



Διπλωματική Εργασία

Επίλυση των εξισώσεων Euler σε τρεις διαστάσεις με χρήση μη
δομημένου πλέγματος και εφαρμογή της μεθόδου των
πεπερασμένων όγκων

Αδαμούδης Δ. Λάζαρος

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλος Κ. Ιωάννης

Χανιά, 2005

Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ι. Νικολό, ο οποίος ήταν ο επιβλέπων της εργασίας αυτής. Πέραν των πολλών ωρών που αφιέρωσε και της εύστοχης καθοδήγησης, ο «δάσκαλος» μου έδωσε πολύτιμες συμβουλές και ηθική στήριξη σε δύσκολες στιγμές.

Ευχαριστώ επίσης την οικογένειά μου για την εμπιστοσύνη και τη στήριξη που μου προσφέρουν τόσα χρόνια με τον τρόπο τους.

Ευχαριστώ τους συναδέλφους Παπαδόπουλο Φώτη και Βαλάκο Γιάννη, που με βοήθησαν στη δημιουργία των γεωμετριών και των πλεγμάτων που χρησιμοποίησα για τον έλεγχο του κώδικα.

Τέλος ευχαριστώ όλους τους φίλους που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

*Στο Μήτσο
και στη Σούλα.*

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
Κεφάλαιο 1: Γενικά στοιχεία για την υπολογιστική ρευστομηχανική	3
1.1 Εισαγωγικά	3
1.2 Στοιχεία μιας μεθόδου αριθμητικής επίλυσης	4
1.2.1 Μαθηματικό μοντέλο	4
1.2.2 Μέθοδος διακριτοποίησης	4
1.2.3 Σύστημα συντεταγμένων και διανυσματική βάση	5
1.2.4 Πλέγμα	5
1.2.5 Προσεγγίσεις	6
1.2.6 Μέθοδος επίλυσης	6
1.2.7 Κριτήριο σύγκλισης	6
1.3 Εισαγωγή στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων	7
Κεφάλαιο 2: Οι εξισώσεις της ροής	8
2.1 Περιγραφή των εξισώσεων	8
2.1.1 Εξίσωση Συνέχειας	9
2.1.2 Εξισώσεις Ορμής	12
2.1.4 Οι εξισώσεις Navier- Stokes	16
2.1.5 Οι εξισώσεις Euler	17
2.1.6 Η εξίσωση της Ενέργειας (Α' Θερμοδυναμικός Νόμος)	18
2.1.7 Η καταστατική εξίσωση του ρευστού	19
2.2 Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων	20
Κεφάλαιο 3: Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων	24
3.1 Χωρική διακριτοποίηση του πεδίου ροής	24
3.2 Ορισμός των όγκων ελέγχου	25
3.3 Τοπολογική δομή δεδομένων	26
3.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων	27
3.5 Παραδοχές	29
3.6 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	29
3.7 Ολοκλήρωση των εξισώσεων	30
3.8 Υπολογισμός των αριθμητικών διανυσμάτων ροής	32
3.9 Διακριτοποίηση των όρων πηγής	34
3.10 Επιβολή οριακών συνθηκών	34
3.11 Διακριτοποίηση του χρόνου και τοπικό χρονικό βήμα	36
3.12 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης	36
Κεφάλαιο 4: Ανάλυση του αλγορίθμου	38
4.1 Ο σειριακός αλγόριθμος επίλυσης	38
4.1.1 Βοηθητικοί Υπολογισμοί	39
4.1.2 Κύριοι Υπολογισμοί	39
4.1.3 Τελικοί Υπολογισμοί	40

4.2 Αναλυτική παρουσίαση του αλγορίθμου	40
4.2.1 Είσοδος δεδομένων	40
4.2.2 Καθορισμός τριγώνων	41
4.2.3 Καθορισμός ακμών	43
4.2.4 Εύρεση γειτονικών τετραέδρων	44
4.2.5 Ανάθεση δεικτών (<i>index</i>)	45
4.2.6 Αρχικοποίηση μεταβλητών και αδιαστατοποίηση	48
4.2.7 Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των τετραέδρων	50
4.2.8 Υπολογισμός του όγκου των κυψελών ελέγχου	51
4.2.9 Υπολογισμός του μήκους της μικρότερης ακμής στην οποία ανήκει κάθε	51
4.2.10 Υπολογισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακμών	52
4.2.11 Εύρεση των δύο εδρών ενός τετραέδρου στις οποίες ανήκει μια ακμή του	54
4.2.12 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά οριακών τριγώνων	54
4.2.13 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά οριακών κόμβων	56
4.2.14 Έναρξη χρονικών επαναλήψεων, λειτουργία του επιλύτη	57
4.2.15 Υπολογισμός των πρωτεύουσών μεταβλητών	59
4.2.16 Υπολογισμός των όρων πηγής	59
4.2.17 Εφαρμογή του σχήματος Roe	60
4.2.18 Υπολογισμός του διανύσματος ελεύθερης ροής (free stream).	62
Κεφάλαιο 5: Πιστοποίηση του αλγορίθμου	64
5.1 Πτέρυγα NACA0012	64
5.1.1 $CFL=1.5$	68
5.1.2 Διαφορετικές τιμές του αριθμού CFL	80
5.1.3 Εναλλακτικό πλέγμα	81
5.2 Ελλειψοειδές A	86
5.2.1 CFL 2.5	89
5.3 Ελλειψοειδές B	96
5.3.1 CFL 1.5	99
Κεφάλαιο 6: Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα	105
6.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας	105
6.2 Συμπεράσματα	106
Παράρτημα Α: Ιακωβιανό Μητρώο του Διανύσματος Ροής	108
Βιβλιογραφία	110

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι ο προγραμματισμός και η πιστοποίηση μιας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler με την χρήση τριδιάστατων μη-δομημένων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε τριδιάστατα προβλήματα χρονικά μόνιμης ροής, εξωτερικής αεροδυναμικής.

Τα τριδιάστατα πλέγματα που χρησιμοποιούνται είναι μη-δομημένα και συγκροτούνται από τετράεδρα, στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Γενικότερα, τα μη-δομημένα πλέγματα προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα συγκριτικά με τα δομημένα, όπως η εύκολη διακριτοποίηση χωρίων πολύπλοκης γεωμετρίας (π.χ. σε πολύπλοκα χωρία που εμφανίζονται σε προβλήματα επίλυσης της ροής γύρω από αεροσκάφη), καθώς και η δυνατότητα τοπικής προσαρμογής του πλέγματος στα χαρακτηριστικά της ροής (π.χ. σε ασυνέχειες της ροής – κύματα κρούσης).

Σε μη-δομημένα πλέγματα τα καταστατικά μεγέθη της ροής είναι δυνατό να ορισθούν είτε στους κόμβους του πλέγματος (κορυφές των τετραέδρων), είτε στα κέντρα των τετραέδρων, οπότε προκύπτουν αντίστοιχα η κεντροκομβική και η κεντροκυψελική μέθοδος διακριτοποίησης. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η πρώτη προσέγγιση. Οι εξισώσεις αναπτύσσονται και επιλύονται με ρητή μέθοδο επίλυσης. Στην περίπτωση της κεντροκομβικής μεθόδου, ο όγκος αναφοράς για κάθε κόμβο του πλέγματος ορίζεται από την ένωση τμημάτων όλων των τετραέδρων που μοιράζονται τον υπό εξέταση κόμβο.

Οι ασυνέχειες στις διεπιφάνειες των όγκων αναφοράς (δηλαδή στις κοινές έδρες των γειτονικών τετραέδρων) επιλύονται με τη χρήση ενός προσεγγιστικού επιλύτη Riemann. Ο επιλύτης αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο που θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα πάνω στις κοινές επιφάνειες των γειτονικών όγκων αναφοράς. Η χρήση προσεγγιστικού επιλύτη για το τοπικό πρόβλημα Riemann γίνεται για εξοικονόμηση χρόνου, καθώς η επίλυση του προβλήματος Riemann για τις εξισώσεις Euler αποτελεί μια χρονοβόρα διαδικασία. Ο επιλύτης που χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής στις διεπιφάνειες είναι ο επιλύτης του Roe [Roe81], ο οποίος τυγχάνει ευρείας χρήσης διεθνώς.

Μετά την χωρική διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων, δηλαδή αφού αναπτυχθούν στα διακριτά χωρία του πλέγματος, προκύπτει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, το οποίο μπορεί να λυθεί με ρητές ή πεπλεγμένες μεθόδους. Όσον αφορά τις ρητές μεθόδους, αυτές είναι συνήθως πολυβηματικές, όπου χρησιμοποιούνται συντελεστές που προκύπτουν ύστερα από βελτιστοποίηση ενός πρότυπου προβλήματος [Κου98]. Η χρήση των κατάλληλων μεταβλητών επιτρέπει τη χρήση όσο το δυνατό υψηλότερων χρονικών βημάτων κατά την επίλυση, διατηρώντας βέβαια την ευστάθεια της διαδικασίας [Lai88]. Ωστόσο, οι ρητές μέθοδοι συνήθως συγκλίνουν αργά σε πρακτικά προβλήματα ροής. Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πεπλεγμένες μέθοδοι επίλυσης, οι οποίες επιλύουν ένα γραμμικοποιημένο

σύστημα σε κάθε χρονική επανάληψη. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ρητή μέθοδος ολοκλήρωσης (Runge-Kutta 4 βημάτων).

Η εφαρμογή και η πιστοποίηση της μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler με τη χρήση τριδιάστατου μη-δομημένου πλέγματος πραγματοποιήθηκε με την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran90. Η ανάπτυξη του αλγορίθμου βασίστηκε σε αντίστοιχο αλγόριθμο για ροή δύο διαστάσεων, που αναπτύχθηκε από τον κ. Νικολό Ιωάννη.

Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη αναφορά στο αντικείμενο που εξετάζεται σε κάθε κεφάλαιο της εργασίας.

- Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται γενικά στοιχεία για την υπολογιστική ρευστομηχανική και δίνονται επιγραμματικά τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας μεθόδου αριθμητικής επίλυσης.
- Στο κεφάλαιο 2 καταγράφονται αναλυτικά οι εξισώσεις Euler, που διέπουν τη ροή ενός μη-συνεκτικού συμπιεστού ρευστού. Επίσης παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων.
- Στο κεφάλαιο 3 περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων Euler σε μη-δομημένα τριδιάστατα πλέγματα, χρησιμοποιώντας την κεντροκομβική μέθοδο πεπερασμένων όγκων. Περιγράφεται η διακριτοποίηση του χωρίου ροής, ο ορισμός του όγκου ελέγχου κάθε κόμβου καθώς και η διακριτοποίηση των όρων πηγής, που παρουσιάζονται στις εξισώσεις.
- Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος, που αναπτύχθηκε για την επίλυση του προβλήματος της ροής. Αναλύεται εκτενώς η λειτουργία κάθε υπορουτίνας και ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόστηκε η μεθοδολογία, που περιγράφεται στα προηγούμενα κεφάλαια.
- Στο κεφάλαιο 5 πιστοποιούνται οι μέθοδοι που περιγράφονται στα προηγούμενα κεφάλαια σε διάφορες περιπτώσεις ροής. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου.
- Στο κεφάλαιο 6 συνοψίζονται ορισμένα γενικά συμπεράσματα και προτείνονται θέματα επέκτασης της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Γενικά στοιχεία για την υπολογιστική ρευστομηχανική

1.1 Εισαγωγικά

Σκοπός της υπολογιστικής ρευστομηχανικής (Computational Fluid Dynamics, CFD) είναι η αριθμητική επίλυση με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που διέπουν τη ροή των ρευστών. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την μη συνεκτική κίνηση των ρευστών είναι οι εξισώσεις Euler [Pap01]. Οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, εκτός από λίγες ειδικές περιπτώσεις, οπότε είναι αναγκαία η χρήση υπολογιστή.

Παρόλο που οι βασικότερες ιδέες, που χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, έχουν επινοηθεί και εδραιωθεί κατά τον προηγούμενο αιώνα, το ενδιαφέρον για την υπολογιστική ρευστομηχανική παρουσιάζεται έντονο μόλις τα τελευταία χρόνια. Αυτό οφείλεται στην ραγδαία πρόοδο που σημειώνει η σύγχρονη τεχνολογία στον τομέα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πλέον διαθέσιμα ισχυρά υπολογιστικά συστήματα, ικανά να επιλύσουν τις παραπάνω εξισώσεις με ικανοποιητική ακρίβεια και σε αποδεκτό χρονικό διάστημα. Η επίλυσή τους έχει τόσο αξία, ώστε πλέον να ελκύει την προσοχή ίσως και του ενός τρίτου των ερευνητών που ασχολούνται με την ρευστομηχανική. Το ερευνητικό αυτό πεδίο είναι γνωστό ως υπολογιστική ρευστομηχανική (CFD).

Για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής αριθμητικής λύσης, είναι απαραίτητη η χρήση μιας μεθόδου διακριτοποίησης, η οποία ουσιαστικά προσεγγίζει το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο δύναται να επιλυθεί χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οι προσεγγίσεις εφαρμόζονται σε μικρά διαστήματα του χώρου, (και μικρά χρονικά βήματα για μεταβατικά προβλήματα), οπότε η λύση αποδίδεται σε διακριτά σημεία του χώρου (και του χρόνου). Η ακρίβεια της λύσης εξαρτάται από την ποιότητα της προσέγγισης που χρησιμοποιήθηκε.

Θεωρητικά, είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας λύσης με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Ωστόσο, σε πολλά πρακτικά προβλήματα ροής ρευστών, όπως τυρβώδης ροή και πολυφασικές ροές, η ακριβής αριθμητική λύση δεν είναι εφικτή. Το παραπάνω φαινόμενο καθιστά επιτακτική την επινόηση μοντέλων. Η χρήση τους περιορίζει την ακρίβεια της λύσης, ωστόσο

χρησιμοποιούνται ακόμα και σε απλές περιπτώσεις ώστε να μειώνεται αισθητά το υπολογιστικό κόστος.

Σε κάθε περίπτωση, μια αριθμητική λύση πρέπει να ελέγχεται ώστε να εξακριβώνεται κατά πόσο ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Η κριτική ανάλυσή της και ο συνδυασμός της με πειραματικά δεδομένα αποτελεί τη συνηθέστερη τακτική και αποδίδει σημαντικά συμπεράσματα.

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική αποτελεί έναν ανερχόμενο κλάδο με ευρύ πεδίο εφαρμογής, όπως η αεροναυτική, η υδροδυναμική, οι στροβιλομηχανές, η ηλεκτρονική μηχανική, η παραγωγή ενέργειας, η χημική μηχανική, η ναυπηγική, η μετεωρολογία, η περιβαλλοντολογική μηχανική, η βιοφαρμακευτική και άλλοι κλάδοι [Pap01].

1.2 Στοιχεία μιας μεθόδου αριθμητικής επίλυσης

Τα σημαντικότερα στοιχεία που συνιστούν μια μέθοδο αριθμητικής επίλυσης είναι τα παρακάτω [Pap01]:

1.2.1 Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο περιλαμβάνει το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν την ροή και τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Στην περίπτωση που εξετάζεται, το μαθηματικό μοντέλο περιλαμβάνει την αρχή διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας), τις εξισώσεις Euler (εξισώσεις ορμής) και την εξίσωση της ενέργειας (Α΄ Θερμοδυναμικός Νόμος για ανοικτά συστήματα σε διαφορική μορφή). Εν γένει, ανάλογα με τον τύπο της ροής, οι εξισώσεις του μοντέλου διατυπώνονται με την κατάλληλη μορφή, όπως λ.χ. για δύο ή τρεις διαστάσεις, για συμπίεστο ή ασυμπίεστο ρευστό, για τυρβώδης ή ατρίβη ροή κ.ά. Αν υπάρχουν και επιπλέον φυσικά φαινόμενα, όπως παρουσία τύρβης, καύση ή μεταφορά θερμότητας, αυτά λαμβάνονται υπ' όψη μέσω κατάλληλων εξισώσεων, που περιλαμβάνονται στο μαθηματικό μοντέλο [Pap01].

1.2.2 Μέθοδος διακριτοποίησης

Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή μεθόδου διακριτοποίησης, η οποία προσεγγίζει το σύστημα των εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση που θα προκύψει προσφέρει μια προσέγγιση της λύσης των διαφορικών εξισώσεων σε διακριτά σημεία του πεδίου ροής. Υπάρχουν τρεις βασικές μέθοδοι διακριτοποίησης: Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (finite differences), πεπερασμένων όγκων (finite volumes) και πεπερασμένων στοιχείων (finite elements). Όλες οι μέθοδοι αποδίδουν ποιοτικά την ίδια λύση, σε περίπτωση που χρησιμοποιηθεί πλέγμα εξαιρετικής ποιότητας. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου καθορίζεται από τη φύση του

προβλήματος που εξετάζεται αλλά και από την νοοτροπία του χρήστη. Στα πλαίσια της εργασίας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος πεπερασμένων όγκων, η οποία αναλύεται στη συνέχεια [Pap01].

1.2.3 Σύστημα συντεταγμένων και διανυσματική βάση

Η μορφή των μερικών διαφορικών εξισώσεων που επιλύονται εξαρτάται άμεσα από το σύστημα συντεταγμένων που υιοθετείται. Ως σύστημα συντεταγμένων μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Καρτεσιανό, το κυλινδρικό, το σφαιρικό, το καμπυλόγραμμο ορθογώνιο ή μη-ορθογώνιο σύστημα, σταθερό ή μεταβλητό. Η επιλογή εξαρτάται από το υπό εξέταση πρόβλημα και επηρεάζει τον τύπο του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθεί. Άλλος παράγοντας που επηρεάζει την διατύπωση των εξισώσεων είναι η επιλογή της διανυσματικής βάσης. Από μαθηματική άποψη όλες οι επιλογές είναι ισοδύναμες, αλλά από άποψη αριθμητικής επίλυσης κάποιες μορφές παρουσιάζουν δυσκολίες κατά την διαχείρισή τους. Στην συνέχεια της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί το ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και σταθερή διανυσματική βάση.

1.2.4 Πλέγμα

Το πλέγμα διαιρεί το πεδίο ροής σε ένα πλήθος κυψελών (cells) και ορίζει ταυτόχρονα τα διακριτά σημεία, στα οποία θα υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών. Χρησιμοποιείται μια ποικιλία πλεγμάτων σε φυσικά προβλήματα, όπως δομημένα ή μη-δομημένα πλέγματα. Δεν υφίσταται περιορισμός στον αριθμό και στο σχήμα των κυψελών. Στα τριδιάστατα πλέγματα συνήθως οι κυψέλες είναι τετράεδρα ή εξάεδρα. Το βασικό πλεονέκτημα των μη-δομημένων πλεγμάτων έναντι των δομημένων είναι η εύκολη προσαρμογή τους σε κάθε γεωμετρία και η δυνατότητα τοπικής προσαρμογής τους κατά την διάρκεια της επίλυσης στα χαρακτηριστικά της ροής. Το βασικότερο μειονέκτημά τους αποτελεί η ακανόνιστη σύνδεση των κυψελών (ενώ δεν υφίσταται το νόημα της κατεύθυνσης κατά μήκος των γραμμών του πλέγματος), καθώς και το υψηλό επίπεδο των δομών δεδομένων που απαιτείται, κάτι που καθιστά δύσκολη την διαχείρισή τους. Οι πίνακες που προκύπτουν δεν έχουν κανονική ή διαγώνια δομή και συχνά απαιτούνται ειδικοί επιλύτες για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων, που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων της ροής [Κου98]. Παρ' όλα αυτά βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή (ειδικά για την επίλυση των εξισώσεων Euler), κυρίως λόγω του αυτοματοποιημένου τρόπου παραγωγής τους.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται τριδιάστατο μη δομημένο πλέγμα, που απαρτίζεται από τετράεδρα. Αποτελεί έναν εξαιρετικά ευέλικτο τύπο πλέγματος, κατάλληλο για σύνθετες γεωμετρίες. Ενώ θεωρητικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κάθε μέθοδο διακριτοποίησης, προσαρμόζεται πολύ καλύτερα στις μεθόδους πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων.

1.2.5 Προσεγγίσεις

Ανάλογα με την μέθοδο διακριτοποίησης που χρησιμοποιείται γίνονται και οι κατάλληλες προσεγγίσεις, ώστε να μεταβούμε από διαφορικές σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στην περίπτωση των πεπερασμένων διαφορών, επιλέγονται οι προσεγγίσεις των παραγώγων. Στην μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, προσεγγίζονται τα επιφανειακά και τα τριπλά ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις εξισώσεις (όταν αυτές ολοκληρωθούν στον κατάλληλο όγκο αναφοράς). Τέλος, στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται επιλογή των στοιχείων και των συναρτήσεων βαρύτητας (weighting functions).

Γενικότερα, η ακρίβεια των προσεγγίσεων καθορίζεται από πολλούς παράγοντες. Συνήθως, η υψηλή ακρίβεια απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό κόστος, πλέγμα υψηλής ποιότητας, παρουσιάζει δυσκολία κατά τον προγραμματισμό και παράγει περίπλοκους πίνακες. Κατά συνέπεια, γίνεται ένας συμβιβασμός μεταξύ της ακρίβειας, της απλότητας, της ευκολίας στην εφαρμογή και της υπολογιστικής αποδοτικότητας [Pap01].

1.2.6 Μέθοδος επίλυσης

Η διαδικασία των προσεγγίσεων αποφέρει ένα μεγάλο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (με μέγεθος ανάλογο του μεγέθους του πλέγματος). Σε μη-γραμμικά προβλήματα προκύπτει σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων επίσης. Ακόμα και σε γραμμικά προβλήματα, το σύστημα λύνεται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, κατά την οποία μια αρχική λύση βελτιώνεται σε κάθε επανάληψη. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία καλείται διαδικασία εσωτερικών επαναλήψεων. Η επιλογή του κατάλληλου επιλύτη εξαρτάται από τον τύπο του πλέγματος και από το πλήθος των κόμβων, που εμπλέκονται σε κάθε αλγεβρική εξίσωση. Σε περίπτωση μη-γραμμικών προβλημάτων, όπως αυτό που εξετάζει η παρούσα εργασία, οι εξισώσεις αρχικά γραμμικοποιούνται, ενώ στη συνέχεια υπολογίζεται η λύση του γραμμικού συστήματος. Και πάλι μια επαναληπτική διαδικασία αναλαμβάνει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της μη-γραμμικότητας, γνωστή ως διαδικασία εξωτερικών επαναλήψεων [Pap01].

1.2.7 Κριτήριο σύγκλισης

Τόσο οι εσωτερικές όσο και οι εξωτερικές επαναλήψεις, που αναφέρθηκαν παραπάνω, τερματίζονται μέσω ενός κριτηρίου σύγκλισης, το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη απόκλιση που καθορίζει ο χρήστης. Εναλλακτικά, οι επαναλήψεις τερματίζονται όταν ξεπεράσουν ένα προκαθορισμένο αριθμό, κατάλληλο ώστε να εξασφαλίζει ότι η συνέχιση της διαδικασίας δεν θα αποφέρει σημαντική ποιοτική βελτίωση της λύσης. Ο τερματισμός των επαναληπτικών διαδικασιών είναι κρίσιμος, καθώς επηρεάζει σημαντικά την ακρίβεια της λύσης και την αποδοτικότητα της μεθόδου.

