετρήσεις που προέκυψαν συνθέσαμε το διάνυμα τιμών εσωτερικής θερμοκρασίας, η οποία όμως ακολουθούσε μια επιθυμητή πορεία που είχε καθοριστεί κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής. Επομένως, για την εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος χρησιμοποιήσαμε τιμές εσωτερικής θερμοκρασίας οι οποίες ήταν αποτέλεσμα της εφαρμογής ελέγχου.

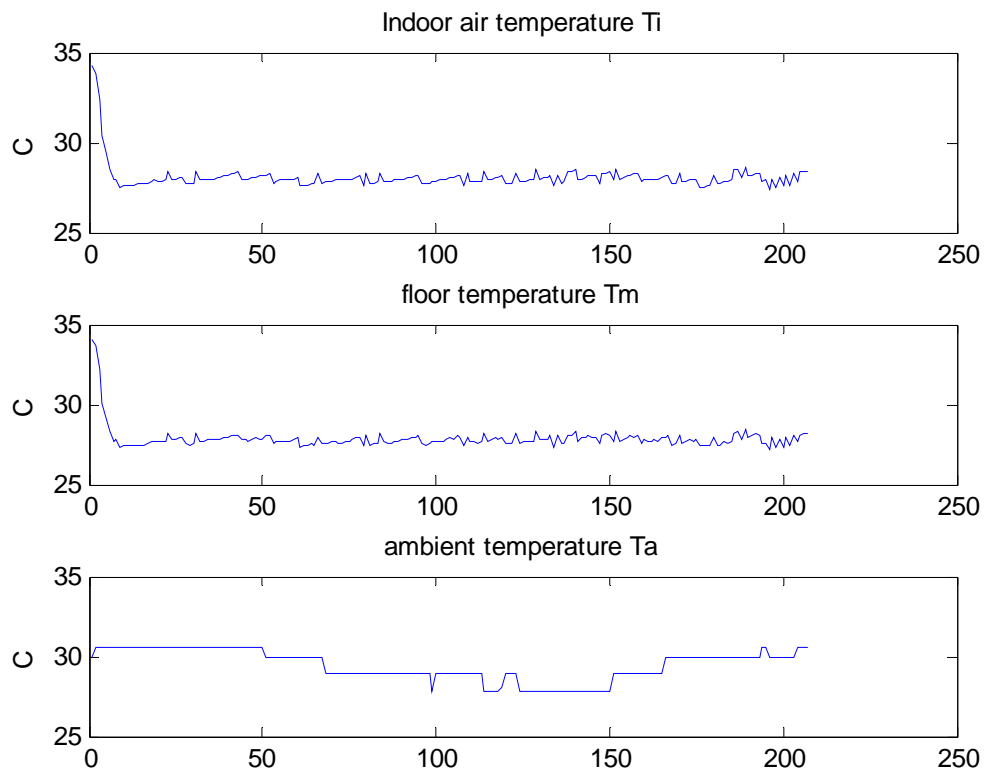
Η επίτευξη της επιθυμητής εσωτερικής θερμοκρασίας, στα πλαίσια της εργασίας που θεωρήσαμε ως πηγή, ήταν αποτέλεσμα του ελέγχου της παροχής ενέργειας στο κτήριο. Συνεπώς, οι μετρήσεις παροχής ενέργειας από την εγκατάσταση κλιματισμού που χρησιμοποιήσαμε για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου μας, ήταν οι τιμές που απαιτούνταν για την προσπέλαση της επιθυμητής θερμοκρασίας.