1.3 Εισαγωγή στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων

Στην παρούσα εργασία, για την χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Σύμφωνα με αυτή, το πεδίο ροής υποδιαιρείται σε ένα σύνολο όγκων, που καλούνται όγκοι αναφοράς ή όγκοι ελέγχου ή κυψέλες ελέγχου (control volumes, CV). Το κέντρο κάθε όγκου αναφοράς αποτελεί και ένα διακριτό σημείο του πεδίου στο οποίο θα υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος, όπως η πίεση, η ταχύτητα, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κ.ά. Στην περίπτωση της κεντροκομβικής μεθόδου, το κέντρο ενός όγκου αναφοράς συμπίπτει με έναν κόμβο του πλέγματος, οπότε ο υπολογισμός των μεταβλητών στα κέντρα των όγκων αναφοράς είναι ισοδύναμος με τον υπολογισμό τους σε όλους τους κόμβους του πλέγματος. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις ολοκληρώνονται σε κάθε όγκο αναφοράς. Τα διπλά και τριπλά ολοκληρώματα που προκύπτουν κατά την ολοκλήρωση πρέπει να προσεγγιστούν από κατάλληλες σχέσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν την τιμή μιας μεταβλητής στο κέντρο του εξεταζόμενου όγκου αναφοράς, αλλά και στα κέντρα όλων των γειτονικών όγκων. Με παρεμβολή υπολογίζεται η τιμή της μεταβλητής στην διεπιφάνεια μεταξύ δύο γειτονικών όγκων αναφοράς, έχοντας τις τιμές της μεταβλητής στα κέντρα τους. Προκύπτει τελικά μια αλγεβρική εξίσωση για κάθε όγκο αναφοράς, με άγνωστη την τιμή της μεταβλητής στο κέντρο του αλλά και στα κέντρα των γειτονικών όγκων αναφοράς.

Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου συγκαταλέγεται η εφαρμοσιμότητά της σε κάθε τύπο πλέγματος, αλλά και η καταλληλότητά της σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Εξ' ορισμού η μέθοδος είναι συντηρητική, εφ' όσον τα επιφανειακά ολοκληρώματα είναι τα ίδια στις δύο πλευρές μιας διεπιφάνειας. Επιπλέον, όλες οι μεταβλητές που υπολογίζονται έχουν φυσική σημασία, κάτι που συμβάλλει στην ευρεία χρήση της μεθόδου. Μειονέκτημα αποτελεί η δυσκολία στην ανάπτυξη σχημάτων μεγαλύτερης ακρίβειας από την δεύτερη για τριδιάστατα μη-δομημένα πλέγματα. Περισσότερες λεπτομέρειες παρατίθενται στα επόμενα κεφάλαια [Pap01].

Κεφάλαιο 2

Οι εξισώσεις της ροής

2.1 Περιγραφή των εξισώσεων

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται οι εξισώσεις Euler που διέπουν την τριδιάστατη μη-συνεκτική ροή ενός συμπιεστού ρευστού. Διατυπώνεται μαθηματικά το πρόβλημα και καταγράφονται οι παραδοχές που το συνοδεύουν.

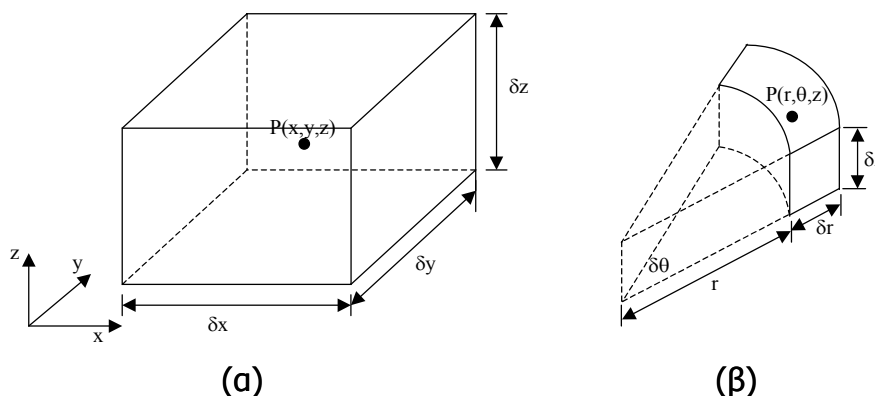
Οι βασικές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής βασίζονται στους ακόλουθους παγκόσμιους νόμους [Pap01]:

1. Διατήρηση της μάζας.
2. Δεύτερος νόμος του Newton (εξίσωση ορμής)
3. Διατήρηση της ενέργειας (Α' Θερμοδυναμικός Νόμος).

Η μερική διαφορική εξίσωση, που προκύπτει από την εφαρμογή της διατήρησης της μάζας σε ένα στοιχείο του ρευστού, καλείται Εξίσωση της Συνέχειας. Ο δεύτερος νόμος του Newton έχει ως αποτέλεσμα την διατύπωση τριών εξισώσεων ορμής, ενώ από τον νόμο της διατήρησης της ενέργειας, που ισοδυναμεί με τον Πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής, προκύπτει η εξίσωση της ενέργειας.

Για το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων, που αναφέρονται παραπάνω, απαιτούνται επιπλέον σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Μια σχέση που συνήθως χρησιμοποιείται είναι η καταστατική εξίσωση, η οποία συσχετίζει τα θερμοδυναμικά μεγέθη πίεση, πυκνότητα και θερμοκρασία.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή των παραπάνω νόμων σε ένα στοιχείο της ροής. Δύο τέτοια στοιχεία για Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες εικονίζονται στο σχήμα 2.1:

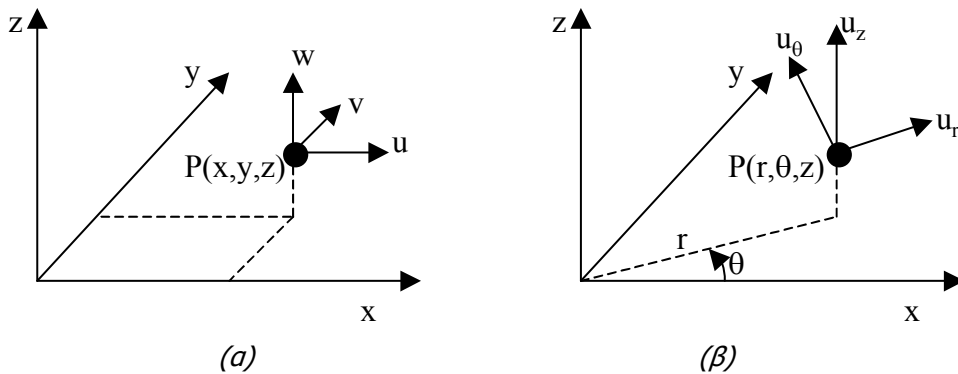


Σχήμα 2.1: Στοιχείο ροής για (α) Καρτεσιανές και (β) κυλινδρικές συντεταγμένες [Pap01].

Στη συνέχεια ακολουθεί η διατύπωση των εξισώσεων για το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Για το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις x, y, z συμβολίζονται με u, v, w αντίστοιχα (σχήμα 2.2α) και κάθε συνιστώσα ορίζεται από το σύστημα (x, y, z, t) [Pap01]. Για διευκόλυνση υιοθετείται και η σύμβαση άθροισης του Einstein σε περίπτωση εμφάνισης επαναλαμβανόμενων δεικτών. Η σύμβαση αυτή επιτρέπει την διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων σε συμπαγή μορφή. Για παράδειγμα, η αναπτυγμένη μορφή της εξίσωσης $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ είναι $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Στην περίπτωση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, με r, θ και z συμβολίζονται αντίστοιχα οι ακτινικές, περιφερειακές και αξονικές συντεταγμένες, ενώ με u_r, u_θ και u_z συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας στις αντίστοιχες διευθύνσεις (σχήμα 2.2β).



Σχήμα 2.2: Συνιστώσες της ταχύτητας για (α) Καρτεσιανό και (β) κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων [Pap01].

2.1.1 Εξίσωση Συνέχειας

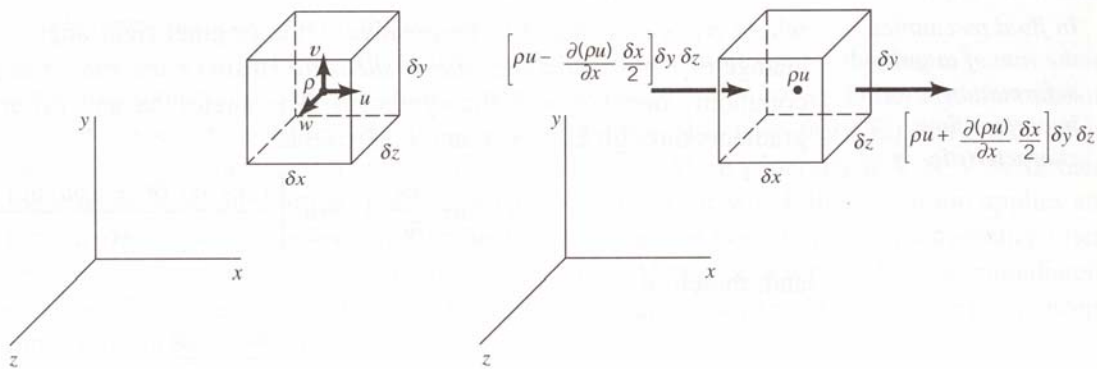
Η εξίσωση της συνέχειας, διατυπωμένη με τις Καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας (u, v, w) και σε συντηρητική μορφή έχει τη μορφή [Pap01]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Η παραπάνω εξίσωση ουσιαστικά είναι η μη χρονικά μόνιμη, τριδιάστατη εξίσωση διατήρησης της μάζας για συμπιεστό ρευστό. Διατυπώνεται σε διαφορική και αυστηρά συντηρητική μορφή. Η αντίστοιχη μη-συντηρητική μορφή της ίδιας εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left(\rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \left(\rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Από μαθηματική σκοπιά, οι δύο παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Ωστόσο κατά την εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου για την επίλυση των εξισώσεων προκύπτουν σοβαρές διαφορές. Ακολουθεί η μαθηματική απόδειξη της εξίσωσης (2.1) [Νικ04].



Σχήμα 2.3: Στιγμιότυπα από την κίνηση ενός στοιχείου ρευστού [Mun90].

Σύμφωνα με το σχήμα 2.3, θεωρούμε τον ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκο ελέγχου (όγκου αναφοράς) με διαστάσεις δx , δy , δz , στις τρεις διευθύνσεις στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η ταχύτητα του ρευστού στο κέντρο του όγκου συμβολίζεται με c , η πυκνότητά του με ρ , ενώ οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας έχουν τιμές u , v , w , αντίστοιχα, όπως εικονίζονται και στο σχήμα 2.3. Τέλος με \hat{n} συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια (με θετική την προς τα έξω φορά). Αγνοώντας πιθανές πηγές και τους αντίστοιχους όρους τους, η εξίσωση της συνέχειας σε ολοκληρωτική μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dV + \int_{CS} \rho \, \vec{c} \cdot \hat{n} \, dA = 0 \quad (2.3)$$

Θεωρούμε ότι οι διαστάσεις του όγκου ελέγχου είναι αρκετά μικρές, ώστε πρακτικά η μέση τιμή της πυκνότητας του ρευστού στο εσωτερικό του να ισούται με την τιμή της πυκνότητας στο κέντρο του. Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dV \approx \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_{CV} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\delta x \, \delta y \, \delta z) \quad (2.4)$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος πρέπει να υπολογιστούν οι ροές σε κάθε επιφάνεια του όγκου ελέγχου. Αυτές υπολογίζονται συναρτήσει της ροής στο κέντρο του, χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε σειρά Taylor, όπου λαμβάνονται υπ' όψη μόνο οι όροι χαμηλής τάξεως. Το μέγεθος που αναπτύσσεται με τη σειρά Taylor κατά την x -διεύθυνση είναι το γινόμενο ρu , καθώς η ροή μάζας μέσα από μια επιφάνεια υπολογίζεται από την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια. Αντίστοιχα πράττουμε και για τις άλλες διευθύνσεις.

Οπότε κατά την x -διεύθυνση και στην δεξιά πλευρά του όγκου ελέγχου ισχύει σύμφωνα με την ανάπτυξη κατά Taylor:

$$\rho u|_{x+\delta x/2} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (2.5)$$

ενώ για την αριστερή θα ισχύει αντίστοιχα:

$$\rho u|_{x-\delta x/2} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (2.6)$$

Συνεπώς, η συνολική ροή μάζας που εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου κατά την x -διεύθυνση θα δίδεται:

$$\begin{aligned} \delta \dot{m}_{out\ x} &= \rho u|_{x+\delta x/2} \cdot A - \rho u|_{x-\delta x/2} \cdot A = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] (\delta y\ \delta z) - \\ &\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] (\delta y\ \delta z) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} (\delta x\ \delta y\ \delta z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

όπου με A συμβολίζεται το εμβαδό της αριστερής και δεξιάς πλευράς του όγκου ελέγχου. Εξ' ορισμού κάθε ροή που εξέρχεται έχει θετικό πρόσημο, ενώ κάθε εισερχόμενη ροή έχει αρνητικό πρόσημο.

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και οι ροές μάζας και στις άλλες διευθύνσεις:

$$\delta \dot{m}_{out\ y} = \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] (\delta x\ \delta z) - \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] (\delta x\ \delta z) = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} (\delta x\ \delta y\ \delta z) \quad (2.8)$$

$$\delta \dot{m}_{out\ z} = \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] (\delta x\ \delta y) - \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] (\delta x\ \delta y) = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} (\delta x\ \delta y\ \delta z) \quad (2.9)$$

Η συνολική εξερχόμενη ροή μάζας από τον όγκο ελέγχου ισούται με το άθροισμα των τριών παραπάνω:

$$\begin{aligned} \delta \dot{m}_{out} &= \delta \dot{m}_{out\ x} + \delta \dot{m}_{out\ y} + \delta \dot{m}_{out\ z} = \\ &\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] (\delta x\ \delta y\ \delta z) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.4) και (2.10) στην εξίσωση της συνέχειας (2.3) καταλήγουμε στην αρχική εξίσωση (2.1) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\delta x \ \delta y \ \delta z) + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right](\delta x \ \delta y \ \delta z) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Μια ισοδύναμη και περισσότερο συνεπτυγμένη μορφή της παραπάνω εξίσωση είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{c} = 0 \quad (2.12)$$

Στην εξειδικευμένη περίπτωση της μόνιμης ροής ενός συμπιεστού ρευστού η χρονική παράγωγος της σχέσης (2.11) μηδενίζεται, οπότε η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \rho \vec{c} = 0 \quad (2.13)$$

2.1.2 Εξισώσεις Ορμής

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε ένα στοιχείο ρευστού οδηγεί στις εξισώσεις ορμής [Νικ04]. Σε ένα στοιχείο ρευστού ασκούνται επιφανειακές δυνάμεις, αλλά και δυνάμεις που ασκούνται σε ολόκληρο τον όγκο του, που οφείλονται στην δράση διάφορων πεδίων, όπως του ηλεκτρομαγνητικού και του βαρυτικού. Οι τελευταίες δυνάμεις πλην της βαρυτικής, μπορούν είτε να θεωρηθούν αμελητέες για ένα στοιχείο ρευστού, είτε να επιδρούν μόνο επιφανειακά και να συνυπολογίζονται στις επιφανειακές δυνάμεις. Όσο για την βαρυτική δύναμη, δίνεται από την σχέση:

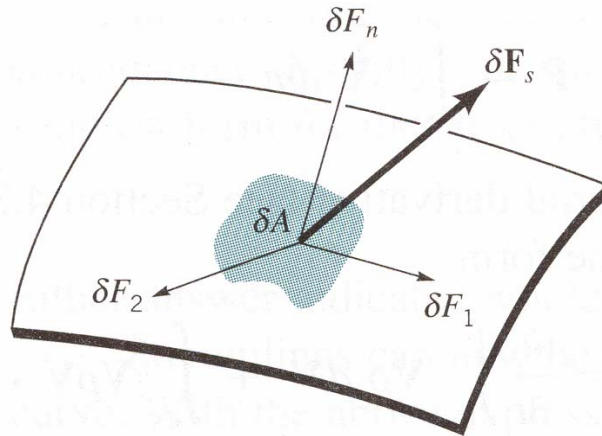
$$\delta \vec{F}_G = \delta m \vec{g} \quad (2.14)$$

όπου με δm συμβολίζεται η υπό εξέταση στοιχειώδης μάζα και με \vec{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η βαρυτική δύναμη αναλύεται σε τρεις συνιστώσες:

$$\begin{aligned} \delta F_{Gx} &= \delta m g_x \\ \delta F_{Gy} &= \delta m g_y \\ \delta F_{Gz} &= \delta m g_z \end{aligned} \quad (2.15)$$

Οι επιφανειακές δυνάμεις, που ασκούνται σε ένα στοιχείο ρευστού, οφείλονται στην επαφή του με άλλα στοιχεία του ρευστού, ή στην επαφή του με στερεά τοιχώματα. Στο ακόλουθο σχήμα 2.4 εικονίζεται μια στοιχειώδης

επιφάνεια του ρευστού με τυχαίο προσανατολισμό. Το εμβαδό της είναι ίσο με δA , ενώ πάνω της ασκείται μια στοιχειώδη δύναμη $\delta \vec{F}_s$ με τυχαίο προσανατολισμό. Η δύναμη αυτή αναλύεται σε τρεις συνιστώσες, εκ των οποίων η δF_n είναι κάθετη στην επιφάνεια και οι δF_1 και δF_2 είναι εφαπτόμενες σε αυτήν, κάθετες μεταξύ τους και κάθετες στην δF_n .



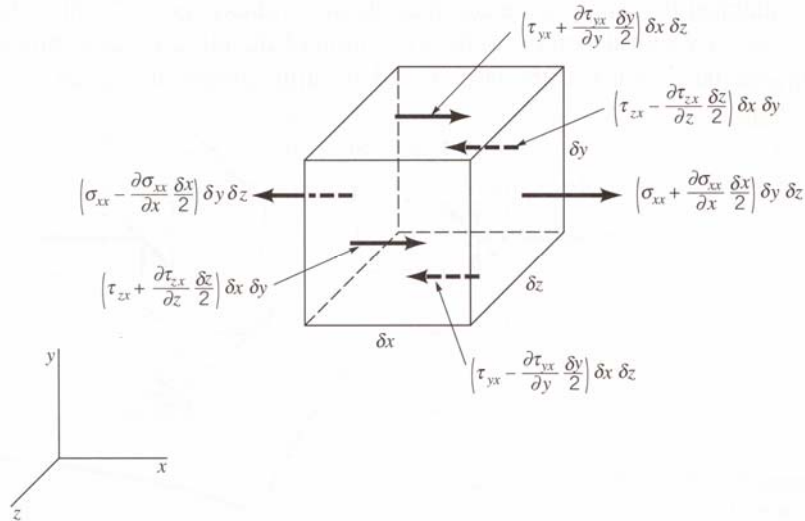
Σχήμα 2.4: Στοιχειώδης επιφάνεια ρευστού [Mun90].

Οι επιφανειακές τάσεις, που ασκούνται σε μια επιφάνεια του στοιχείου ρευστού, διακρίνονται στις ορθές τάσεις και στις διατμητικές τάσεις. Ο ορισμός των παραπάνω γίνεται με την βοήθεια των δυνάμεων δF_n , δF_1 και δF_2 . Αναλυτικά ορίζονται:

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \quad \tau_1 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_1}{\delta A} \quad \tau_2 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_2}{\delta A} \quad (2.16)$$

όπου με σ_n ορίζεται η ορθή τάση και με τ_1 και τ_2 ορίζονται οι διατμητικές τάσεις. Οι παραπάνω τάσεις στη συνέχεια θα εμφανίζονται πάντα με δύο δείκτες. Ο πρώτος υποδηλώνει το επίπεδο στο οποίο ενεργεί η τάση, σύμφωνα πάντα και με το σύστημα συντεταγμένων, ενώ ο δεύτερος δείκτης υποδηλώνει την κατεύθυνση της τάσης. Προφανώς οι δύο δείκτες ταυτίζονται όσον αφορά τις ορθές τάσεις. Η θετική φορά των τάσεων ορίζεται από το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, κάθετη σε μια επιφάνεια με φορά προς τα έξω. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, οι εφελκυστικές ορθές τάσεις έχουν θετικό πρόσημο, ενώ οι θλιπτικές έχουν αρνητικό.

Στη συνέχεια ακολουθεί η απεικόνιση κατά Lagrange, σύμφωνα με την οποία εφαρμόζεται ο Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα σε ένα στοιχείο ρευστού [Νικ04]. Εναλλακτικά, η ίδια απόδειξη μπορεί να προκύψει και από την απεικόνιση Euler σε στοιχειώδη όγκο ελέγχου.



Σχήμα 2.5: Στοιχείο ρευστού και τάσεις που ασκούνται [Mun90].

Στο σχήμα 2.5 εικονίζεται ένα στοιχείο ρευστού με σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων δx , δy , δz , με μάζα δm και πυκνότητα ρ . Θεωρούμε ότι στο κέντρο του εφαρμόζονται οι τρεις ορθές τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} και οι έξι διατμητικές τάσεις τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} και τ_{zy} . Βάσει των τάσεων αυτών υπολογίζονται οι τάσεις που επικρατούν στις πλευρές του στοιχείου χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη σε σειρά Taylor. Προκύπτει η ακόλουθη ορθή τάση για την δεξιά πλευρά του (επίπεδο y - z):

$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (2.17)$$

ενώ η αντίστοιχη στοιχειώδη δύναμη στην ίδια πλευρά θα είναι:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (2.18)$$

Όμοια, για την αριστερή πλευρά προκύπτει ορθή τάση:

$$\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (2.19)$$

και στοιχειώδη δύναμη:

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z \quad (2.20)$$

Η συνισταμένη δύναμη κατά την διεύθυνση x που προκαλείται μόνο από ορθές τάσεις στην εν λόγω διεύθυνση προκύπτει:

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.21)$$

Η συνολική δύναμη κατά την ίδια διεύθυνση που περιλαμβάνει εκτός από τις ορθές και τις διατμητικές τάσεις προκύπτει ύστερα από κατάλληλη ανάλυση:

$$\delta F_{Sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.22)$$

Οι αντίστοιχες δυνάμεις στις άλλες δύο διευθύνσεις προκύπτουν με όμοιο συλλογισμό:

$$\delta F_{Sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.23)$$

$$\delta F_{Sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) (\delta x \delta y \delta z) \quad (2.24)$$

Στο στοιχείο επομένως ασκείται μια επιφανειακή δύναμη, που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω δυνάμεων:

$$\delta \vec{F}_S = \delta F_{Sx} \hat{i} + \delta F_{Sy} \hat{j} + \delta F_{Sz} \hat{k} \quad (2.25)$$

Σε καθεμιά από τις τρεις διευθύνσεις ασκούνται και βαρυτικές δυνάμεις:

$$\begin{aligned} \delta F_{Gx} &= \delta m g_x = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_x \\ \delta F_{Gy} &= \delta m g_y = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_y \\ \delta F_{Gz} &= \delta m g_z = \rho (\delta x \delta y \delta z) g_z \end{aligned} \quad (2.26)$$

ενώ η συνισταμένη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο ρευστού είναι:

$$\delta \vec{F}_G = \delta F_{Gx} \hat{i} + \delta F_{Gy} \hat{j} + \delta F_{Gz} \hat{k} \quad (2.27)$$

Συνεπώς, η τελική δύναμη που ασκείται στο στοιχείο είναι η συνισταμένη της επιφανειακής και της βαρυτικής δύναμης:

$$\delta \vec{F} = \delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_G \quad (2.28)$$

Η εφαρμογή του Δεύτερου Νόμου του Newton συνοψίζεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\delta \vec{F} = \frac{D(\vec{c} \delta m)}{Dt} \quad (2.29)$$

όπου με \vec{c} συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας του στοιχείου. Σύμφωνα με την απεικόνιση κατά Lagrange και την αρχή διατήρησης της μάζας, η μάζα του στοιχείου του ρευστού που εξετάζεται δεν μεταβάλλεται. Η παραδοχή αυτή έχει ως αποτέλεσμα η σχέση (2.29) να γίνει:

$$\delta \vec{F} = \delta m \frac{D\vec{c}}{Dt} = \delta m \vec{a} = \rho (\delta x \delta y \delta z) \vec{a} \quad (2.30)$$

όπου με \vec{a} συμβολίζεται το διάνυσμα της επιτάχυνσης. Οι τρεις συνιστώσες της \vec{a}_x , \vec{a}_y και \vec{a}_z εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \quad (2.31)$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στο Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα τις σχέσεις των δυνάμεων και των επιταχύνσεων, προκύπτουν οι τελικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Οι τελευταίες σχέσεις έχουν μεγάλη γενικότητα, καθώς χαρακτηρίζουν την κίνηση οποιουδήποτε ρευστού, είτε αυτό είναι συμπιεστό, είτε ασυμπιεστό και είτε εξετάζεται μόνιμο, είτε μη μόνιμο πεδίο ροής. Η παραπάνω μορφή είναι μη συντηρητική και από αυτές προκύπτουν οι εξισώσεις Euler και οι εξισώσεις Navier-Stokes. Οι άγνωστοι, που περιλαμβάνονται σε αυτές, είναι 13: η πυκνότητα ρ , οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας u , v , w , οι τρεις ορθές τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} και οι έξι διατμητικές τάσεις τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} και τ_{zy} . Ο υπολογισμός των αγνώστων προϋποθέτει την μοντελοποίηση ενός συστήματος εξισώσεων ίσο σε πλήθος με αυτό των ζητούμενων αγνώστων. Πέρα από τις τρεις τελευταίες σχέσεις, είναι διαθέσιμη και η εξίσωση της συνέχειας, όπως διαμορφώθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, καθώς και η καταστατική εξίσωση του ρευστού, που θα παρουσιαστεί παρακάτω. Ωστόσο, υπολείπονται άλλες εννέα εξισώσεις για το κλείσιμο του συστήματος.

2.1.4 Οι εξισώσεις Navier- Stokes

Η περίπτωση των εξισώσεων Navier- Stokes δεν αφορά την παρούσα εργασία, οπότε δεν θα γίνει αναλυτική προσέγγισή τους, παρά μόνο αναφορά σε αυτές. Οι Navier και Stokes ξεκινώντας από το ελλειπές σύστημα εξισώσεων

που περιγράφεται παραπάνω, προσπάθησαν να επινοήσουν προσεγγιστικές εξισώσεις για τις τάσεις, ώστε να κλείσουν το σύστημα των εξισώσεων με εννέα νέες σχέσεις για να επιδέχεται επίλυση. Οι εξισώσεις που επινόησε ο καθένας τους βασίστηκαν σε ανεξάρτητες παραδοχές, όπως η επέκταση της θεωρίας της ελαστικότητας των στερεών στα ρευστά για τον Stokes. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις θεωρίες τους κρίθηκαν αρχικά αυθαίρετα, καθώς βασίστηκαν σε αυθαίρετες παραδοχές. Ωστόσο και οι δύο κατέληξαν σε αποτελέσματα που συμφωνούσαν μεταξύ τους, ενώ για τις περιπτώσεις που εφαρμόστηκαν επέδειξαν εξαιρετική συμφωνία με το πείραμα. Ως αποτέλεσμα, οι εξισώσεις τους, που πήραν και το όνομα των εμπνευστών τους, έγιναν καθολικά αποδεκτές.

2.1.5 Οι εξισώσεις Euler

Οι εξισώσεις Euler αποτελούν ειδική περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes [Νικ04]. Προκύπτουν από αυτές αν υποθέσουμε μηδενική τριβή, δηλαδή ροή μη συνεκτικού ρευστού. Στην περίπτωση αυτή δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις στην επιφάνεια του στοιχείου ρευστού (σχήμα 2.5), αλλά μόνο ορθές τάσεις. Οι τελευταίες είναι ίσες μεταξύ τους ανεξάρτητα της κατεύθυνσής τους. Κατά συνέπεια ισχύει:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}\end{aligned}\quad (2.33)$$

Επιπλέον, οι ορθές τάσεις ορίζουν και την πίεση p του ρευστού, σύμφωνα με την σχέση:

$$p = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}\quad (2.34)$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι η πίεση ορίζεται από την θλιπτική τάση που ασκείται στο ρευστό, και όχι από την εφελκυστική που εξ' ορισμού είναι θετική. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις (2.33) και (2.34) στη γενική έκφραση των εξισώσεων ορμής (2.32), προκύπτουν οι εξισώσεις Euler, σε μη συντηρητική μορφή:

$$\begin{aligned}\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (2.35)$$

Η ισχύς των εξισώσεων Euler είναι πολύ μεγάλη, καθώς η απόδειξή τους δεν βασίζεται σε κάποια παραδοχή, αλλά απορρέει από την εφαρμογή βασικών

νόμων. Η διατύπωσή τους ουσιαστικά εκφράζει τη θεμελιώδη αρχή διατήρησης της ορμής σε διαφορική μορφή. Η συντηρητική μορφή των εξισώσεων (με απουσία βαρυτικών δυνάμεων), η οποία θα χρησιμοποιείται στη συνέχεια, γράφεται:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.36)$$

2.1.6 Η εξίσωση της Ενέργειας (Α' Θερμοδυναμικός Νόμος)

Η εξίσωση της Ενέργειας εκφράζει τον Α' Θερμοδυναμικό Νόμο και επιβάλλει τη διατήρηση της ενέργειας κατά τη ροή του ρευστού. Ουσιαστικά αποτελεί έναν ισολογισμό μεταξύ της εσωτερικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, της πίεσης και της θερμότητας.

Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας αναφέρεται σε κυψέλη ελέγχου με όγκο CV και εμβαδό εξωτερικής επιφάνειας A [Νικ04]:

$$\frac{d}{dt} \oint_{CV} E \rho dV = - \oint_A h_t \rho c_n dA + \dot{Q} - \dot{W} \quad (2.37)$$

όπου με \dot{Q} συμβολίζεται η ροή θερμότητας (με θετικό πρόσημο όταν είναι εισερχόμενη), με \dot{W} συμβολίζεται η μηχανική ισχύς (με θετικό πρόσημο όταν είναι εξερχόμενη) και με h_t η ολική ειδική ενθαλπία (ολική ενθαλπία ανά μονάδα μάζας). Επίσης με E συμβολίζεται η ειδική ενέργεια, για την οποία ισχύει:

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (2.38)$$

όπου με e συμβολίζεται η ειδική εσωτερική ενέργεια (ανά μονάδα μάζας). Στην εξίσωση (2.38) δεν έχει συμπεριληφθεί στο δεύτερο μέλος ο όρος της δυναμικής ενέργειας λόγω υψομετρικής διαφοράς (λόγω βαρύτητας), αφού αυτός είναι αμελητέος στα αέρια που εξετάζουμε. Ο πρώτος όρος της σχέσης (2.37) αναφέρεται στη χρονική μεταβολή της αποθηκευμένης ενέργειας στο ρευστό εντός του όγκου ελέγχου CV . Ο δεύτερος όρος αναφέρεται στη εισροή ενέργειας στον όγκο ελέγχου CV μαζί με την εισερχόμενη παροχή μάζας. Για αδιαβατική και άεργη ροή ισχύει $\dot{Q} = 0, \dot{W} = 0$.

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης της ενέργειας για μη συνεκτική και αδιαβατική ροή χωρίς πηγές θερμότητας δίδεται [Κου98]:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} + \frac{\partial((\rho E + p)w)}{\partial z} = 0 \quad (2.39)$$

2.1.7 Η καταστατική εξίσωση του ρευστού

Μια από τις εξισώσεις του απαιτούνται για να κλείσει το προς επίλυση σύστημα είναι και η γνωστή καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου [Pap01]. Για την αξιοποίησή της γίνεται η παραδοχή της θερμοδυναμικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι το ρευστό προσαρμόζεται πρακτικά ακαριαία σε οποιαδήποτε μεταβολή επηρεάζει την ισορροπία του, παρόλο που οι ιδιότητες ενός στοιχείου του μπορούν να μεταβάλλονται ταχύτατα κατά την κίνησή του.

Η θερμοδυναμική κατάσταση ενός ρευστού μπορεί να προσδιοριστεί γνωρίζοντας τις τιμές δύο μόνο μεταβλητών του, καθώς οι υπόλοιπες καθορίζονται από την καταστατική εξίσωση. Οπότε αν γνωρίζουμε την τιμή της πυκνότητας ρ και της θερμοκρασίας του T , μπορούμε να υπολογίσουμε είτε την πίεση p είτε την ειδική εσωτερική ενέργεια e . Ειδικότερα, στην περίπτωση του ιδανικού αερίου οι αντίστοιχες σχέσεις είναι:

$$p = \rho R T \quad (2.40)$$

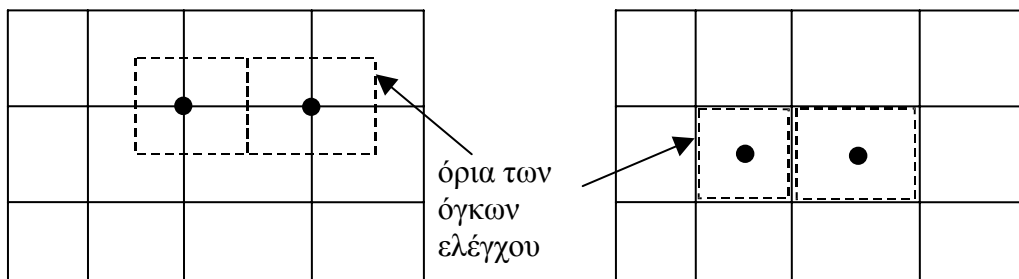
$$e = c_v T \quad (2.41)$$

όπου με c_v συμβολίζεται η ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο.

2.2 Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Αποτελεί μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδο χωρικής διακριτοποίησης, που ουσιαστικά μετατρέπει το πολύπλοκο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων σε ένα επιλύσιμο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Η χρήση της μεθόδου επιτρέπει τη διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν τη ροή του ρευστού, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις σε όγκους ελέγχου (Control Volumes, CV). Οι τελευταίοι περιέχουν τα διακριτά σημεία του πεδίου, στα οποία θα υπολογιστούν οι μεταβλητές επίλυσης, τα οποία καλούνται και υπολογιστικοί κόμβοι. Υπάρχουν δύο τρόποι παράστασης των υπολογιστικών κόμβων. Στην πρώτη περίπτωση κάθε υπολογιστικός κόμβος, στον οποίο θα αποθηκευτούν και τα ζητούμενα μεγέθη, εντοπίζεται σε σημείο τομής των γραμμών του πλέγματος και τα όρια των όγκων αναφοράς εντοπίζονται ενδιάμεσα μεταξύ γειτονικών υπολογιστικών κόμβων. Στην δεύτερη περίπτωση, οι γραμμές του πλέγματος διαμορφώνουν τα όρια των όγκων αναφοράς και οι υπολογιστικοί κόμβοι βρίσκονται στα κέντρα τους. Η πρώτη περίπτωση που περιγράφηκε ονομάζεται κεντροκομβική μέθοδος, ενώ η δεύτερη ονομάζεται κεντροκυψελική. Για Καρτεσιανό διδιάστατο δομημένο πλέγμα δίδονται στο σχήμα 2.6. Και οι δύο μέθοδοι χρησιμοποιούνται ευρέως με επιτυχία, ενώ στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η κεντροκομβική μέθοδος (για μη δομημένο πλέγμα).



Σχήμα 2.6: Κεντροκομβική και κεντροκυψελική μέθοδος [Pap01].

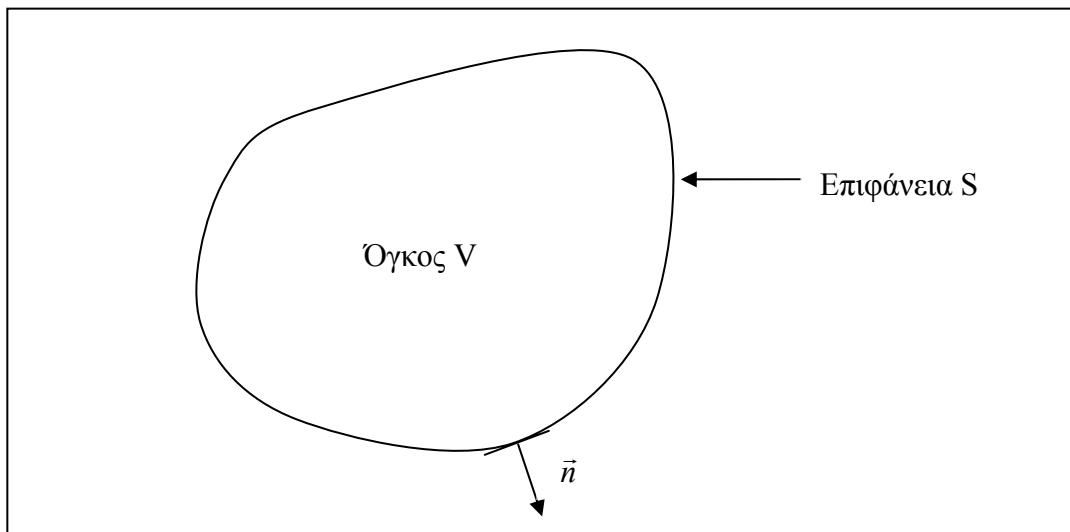
Πριν την αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων κρίνεται σκόπιμη η εύρεση μιας κοινής έκφρασης τόσο για την εξίσωση της συνέχειας, όσο και για τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής και της ενέργειας [Pap01]. Η εξίσωση αυτή θα περιγράφει γενικά τις εξισώσεις, που απαρτίζουν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, και θα χρησιμοποιηθεί κατά την εφαρμογή και ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων. Η εξίσωση αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \Phi)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \Phi)}{\partial z} = S_{\Phi} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \Phi) = S_{\Phi} \quad (2.42)$$

Για την εξίσωση (2.42) αποδεικνύεται ότι όλες οι μερικές διαφορικές εξισώσεις της ροής (Συνέχειας, Ορμής και Ενέργειας) μπορούν να έλθουν στη μορφή αυτή. Η γενικευμένη εξίσωση (2.42) αποτελεί την απαρχή των υπολογιστικών διαδικασιών είτε για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, είτε για τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, η οποία παρουσιάζεται στην συνέχεια.

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.42) σε κάθε όγκο αναφοράς βασίζεται στο θεώρημα του Gauss. Το εν λόγω θεώρημα δίνει την ισότητα μεταξύ ενός ολοκληρώματος σε έναν όγκο V και ενός ολοκληρώματος κατά μήκος της επιφάνειας S που ορίζει τον όγκο V . Ακολουθεί η απεικόνιση των ορίων εφαρμογής του θεωρήματος στο σχήμα 2.7:

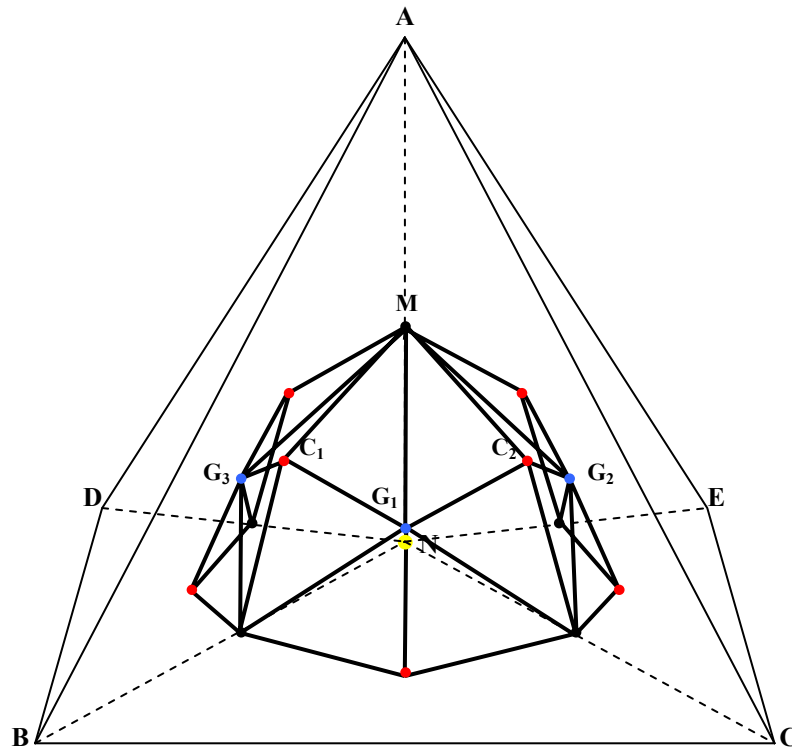


Σχήμα 2.7: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος Gauss [Pap01].

Αν υποθεθεί ότι με \vec{n} συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S , για το οποίο ορίζεται θετική φορά όταν εξέρχεται από τον όγκο V , τότε η μαθηματική έκφραση του θεωρήματος Gauss είναι η ακόλουθη:

$$\iiint_V \text{div}(\vec{q}) dV = \iint_S \vec{q} \vec{n} dS \quad (2.43)$$

Στο επόμενο σχήμα 2.8 εικονίζεται ένα τμήμα ενός όγκου ελέγχου τριδιάστατου μη δομημένου πλέγματος, στον οποίο θα ολοκληρωθεί η εξίσωση (2.42). Το τμήμα αυτό σχηματίζεται από τα επιμέρους τμήματα του όγκου ελέγχου, που συνεισφέρουν τρία από τα τετράεδρα, στα οποία ανήκει ο κόμβος **N** (εικονίζεται με κίτρινο χρώμα). Επίσης εικονίζονται τα μέσα των ακμών (με μαύρο χρώμα), τα βαρύκεντρα των εδρών των τετραέδρων και τα κέντρα τους (με μπλε χρώμα). Συγκεκριμένα οι κόμβοι **A**, **B**, **C**, **D**, **E** είναι γειτονικοί του κόμβου **N** και τα σημεία **G₁**, **G₂**, **G₃** είναι τα κέντρα των τετραέδρων **ABCN**, **AECN** και **ABDN** αντίστοιχα.



Σχήμα 2.8: Τμήμα κυψέλης ελέγχου για τριδιάστατο μη δομημένο πλέγμα.

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.42) εκφράζεται μαθηματικά:

$$\iiint_{CV} \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} dV + \iiint_{CV} \text{div}(\rho \vec{u} \Phi) dV = \iiint_{CV} S_\Phi dV \quad (2.44)$$

Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός μεταβολής του παράγοντα $\rho\Phi$ είναι σταθερός για τον όγκο ελέγχου που εξετάζεται (κάτι που αποτελεί αρκετά καλή υπόθεση στην περίπτωση που ο τελευταίος έχει μικρές διαστάσεις), ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.44) προσεγγίζεται:

$$\iiint_{CV} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV \cong \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} VOL \quad (2.45)$$

όπου με VOL συμβολίζεται ο όγκος του όγκου ελέγχου. Η εφαρμογή του θεωρήματος Gauss για τον δεύτερο όρο δίνει:

$$\iiint_{CV} \text{div}(\rho \vec{u} \Phi) dV = \iint_S \rho \vec{u} \Phi \vec{n} ds = \iint_S \rho \Phi \vec{u} \vec{n} ds = \sum_i \iint_{S_i} \rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i ds \quad (2.46)$$

όπου με S συμβολίζεται η συνολική επιφάνεια του όγκου ελέγχου και με \vec{n} συμβολίζεται το κάθετο σ' αυτή διάνυσμα. Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται αθροίζοντας τα επιμέρους ολοκληρώματα, που αντιστοιχούν σε μικρά τριγωνικά τμήματα της επιφάνειας του όγκου ελέγχου, όπως τα επιμέρους επίπεδα τμήματα $\mathbf{MC}_1\mathbf{G}_1$ και $\mathbf{MC}_2\mathbf{G}_1$ του σχήματος 2.8. Επομένως, ο δεύτερος όρος υπολογίζεται από το άθροισμα των ολοκληρωμάτων που αντιστοιχούν σε όλα τα i τριγωνικά τμήματα, τα οποία απαρτίζουν την επιφάνεια του όγκου ελέγχου, ενώ με \vec{n}_i συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα στο i επίπεδο τμήμα. Ο υπολογισμός των επιμέρους ολοκληρωμάτων απαιτεί την γνώση του όρου $\rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i$ σε όλα τα σημεία κάθε τριγώνου. Αυτό ασφαλώς δεν είναι εφικτό, καθώς υπολογίζονται οι τιμές μόνο στο κέντρο κάθε όγκου ελέγχου. Αντί αυτού χρησιμοποιείται μια προσέγγιση, λαμβάνοντας την τιμή του παραπάνω όρου στο μέσο κάθε ακμής, που ξεκινά από τον κόμβο \mathbf{N} . Για παράδειγμα, για την ακμή \mathbf{NA} του σχήματος 2.8 επιλύεται το τοπικό πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων που αντιστοιχούν στους δύο ακραίους κόμβους της ακμής (κόμβοι \mathbf{N} και \mathbf{A}) και υπολογίζεται η μέση κατά Roe τιμή του όρου $\rho \Phi$ στο μέσο \mathbf{M} της ακμής. Η τιμή αυτή θεωρείται σταθερή στις τριγωνικές επιφάνειες $\mathbf{MC}_1\mathbf{G}_1$ και $\mathbf{MC}_2\mathbf{G}_1$, οπότε υπολογίζονται τα ολοκληρώματα πάνω στις επιφάνειες αυτές, αφού υπολογιστούν και τα κάθετα διανύσματα \vec{n}_i :

$$\iint_i \rho_i \Phi_i \vec{u}_i \vec{n}_i ds = \overline{\rho \Phi \vec{u} \vec{n}} \Big|_M S_i \quad (2.47)$$

όπου με S_i συμβολίζεται το εμβαδό του τριγωνικού επιπέδου i , ενώ με την πάνω παύλα συμβολίζεται ο μέσος όρος. Τέλος, ο τρίτος όρος της εξίσωσης (2.44) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\iiint_{CV} S_\Phi dV = S_\Phi VOL \quad (2.48)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς τη γεωμετρία του όγκου ελέγχου. Μπορούν εν γένει να χρησιμοποιηθούν πολυεδρικές τριδιάστατες γεωμετρίες. Οι όγκοι ελέγχου μπορούν να έχουν αυθαίρετο πλήθος γειτονικών όγκων και αυθαίρετη γεωμετρία. Αυτός είναι και ο λόγος που η μέθοδος πεπερασμένων όγκων είναι ιδανική για πολύπλοκες γεωμετρίες και μπορεί να διαχειριστεί εύκολα τα μη-δομημένα πλέγματα.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler, που περιγράφουν τη ροή συμπιεστού, μη-συνεκτικού ρευστού γύρω από στερεό σε μη-δομημένα τριδιάστατα πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων. Η επίλυση πραγματοποιείται με χρονοπροέλαση πεπερασμένων όγκων. Αναλύεται η χωρική διακριτοποίηση του πεδίου ροής, ο ορισμός των όγκων ελέγχου, η διακριτοποίηση των εξισώσεων και η πολυβηματική επίλυσή τους, καθώς και η αριθμητική επιβολή των οριακών συνθηκών.

3.1 Χωρική διακριτοποίηση του πεδίου ροής

Για την επίλυση των τριδιάστατων εξισώσεων Euler είναι κατ' αρχήν απαραίτητη η διακριτοποίηση του πεδίου της ροής [Κου98]. Αυτή επιτυγχάνεται με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, μέσω μη-δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων. Ο χώρος διακριτοποιείται σε τετράεδρα, που καλύπτουν πλήρως το πεδίο ροής, χωρίς ωστόσο να αλληλοκαλύπτονται. Σε κάθε κόμβο του πλέγματος ορίζεται κατάλληλα και ο όγκος ελέγχου, στον οποίο ολοκληρώνονται οι προς επίλυση εξισώσεις.