Επιπλέον, λόγω του ότι η εκπόνηση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια καλοκαιρινής περιόδου και συγκεκριμένα το μήνα

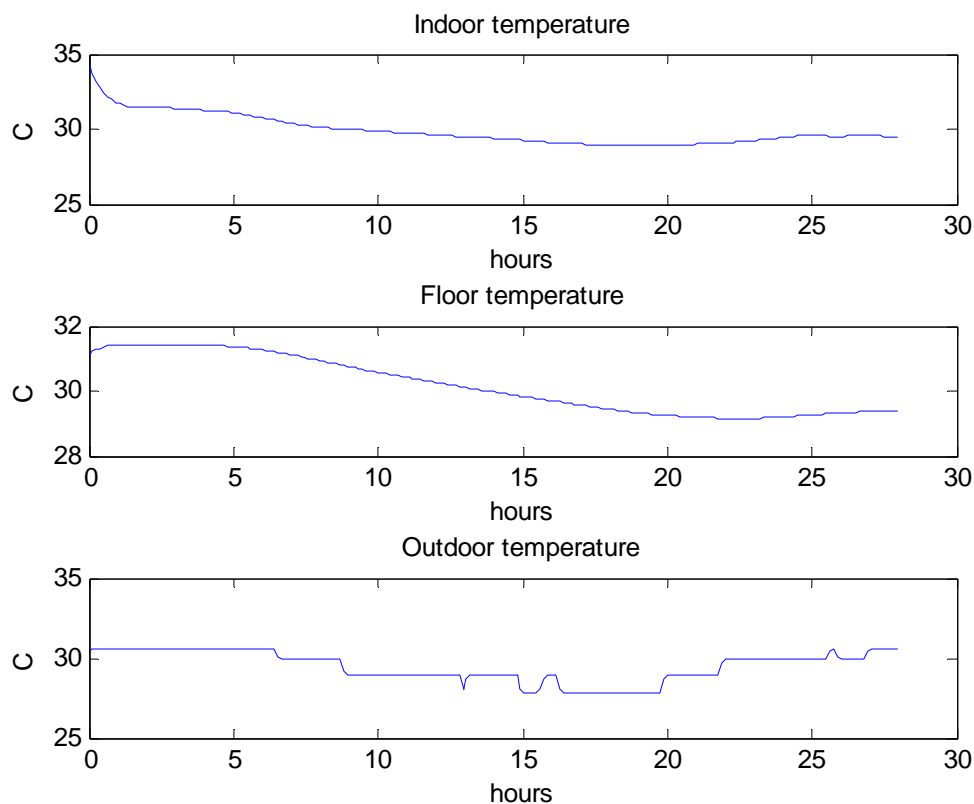
Ιούλιο, οι μετρήσεις της εξωτερικής θερμοκρασίας που μεταχειριστήκαμε αφορούσαν την περίοδο αυτή.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το μοντέλο που προέκυψε από τη διαδικασία της εκτίμησης με βάση τις μετρήσεις αυτές, τηρεί όλες τις προϋποθέσεις και συμπεριλαμβάνει όλα τα στοιχεία που προαναφέραμε. Δηλαδή, εσωκλείει την συμπεριφορά του κτηρίου ως αποτέλεσμα της ελεγχόμενης παροχής ενέργειας από το κλιματιστικό, στις συγκεκριμένες τιμές εξωτερικής θερμοκρασίας.

Η υπόθεση αυτή επιβεβαιώνεται αν παρατηρήσουμε τις πραγματικές μετρήσεις των θερμοκρασιών συγκριτικά με τις θερμοκρασίες που παράγει η προσομοίωση του μοντέλου μας στο Simulink του Matlab. Το σχήμα 8.1 αναπαριστά τις πραγματικές μετρήσεις των θερμοκρασιών, ενώ το σχήμα 8.2 περιέχει τις θερμοκρασίες που προκύπτουν από την υλοποίηση του μοντέλου στο Simulink.



Σχήμα 8.1-Μετρήσεις θερμοκρασίας δωματίου, πατώματος και εξωτερικού περιβάλλοντος.



Σχήμα 8.2-Εσωτερική θερμοκρασία, θερμοκρασία πατώματος (έξοδοι του ταυτοποιημένου μοντέλου) και εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Παρατηρώντας την πορεία της εσωτερικής θερμοκρασίας του σχήματος 8.1, βλέπουμε ότι ξεκινάει από μια τιμή των 34°C και ακολουθεί μια φθίνουσα πορεία για να σταθεροποιηθεί τελικά σε μια συγκεκριμένη τιμή. Αυτό είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής ελέγχου στις εισόδους ενέργειας του κτηρίου κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Απ' την άλλη μεριά αν υλοποιήσουμε το μοντέλο μας στο Simulink και προσομοιώσουμε τις συνθήκες που επικρατούσαν στο κτήριο όταν έγιναν οι μετρήσεις, θα δούμε μια παρόμοια διαδρομή της εσωτερικής θερμοκρασίας. Ξεκινάει από μια θερμοκρασία των 34°C και στη συνέχεια ακολουθεί μια φθίνουσα πορεία. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο μας εσωκλείει την θερμική συμπεριφορά του κτηρίου και κατά