Η χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων κρίνεται εν γένει πλεονεκτικότερη από τη χρήση δομημένων πλεγμάτων. Το σημαντικότερο πλεονέκτημά τους έγκειται στο γεγονός ότι έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόζονται κατάλληλα ακόμα και σε πολύπλοκες γεωμετρίες, ενώ έχουν και τη δυνατότητα τοπικής προσαρμογής του πλέγματος κατά την εξέλιξη της λύσης. Η τελευταία δυνατότητα βελτιώνει σημαντικά την ποιότητα και την ακρίβεια της λύσης, καθώς το πλέγμα μπορεί να πυκνώσει σε σημεία ενδιαφέροντος, όπως σε ασυνέχειες της ροής, ενώ ταυτόχρονα μπορεί να αραιώσει σε σημεία που δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, μειώνοντας έτσι τις υπολογιστικές απαιτήσεις. Η αξιοποίηση αυτής της δυνατότητας βέβαια προϋποθέτει την ανάπτυξη κατάλληλου λογισμικού και δεν αξιοποιείται προς το παρόν από το λογισμικό που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

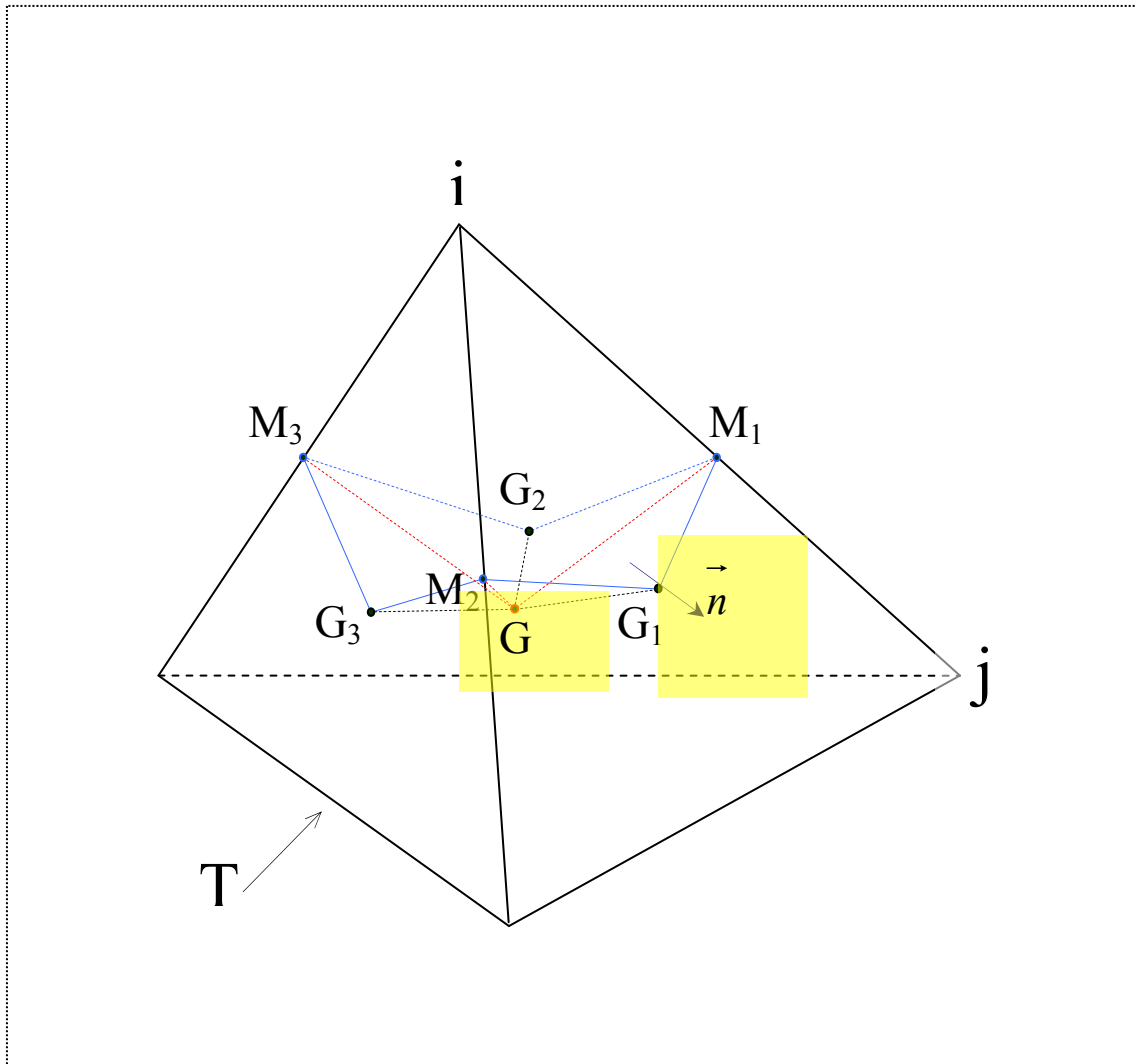
Ωστόσο, η χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων απαιτεί συνήθως μεγαλύτερη υπολογιστική μνήμη από τα αντίστοιχα δομημένα πλέγματα. Η διαχείρισή τους απαιτεί συχνά την ανάπτυξη πολύπλοκων δομών δεδομένων με έμμεση διαχείριση μνήμης, καθώς ο ορισμός της θέσης ενός κόμβου δεν μπορεί να γίνει με την χρήση τριών ορισμάτων i , j , k , κάτι που είναι εφικτό στα δομημένα πλέγματα.

Η γένεση των τριδιάστατων πλεγμάτων, που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάπτυξη και μελέτη του λογισμικού, πραγματοποιήθηκε με δύο τρόπους. Ο πρώτος αφορά στη χρήση του εμπορικού πακέτου ANSYS ICEM CFD 5.1. Ο δεύτερος τρόπος βασίστηκε στην εκμετάλλευση διδιάστατων μη-δομημένων πλεγμάτων, τα οποία παράχθηκαν με τη μέθοδο Delaunay, και την δημιουργία τριδιάστατων πλεγμάτων με την παράλληλη μεταφορά τους κατά την τρίτη διεύθυνση.

3.2 Ορισμός των όγκων ελέγχου

Σε κάθε κόμβο του πλέγματος αντιστοιχεί και ένας όγκος ελέγχου, που καλείται εναλλακτικά και κυψέλη ελέγχου [Κου98]. Οι όγκοι ελέγχου καλύπτουν πλήρως το πεδίο της ροής χωρίς ωστόσο να αλληλοκαλύπτονται, όπως και τα τετράεδρα του πλέγματος. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται και επιλύονται σε κάθε όγκο, εφαρμόζοντας είτε την κεντροκυψελική (cell-centered, [Pan93]), είτε την κεντροκομβική μέθοδο (vertex-centered, [Sla94]). Στην πρώτη μέθοδο οι όγκοι ελέγχου είναι τα τετράεδρα του πλέγματος και οι μεταβλητές επίλυσης υπολογίζονται και αποθηκεύονται σε κάθε ένα. Στη δεύτερη περίπτωση, που υιοθετείται και στην παρούσα εργασία, οι μεταβλητές επίλυσης αναφέρονται τους κόμβους του πλέγματος, γύρω από τους οποίους σχηματίζονται και οι όγκοι ελέγχου (σχήμα 2.8).

Ειδικότερα, στην κεντροκομβική προσέγγιση η κυψέλη ελέγχου σχηματίζεται γύρω από έναν κόμβο από επιμέρους επιφάνειες [Κου98]. Οι τελευταίες προκύπτουν από την σύνδεση ενός εσωτερικού σημείου κάθε τετραέδρου, στο οποίο ανήκει ο κόμβος, με τα μέσα των ακμών που ξεκινούν από αυτόν και με ένα εσωτερικό σημείο κάθε έδρας του τετραέδρου που έχει για κορυφή τον κόμβο. Στο σχήμα 3.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται η συνεισφορά ενός τετραέδρου T στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο i .



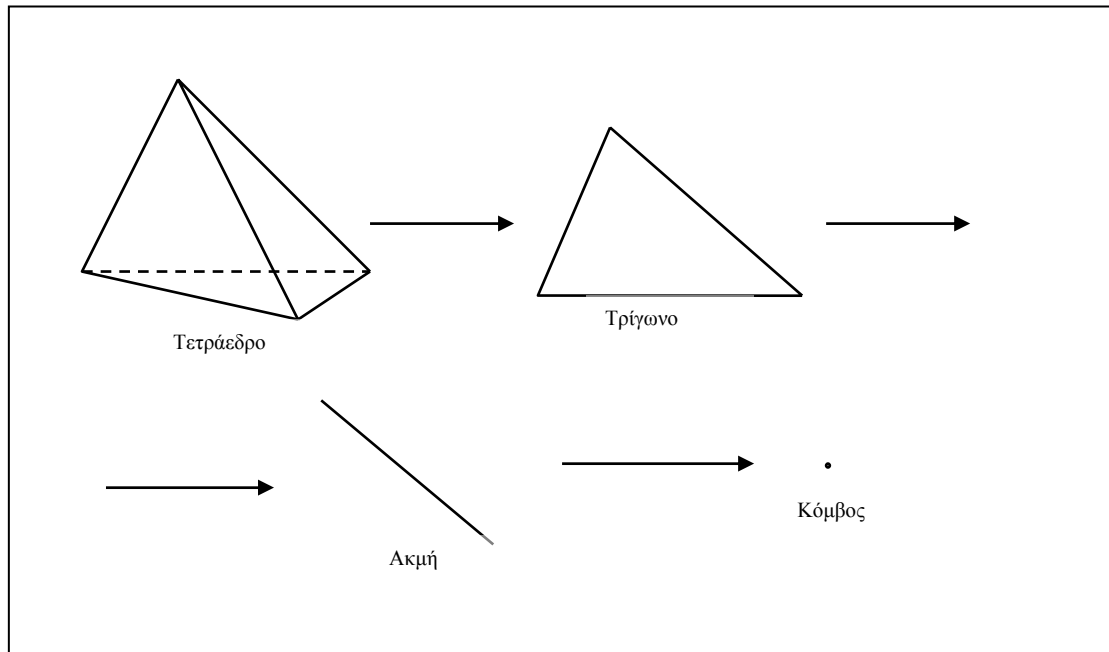
Σχήμα 3.1: συνεισφορά του τετραέδρου T στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο i [Κου98].

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα 3.1, το εσωτερικό σημείο του τετραέδρου, που αναφέρεται παραπάνω, είναι το βαρύκεντρο (σημείο G), ενώ το αντίστοιχο εσωτερικό σημείο για τις τρεις έδρες είναι επίσης το βαρύκεντρό τους (σημεία G_1, G_2, G_3). Αντί για αυτά μπορούν να ληφθούν και άλλα σημεία, όπως το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου κάθε τριγώνου. Τέλος, τα σημεία M_1, M_2, M_3 του σχήματος αντιστοιχούν στα μέσα των αντίστοιχων ακμών.

3.3 Τοπολογική δομή δεδομένων

Η περιγραφή και αναπαράσταση του τριδιάστατου πλέγματος προϋποθέτει την ανάπτυξη και διαχείριση ενός συνόλου δομών δεδομένων, αφού προφανώς δεν επαρκεί μόνο η πληροφορία των συντεταγμένων κάθε κόμβου. Οι ελάχιστες δυνατές επιπλέον δομές που απαιτούνται για τον επαρκή ορισμό του πλέγματος είναι μια δομή με τις κορυφές κάθε τετραέδρου και μια ακόμα με τις οριακές έδρες ή τους οριακούς κόμβους. Πέρα από αυτές, είναι δυνατή

η ανάπτυξη μιας πολυπλοκότερης τοπολογικής δομής δεδομένων, η οποία θα συμβάλει στην αποδοτικότερη και ταχύτερη λειτουργία του επιλύτη. Κατά την ανάπτυξη του αλγορίθμου αναπτύχθηκε η ιεραρχική δομή δεδομένων, που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.2, η οποία είναι τυπική για τριδιάστατα μη δομημένα πλέγματα.



Σχήμα 3.2: Ιεραρχική τοπολογική δομή δεδομένων του τριδιάστατου πλέγματος.

3.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ολοκληρώνεται σε κάθε όγκο ελέγχου. Στη συνέχεια της παραγράφου παρουσιάζεται η ολοκλήρωση και η διακριτοποίηση μιας τυπικής εξίσωσης διατήρησης εκφρασμένη για κάθε κόμβο του πλέγματος [Κου98].

Η τριδιάστατες εξισώσεις σε συντηρητική διανυσματική μορφή και στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y,z) έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{J}^{inv}}{\partial z} = \vec{S} \quad (3.1)$$

Ο εκθέτης inv (inviscid) στα διανύσματα της ροής $\vec{F}^{inv}, \vec{G}^{inv}, \vec{J}^{inv}$ κατά τις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα θα παραλείπεται στη συνέχεια, καθώς η ροή στις εξισώσεις Euler είναι ούτως ή άλλως ατρίβης και δεν συμπεριλαμβάνονται συνεκτικοί όροι. Με \vec{W} συμβολίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών

μεταβλητών κατάστασης $\vec{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$, ενώ με \vec{S} συμβολίζεται το διάνυσμα των όρων πηγής. Με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα του ρευστού, με \vec{V} συμβολίζεται το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού σε κάποιο σημείο, ενώ οι Καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις x, y και z συμβολίζονται με u, v και w αντίστοιχα. Η ειδική ενέργεια του ρευστού συμβολίζεται με E και δίνεται από την σχέση:

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (3.2)$$

Όπου με e συμβολίζεται η ειδική εσωτερική ενέργεια (εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας). Τέλος, τα διανύσματα της ροής $\vec{F}, \vec{G}, \vec{J}$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \quad \vec{J} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Με p συμβολίζεται η πίεση του ρευστού. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στις εξισώσεις που προηγήθηκαν έχουν παραλειφθεί οι όροι της βαρύτητας, καθώς αυτοί θεωρούνται αμελητέοι για αέρια (συμπιεστά ρευστά) και δεν εξετάζονται. Τέλος, γίνεται και η παραδοχή του τελείου αερίου, οπότε ισχύει και η γνωστή καταστατική εξίσωση:

$$p = \rho R_g T \quad (3.4)$$

όπου με T συμβολίζεται η απόλυτη θερμοκρασία του ρευστού και R_g είναι η σταθερά τελείου αερίου του συγκεκριμένου αερίου που εξετάζεται κάθε φορά. Με την καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου κλείνει το σύστημα των εξισώσεων, που διέπουν την ατρίβή ροή ενός συμπιεστού ρευστού. Οι άγνωστες μεταβλητές του συστήματος είναι πλέον πέντε, όσες και οι εξισώσεις. Η ολοκλήρωση του συστήματος με τη χρήση διακριτοποίησης αποδίδει τις τιμές των παραμέτρων της ροής όπως η ταχύτητα, η πίεση, η πυκνότητα και η απόλυτη θερμοκρασία σε διακριτά σημεία του ρευστού.

3.5 Παραδοχές

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος των διαφορικών εξισώσεων προϋποθέτει την παραδοχή του τελείου αερίου, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως [Κου98]. Η παραδοχή αυτή προβλέπει ότι για το ρευστό ισχύει η καταστατική εξίσωση του θερμικά και θερμοδυναμικά τελείου αερίου, η οποία περιγράφεται από την εξίσωση (3.4). Η σταθερά R_g συσχετίζεται με τις ειδικές θερμοχωρητικότητες σταθερής πίεσης και σταθερού όγκου (c_p και c_v αντίστοιχα) με τις σχέσεις:

$$R_g = c_p - c_v \quad , \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.5)$$

όπου με γ συμβολίζεται ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής του τελείου αερίου. Με την ισχύ της καταστατικής εξίσωσης (3.4), προκύπτει μια νέα σχέση μεταξύ της ολικής ειδικής ενέργειας του ρευστού και της πίεσης, όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια:

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (3.6)$$

ενώ η ολική ειδική ενθαλπία του ρευστού ορίζεται ως:

$$h_t = \frac{\rho E + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (3.7)$$

3.6 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Πριν την διακριτοποίηση των παραπάνω εξισώσεων και την επίλυσή τους, είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίησή τους [Κου98]. Αυτή επιτυγχάνεται διαιρώντας τα μεγέθη με αντίστοιχα μεγέθη αναφοράς. Κατά συνέπεια, ορίζονται κατάλληλα μεγέθη αναφοράς, όπως το μήκος L_{ref} , ταχύτητα V_{ref} και η πυκνότητα ρ_{ref} . Η αδιαστατοποιημένη ποσότητα της σταθεράς R_g ορίζεται ως $(R_g)_{ref} = c_v$. Για τα υπόλοιπα θερμοδυναμικά μεγέθη η αδιαστατοποίηση γίνεται βάση των παραπάνω ποσοτήτων. Έτσι προκύπτουν τα μεγέθη:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L_{ref}} \quad , \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{V_{ref}} \quad , \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_{ref}} \quad , \quad \tilde{R}_g = \frac{R_g}{c_v} = \gamma - 1 \quad ,$$

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \frac{p}{\rho_{ref} V_{ref}^2} \quad , \quad \tilde{e} = \frac{e}{V_{ref}^2} \quad , \quad \tilde{E} = \frac{E}{V_{ref}^2} \quad , \quad \tilde{T} = \frac{T}{V_{ref}^2 / c_v} \\ \tilde{h}_t &= \frac{h_t}{\rho_{ref} V_{ref}^2} \quad , \quad \tilde{t} = \frac{t}{L_{ref} / V_{ref}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας τα αδιαστατοποιημένα μεγέθη στις εξισώσεις προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή του συστήματος των εξισώσεων. Η αριθμητική επίλυση εφαρμόζεται στο αδιαστατοποιημένο σύστημα, αφού προηγουμένως γραμμικοποιηθεί. Στη συνέχεια θα γίνεται αναφορά πάντα στα αδιαστατοποιημένα μεγέθη και για απλοποίηση θα παραλείπεται το σύμβολο της αδιαστατοποίησης.

3.7 Ολοκλήρωση των εξισώσεων

Οι εξισώσεις (3.1) ολοκληρώνονται στην κυψέλη ελέγχου C_P ενός τυχαίου κόμβου P [Κου98]:

$$\iiint_{C_P} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy dz + \iiint_{C_P} \left(\frac{\partial \vec{F}^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}^{inv}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{J}^{inv}}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_{C_P} \vec{S} dx dy dz \quad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss το τριπλό ολοκλήρωμα που παρουσιάζεται μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα κατά μήκος του ορίου ∂C_P της κυψέλης ελέγχου C_P :

$$\iiint_{C_P} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy dz + \iint_{\partial C_P} \vec{H}^{inv} ds = \iiint_{C_P} \vec{S} dx dy dz \quad (3.10)$$

Το τμήμα του ορίου ∂C_i της κυψέλης ελέγχου C_i , που συνεισφέρει το τετράεδρο T , εικονίζεται στο σχήμα 3.1 και ουσιαστικά σχηματίζεται από τα τρίγωνα που παρουσιάζονται και έχουν κορυφές τα σημεία $G, G_1, G_2, G_3, M_1, M_2, M_3$. Σε κάθε στοιχειώδες επίπεδο τμήμα εμβαδού ds , δηλαδή σε κάθε τρίγωνο, αντιστοιχεί το κάθετό του διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της κυψέλης ελέγχου και μέτρο ίσο με το εμβαδόν ds . Στην εξίσωση (3.10) με \vec{H}^{inv} συμβολίζεται το διάνυσμα ροής ανά μονάδα επιφάνειας που διασχίζει κάθε τρίγωνο, για το οποίο ισχύει:

$$\vec{H}^{inv} = \hat{n}_x \vec{F} + \hat{n}_y \vec{G} + \hat{n}_z \vec{J} \quad (3.11)$$

όπου με

$$\vec{\hat{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z) \quad (3.12)$$

συμβολίζεται το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην αντίστοιχη επιφάνεια.

Η διαμέριση του ορίου ∂C_p σε επιμέρους τριγωνικά εμβαδά γίνεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση [Κου98]:

$$(\partial C_p) = \bigcup_{Q \in K_N(P)} \partial C_{PQ} + (\partial C_p \cap S) \quad (3.13)$$

όπου ισχύει $S = \partial D$. Με $K_N(P)$ συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που συνδέονται άμεσα με τον κόμβο P μέσω μιας ακμής, ενώ με ∂C_{PQ} συμβολίζεται η τομή των ορίων των όγκων ελέγχου C_p και C_Q που συνορεύουν. Σύμφωνα με αυτή τη διαμέριση, η (3.10) γίνεται [Κου98]:

$$\iiint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy dz + \sum_{Q \in K_N(P)} \iint_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} ds + \iint_{\partial C_p \cap S} \vec{H}^{inv} ds = \iiint_{C_p} \vec{S} dx dy dz \quad (3.14)$$

Η παρούσα εργασία εξετάζει την επίλυση χρονικά μόνιμων ροών, οπότε θεωρείται ομοιόμορφη η μεταβολή των μεταβλητών επίλυσης στον όγκο C_p . Συνεπώς:

$$\iiint_{C_p} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dx dy dz = \left(\frac{d \vec{W}}{dt} \right)_P \iiint_{C_p} dx dy dz = \left(\frac{d \vec{W}}{dt} \right)_P V_P \quad (3.15)$$

όπου με V_P συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου C_p .

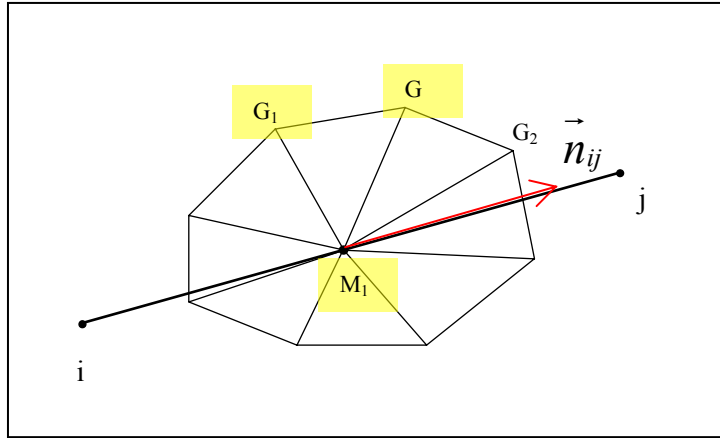
Τα ολοκληρώματα των χωρικών όρων προσεγγίζονται κατάλληλα, εισάγοντας τα αριθμητικά διανύσματα ροής $\vec{\Phi}$ αντί των αντίστοιχων φυσικών ποσοτήτων [Κου98]:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \iint_{\partial C_{PQ}} \vec{H}^{inv} ds = \vec{f}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \quad (3.16)$$

Όπου με

$$\vec{n}_{PQ} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{\hat{n}} ds \quad (3.17)$$

συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω της κυψέλης C_p , που σχετίζεται με την ακμή PQ και έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των τριγωνικών εμβαδών (διάνυσμα \vec{n}_{ij} στο σχήμα 3.3, βλέπε και σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.3: Κάθετο διάνυσμα \vec{n}_{ij} που αντιστοιχεί στην ακμή \vec{ij} . Η ίδια ακμή παρουσιάζεται και στο σχήμα 3.1 [Κου98].

Στην εξίσωση (3.16), οι όροι \vec{W}_{PQ}^L και \vec{W}_{PQ}^R συμβολίζουν τις τιμές των μεταβλητών στον αριστερό και δεξί κόμβο αντίστοιχα της ακμής PQ , που λαμβάνονται υπ' όψη κατά τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$, καθώς αυτές θεωρούνται υπεύθυνες για τη δημιουργίας μη-συνεκτικής ροής στην συγκεκριμένη ακμή. Με τις παραπάνω προσεγγίσεις, η εξίσωση (3.14) παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P V_P + \sum_{Q \in K_N(P)} \vec{\Phi}_{PQ} + \vec{\Phi}_{P,out} = \iiint_{C_P} \vec{S} dx dy dz \quad (3.18)$$

όπου ο όρος $\vec{\Phi}_{P,out}$ συμβολίζει το αριθμητικό διάνυσμα ροής που διασχίζει το όριο του χωρίου ροής σε τμήματα που ταυτίζονται με το όριο του όγκου ελέγχου C_P .