κάποιο τρόπο συμπεριλαμβάνει και τον έλεγχο στις πηγές ενέργειας που εφαρμόστηκε κατά τη διάρκεια των μετρήσεων.

Για να προχωρήσουμε στην αξιολόγηση της μεθόδου που καταφύγαμε για την εκτίμηση των παραμέτρων, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ένα παράγοντα ο οποίος υποβίβασε την ρεαλιστικότητα της προσομοίωσης. Κατά τη διαδικασία της ταυτοποίησης δεν είχαμε στη διάθεσή μας όλες τις μετρήσεις που απαιτούσε το μοντέλο. Ενώ υπήρχαν πραγματικές μετρήσεις εσωτερικής θερμοκρασίας, εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος και παροχή ενέργειας από το σύστημα κλιματισμού, έλειπαν οι μετρήσεις θερμοκρασίας πατώματος και οι τιμές ηλιακής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο κάθετο επίπεδο του κτηρίου. Για το λόγο αυτό έγινε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας πατώματος με βάση την εσωτερική θερμοκρασία, ενώ για την ηλιακή ακτινοβολία καταφύγαμε στην μηχανογραφική επεξεργασία στοιχείων ηλιοφάνειας και ηλιακής ακτινοβολίας της ΔΕΗ για την πόλη των Χανίων.

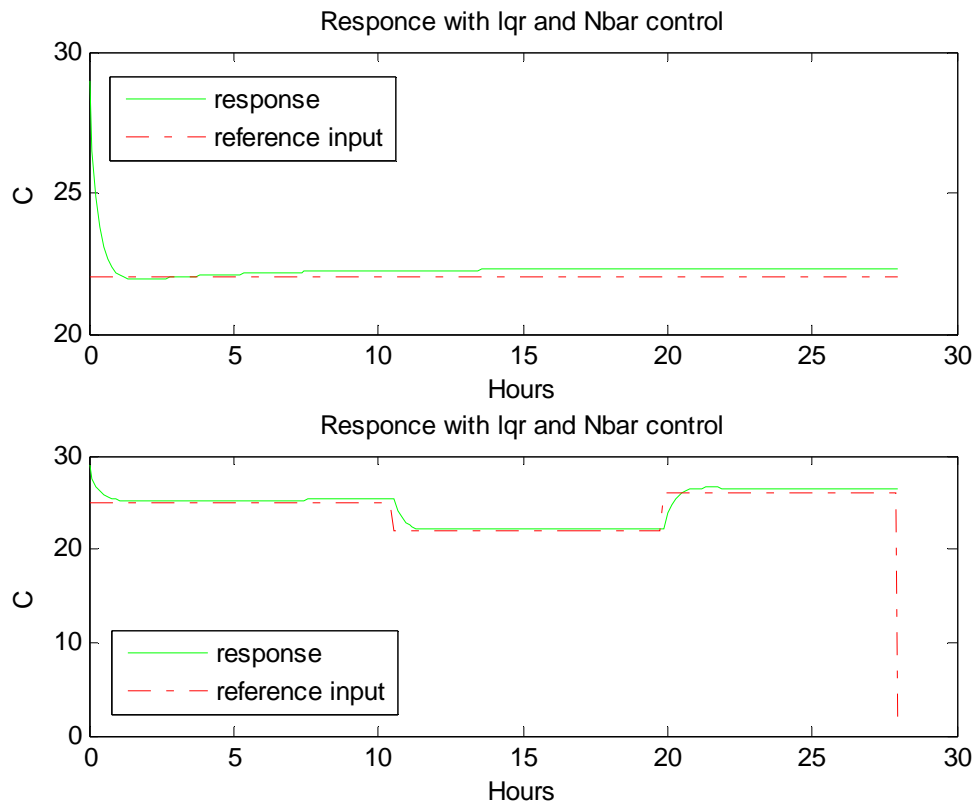
Παρά το γεγονός αυτό, η μέθοδος Recursive Least Squares με τη βοήθεια της οποίας εκτιμήσαμε τις παραμέτρους του μοντέλου δούλεψε πολύ αποδοτικά και πλησιάσαμε αρκετά κοντά στη θερμική συμπεριφορά του κτηρίου στις συγκεκριμένες συνθήκες. Αποτελεί λοιπόν μια πολύ καλή μέθοδο για να δώσουμε τιμές σε ένα μοντέλο που περιγράφει ένα κτήριο σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους ταυτοποίησης.