3.8 Υπολογισμός των αριθμητικών διανυσμάτων ροής

Τα διανύσματα ροής υπολογίζονται αριθμητικά κατά την σάρωση όλων των ακμών που σχηματίζονται στο τριδιάστατο πλέγμα. Για κάθε ακμή με ακραίες κορυφές τις i και j (σχήμα 3.3) υπολογίζεται το διάνυσμα ροής $\vec{\Phi}$ και στη συνέχεια αυτό συνεισφέρει αθροιστικά με το κατάλληλο πρόσημο στον ισολογισμό των ροών για τις κυψέλες ελέγχου των δύο ακραίων κόμβων της ακμής [Κου98]. Το διάνυσμα υπολογίζεται σύμφωνα με τη γενική εξίσωση (3.16) στο μέσο κάθε ακμής. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ένα τοπικά μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων αριστερά και δεξιά του μέσου της ακμής (καταστάσεις \vec{W}_{PQ}^L και \vec{W}_{PQ}^R αντίστοιχα). Για την επίλυσή του σε κάθε χρονικό βήμα εφαρμόζεται ο προσεγγιστικός επιλύτης Riemann του Roe [Roe81], [Κου98]:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \frac{1}{2} \left(\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \right) - \frac{1}{2} |\vec{A}_{PQ}| \left(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L \right) \quad (3.19)$$

Ο υπολογισμός του διανύσματος ροής \vec{H} γίνεται από τη σχέση (3.11), στην οποία χρησιμοποιείται το διάνυσμα \vec{n} . Με \underline{A} συμβολίζεται το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος \vec{H} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές \vec{W} [Hir90], [Kou98]:

$$\underline{A} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{W}} \quad , \quad \tilde{\underline{A}} = \tilde{\underline{A}}(\vec{W}, \vec{n}) \quad , \quad |\underline{A}| = \underline{T} |\underline{A}| \underline{T}^{-1} \quad (3.20)$$

όπου $\underline{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \text{diag}\{V_n|\vec{n}|, V_n|\vec{n}|, (V_n + c)|\vec{n}|, (V_n - c)|\vec{n}|\}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του μητρώου \underline{A} (παράρτημα Α). Η περισπωμένη δηλώνει μητρώα, που υπολογίστηκαν βασισμένα στις μέσες κατά Roe τιμές των μεταβλητών. Το παραπάνω μητρώο $\tilde{\underline{A}}_{PQ}$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση [Kou98]:

$$\vec{H}(\vec{W}_{PQ}^R) - \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L) = \tilde{\underline{A}}_{PQ} (\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L) \quad (3.21)$$

συνεπώς ο επιλύτης Riemann του Roe μπορεί να πάρει την μορφή:

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \tilde{\underline{A}}_{PQ} (\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L) \quad (3.22)$$

Και πάλι η περισπωμένη δηλώνει ότι στον υπολογισμό του μητρώου χρησιμοποιήθηκαν οι μέσες κατά Roe τιμές των συντηρητικών μεταβλητών. Αυτές προκύπτουν από τις μέσες κατά Roe τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών στους ακραίους κόμβους της ακμής PQ :

$$\vec{\tilde{U}}_{PQ} = (\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})^T \quad (3.23)$$

σύμφωνα με τη σχέση [Roe81], [Kou98]:

$$\vec{\tilde{U}}_{PQ} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{u}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{u}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3.24)$$

Στην παραπάνω σχέση η μεταβλητή \vec{u} αντικαθίσταται από τις μεταβλητές ρ, u, v, w του αντίστοιχου κόμβου, καθώς και από την ολική ενθαλπία h_t . Η μέση κατά Roe τιμή της πίεσης p υπολογίζεται από αυτή της ολικής ενθαλπίας, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{p} = \frac{(\gamma-1)\tilde{\rho}}{\gamma} \left(\tilde{h}_t - \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2) \right) \quad (3.25)$$

Το ανάντι σχήμα υπολογισμού της σχέσης (3.19) αποδίδει ακρίβεια πρώτης τάξης.

3.9 Διακριτοποίηση των όρων πηγής

Το τριπλό ολοκλήρωμα του όρου πηγής, που παρουσιάζεται στην εξίσωση (3.10), διακριτοποιείται ως εξής [Κου98]:

$$\iiint_{C_p} \vec{S} dx dy dz = \vec{S}_p V_p \quad (3.38)$$

Με V_p συμβολίζεται ο όγκος της κυψέλης ελέγχου του κόμβου P . Στην παρούσα εργασία και στις δοκιμές που διεξήχθησαν θεωρήθηκαν μηδενικοί όροι πηγής.

3.10 Επιβολή οριακών συνθηκών

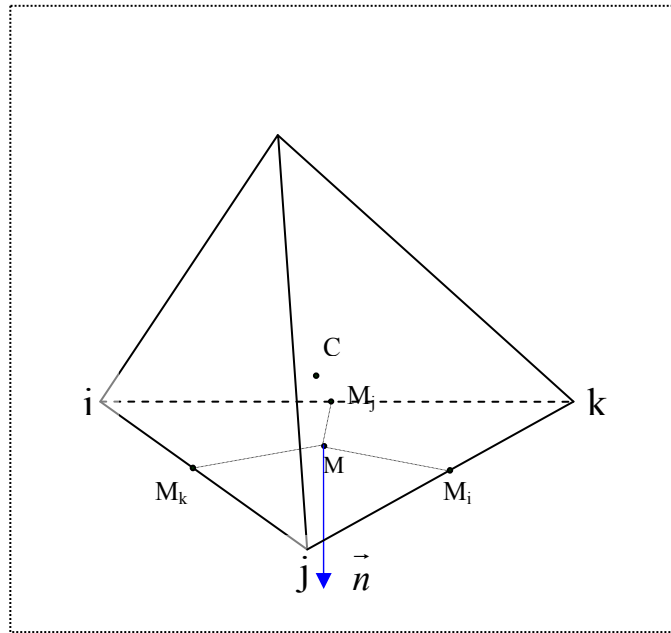
Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία είναι δύο ειδών, οι οριακές συνθήκες του στερεού τοιχώματος και αυτή των ορίων εισόδου/ εξόδου της ροής. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος επιβολής τους [Κου98].

Για τους κόμβους του πλέγματος, που ανήκουν σε επιφάνειες που θεωρούνται στερεά τοιχώματα, εφαρμόζεται η συνθήκη μη-εισχώρησης. Η επιβολή της συνθήκης γίνεται έμμεσα, θεωρώντας ότι από το τοίχωμα εισέρχεται ένα διάνυσμα ροής προς την κυψέλη έλεγχου του οριακού κόμβου, στο οποίο έχει μηδενιστεί η κατάλληλη συνιστώσα της ταχύτητας. Η συνιστώσα αυτή προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας \vec{V} με το κάθετο διάνυσμα \vec{n} στο οριακό τρίγωνο, το οποίο τίθεται ίσο με μηδέν ($\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$). Το πλήρες διάνυσμα ροής και το αντίστοιχο στο οποίο λαμβάνεται υπ' όψη η συνθήκη μη εισχώρησης είναι:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho w V_n + p n_z \\ (\rho E + p) V_n \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_{wall} = \begin{pmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Για την ατριβή ροή, που εξετάζεται, εφαρμόζεται η συνθήκη αδιαβατικού τοιχώματος, όσον αφορά στην εξίσωση ενέργειας.

Πρακτικά, σαρώνονται όλα τα οριακά τρίγωνα, που ανήκουν σε στερεά τοιχώματα, και σ' αυτά υπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδό των τριγώνων και με φορά προς το τοίχωμα (διάνυσμα \vec{n} , σχήμα 3.4). Το τελευταίο μοιράζεται στις κορυφές του τριγώνου, σταθμισμένο με το αντίστοιχο εμβαδό που καταλαμβάνει για κάθε μια η αντίστοιχη κυψέλη ελέγχου. Στη συνέχεια υπολογίζεται για κάθε κορυφή το διάνυσμα \vec{H}_{wall} και προστίθεται στον ισολογισμό των ροών της αντίστοιχης κυψέλης ελέγχου.



Σχήμα 3.4: Οριακό τρίγωνο και το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα \vec{n} .

Όσον αφορά στην οριακή συνθήκη εισόδου/ εξόδου της ροής, αυτή επιβάλλεται έμμεσα στους αντίστοιχους οριακούς κόμβους του πλέγματος μέσω του τοπικού ισολογισμού ροών. Σε κάθε κόμβο, που ανήκει σε οριακή επιφάνεια εισόδου ή εξόδου της ροής, επιλύεται ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ των μεταβλητών του κόμβου και των μεταβλητών που περιγράφουν τις συνθήκες στο εξωτερικό του χωρίου ροής. Οι τελευταίες ουσιαστικά περιγράφουν την κατάσταση σε άπειρη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία. Η κατάσταση αυτή θα συμβολίζεται από το δείκτη *out*, ενώ οι μεταβλητές της υπολογίζονται βάσει των οριακών συνθηκών, που καθορίζονται από το χρήστη. Για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής κατά την επίλυση του προβλήματος Riemann χρησιμοποιήθηκε το ανάντι σχήμα των Steger-Warming. Το σχήμα αποδίδει ακρίβεια πρώτης τάξης και για τον κόμβο P περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{H}_{P,out} = \underline{A}_P^+ \vec{W}_P + \underline{A}_P^- \vec{W}_{out} \quad (3.40)$$

όπου A είναι το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος ροής (παράρτημα Α), το οποίο υπολογίζεται με θετικές ή αρνητικές ιδιοτιμές.

3.11 Διακριτοποίηση του χρόνου και τοπικό χρονικό βήμα

Ο χρονικός όρος που εμφανίζεται στην εξίσωση (3.10) διακριτοποιείται με το ανάντι σχήμα διαφόρισης του Euler πρώτης τάξης στο χρόνο [Κου98]:

$$\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P = \frac{d\vec{W}_P^{n+1}}{\Delta t_P} \quad (3.41)$$

Παράλληλα, χρησιμοποιείται και η τεχνική του τοπικού χρονικού βήματος, βελτιστοποιώντας τοπικά την εξέλιξη της λύσης και επιταχύνοντας την σύγκλιση της διαδικασίας [Ρul85]. Το τοπικό χρονικό βήμα υπολογίζεται σε κάθε τετράεδρο, και στη συνέχεια για κάθε κόμβο του πλέγματος υπολογίζεται το ελάχιστο τοπικό χρονικό βήμα, από αυτά των τετραέδρων στα οποία ανήκει. Πρακτικά, υπολογίζεται για κόμβο P :

$$\Delta t(P) = CFL \cdot \frac{\alpha_{\min,P}}{|\vec{V}_P| + c_P} \quad (3.42)$$

όπου με $\alpha_{\min,P}$ συμβολίζεται η ελάχιστη ακμή των τετραέδρων στα οποία ανήκει ο κόμβος P , με $|\vec{V}_P|$ συμβολίζεται η κύρια συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού, με c_P συμβολίζεται η ταχύτητα του ήχου στον εν λόγω κόμβο και τέλος με CFL συμβολίζεται ο αριθμός Courant-Friedrichs-Levy που αποτελεί πολλαπλασιαστή του τοπικού χρονικού βήματος και καθορίζει την μέγιστη δυνατή τιμή του διατηρώντας την ευστάθεια της διαδικασίας [Hir90].

3.12 Μέθοδος αριθμητικής επίλυσης

Η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιείται είναι ρητή και συγκεκριμένα είναι η πολυβηματική μέθοδος Runge-Kutta. Για κάθε κόμβο του πλέγματος γίνεται ανανέωση των τιμών των μεταβλητών επίλυσης σύμφωνα με το σχήμα [Κου98]:

$$V_P \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_P = -\vec{R}_P^m \quad (3.43)$$

$$\vec{R}_P^m = \vec{R}(\vec{W}_P^m) = \sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m + \vec{S}_P V_P \quad (3.44)$$

όπου ο δείκτης m δηλώνει το χρονικό επίπεδο, στο οποίο υπολογίζεται κάθε ποσότητα. Στο λογισμικό που αναπτύχθηκε χρησιμοποιείται η Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων (RK(4)), με τις παρακάτω τιμές των συντελεστών της:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.11 \\ a_2 &= 0.2766 \\ a_3 &= 0.5 \\ a_4 &= 1.0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ο βηματικός αλγόριθμος της Runge-Kutta έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{W}_P^{n+1,0} &= \vec{W}_P^n \\ \vec{W}_P^{n+1,k} &= \vec{W}_P^n - a_k \frac{\Delta t P}{V_P} \vec{R}(\vec{W}_P^{n+1,k-1}), \quad k = 1, \dots, 4 \\ \vec{W}_P^{n+1} &= \vec{W}_P^{n+1,4} \end{aligned} \quad (3.46)$$

όπου η παράσταση $\vec{R}(\vec{W}_P^{n+1,k-1})$ υπολογίζεται από τις (3.43) και (3.44).

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση του αλγορίθμου

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται εκτενώς το λογισμικό, που αναπτύχθηκε για την επίλυση των εξισώσεων, οι οποίες περιγράφονται στα προηγούμενα κεφάλαια. Αναλύεται η εφαρμογή των μεθόδων, που περιγράφονται παραπάνω, δίνοντας έμφαση στις δομές δεδομένων, που διαχειρίζεται ο αλγόριθμος, παρουσιάζεται η δομή του και μία προς μία η λειτουργία κάθε συνάρτησης που καλείται.

Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε με βάση το λογισμικό EU2, το οποίο αναπτύχθηκε από τον Ι. Κ. Νικολό σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran90 και επιλύει τις εξισώσεις Euler σε 2 διαστάσεις με χρήση μη δομημένου τριγωνικού πλέγματος. Βασίστηκε στη λογική της διατήρησης των δομών δεδομένων στο απλούστερο δυνατό επίπεδο, χωρίς ωστόσο να μειωθεί η αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Η ανάπτυξη και χρήση σχετικά απλών δομών δεδομένων επιτρέπει την ανάπτυξη σχετικά απλών συναρτήσεων που τις διαχειρίζονται, αντισταθμίζοντας εν μέρει την δεδομένη δυσκολία που ενέχει η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, αλλά και την απαιτητική διαχείριση του πολύ μεγάλου όγκου δεδομένων, που προκύπτει κατά την τριδιάστατη αναπαράσταση της γεωμετρίας που εξετάζεται.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε λαμβάνει ως πληροφορίες εισόδου κάποια χαρακτηριστικά της ροής που επιλύεται, όπως ο αριθμός Mach της ροής και οι δυο γωνίες που περιγράφουν την φορά της ροής του. Παράλληλα δέχεται και ορισμένα στοιχεία που αξιοποιούνται κατά την μαθηματική επίλυση, όπως το αδιάστατο χρονικό βήμα, που ορίζεται από το χρήστη.

Εκτός από το αρχείο, που περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω πληροφορίες, ο αλγόριθμος δέχεται ως δεδομένο ένα ακόμα αρχείο, που περιγράφει το πλέγμα, το οποίο διακριτοποιεί το πεδίο της ροής γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Το αρχείο αυτό προσφέρει τις ελάχιστες δυνατές αλλά απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με το τριδιάστατο πλέγμα και στη συνέχεια ο αλγόριθμος αναλαμβάνει την επεξεργασία του και την ανάπτυξη όλων των δομών δεδομένων, οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση της ροής.

4.1 Ο σειριακός αλγόριθμος επίλυσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται βηματικά ο σειριακός αλγόριθμος επίλυσης. Με βάση τη δομή αυτή ακολουθεί η ανάλυση κάθε βήματος και η παρουσίαση κάθε συνάρτησης του αλγορίθμου, που καλείται σε αυτά. Οι υπολογισμοί που γίνονται στον αλγόριθμο διακρίνονται σε βοηθητικούς, κύριους και τελικούς. Ακολουθεί αναλυτικά η σειριακή δομή του αλγορίθμου επίλυσης:

Σειριακός αλγόριθμος επίλυσης

4.1.1 Βοηθητικοί Υπολογισμοί

- Εισαγωγή δεδομένων: πλέγμα, τοπολογία και συντεταγμένες, δεδομένα της ροής.
- Δημιουργία της τοπολογικής δομής, που απαιτεί ο επιλύτης και των κατάλληλων δομών δεδομένων.
- Αρχικοποίηση των μεταβλητών της ροής και των χαρακτηριστικών της, βάσει των πληροφοριών εισόδου.
- Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των κυψελών αναφοράς, που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο βήμα: υπολογισμός του όγκου των τετραέδρων, συντεταγμένες των κέντρων των τετραέδρων και των τριγώνων. Αρχικοποίηση των μεταβλητών επίλυσης.
- Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακμών, που δημιουργήθηκαν σε προηγούμενο βήμα, όπως το διάνυσμα κατεύθυνσης της ροής. Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των ορίων του χωρίου, όπως τα κάθετα διανύσματα των οριακών τριγώνων και τα αντίστοιχα για τους οριακούς κόμβους. Τα χαρακτηριστικά αυτά απαιτούνται στη συνέχεια από τον επιλύτη.

4.1.2 Κύριοι Υπολογισμοί

Έναρξη των χρονικών επαναλήψεων. Σε κάθε βήμα:

- Υπολογίζεται το τοπικό χρονικό βήμα για κάθε όγκο ελέγχου, βάση των χαρακτηριστικών της ροής και τη γεωμετρία του.
- Εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta: έναρξη των υποεπαναλήψεων.
- Ενημέρωση των μεταβλητών επίλυσης.
- Υπολογισμός των όρων πηγής.
- Σάρωση των ακμών του πλέγματος και υπολογισμός για καθεμιά του μη-συνεκτικού διανύσματος ροής. Επίλυση του τοπικού προβλήματος Riemann. Το διάνυσμα αυτό μοιράζεται στους ακραίους κόμβους κάθε ακμής και προστίθεται στις ήδη υπολογισμένες συνεισφορές από άλλες ακμές, ώστε τελικά να προκύψει το διάνυσμα ροής, που αντιστοιχεί σε κάθε όγκο ελέγχου.
- Σαρώνονται οι οριακοί κόμβοι των περιοχών εισόδου και εξόδου της ροής. Επιλύεται εκεί το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann και υπολογίζεται για κάθε κόμβο το διάνυσμα ροής, που διασχίζει το όριο της αντίστοιχης κυψέλης ελέγχου προς το εξωτερικό του χωρίου. Το διάνυσμα συνεισφέρει στην αντίστοιχη προστιθέμενη ροή.
- Σάρωση των οριακών τριγώνων, που ανήκουν σε στερεό τοίχωμα, και κατάλληλη εφαρμογή της οριακής συνθήκης μη-εισχώρησης της ροής. Υπολογισμός της αντίστοιχης συνεισφοράς.

- Σάρωση των κόμβων και ανανέωση των μεταβλητών επίλυσης μέσω του ισολογισμού των ροών που εισέρχονται και εξέρχονται από την κυψέλη ελέγχου.

4.1.3 Τελικοί Υπολογισμοί

- Έλεγχος και ανανέωση του πλήθους των επαναλήψεων που έχουν διεξαχθεί. Έλεγχος ικανοποίησης των συνθηκών τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας.
- Περιοδική εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Δημιουργία κατάλληλου αρχείου εξόδου.

4.2 Αναλυτική παρουσίαση του αλγορίθμου

Κατά την εκκίνηση του προγράμματος ο αλγόριθμος δέχεται απαραίτητα στοιχεία εισόδου από δύο αρχεία και προχωράει με την επεξεργασία των αρχείων αυτών και την διεξαγωγή βοηθητικών υπολογισμών. Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται μία και μοναδική φορά και προσφέρουν απαραίτητες πληροφορίες στον επιλύτη για την επαναληπτική επίλυση του γραμμικοποιημένου συστήματος.

4.2.1 Είσοδος δεδομένων

Στην αρχή του αλγορίθμου δίνονται τιμές σε βασικές σταθερές για τον επιλύτη, όπως η τιμή του π και των παραμέτρων της μεθόδου Runge-Kutta τετάρτης τάξεως. Αμέσως μετά καλείται η υπορουτίνα εισόδου για την λήψη των απαραίτητων πληροφοριών. Η τελευταία λαμβάνει από το πρώτο αρχείο σημαντικές πληροφορίες, που αφορούν την ροή του ρευστού, φυσικές σταθερές και τις συνθήκες τερματισμού του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, ο χρήστης καθορίζει τον αριθμό Mach της ροής, που επικρατεί σε μεγάλη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία, όπως και τις γωνίες που σχηματίζει η ροή με το οριζόντιο και κάθετο επίπεδο. Επίσης, ο χρήστης καθορίζει την τιμή του εκθέτη ισεντροπικής μεταβολής του ρευστού (γ), ενώ επιλέγει τις τιμές παραμέτρων που καθορίζουν την μαθηματική επίλυση και την ποιότητα της λύσης, όπως το αδιάστατο χρονικό βήμα, το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που θα εκτελέσει ο αλγόριθμος και τη μέγιστη απόκλιση μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων. Στην περίπτωση που δύο διαδοχικές επαναλήψεις παρουσιάσουν μέση μεταβολή των παραμέτρων επίλυσης μικρότερη από την τελευταία παράμετρο, ο αλγόριθμος θα οδηγηθεί σε άμεσο τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας.

Στην συνέχεια ο αλγόριθμος προσπελάζει και το δεύτερο αρχείο εισόδου, το οποίο περιέχει το τριδιάστατο πλέγμα, που διακριτοποιεί το χωρίο ροής γύρω από την υπό εξέταση γεωμετρία. Η δομή του αρχείου αυτού δεν είναι μοναδική, καθώς το λογισμικό έχει την δυνατότητα να δέχεται αρχείο πλέγματος με προκαθορισμένη (default) δομή, αλλά και αρχείο πλέγματος που εξάγεται από άλλες γεννήτριες πλέγματος. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος έχει την δυνατότητα να δεχθεί αρχείο με format “.cfx5”. Το αρχείο αυτό αποτελεί μορφή αρχείου εξόδου από το πρόγραμμα ANSYS ICEM CFD 5.1. Γενικά, το αρχείο εισόδου του πλέγματος περιέχει τον αριθμό των κόμβων και των τετραέδρων, που απαρτίζουν το εν λόγω πλέγμα, καθώς και την τοπολογική δομή αυτών. Συγκεκριμένα, καθορίζει τους τέσσερις κόμβους, που σχηματίζουν κάθε τετράεδρο, καθώς οι κόμβοι είναι αριθμημένοι. Η σειρά, με την οποία καθορίζονται οι τέσσερις κορυφές κάθε τετράεδρου, δεν είναι τυχαία, αλλά έχει μεγάλη σημασία για την περαιτέρω επεξεργασία του πλέγματος. Επιπλέον δίνει τις φυσικές συντεταγμένες κάθε κόμβου του πλέγματος. Τέλος, παρέχει και κατάλληλες πληροφορίες για τα όρια του χωρίου. Ανάλογα με την μορφή του αρχείου, παρέχεται είτε μια λίστα με τα οριακές έδρες, είτε ένας δείκτης (*index*) για κάθε κόμβο, που ουσιαστικά δίνει άμεση πληροφορία για το που εντοπίζεται, αν δηλαδή ανήκει στην επιφάνεια της γεωμετρίας, σε πλαϊνά στερεά τοιχώματα, στις οριακές επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής, σε οποιαδήποτε τομή των παραπάνω επιφανειών ή αν απλά αποτελεί έναν εσωτερικό κόμβο του πεδίου ροής. Οι παραπάνω δομές δεδομένων είναι οι ελάχιστες δυνατές, που μπορούν να περιγράψουν ένα τριδιάστατο μη-δομημένο πλέγμα γύρω από μια γεωμετρία. Οι δομές αυτές ωστόσο δεν επαρκούν για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων. Όλες οι υπόλοιπες δομές δεδομένων, που απαιτούνται από τον επιλύτη, συγκροτούνται από τον αλγόριθμο, κατά τους βοηθητικούς υπολογισμούς από υπορουτίνες, που περιγράφονται στην συνέχεια.