Στη συνέχεια, παρότι το μοντέλο στο οποίο δώσαμε υπόσταση περιείχε την συμπεριφορά του κτηρίου με την εφαρμογή ελέγχου, θεωρήσαμε ότι η πορεία της εσωτερικής θερμοκρασίας ως έξοδος του μοντέλου μας ήταν αποτέλεσμα κάποιας τυχαίας θερμικής συμπεριφοράς του κτηρίου. Με αυτή την υπόθεση εφαρμόσαμε έλεγχο (linear quadratic control) στις εισόδους του μοντέλου με σκοπό να επιτύχουμε μια επιθυμητή πορεία της εσωτερικής θερμοκρασίας.

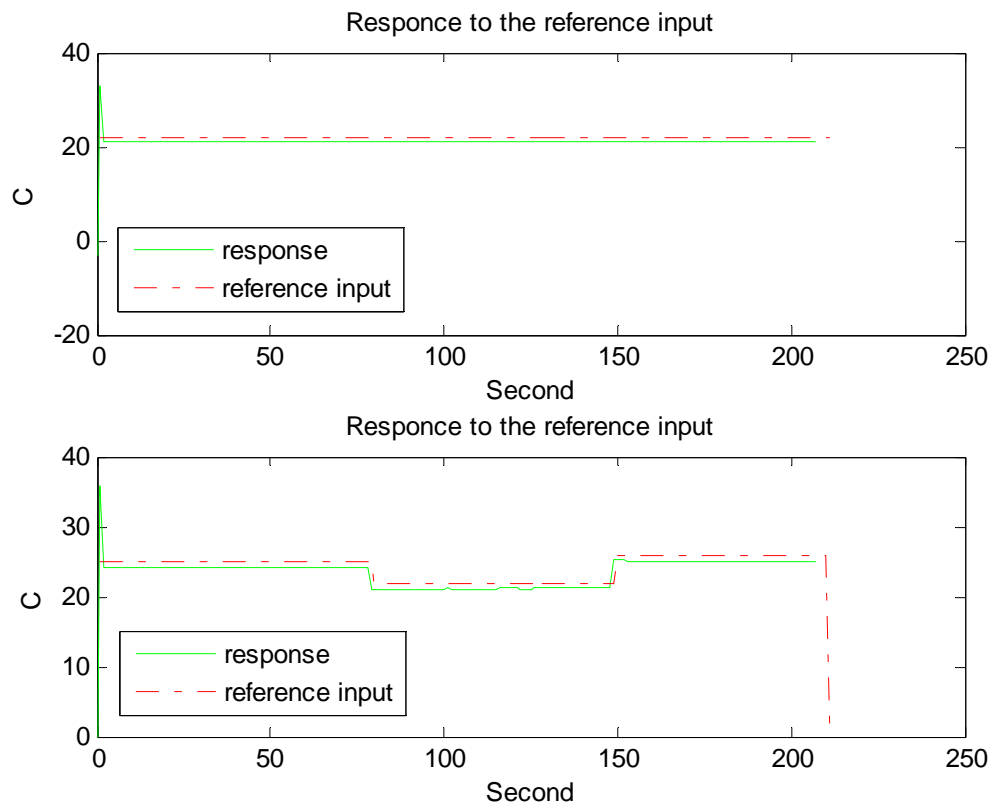
Κατά τη διαδικασία της εφαρμογής του ελέγχου το πρόβλημα που προέκυψε ήταν η ύπαρξη της εξωτερικής θερμοκρασίας περιβάλλοντος στο διάνυσμα εισόδου του μοντέλου. Δύο ήταν οι περιπτώσεις που διακρίναμε προκειμένου να εφαρμοστεί ο έλεγχος: α) Θεωρήσαμε την εξωτερική θερμοκρασία περιβάλλοντος σταθερή και τροποποιήσαμε το σύστημα έτσι ώστε το μέγεθος αυτό να περιέχεται στο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, και β) θεωρήσαμε την θερμοκρασία περιβάλλοντος