4.2.2 Καθορισμός τριγώνων

Στη συνέχεια καλείται μια άλλη υπορουτίνα, που έχει ως σκοπό να καθορίσει να τρίγωνα που απαρτίζουν τα τετράεδρα του πλέγματος. Η μοναδική δομή δεδομένων του πλέγματος, που είναι διαθέσιμη μέχρι τώρα για τον αλγόριθμο, είναι η λίστα με τις τέσσερις κορυφές κάθε τετράεδρου. Γενικά, η υπορουτίνα πρέπει να εξετάσει τα τέσσερα τρίγωνα που απαρτίζουν κάθε τετράεδρο και είτε να τα αναγνωρίσει ως νέα τρίγωνα, δίνοντάς τους μια αρίθμηση, είτε να τα αγνοήσει, σε περίπτωση που ταυτοποιηθούν με άλλα που έχουν ήδη προσπελαθεί. Παράλληλα, πρέπει σε κάθε νέο τρίγωνο να ορίσει τους τρεις κόμβους που αποτελούν τις κορυφές του. Σε κάθε περίπτωση, η αρίθμηση των εδρών των τετραέδρων και των κορυφών των τριγώνων δεν είναι τυχαία. Σύμφωνα με την αρίθμηση των κορυφών κάθε τετράεδρου, που έχει ληφθεί από το αντίστοιχο αρχείο εισόδου, απέναντι από την i κορυφή του τετράεδρου ορίζεται η i έδρα του.

Η σάρωση όλων των τετραέδρων και η εξαντλητική σύγκριση κάθε έδρας του με τις ήδη αναγνωρισμένες έδρες κρίνεται απαγορευτική, καθώς ο όγκος δεδομένων που προκύπτει έχει υπερβολικά μεγάλο μέγεθος, οπότε

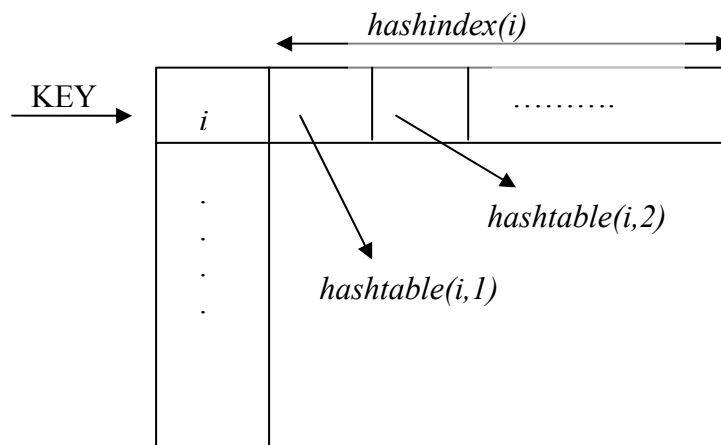
συνεπάγεται ιδιαίτερα αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις. Η λειτουργία λοιπόν της υπορουτίνας πρέπει να βασιστεί σε μια περισσότερο αποδοτική ιδέα.

Η εφαρμογή της εν λόγω υπορουτίνας βασίστηκε σε μια διαφορετική αλλά εξίσου απλή δομή δεδομένων, που καλείται «πίνακας επαναδιατύπωσης» (*hash table*), [For99]. [Η χρήση της παραπάνω δομής δεδομένων θεωρείται από τη βιβλιογραφία ιδανική για την συγκεκριμένη λειτουργία και για τριδιάστατο μη-δομημένο πλέγμα.

Ειδικότερα, σαρώνονται όλα τα τετράεδρα και εξετάζονται διαδοχικά οι τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου. Για κάθε έδρα, προσδιορίζεται ένα κύριο κλειδί (*KEY*) και μια διατεταγμένη σειρά από τρία κλειδιά ($k1, k2, k3$). Συγκεκριμένα, έστω ότι μια έδρα έχει τρεις κορυφές, τις $nc1, nc2, nc3$. Στην πραγματικότητα, τα $nc1, nc2, nc3$ είναι απλά ακέραιες τιμές. Τα τρία κλειδιά $k1, k2, k3$ της έδρας αλλά και το κλειδί *KEY* καθορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} KEY &= \min(nc1, nc2, nc3) \\ k1 &= KEY \\ k3 &= \max(nc1, nc2, nc3) \\ k2 &= \{nc1, nc2, nc3\} - \{k1, k3\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Από τον ορισμό του κυρίως κλειδιού γίνεται αντιληπτό ότι σε ένα πλέγμα από n κόμβους, είναι δυνατό να βρεθούν έως και n διαφορετικά κύρια κλειδιά. Στην πράξη βέβαια δεν συμβαίνει αυτό, καθώς αναμένεται να βρεθούν έδρες με το ίδιο κύριο κλειδί. Ωστόσο η διατεταγμένη τριάδα των κλειδίων $k1, k2, k3$ είναι μοναδική για κάθε έδρα. Το κύριο κλειδί (*KEY*) χρησιμοποιείται για την συγκρότηση ενός πίνακα (*hash table*), ο οποίος αναφέρει για κάθε κύριο κλειδί πόσες έδρες έχουν εντοπιστεί να χαρακτηρίζονται από αυτό. Εφ' όσον μπορούν να βρεθούν έως και n διαφορετικά κλειδιά, ο πίνακας θα έχει n γραμμές, καθεμία εκ των οποίων θα αναφέρεται και σε ένα πιθανό κύριο κλειδί. Σε όλες τις γραμμές δεν παρουσιάζεται ο ίδιος αριθμός στηλών, αλλά τόσες όσες και οι έδρες που χαρακτηρίζονται από το αντίστοιχο κλειδί. Το πλήθος των εδρών που έχουν το ίδιο κύριο κλειδί i δίνεται από μια μεταβλητή, έστω την $hashindex(i)$. Σχηματικά:



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση του πίνακα επαναδιατύπωσης.

Η συγκρότηση του παραπάνω πίνακα γίνεται δυναμικά, καθώς σαρώνονται τα τετράεδρα. Για κάθε ένα, και για κάθε μία έδρα του j με $j=1,...,4$, υπολογίζονται τα $KEY, k1, k2, k3$. Στη συνέχεια ελέγχεται αν έχουν εντοπιστεί ήδη άλλες έδρες με το συγκεκριμένο κύριο κλειδί, έστω το κλειδί i . Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η υπό εξέταση έδρα αποτελεί μια νέα έδρα, οπότε αυτή παίρνει αρίθμηση, ενημερώνεται ο πίνακας στην αντίστοιχη γραμμή, αποθηκεύονται σε λίστες οι τρεις κορυφές της και η διατεταγμένη τριάδα $k1,k2,k3$, ενημερώνεται ότι η j -οστή έδρα του τετραέδρου είναι η συγκεκριμένη και αυξάνεται κατά ένα το πλήθος των εδρών που έχουν αναγνωριστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή έχουν ήδη εντοπιστεί και άλλες έδρες με το ίδιο κλειδί i (περίπτωση $hashindex(i)>0$), τότε η υπό εξέταση έδρα συγκρίνεται με τις έδρες που αναφέρονται στην αντίστοιχη γραμμή του πίνακα. Το πλήθος των συγκρίσεων που θα γίνουν καθορίζεται από την μεταβλητή $hashindex(i)$. Κατά την σύγκριση ελέγχεται η διατεταγμένη τριάδα των κλειδίων $k1,k2,k3$. Αν αυτή είναι ίδια για τις δύο έδρες, τότε έχουμε ταυτοποίηση και απλά προσπελάζεται μια έδρα, που έχει ήδη αναγνωριστεί και αριθμηθεί, οπότε απλά ενημερώνεται ότι η συγκεκριμένη είναι η j -οστή έδρα του τετραέδρου. Αν κατά τις συγκρίσεις δεν βρεθεί κάποια έδρα της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα να συμπίπτει με την υπό εξέταση έδρα, τότε απλά εντοπίζεται μια νέα έδρα, που τυχαίνει να έχει ίδιο κύριο κλειδί με άλλες έδρες, οπότε γίνονται οι ίδιες ενέργειες που έγιναν κατά τον εντοπισμό νέας έδρας.

Η υπορουτίνα, που μόλις περιγράφηκε, χαρακτηρίζεται από αξιοσημείωτη αποδοτικότητα, αν συγκριθεί με αυτή της εξαντλητικής σύγκρισης κάθε έδρας με τις ήδη αναγνωρισμένες. Η χρήση του πίνακα και του κύριου κλειδιού, που μπορεί να είναι το ίδιο για περισσότερες από μία έδρες, μειώνει δραστικά το πλήθος των συγκρίσεων που απαιτούνται για την αναγνώριση μιας νέας έδρας και, κατά συνέπεια, μειώνει αποτελεσματικά την υπολογιστική απαίτηση της υπορουτίνας. Στο τέλος της λειτουργίας της έχουν παραχθεί δύο νέες απαραίτητες δομές δεδομένων του πλέγματος: η πρώτη περιέχει τις τέσσερις έδρες κάθε τετραέδρου και η δεύτερη τις τρεις κορυφές κάθε έδρας.

4.2.3 Καθορισμός ακμών

Στη συνέχεια η υπορουτίνα εισόδου των δεδομένων καλεί μια νέα υπορουτίνα, που έχει ως στόχο τον καθορισμό των ακμών του πλέγματος. Η λειτουργία της αξιοποιεί την δομή των κορυφών των τριγώνων. Ως αποτέλεσμα αποδίδει μια δομή, που αποδίδει τους ακραίους κόμβους κάθε ακμής και μια άλλη, που καθορίζει τις ακμές που συγκροτούν κάθε τρίγωνο. Γενικά, η υπορουτίνα σαρώνει όλα τα τρίγωνα και απαριθμεί τις ακμές τους, φροντίζοντας να δώσει μία μόνο αρίθμηση σε κάθε ακμή. Παράλληλα, καθορίζει για κάθε ακμή τους δύο κόμβους που τη σχηματίζουν. Κατά τον καθορισμό των ακμών κάθε τριγώνου διατηρείται ο ίδιος κανόνας αρίθμησης, που ίσχυε και στην περίπτωση των εδρών, δηλαδή απέναντι από την i κορυφή εντοπίζεται η i ακμή του τριγώνου. Η υλοποίηση της υπορουτίνας βασίστηκε στην ίδια δομή δεδομένων που χρησιμοποιείται και στην υπορουτίνα

καθορισμού των τριγώνων, δηλαδή στον πίνακα «επαναδιατύπωσης» (*hash table*) [For99].

Αναλυτικότερα, σαρώνοντας όλα τα τρίγωνα εξετάζονται μία προς μία οι ακμές, που σχηματίζονται από τις κορυφές τους ανά δύο. Για κάθε ακμή ορίζεται το κύριο κλειδί (*KEY*) και μια διατεταγμένη δυάδα κλειδιών (*k1*, *k2*) συναρτήσει των ακραίων κόμβων *na1* και *na2* της ακμής, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} KEY &= \min(na1, na2) \\ k1 &= KEY \\ k2 &= \{na1, na2\} - \{k1\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Όμοια με την προηγούμενη υπορουτίνα, κατά την σάρωση των τριγώνων και των αντίστοιχων ακμών που σχηματίζουν, συγκροτείται ο πίνακας επαναδιατύπωσης (*hash table*), χρησιμοποιώντας το κύριο κλειδί κάθε ακμής. Εξετάζοντας την *j*-οστή ακμή κάθε τριγώνου, αφού προσδιοριστεί το κύριο κλειδί και η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών, εξετάζεται αν έχουν ήδη βρεθεί ακμές, που να έχουν το ίδιο κύριο κλειδί και, αν υπάρχουν, ελέγχεται το πλήθος τους. Αν δεν υπάρχει άλλη ακμή με το ίδιο κύριο κλειδί, τότε η ακμή θεωρείται νέα, οπότε λαμβάνει αριθμηση, ορίζονται οι ακραίοι κόμβοι της, ενημερώνεται ο πίνακας, αποθηκεύεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της και αυξάνει κατά ένα το πλήθος των ακμών που έχουν εντοπιστεί. Στην αντίθετη περίπτωση, συγκρίνεται η διατεταγμένη δυάδα κλειδιών της ακμής που εξετάζεται με τις αντίστοιχες δυάδες των ακμών που υποδεικνύει ο πίνακας. Επειδή ακριβώς κάθε δυάδα είναι μοναδική για κάθε ακμή, σε αντίθεση με το κύριο κλειδί, η εύρεση μιας ακμής του πίνακα με ίδια δυάδα με την αντίστοιχη της ακμής που εξετάζεται σημαίνει ότι η ακμή προσπελάζεται για τουλάχιστον δεύτερη φορά (ταυτοποίηση ακμών), οπότε απλά ενημερώνεται η ταυτότητα της *j*-οστής ακμής του τριγώνου. Εάν ωστόσο δεν υπάρξει ταυτοποίηση κατά τις συγκρίσεις, η ακμή αντιμετωπίζεται ως νέα και διεξάγονται οι αντίστοιχες ενέργειες.

Όπως και στην προηγούμενη υπορουτίνα, η χρήση της συγκεκριμένης δομής (*hash table*) προσφέρει αξιοσημείωτη αποδοτικότητα στην υπορουτίνα μειώνοντας αισθητά το υπολογιστικό κόστος της.

4.2.4 Εύρεση γειτονικών τετραέδρων

Η υπορουτίνα εισόδου καλεί στην συνέχεια την υπορουτίνα εύρεσης των γειτονικών τετραέδρων. Σκοπός της υπορουτίνας αυτής είναι η ανάπτυξη μιας δομής δεδομένων, που να πληροφορεί σχετικά με το πόσα και σε ποια τετράεδρα ανήκει κάθε ακμή. Η δομή αυτή είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό γεωμετρικών στοιχείων των ακμών στη συνέχεια, ενώ για την συγκρότησή της είναι πλέον διαθέσιμες αρκετές δομές δεδομένων του πλέγματος, όπως οι έδρες και οι κορυφές κάθε τετραέδρου, οι ακμές και οι κορυφές κάθε τριγώνου και οι ακραίοι κόμβοι κάθε ακμής.

Ουσιαστικά η υπορουτίνα συγκροτεί έναν πίνακα, στον οποίο κάθε γραμμή αναφέρεται σε μια ακμή και σε κάθε γραμμή αποθηκεύονται τα τετράεδρα στα οποία εντοπίζεται η αντίστοιχη ακμή. Το πλήθος των τετραέδρων, που

αποθηκεύονται σε κάθε γραμμή, προφανώς δεν είναι σταθερό και αποθηκεύεται ως μια μεταβλητή, που αναφέρεται σε κάθε ακμή, η οποία θα καλείται πλέον μεταβλητή πλήθους. Επιπλέον, η υπορουτίνα φροντίζει να μην αποθηκεύσει το ίδιο τετράεδρο σε μια γραμμή περισσότερες από μια φορές.

Αναλυτικότερα, η υπορουτίνα σαρώνει κάθε ακμή k , κάθε έδρα j , κάθε τετράεδρου i . Για την ακμή k ελέγχει το πλήθος των τετραέδρων στα οποία ανήκει. Αν βρεθεί ότι δεν ανήκει σε κανένα τετράεδρο, δηλαδή αν η μεταβλητή πλήθους της ακμής k έχει τιμή 0, τότε αυξάνει κατά ένα την τιμή της μεταβλητής πλήθους και αποθηκεύει το τετράεδρο i στην πρώτη ελεύθερη θέση της γραμμής k του πίνακα. Η θέση αυτή υποδεικνύεται από την τιμή που έχει η μεταβλητή πλήθους της ακμής. Αν αντίθετα η μεταβλητή πλήθους της ακμής k έχει τιμή μεγαλύτερη του 0, τότε ελέγχεται αν το τετράεδρο i είναι εγγεγραμμένο σε μια από τις κατειλημμένες θέσεις της γραμμής k του πίνακα. Αν αυτό βρεθεί σε μια από τις θέσεις, τότε δεν γίνεται καμιά άλλη ενέργεια και σαρώνεται η επόμενη ακμή. Αν ωστόσο δεν εντοπιστεί στην γραμμή k , τότε γίνονται οι ίδιες ενέργειες που λαμβάνουν χώρα στην περίπτωση που η μεταβλητή πλήθους της ακμής έχει μηδενική τιμή.

Σαρώνοντας όλα τα τετράεδρα, ελέγχονται όλες οι ακμές για περισσότερες από μία φορές. Έτσι εξασφαλίζεται η σωστή ταξινόμηση των ακμών στον πίνακα και επαληθεύεται η ορθότητα της δομής.

4.2.5 Ανάθεση δεικτών (*index*)

Στη συνέχεια καλείται η κατάλληλη συνάρτηση, που αναλαμβάνει την ανάθεση δεικτών (*index*) στα τρίγωνα ή στους κόμβους του πλέγματος. Ένας δείκτης, που αναφέρεται είτε σε κόμβο είτε σε τρίγωνο, ουσιαστικά αποτελεί μια ταυτότητα, η οποία υποδεικνύει άμεσα την τοποθεσία του κόμβου ή του τριγώνου στο πλέγμα. Η συνάρτηση που καλείται εξαρτάται άμεσα από το format του αρχείου εισόδου του πλέγματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δύο αρχεία εισόδου με διαφορετικό format, που περιγράφουν το ίδιο πλέγμα, έχουν διαφορετική δομή, αλλά προσφέρουν και διαφορετικές πληροφορίες. Ανάλογα λοιπόν με το format του αρχείου εισόδου καλείται και η αντίστοιχη υπορουτίνα, που αξιοποιεί τα δεδομένα εισόδου και αναθέτει δείκτες στις δομές δεδομένων που αναπτύχθηκαν. Στη συνέχεια εξετάζεται η λειτουργία της υπορουτίνας για δύο αρχεία εισόδου με διαφορετικό format.

Ένα αρχείο εισόδου πλέγματος με το προκαθορισμένο (default) format παρέχει εκτός από τις συντεταγμένες των κόμβων και τη λίστα των τετραέδρων, που απαρτίζουν το τριδιάστατο πλέγμα, τους δείκτες των κόμβων. Το προκαθορισμένο (default) format είναι η αυθαίρετη δομή, την οποία ακολουθεί το αρχείο εισόδου που χρησιμοποιήθηκε κατά την ανάπτυξη και δοκιμή του αλγορίθμου. Οι δείκτες είναι ουσιαστικά προεπιλεγμένες ακέραιες τιμές, που δίνουν άμεση πληροφορία για την σχετική θέση κάθε κόμβου στο πλέγμα. Για παράδειγμα, ένας κόμβος με δείκτη 0 αποτελεί έναν εσωτερικό κόμβο του πλέγματος, ενώ κάποιος με δείκτη 1 βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της γεωμετρίας που εξετάζεται. Στον ακόλουθο πίνακα 4.1 δίνονται όλες οι έγκυρες τιμές, που μπορεί να πάρει ο δείκτης ενός κόμβου, και η αντίστοιχη σχετική θέση του:

Τιμή δείκτη	Θέση κόμβου
0	Εσωτερικό πλέγματος
1	Επιφάνεια της υπό εξέτασης γεωμετρίας
2	Όριο εξόδου της ροής (outlet)
3	Όριο εισόδου της ροής (inlet)
51	Στερεό τοίχωμα (solid wall)
91	Τομή γεωμετρίας-στερεού τοιχώματος
92	Τομή ορίου εξόδου της ροής- στερεού τοιχώματος
93	Τομή ορίου εισόδου της ροής- στερεού τοιχώματος
23	Τομή ορίου εισόδου της ροής-ορίου εξόδου της ροής-στερεού τοιχώματος
32	Τομή ορίου εισόδου της ροής- ορίου εξόδου της ροής

Πίνακας 4.1: Έγκυρες τιμές δείκτη κόμβου.

Με δεδομένους τους δείκτες των κόμβων του πλέγματος από το αρχείο εισόδου, η υπορουτίνα αποδίδει αντίστοιχους δείκτες στα τρίγωνα του πλέγματος. Οι δομές αυτές είναι απαραίτητες για τον επιλύτη, καθώς στη συνέχεια θα ανατεθούν οι οριακές συνθήκες στα όρια του πεδίου της ροής, χρησιμοποιώντας τους δείκτες τόσο των τριγώνων, όσο και των κόμβων. Στη συνέχεια παρατίθεται ο πίνακας 4.2 με τις έγκυρες τιμές που μπορεί να πάρει ο δείκτης ενός τριγώνου και η αντίστοιχη σχετική θέση του:

Τιμή δείκτη	Θέση τριγώνου
0	Εσωτερικό πλέγματος
1	Επιφάνεια της υπό εξέτασης γεωμετρίας
2	Όριο εξόδου της ροής (outlet)
3	Όριο εισόδου της ροής (inlet)
51	Στερεό τοίχωμα (solid wall)

Πίνακας 4.2: Έγκυρες τιμές δείκτη τριγώνου.

Για την ανάθεση των δεικτών των τριγώνων ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία: Αρχικά για λόγους ευκολίας, έγιναν προσωρινές μεταβολές στους δείκτες ορισμένων κόμβων. Συγκεκριμένα, οι δείκτες με τιμή 91 πήραν τιμή 700, οι δείκτες με τιμή 51 πήραν τιμή 500, ενώ όσοι είχαν τιμή 0 πήραν τιμή 5000. Εν συνεχεία, για κάθε τρίγωνο υπολογίστηκε το άθροισμα των δεικτών των τριών κορυφών του. Ύστερα από μελέτη αποδείχθηκε ότι κάθε τρίγωνο έχει συγκεκριμένο άθροισμα, ανάλογα με τη θέση που κατέχει. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι ένα τρίγωνο με άθροισμα δεικτών ίσο με 1500 βρίσκεται πάνω σε στερεό τοίχωμα, καθώς προκύπτει από το άθροισμα των δεικτών τριών κόμβων που βρίσκονται όλοι πάνω σε στερεό τοίχωμα ($500+500+500=1500$). Τα αντίστοιχα αθροίσματα για κάθε είδος τριγώνου παρουσιάζονται στον πίνακα 4.3 που ακολουθεί:

Τιμή δείκτη τριγώνου	Πιθανά αθροίσματα των δεικτών των κορυφών του
0	Κάθε άθροισμα >5000
1	3, 702, 1401
2	6, 96, 36, 27, 186, 216, 66, 156, 147, 117, 57, 126
3	9, 99, 38, 29, 189, 218, 67, 157, 148, 119, 58, 128
51	1500,1700,1900,1092,1093,1023,615,616,684,685,686,208

Πίνακας 4.3: Πιθανά αθροίσματα των δεικτών των κορυφών κάθε τριγώνου και ο αντίστοιχος δείκτης του.

Συνεπώς, ανάλογα με το άθροισμα των δεικτών των κορυφών κάθε τριγώνου, του αποδίδεται και ο αντίστοιχος δείκτης. Αφού αποδοθούν δείκτες σε όλα τα τρίγωνα, αναιρείται η προσωρινή μεταβολή στους δείκτες όσων κόμβων είχαν δείκτες 0 ή 51 ή 91. Η λειτουργία της υπορουτίνας είναι αρκετά αποδοτική και δεν απαιτεί επιπλέον μνήμη.

Στην περίπτωση που το αρχείο εισόδου του πλέγματος έχει format '.cfx5', η ανάθεση των δεικτών γίνεται από διαφορετική υπορουτίνα, καθώς διαφορετικά είναι και τα δεδομένα που λαμβάνονται από το αρχείο. Συγκεκριμένα, ένα αρχείο εισόδου αυτής της μορφής διαφέρει από αυτό της προκαθορισμένης μορφής στο γεγονός ότι αντί για την λίστα με το δείκτη κάθε κόμβου, προσφέρει μια λίστα με τα οριακά τετράεδρα. Η λίστα περιέχει για κάθε όριο, όπως για παράδειγμα την επιφάνεια της γεωμετρίας, το σύνολο των τετραέδρων που έχουν μια έδρα πάνω στο εν λόγω όριο, καθώς και την αρίθμηση της συγκεκριμένης έδρας. Για παράδειγμα, στο σύνολο των τετραέδρων που έχουν μια έδρα πάνω σε στερεό τοίχωμα περιλαμβάνεται και το τετράεδρο 101, για το οποίο οριακή είναι η τρίτη του έδρα. Προφανώς η υπορουτίνα λαμβάνει πλέον ως δεδομένο τους δείκτες όλων των τετραέδρων και αποδίδει δείκτες σε όλους τους κόμβους.