εξωτερική διαταραχή και προσπαθήσαμε να την αντισταθμίσουμε με την πρόσθεση του κατάλληλου διανύσματος στον κανόνα ανάδρασης ελέγχου (feedback control law).

Για να αξιολογήσουμε το πόσο καλά δούλεψαν οι μετατροπές που κάναμε στο σύστημα και τι επιτύχαμε με την εφαρμογή ελέγχου, αρκεί να παρατηρήσουμε την απόκριση του συστήματος ελέγχου στις διάφορες εισόδους αναφοράς, σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις που διακρίναμε. Στο σχήμα 8.3 φαίνεται η απόκριση του συστήματος ελέγχου σε δύο διαφορετικές εισόδους αναφοράς για το τροποποιημένο μοντέλο της πρώτης περίπτωσης, ενώ στο σχήμα 8.4 φαίνεται η απόκριση του συστήματος ελέγχου για το τροποποιημένο μοντέλο της δεύτερης περίπτωσης.



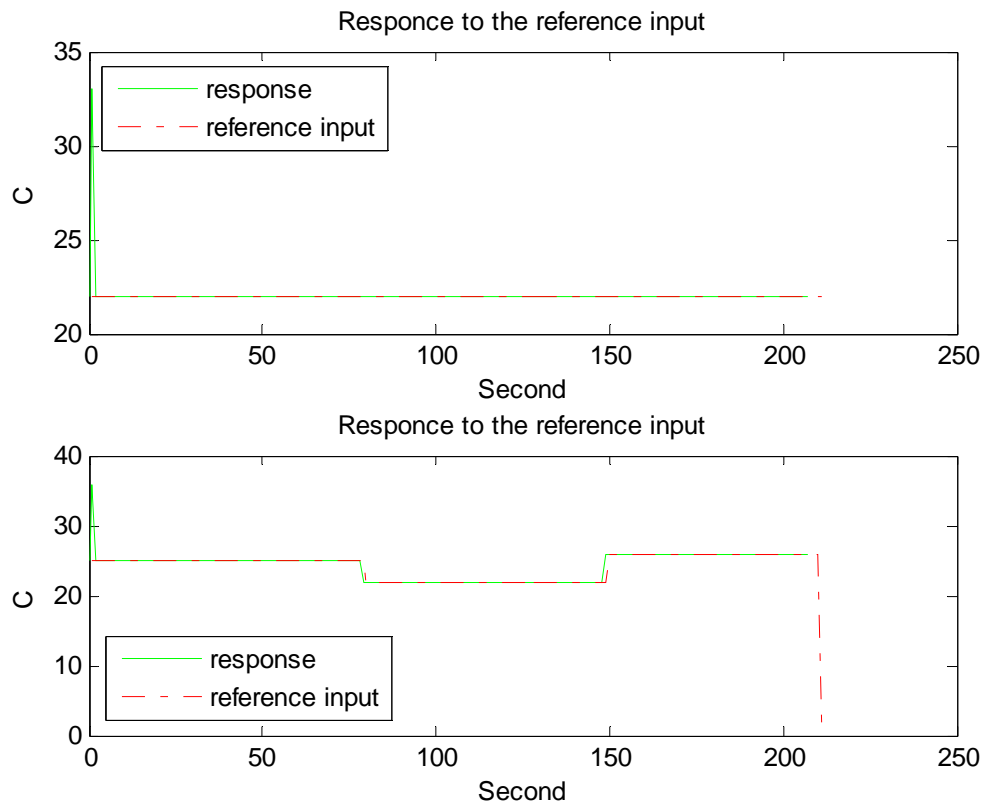
Σχήμα 8.3-Απόκριση συστήματος ελέγχου για την πρώτη περίπτωση.