Αφού λοιπόν προσπελαστεί το αντίστοιχο πεδίο του αρχείου εισόδου και αποθηκευτεί ο δείκτης κάθε τριγώνου, ο αλγόριθμος αρχικά αποδίδει σε όλους τους κόμβους δείκτη 0, θεωρώντας ότι όλοι είναι εσωτερικοί. Στη συνέχεια, σαρώνονται όλα τα τρίγωνα που βρίσκονται πάνω σε στερεό τοίχωμα (δείκτης 51) και στις κορυφές τους, αποδίδεται δείκτης 51 (στερεό τοίχωμα-solid wall). Στη συνέχεια σαρώνονται οι κορυφές των τριγώνων με δείκτη 2 (όριο εξόδου της ροής-outlet) και σε αυτούς αποδίδεται ο δείκτης 2, με εξαίρεση τους κόμβους που έχουν ήδη πάρει δείκτη με τιμή 51, οπότε σε αυτούς αποδίδεται δείκτης 92 καθώς βρίσκονται πάνω στην τομή του ορίου εξόδου της ροής και του στερεού τοιχώματος. Ακολουθεί η σάρωση των τριγώνων με δείκτη 3 και η ανάθεση του δείκτη 3 στις κορυφές τους (όριο εισόδου της ροής-inlet), εκτός από αυτές με δείκτη 51 στις οποίες ανατίθεται δείκτης 93 (τομή ορίου εισόδου της ροής- στερεού τοιχώματος), από τις κορυφές με δείκτη 2 στις οποίες ανατίθεται δείκτης 32 (τομή ορίου εισόδου της ροής- ορίου εξόδου της ροής), και εκτός από τις κορυφές με δείκτη 92 στις οποίες ανατίθεται δείκτης 23 (τομή ορίου εισόδου της ροής-ορίου εξόδου της ροής-στερεού τοιχώματος). Τέλος σαρώνονται τα τρίγωνα που ανήκουν στην επιφάνεια της γεωμετρίας (δείκτης 1) και στις κορυφές τους ανατίθεται δείκτης 1, καθώς αποτελούν κορυφές που επίσης ανήκουν στην επιφάνεια της γεωμετρίας, εκτός από τις κορυφές με δείκτη 51 που ανήκουν σε τομή της γεωμετρίας και

στερεού τοιχώματος, οπότε λαμβάνουν δείκτη με τιμή 91. Πλέον έχουν αποδοθεί δείκτες σε όλους τους κόμβους οποιαδήποτε και αν είναι η σχετική τους θέση στο πλέγμα, οπότε τερματίζεται η λειτουργία της συγκεκριμένης υπορουτίνας. Με αυτή ολοκληρώνεται ουσιαστικά και η επεξεργασία του τριδιάστατου πλέγματος, που διακριτοποιεί το χωρίο ροής, καθώς έχουν δημιουργηθεί οι κατάλληλες δομές δεδομένων που το περιγράφουν.

4.2.6 Αρχικοποίηση μεταβλητών και αδιαστατοποίηση

Στη συνέχεια του αλγορίθμου γίνεται η αρχικοποίηση των μεταβλητών επίλυσης και η ταυτόχρονη αδιαστατοποίηση των μεγεθών, που συμμετέχουν σ' αυτή. Αρχικά υπολογίζονται τα δεδομένα της ροής εκτός του εξεταζόμενου πεδίου. Τα μεγέθη, που αναφέρονται εκτός του πεδίου ροής, φέρουν το δείκτη *far*. Πρώτα υπολογίζονται οι δύο γωνίες που σχηματίζει η ροή του ρευστού με το οριζόντιο και κάθετο επίπεδο. Οι γωνίες αυτές ορίζονται από το χρήστη σε μοίρες μέσα στο αρχείο εισόδου των δεδομένων, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Στην υπορουτίνα που εξετάζεται, οι γωνίες μετατρέπονται σε ακτίνια. Στη συνέχεια υπολογίζεται η σταθερά R_g συναρτήσει της σταθεράς γ , που έχει επίσης οριστεί από το χρήστη, μέσω της σχέσης

$$R_g = \gamma - 1 \quad (4.3)$$

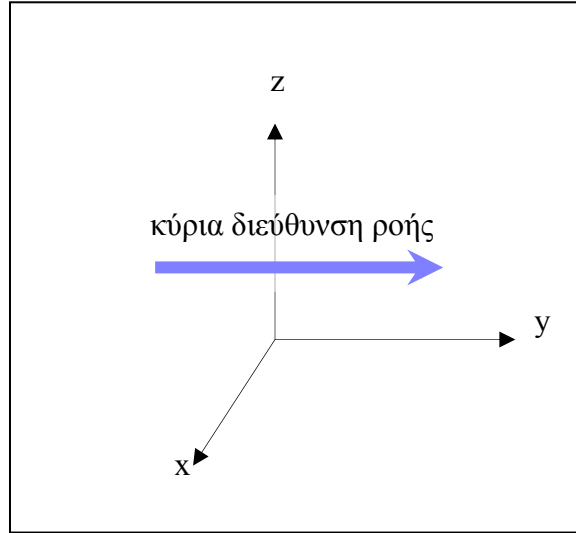
Ως ταχύτητα αναφοράς (\vec{V}_{far}^{ref}) ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα. Συνεπώς, η αδιαστατοποιημένη ταχύτητα του ήχου \tilde{a}_{far} εκτός πεδίου ροής προκύπτει:

$$\vec{V}_{far} = M_{far} \cdot a_{far} \Rightarrow \tilde{a}_{far} = \frac{\vec{V}_{far}^{ref}}{M_{far}} = \frac{1}{M_{far}} \quad (4.4)$$

όπου M_{far} είναι ο αριθμός Mach, που ασφαλώς δεν έχει διαστάσεις. Ακολουθεί ο υπολογισμός των συνιστωσών του διανύσματος της ταχύτητας εκτός του πεδίου ροής. Οι τρεις αδιαστατοποιημένες συνιστώσες στους άξονες x , y , z αντίστοιχα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \sin(angle2) \\ \tilde{v}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \cos(angle1) \cdot \cos(angle2) \\ \tilde{w}_{far} &= \vec{V}_{far}^{ref} \cdot \sin(angle1) \cdot \cos(angle2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Στις παραπάνω σχέσεις με *angle1* συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη της ταχύτητας της ροής με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ με *angle2* συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζεται με το κάθετο επίπεδο. Σημειώνεται ότι οι παραπάνω σχέσεις θεωρούν το ακόλουθο σύστημα συντεταγμένων:



Σχήμα 4.2: Σύστημα συντεταγμένων.

Η πυκνότητα του ρευστού αδιαστατοποιείται και τίθεται ίση με μονάδα ($\check{\rho}_{far} = 1$). Η θερμοκρασία \check{T}_{far} και η πίεση του ρευστού \check{p}_{far} προκύπτουν:

$$a = \sqrt{\gamma R_g T} \Rightarrow a^2 = \gamma(\gamma - 1)T \Rightarrow \check{T}_{far} = \frac{\check{a}_{far}^2}{\gamma(\gamma - 1)} \quad (4.6)$$

$$\check{p}_{far} = R_g \check{\rho}_{far} \check{T}_{far} = (\gamma - 1) \check{\rho}_{far} \check{T}_{far} = (\gamma - 1) \frac{\check{a}_{far}^2}{\gamma(\gamma - 1)} = \frac{1}{M_{far}^2 \gamma} \quad (4.7)$$

Τέλος ορίζεται η ολική ενθαλπία $\check{h}_{t, far}$ συναρτήσει των προηγούμενων μεγεθών:

$$\check{h}_{t, far} = \frac{\gamma \check{p}_{far}}{\check{\rho}_{far}(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \check{\rho}_{far} (\check{u}_{far}^2 + \check{v}_{far}^2 + \check{w}_{far}^2) \quad (4.8)$$

Από τα χαρακτηριστικά της ροής, που επικρατούν εκτός του χωρίου, υπολογίζονται πρώτα οι πρωτεύουσες μεταβλητές επίλυσης (*Primitive variables*), και στη συνέχεια οι συντηρητικές μεταβλητές (*Conservative variables*). Στη συνέχεια θα εννοείται η αδιαστατοποιημένη μορφή των μεγεθών και το αντίστοιχο σύμβολο θα παραλείπεται. Οι τιμές που λαμβάνουν οι πρωτεύουσες μεταβλητές στην πρώτη επανάληψη του επιλύτη είναι οι αντίστοιχες που επικρατούν εκτός του χωρίου επίλυσης. Το διάνυσμά τους είναι:

$$\vec{U} = (\rho \quad u \quad v \quad w \quad p)^T \quad (4.9)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών από τις πρωτεύουσες μεταβλητές:

$$\vec{W} = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad \rho E)^T \quad (4.10)$$

όπου η ολική ενέργεια του ρευστού ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (4.11)$$

4.2.7 Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των τετραέδρων

Ο αλγόριθμος συνεχίζει υπολογίζοντας γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τετραεδρικών στοιχείων του πλέγματος, όπως ο όγκος τους, οι συντεταγμένες των κέντρων τους, και οι συντεταγμένες των βαρυκέντρων των εδρών τους.

Ο όγκος V ενός τετραέδρου υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

όπου με $d_{ij}, i, j = 1, \dots, 4$ συμβολίζεται το μήκος της ακμής μεταξύ των κορυφών i και j του τετραέδρου.

Οι συντεταγμένες του κέντρου ενός τετραέδρου δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_{C_r} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i, \quad i = 1, \dots, 4 \\ y_{C_r} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i, \quad i = 1, \dots, 4 \\ z_{C_r} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_i, \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου x_i, y_i, z_i είναι οι συντεταγμένες της i κορυφής του τετραέδρου.

Οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου μιας τριγωνικής έδρας δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 x_j, \quad j=1, \dots, 3 \\y_C &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 y_j, \quad j=1, \dots, 3 \\z_C &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^4 z_j, \quad j=1, \dots, 3\end{aligned}\tag{4.14}$$

όπου x_j, y_j, z_j είναι οι συντεταγμένες της j κορυφής της έδρας.

4.2.8 Υπολογισμός του όγκου των κυψελών ελέγχου

Οι βοηθητικοί υπολογισμοί του αλγορίθμου συνεχίζονται με τον υπολογισμό του όγκου κάθε κυψέλης ελέγχου. Ο υπολογισμός τους πραγματοποιείται με έμμεσο, προσθετικό τρόπο. Αρχικά μηδενίζεται ο όγκος κάθε κυψέλης ελέγχου, που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Στη συνέχεια σαρώνονται όλα τα τετράεδρα και προστίθεται ο όγκος τους στις κορυφές τους, σταθμισμένος με το ποσοστό του όγκου του τετραέδρου που καταλαμβάνει η κυψέλη ελέγχου κάθε κορυφής του. Αποδεικνύεται ότι η κυψέλη ελέγχου κάθε κορυφής ενός τετραέδρου καταλαμβάνει ακριβώς το $\frac{1}{4}$ του όγκου του τετραέδρου, λόγω του ορισμού της κυψέλης. Συνεπώς κατά την σάρωση των τετραέδρων προστίθεται σε κάθε κορυφή το $\frac{1}{4}$ του όγκου κάθε τετραέδρου στα οποία ανήκει.

4.2.9 Υπολογισμός του μήκους της μικρότερης ακμής στην οποία ανήκει κάθε κόμβος

Κατά τη λειτουργία του επιλύτη εφαρμόζεται η τεχνική του ελάχιστου τοπικού χρονικού βήματος. Σ' αυτήν υπολογίζεται το ελάχιστο τοπικό χρονικό βήμα, που αντιστοιχεί σε κάθε κυψέλη ελέγχου, κάτι που προϋποθέτει τον υπολογισμό του μήκους της μικρότερης ακμής, που ξεκινά από κάθε κόμβο του πλέγματος. Η υπορουτίνα, που καλείται για τον υπολογισμό αυτής της τιμής, για κάθε κόμβο αρχικά αποδίδει μια πολύ μεγάλη τιμή. Εν συνεχεία σαρώνεται το πλήθος των ακμών του πλέγματος και υπολογίζεται το μήκος l κάθε ακμής με ακραίους κόμβους τους i και j , σύμφωνα με τις σχέσεις:

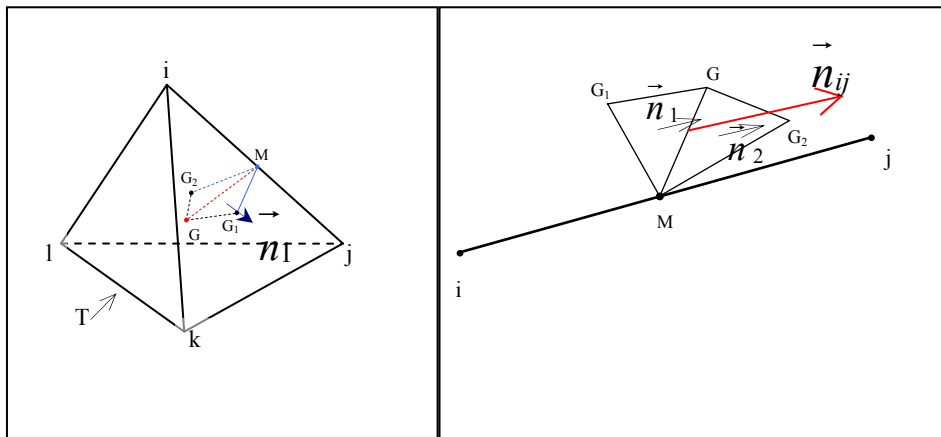
$$\begin{aligned}\Delta x &= x_j - x_i \\ \Delta y &= y_j - y_i \\ \Delta z &= z_j - z_i \\ l &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Μετά τον υπολογισμό του μήκους για κάθε ακμή, ελέγχεται αν το μήκος l είναι μικρότερο από την τιμή που αποδίδεται στους ακραίους κόμβους της. Σε

αυτή την περίπτωση, αποδίδεται στον ακραίο κόμβο η τιμή l ως το μήκος της μικρότερης ακμής που ξεκινάει από αυτόν. Εφ' όσον σαρωθούν όλες οι ακμές, θα έχει αποδοθεί σε κάθε κόμβο του πλέγματος το απαιτούμενο ελάχιστο μήκος.

4.2.10 Υπολογισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακμών

Κατά την επαναληπτική επίλυση υπολογίζεται το διάνυσμα ροής, που αντιστοιχεί σε κάθε ακμή, το οποίο συνεισφέρει κατάλληλα στον ισολογισμό των ροών σε κάθε κυψέλη ελέγχου. Ο υπολογισμός του διανύσματος ροής για κάθε ακμή απαιτεί τον υπολογισμό του διανύσματος \vec{n}_{ij} , που εικονίζεται στο σχήμα 3.3. Ακολουθούν τα σχήματα 4.3 και 4.4 απλουστευμένα και επικεντρωμένα στην ακμή ij .



Σχήματα 4.3 και 4.4: Ακμή ij και το διάνυσμα \vec{n}_{ij} που αναλογεί στο τετράεδρο T .

Στο σχήμα 4.3 εικονίζεται η ακμή ij , η οποία ανήκει στα τρίγωνα \widehat{ijk} και \widehat{ijl} . Με M συμβολίζεται το μέσο της ακμής, με G το κέντρο του τετραέδρου και με G_1, G_2 τα βαρύκεντρα των τριγώνων \widehat{ijk} και \widehat{ijl} αντίστοιχα. Για τον αριθμητικό υπολογισμό του \vec{n}_{ij} αξιοποιούνται δομές δεδομένων, που έχουν είδη υπολογιστεί, όπως η λίστα με τα τετράεδρα, στα οποία ανήκει κάθε ακμή και οι συντεταγμένες των κέντρων τόσο των τετραέδρων, όσο και των τριγώνων. Επίσης υπολογίζονται οι συντεταγμένες του μέσου M της ακμής, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{2}(x_i + x_j) \\ y_M &= \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ z_M &= \frac{1}{2}(z_i + z_j) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Σαρώνοντας όλες τις ακμές, διεξάγονται οι ακόλουθοι υπολογισμοί για κάθε ακμή ij : Αρχικά αποδίδονται μηδενικές τιμές στις τρεις συνιστώσες του \vec{n}_{ij} . Στη συνέχεια, εξετάζονται διαδοχικά όλα τα τετράεδρα T , στα οποία ανήκει η υπό εξέταση ακμή. Για κάθε ένα καλείται κατάλληλη υπορουτίνα, που αποδίδει τα δύο τρίγωνα $cell_1$ και $cell_2$ του τετραέδρου T , στα οποία ανήκει η ακμή ij . Η περιγραφή της υπορουτίνας θα γίνει σε επόμενη παράγραφο. Αφού ανακτηθούν οι συντεταγμένες του κέντρου G του τετραέδρου T και των βαρυκέντρων G_1, G_2 των τριγώνων $cell_1$ και $cell_2$, υπολογίζονται οι x,y,z -συνιστώσες των διανυσμάτων $\overrightarrow{GG_1}$, $\overrightarrow{GG_2}$ και \overrightarrow{GM} . Εν συνεχεία υπολογίζονται τα κάθετα διανύσματα \vec{n}_1 και \vec{n}_2 στα τρίγωνα $\widehat{MGG_1}$ και $\widehat{MGG_2}$ αντίστοιχα. Το διάνυσμα \vec{n}_1 υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{GG_1}$ και \overrightarrow{GM} . Εφόσον το \vec{n}_1 είναι κάθετο στο τρίγωνο $\widehat{MGG_1}$, θα είναι κάθετο και στα $\overrightarrow{GG_1}$ και \overrightarrow{GM} , άρα το εξωτερικό γινόμενό τους θα είναι ίσο με 0:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GG_1} \times \overrightarrow{GM} = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ GG_{1,x} & GG_{1,y} & GG_{1,z} \\ GM_x & GM_y & GM_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow i \underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,y} & GG_{1,z} \\ GM_y & GM_z \end{vmatrix}}_{n_{1,x}} - j \underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,x} & GG_{1,z} \\ GM_x & GM_z \end{vmatrix}}_{n_{1,y}} + k \underbrace{\begin{vmatrix} GG_{1,x} & GG_{1,y} \\ GM_x & GM_y \end{vmatrix}}_{n_{1,z}} = 0 \Rightarrow & (4.17) \\ \Rightarrow n_{1,x} = GG_{1,y} \cdot GM_z - GG_{1,z} \cdot GM_y, \\ n_{1,y} = GG_{1,z} \cdot GM_x - GG_{1,x} \cdot GM_z, \\ n_{1,z} = GG_{1,x} \cdot GM_y - GG_{1,y} \cdot GM_x \end{aligned}$$

Το διάνυσμα \vec{n}_1 θα πρέπει εξ' ορισμού να έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό του τριγώνου $\widehat{MGG_1}$. Για να ικανοποιηθεί η παραπάνω απαίτηση, οι συνιστώσες του \vec{n}_1 πολλαπλασιάζονται με τον κατάλληλο συντελεστή:

$$\begin{aligned} n_{1,x} &= \frac{1}{2} (GG_{1,y} \cdot GM_z - GG_{1,z} \cdot GM_y) \\ n_{1,y} &= \frac{1}{2} (GG_{1,z} \cdot GM_x - GG_{1,x} \cdot GM_z) \\ n_{1,z} &= \frac{1}{2} (GG_{1,x} \cdot GM_y - GG_{1,y} \cdot GM_x) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Όμοια υπολογίζονται και οι συνιστώσες του διανύσματος \vec{n}_2 . Τα \vec{n}_1 και \vec{n}_2 πρέπει να έχουν φορά από τον αριστερό ακραίο κόμβο, προς τον δεξιό (από τον κόμβο i προς τον κόμβο j στο σχήμα 4.4). Για να εξασφαλιστεί αυτή η προϋπόθεση υπολογίζονται αριθμητικά οι τρεις συνιστώσες της ακμής (η φορά του διανύσματος είναι από τον i προς τον κόμβο j) και στη συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος της ακμής με τα \vec{n}_1 και

\vec{n}_2 . Αν κάποιο από τα γινόμενα έχει αρνητικό πρόσημο, σημαίνει ότι τα δύο διανύσματα έχουν αντίθετη φορά, οπότε αλλάζουν τα πρόσημα των συνιστωσών του διανύσματος \vec{n}_1 ή \vec{n}_2 ώστε να έχουν πλέον την κατάλληλη φορά. Εφ' όσον πλέον έχει εξασφαλιστεί η σωστή φορά των \vec{n}_1 και \vec{n}_2 , οι συνιστώσες τους προστίθενται στις αντίστοιχες συνιστώσες του ζητούμενου \vec{n}_{ij} , το οποίο προφανώς θα έχει επίσης την κατάλληλη φορά.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε τετράεδρο, που ανήκει η ακμή ij , ενώ κάθε φορά προστίθενται οι συνιστώσες των \vec{n}_1 και \vec{n}_2 στις αντίστοιχες συνιστώσες του \vec{n}_{ij} . Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται αριθμητικά οι συνιστώσες του τελευταίου, λαμβάνοντας υπ' όψη όλα τα διανύσματα των επιμέρους τριγωνικών εμβადών, που συνθέτουν ένα τμήμα του ορίου της κυψέλης ελέγχου του αριστερού ακραίου κόμβου της ακμή ij (σχήμα 4.3). Τέλος, όλη η διαδικασία εκτελείται για κάθε ακμή του πλέγματος, υπολογίζεται το μέτρο του \vec{n}_{ij} για κάθε ακμή και οι συνιστώσες του μοναδιαίου \hat{n}_{ij} σύμφωνα με τη σχέση (3.12).

4.2.11 Εύρεση των δύο εδρών ενός τετραέδρου στις οποίες ανήκει μια ακμή του

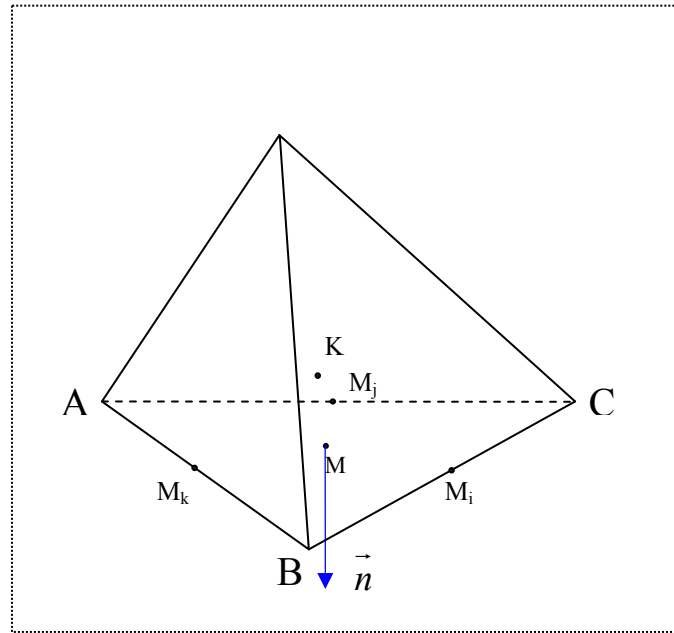
Κατά τη λειτουργία της προηγούμενης υπορουτίνας καλείται η συνάρτηση εύρεσης δύο εδρών ενός τετραέδρου, στις οποίες ανήκει μια από τις ακμές του. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα ένα τετράεδρο N και μια ακμή I του τετραέδρου N . Η υπορουτίνα έχει ως σκοπό να εντοπίσει τις δύο από τις τέσσερις έδρες του N , στις οποίες ανήκει η ακμή I . Πολύ απλά, σαρώνονται οι τέσσερις έδρες του τετραέδρου και για καθεμιά συγκρίνονται οι τρεις ακμές της με την ακμή I . Αν υπάρχει ταυτοποίηση αποθηκεύεται η εν λόγω έδρα στη μεταβλητή *cell1* και ελέγχεται η επόμενη έδρα, ενώ αν αυτή έχει οριστεί ήδη από προηγούμενη ταυτοποίηση αποθηκεύεται στη μεταβλητή *cell2* και τερματίζεται η λειτουργία της υπορουτίνας, επιστρέφοντας τα *cell1* και *cell2*.