Σχήμα 8.4-Απόκριση συστήματος ελέγχου για τη δεύτερη περίπτωση.

Και στις δύο περιπτώσεις ο σκοπός για τον οποίο εφαρμόσαμε τον έλεγχο στις εισόδους του συστήματός μας εκπληρώνεται ικανοποιητικά. Η έξοδος του συστήματος που μας ενδιαφέρει, δηλαδή η εσωτερική θερμοκρασία του κτηρίου ακολουθεί ικανοποιητικά και τις δύο εισόδους αναφοράς, την ευθεία πορεία και την πορεία με τα “σκαλοπάτια” (συνδυασμός βηματικών συναρτήσεων με διαφορετικούς συντελεστές). Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε ότι στη δεύτερη περίπτωση, η εσωτερική θερμοκρασία T_i παρακολουθεί την επιθυμητή πορεία της εισόδου αναφοράς, αλλά πάντα είναι λίγο χαμηλότερη απ’ αυτήν. Αυτό μπορεί να είναι θετικό σε περιόδους καλοκαιριού που επιθυμούμε η εσωτερική θερμοκρασία του κτηρίου να είναι χαμηλότερη από την εξωτερική, όχι όμως σε περιόδους που η εξωτερική θερμοκρασία κυμαίνεται κατά μέσο όρο σε χαμηλά επίπεδα. Στις χειμερινές περιόδους το γεγονός αυτό μπορεί να προκαλέσει την παραπάνω κατανάλωση ενέργειας για τη θέρμανση του κτηρίου.

Το πρόβλημα αυτό εξαλείφεται με τη βελτίωση που έγινε στο μοντέλο της πρώτης περίπτωσης, όπου εντάξαμε στο διάνυσμα κατάστασης την εκτίμηση του δυναμικού μοντέλου της εξωτερικής θερμοκρασίας T_a . Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από το σχήμα 8.5, αυτή η περίπτωση μας δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα ελέγχου και η έξοδος του συστήματος ακολουθεί με τον καλύτερο τρόπο την είσοδο αναφοράς που εμείς διαλέγουμε κάθε φορά.



Σχήμα 8.4-Απόκριση συστήματος ελέγχου με εκτίμηση δυναμικού μοντέλου της εξωτερικής θερμοκρασίας και ένταξή της στο διάνυσμα κατάστασης.

Βιβλιογραφία

- [1] Jan F. Kreider, Peter S. Curtiss, Ari Rabl, *Heating and Cooling of Buildings Design for Efficiency Second Edition*, McGraw-Hill 2002
- [2] Π. Ν. Παρασκευόπουλου, *Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο Αθήνα 1991
- [3] H. Madsen, J. Holst, *Estimation of continuous-time models for the heat dynamics of a building*, Elsevier Science B.V.
- [4] Stavrakakis G.S., Lefas C., Pouliezios A., *Parallel processing computer implementation of a real time DC motor drive fault detection algorithm*, Technical University Of Crete, 1989 IEE Proceedings
- [5] Μεταπτυχιακή εργασία Τριανταφυλλιάς Νικολάου, *Βέλτιστος έλεγχος θερμοκρασίας κατοικείας*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Η.Μ.Μ.Υ., Χανιά 2004
- [6] Hongjun Jeon, Dirk Grunwald, Renjeng S.U., *Design of servo control system with quadratic optimal control and observed state feedback control for mems-based storage device*
- [7] Α. Πουλιέζος, *Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου 2*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα Μ.Π.Δ., Μάρτιος 2005
- [8] G. Hudson, C. P. Underwood, *A simple building modelling procedure for matlab/simulink*, University of Northumbria UK
- [9] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, *Modern Control Systems ninth edition*
- [10] Guy A. Dumont, *Adaptive Control Lecture Notes*, 1997-2005
- [11] Control Tutorial for Matlab, <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/pend/invpen.html>