4.2.12 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά οριακών τριγώνων

Οι βοηθητικοί υπολογισμοί συνεχίζονται με τον αριθμητικό υπολογισμό γεωμετρικών στοιχείων στα τρίγωνα, που ανήκουν σε οριακή επιφάνεια του χωρίου ροής. Αυτές οι επιφάνειες μπορεί να είναι είτε όρια εισόδου/ εξόδου της ροής, είτε στερεά τοιχώματα. Ανεξάρτητα από τη φύση των επιφανειών, υπολογίζεται για κάθε τρίγωνο, που ανήκει σ' αυτές, ένα κάθετο διάνυσμα, με μέτρο ίσο με το εμβαδό του τριγώνου (σχήμα 4.5). Το διάνυσμα αυτό είναι απαραίτητο στην επιβολή των οριακών συνθηκών. Η τεχνική που χρησιμοποιείται είναι αντίστοιχη μ' αυτή που περιγράφεται στον υπολογισμό γεωμετρικών στοιχείων των ακμών.

Σαρώνονται όλα τα τετράεδρα του πλέγματος και διαδοχικά όλες οι έδρες τους. Για κάθε οριακή έδρα, δηλαδή για όσες έχουν *index* 1, 2, 3 ή 51, ανακτώνται οι τρεις κορυφές της και οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου της.

Αν υποθέσουμε ότι εντοπίζεται η οριακή έδρα \widehat{ABC} του εικονιζόμενου τετραέδρου στο σχήμα 4.5. Εκτός από τις συντεταγμένες του σημείου M , ανακτώνται και αυτές του κέντρου K του τετραέδρου.



Σχήμα 4.5: Οριακό τρίγωνο και κάθετο διάνυσμα \vec{n} .

Από τις συντεταγμένες των δύο σημείων υπολογίζονται αριθμητικά οι συνιστώσες του διανύσματος \overrightarrow{KM} . Με τον ίδιο τρόπο, από τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, C , υπολογίζονται οι συνιστώσες των \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AC} . Εφ' όσον το ζητούμενο διάνυσμα \vec{n} είναι κάθετο στην έδρα \widehat{ABC} , θα είναι κάθετο και στα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{AC} , άρα προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ που θα είναι ίσο με μηδέν. Από τη συνθήκη αυτή υπολογίζονται αριθμητικά οι συνιστώσες του \vec{n} :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow i \underbrace{\begin{vmatrix} AB_y & AB_z \\ AC_y & AC_z \end{vmatrix}}_{n_x} - j \underbrace{\begin{vmatrix} AB_x & AB_z \\ AC_x & AC_z \end{vmatrix}}_{n_y} + k \underbrace{\begin{vmatrix} AB_x & AB_y \\ AC_x & AC_y \end{vmatrix}}_{n_z} = 0 \Rightarrow & (4.19) \\
 \Rightarrow n_x = AB_y \cdot AC_z - AB_z \cdot AC_y, \\
 n_y = AB_z \cdot AC_x - AB_x \cdot AC_z, \\
 n_z = AB_x \cdot AC_y - AB_y \cdot AC_x
 \end{aligned}$$

Επειδή ακριβώς το \vec{n} πρέπει να έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό του \widehat{ABC} , οι σχέσεις (4.19) πολλαπλασιάζονται με τον κατάλληλο συντελεστή, καθώς ισχύει:

$$E_{\widehat{ABC}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \quad (4.20)$$

Έτσι, οι συνιστώσες του διανύσματος \vec{n} δίνονται από τις σχέσεις:

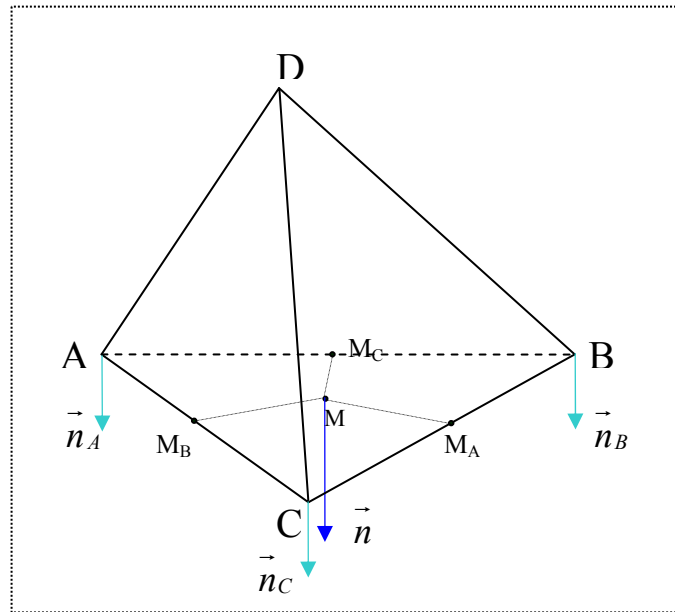
$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{2}(AB_y \cdot AC_z - AB_z \cdot AC_y) \\ n_y &= \frac{1}{2}(AB_z \cdot AC_x - AB_x \cdot AC_z) \\ n_z &= \frac{1}{2}(AB_x \cdot AC_y - AB_y \cdot AC_x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η φορά του πρέπει να είναι προς το εξωτερικό του τετραέδρου, δηλαδή προς το εξωτερικό του χωρίου ροής, εφ' όσον η \widehat{ABC} είναι μια οριακή έδρα. Η φορά αυτή είναι ίδια με τη φορά του διανύσματος \overrightarrow{KM} . Η εξασφάλιση της σωστής φοράς του διανύσματος \vec{n} εμπίπτει στην εξασφάλιση της ίδιας φοράς με αυτή του \overrightarrow{KM} . Αυτό επιτυγχάνεται με τον έλεγχο του πρόσημου του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων. Αν αυτό προκύψει αρνητικό, τότε αλλάζει το πρόσημο των συνιστωσών του διανύσματος \vec{n} . Μετά την εξασφάλιση της σωστής φοράς, υπολογίζεται το μέτρο του \vec{n} και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, σύμφωνα με τη σχέση (3.12).

4.2.13 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά οριακών κόμβων

Η επιβολή της οριακής συνθήκης εισόδου/ εξόδου της ροής στις αντίστοιχες οριακές επιφάνειες προϋποθέτει τον υπολογισμό ενός διανύσματος για τους οριακούς κόμβους, που ανήκουν στις επιφάνειες αυτές, αντίστοιχου με το κάθετο διάνυσμα των οριακών τριγώνων. Ουσιαστικά η υπορουτίνα μοιράζει κατάλληλα το τελευταίο στους οριακούς κόμβους με μια προσθετική τεχνική.

Αναλυτικότερα, αρχικά αποδίδονται μηδενικές τιμές στις τρεις συνιστώσες του ζητούμενου διανύσματος για όλους τους κόμβους του πλέγματος, που ανήκουν στις προαναφερθείσες επιφάνειες. Στη συνέχεια σαρώνονται τα τρίγωνα που ανήκουν σ' αυτές και μοιράζονται κατάλληλα τα κάθετα στα τρίγωνα διανύσματα στις τρεις κορυφές τους.



Σχήμα 4.6: Οριακό τρίγωνο σε επιφάνεια εισόδου/ εξόδου της ροής. Ανάθεση του κάθετου διανύσματος \vec{n} στις τρεις κορυφές του.

Στο σχήμα 4.6 εικονίζεται η οριακή έδρα \widehat{ABC} , που θεωρείται ότι ανήκει σε επιφάνεια εισόδου ή εξόδου της ροής. Τα σημεία M , M_A , M_B , M_C είναι αντίστοιχα το βαρύκεντρο της έδρας και τα μέσα των ακμών \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} . Το κάθετο διάνυσμα \vec{n} στην έδρα έχει υπολογιστεί αριθμητικά από προηγούμενη συνάρτηση και «μοιράζεται» στις κορυφές του τριγώνου. Επειδή ακριβώς τα εμβαδά (AM_BMM_C) , (BM_AMM_C) , (CM_AMM_B) είναι ίσα με το $1/3$ του εμβαδού της έδρας \widehat{ABC} , τα διανύσματα \vec{n}_A , \vec{n}_B και \vec{n}_C είναι επίσης κάθετα στην έδρα \widehat{ABC} , έχουν την ίδια φορά με το \vec{n} , αλλά έχουν μέτρο ίσο με το εμβαδό του αντίστοιχου χωρίου, δηλαδή ίσο με το $1/3$ του εμβαδού της έδρας. Σαρώνοντας διαδοχικά τα τρίγωνα, που ανήκουν στις επιφάνειες εισόδου/ εξόδου της ροής, δηλαδή όσα έχουν *index* 2 ή 3, προστίθεται στις συνιστώσες των \vec{n}_A , \vec{n}_B και \vec{n}_C κάθε κορυφής του τριγώνου ακριβώς το $1/3$ του διανύσματος \vec{n} . Έτσι τα διανύσματα των οριακών κόμβων υπολογίζονται αθροιστικά, λαμβάνοντας υπ' όψη τη συνεισφορά κάθε οριακού τριγώνου στο οποίο ανήκει ο κόμβος. Τέλος υπολογίζεται το μέτρο του διανύσματος και οι συνιστώσες του αντίστοιχου μοναδιαίου διανύσματος. Με τη συνάρτηση αυτή ολοκληρώνονται οι βοηθητικοί υπολογισμοί.

4.2.14 Έναρξη χρονικών επαναλήψεων, λειτουργία του επιλύτη

Οι βοηθητικοί υπολογισμοί, που περιγράφηκαν παραπάνω, εκτελούνται μία μόνο φορά στην αρχή του αλγορίθμου και παρέχουν τις απαραίτητες πληροφορίες στον επαναληπτικό επιλύτη. Μετά το πέρας τους, αρχίζει η επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού των μεταβλητών του προβλήματος. Το

πλήθος των επαναλήψεων, που έχουν εκτελεστεί μέχρι κάποια χρονική στιγμή, δίνεται από κατάλληλο μετρητή.

Στην αρχή κάθε νέας επανάληψης υπολογίζεται το τοπικό χρονικό βήμα, που αντιστοιχεί σε κάθε κυψέλη ελέγχου, σύμφωνα με τη σχέση (3.42). Σ' αυτή, το μήκος της ελάχιστης ακμής, που ξεκινά από κάθε κόμβο, έχει ήδη υπολογιστεί κατά τη διάρκεια των βοηθητικών υπολογισμών, ενώ ως κύρια συνιστώσα της ταχύτητας λαμβάνεται η y -συνιστώσα, όπως υποδεικνύεται και στο σχήμα 4.2. Η τιμή της ταχύτητας του ήχου σε κάθε κόμβο λαμβάνεται από την αντίστοιχη που προέκυψε από την προηγούμενη επανάληψη. Ο παράγοντας CFL καθορίζεται από το χρήστη.

Στη συνέχεια αποθηκεύονται οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών κάθε κόμβου, που υπολογίστηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη. Οι τιμές αυτές είναι απαραίτητες κατά τον αριθμητικό υπολογισμό των σχέσεων (3.46).

Στο σημείο αυτό εφαρμόζεται η βηματική μέθοδος επίλυσης Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων (RK4). Πρακτικά σημαίνει ότι κάθε επανάληψη περιλαμβάνει την εκτέλεση τεσσάρων υποεπαναλήψεων, όπως υποδεικνύονται και από τη σχέση (3.46). Οι υπολογισμοί, που περιγράφονται στη συνέχεια, εκτελούνται σε κάθε υποεπανάλληψη της μεθόδου.

Με την έναρξη κάθε υποεπανάλληψης μηδενίζεται η τιμή της μέσης απόκλισης κάθε μιας εκ των πέντε συντηρητικών μεταβλητών. Η μέση απόκλιση αναφέρεται σε όλους τους κόμβους του πλέγματος και ο μηδενισμός σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητος, καθώς η τιμή της υπολογίζεται προσθετικά, όπως περιγράφεται ακολούθως.

Στη συνέχεια, για κάθε συντηρητική μεταβλητή κάθε κόμβου του πλέγματος μηδενίζεται η τιμή του όρου $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$ της εξίσωσης (3.44),

καθώς ο όρος αυτός υπολογίζεται προφανώς προσθετικά. Η μεταβλητή αυτή αποτελεί ουσιαστικά το άθροισμα ροών της κυψέλης ελέγχου, που αντιστοιχεί σε κάθε κόμβο.

Ακολούθως, καλούνται συναρτήσεις, που περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω, οι οποίες υπολογίζουν για κάθε κόμβο τις τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών, όπως προκύπτουν από τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών, που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη επανάληψη. Επιπλέον, ανανεώνονται οι τιμές της θερμοκρασίας, της ταχύτητας του ήχου, του αριθμού Mach και της ολική ενθαλπίας σε κάθε κόμβο, καθώς και οι όροι πηγής, που αναφέρονται σε κάθε κυψέλη ελέγχου.

Στην επόμενη συνάρτηση που καλείται, εφαρμόζεται το σχήμα του Roe, όπως περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω, και υπολογίζονται τα αθροίσματα της ροής για κάθε κυψέλη ελέγχου. Στον υπολογισμό των όρων $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$

λαμβάνονται υπ' όψη και η επίδραση των οριακών συνθηκών.

Μετά τον υπολογισμό των αθροισμάτων είναι πλέον δυνατή η εφαρμογή των σχέσεων (3.43) και (3.44). Ο συνδυασμός τους δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$V_P \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_P = - \left(\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m + \vec{S}_P V_P \right) \quad (4.22)$$

Η σχέση (4.22) εφαρμόζεται σε κάθε υποεπανάληψη, για κάθε συντηρητική μεταβλητή κάθε κόμβου του πλέγματος. Η σχέση επιλύεται ως προς το $d\vec{W}$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι πλέον γνωστοί: σε προηγούμενες συναρτήσεις έχουν υπολογιστεί οι όγκοι V_p των κυψελών ελέγχου, το τοπικό χρονικό βήμα dt για κάθε κόμβο, τα αθροίσματα των διανυσμάτων ροής $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$ και οι όροι πηγής \vec{S}_p . Αφού υπολογιστεί για

κάθε μεταβλητή η μεταβολή της τιμής της $d\vec{W}$, και έχοντας ήδη αποθηκεύσει τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών κάθε κόμβου, που υπολογίστηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη, υπολογίζονται οι νέες τιμές των μεταβλητών, λαμβάνοντας υπ' όψη και τους συντελεστές της μεθόδου Runge-Kutta (3.46). Παράλληλα, υπολογίζεται και η μέση μεταβολή κάθε συντηρητικής μεταβλητής στους κόμβους του πλέγματος.

Αφού ολοκληρωθούν οι τέσσερις υποεπαναλήψεις της RK4, ελέγχεται αν για την συγκεκριμένη επανάληψη της διαδικασίας ικανοποιείται κάποιο εκ των δύο συνθηκών τερματισμού. Υπενθυμίζεται ότι η διαδικασία οδηγείται σε τερματισμό αν η τιμή της απόκλισης μιας μεταβλητής είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι, οπότε έχουμε σύγκλιση, είτε αν ο μετρητής των επαναλήψεων έχει πάρει τιμή μεγαλύτερη του μέγιστου πλήθους επαναλήψεων, που έχει επίσης καθοριστεί από το χρήστη. Αν ικανοποιείται μια εκ των δύο συνθηκών, τερματίζεται η επαναληπτική διαδικασία, εξάγονται τα επιθυμητά αποτελέσματα και ο αλγόριθμος τερματίζεται. Σε αντίθετη περίπτωση ο αλγόριθμος οδηγείται σε νέα επανάληψη της διαδικασίας. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή των συναρτήσεων, που καλούνται κατά την λειτουργία του επιλύτη.

4.2.15 Υπολογισμός των πρωτευουσών μεταβλητών

Κατά την επαναληπτική διαδικασία καλείται μια υπορουτίνα, που έχει ως στόχο την ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σε κάθε κόμβο, σύμφωνα με τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών, όπως αυτές διαμορφώθηκαν κατά την προηγούμενη επανάληψη. Γνωρίζοντας την τιμή του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών (4.10), υπολογίζεται η τιμή που αντιστοιχεί στο διάνυσμα των πρωτευουσών μεταβλητών (4.9) για κάθε κόμβο. Σημειώνεται ότι η τιμή της πίεσης p υπολογίζεται από τη σχέση (3.6), ενώ η θερμοκρασία T υπολογίζεται από τη σχέση (3.4). Επιπλέον, σε κάθε κόμβο ανανεώνεται η τιμή της ταχύτητας του ήχου, σύμφωνα με τη σχέση (4.6), του αριθμού Mach σύμφωνα με την (4.4) και η τιμή της ολικής ενθαλπίας, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.7).

4.2.16 Υπολογισμός των όρων πηγής

Μετά την ανανέωση των τιμών των πρωτευουσών μεταβλητών υπολογίζονται και οι όροι πηγής, που παρουσιάζονται στη σχέση (4.22), από κατάλληλη υπορουτίνα. Ουσιαστικά δεν γίνεται υπολογισμός αλλά απευθείας

ανάθεση των τιμών τους. Στην παρούσα εργασία θεωρήθηκε ότι δεν υπάρχουν πηγές, συνεπώς μηδενίζονται οι όροι πηγής για κάθε κόμβο. Ο αλγόριθμος ωστόσο δίνει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης μη μηδενικών όρων πηγής, που θα λαμβάνονται ασφαλώς υπό όψη κατά τον ισολογισμό των ροών σε κάθε κυψέλη ελέγχου.

4.2.17 Εφαρμογή του σχήματος Roe

Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου υπολογίζονται τα αθροίσματα των διανυσμάτων ροής, που εισέρχονται και εξέρχονται από κάθε κυψέλη ελέγχου. Ο ισολογισμός αυτός καθορίζει και τις νέες τιμές, που λαμβάνουν οι συντηρητικές μεταβλητές. Το άθροισμα των ροών, που συμβολίζεται με τον όρο $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$ στην εξίσωση (4.22), υπολογίζεται κατά την εφαρμογή του

προσεγγιστικού επιλύτη Riemann του Roe. Στην αυτήν λαμβάνει χώρα και η επιβολή των οριακών συνθηκών. Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή της αντίστοιχης υπορουτίνας του αλγορίθμου.

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σχήμα Roe εφαρμόζεται στις ακμές του πλέγματος, οπότε η υπορουτίνα σαρώνει όλες τις ακμές και σε καθεμιά εκτελεί μια σειρά από υπολογισμούς. Για κάθε ακμή ανακτώνται από τις δομές δεδομένων οι δύο ακραίοι κόμβοι και για κάθε κόμβο οι πέντε πρωτεύουσες μεταβλητές και η ολική ενθαλπία. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι μέσες κατά Roe τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.24). Αυτή εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των πρώτων τεσσάρων μέσων πρωτευουσών μεταβλητών και της μέσης ολικής ενθαλπίας. Η μέση τιμή της πίεσης υπολογίζεται από τη σχέση (3.25), χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες μέσες τιμές της ολικής ενθαλπίας, της ταχύτητας και της πυκνότητας. Οι μέσες τιμές χρησιμοποιούνται και κατά την εφαρμογή της σχέσης (4.6), για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας του ήχου.

Οι μέσες κατά Roe τιμές των μεγεθών αξιοποιούνται κατά την υπολογισμό των πινάκων, που παρουσιάζονται στο παράρτημα Α. Για το λόγο αυτό πρώτα υπολογίζεται το διάνυσμα V_n από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της μέσης κατά Roe ταχύτητας της ροής και του μοναδιαίου διανύσματος \hat{n} . Οι συνιστώσες της μέσης ταχύτητας υπολογίστηκαν από τη (3.24), ενώ οι συνιστώσες του \hat{n} έχουν υπολογιστεί από την υπορουτίνα υπολογισμού γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακμών. Όλα τα μεγέθη, που περιέχονται στις σχέσεις (Α.3) - (Α.8), αναφέρονται στις μέσες κατά Roe τιμές και είναι πλέον γνωστά.

Μετά τον υπολογισμό των πινάκων $\underline{\Lambda}$, \underline{T}^{-1} και \underline{T} εφαρμόζεται η σχέση (Α.2) και υπολογίζεται το Ιακωβιανό μητρώο \underline{A} . Πλέον είναι δυνατός ο υπολογισμός του διανύσματος ροής, που αντιστοιχεί στην ακμή $\vec{\Phi}_{PQ}$, σύμφωνα με τη σχέση (4.21):

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \vec{H}(\vec{W}_{PQ}^L, \vec{n}_{PQ}) + \vec{A}_{PQ}(\vec{W}_{PQ}^R - \vec{W}_{PQ}^L) \quad (4.23)$$

Το διάνυσμα \vec{H} αναφέρεται στον αριστερό ακραίο κόμβο της ακμής και δίνεται από τη σχέση (Α.1). Σ' αυτή χρησιμοποιείται το διάνυσμα V_n του αριστερού κόμβου, που υπολογίζεται από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας της ροής, που αντιστοιχεί στον αριστερό κόμβο, και του μοναδιαίου διανύσματος \vec{n} . Προφανώς όλες οι πρωτεύουσες μεταβλητές, που παρουσιάζονται στην (Α.1), θα αναφέρονται στον αριστερό κόμβο. Τέλος υπενθυμίζεται ότι τα διανύσματα \vec{W}_{PQ}^L και \vec{W}_{PQ}^R είναι τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών του αριστερού και του δεξιού ακραίου κόμβου αντίστοιχα.

Το διάνυσμα ροής, που υπολογίστηκε για την υπό εξέταση ακμή, συνεισφέρει στον ισολογισμό ροών των ακραίων κόμβων της. Αυτό γίνεται συνεισφέροντας με το κατάλληλο πρόσημο στον υπολογισμό του όρου $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$, που εμφανίζεται στη σχέση (4.22). Έτσι, για το διάνυσμα \vec{H}

προστίθεται με θετικό πρόσημο στο άθροισμα των ροών του αριστερού κόμβου, και με αρνητικό πρόσημο στο αντίστοιχο του δεξιού.

Η υπορουτίνα εκτελεί τους παραπάνω υπολογισμούς για όλες τις ακμές του πλέγματος, υπολογίζοντας για καθεμιά το διάνυσμα ροής και συνεισφέροντας κατάλληλα στο άθροισμα ροών των ακραίων κόμβων. Σαρώνοντας όλες τις ακμές, υπολογίζονται έμμεσα τα αθροίσματα ροών των κόμβων, λαμβάνοντας υπ' όψη τα διανύσματα ροών όλων των ακμών, στα οποία ανήκει κάθε κόμβος.

Στην συνέχεια της υπορουτίνας εισάγονται οι οριακές συνθήκες. Αρχικά λαμβάνεται υπ' όψη η επίδραση της συνθήκης εισόδου και εξόδου της ροής από το χωρίο ροής. Η συνθήκη εφαρμόζεται στους οριακούς κόμβους, που ανήκουν στις αντίστοιχες οριακές επιφάνειες. Καλείται κατάλληλη υπορουτίνα, που παρουσιάζεται στη συνέχεια, η οποία υπολογίζει για κάθε ακραίο κόμβο ένα επιπλέον διάνυσμα ροής, που δημιουργείται μεταξύ της κατάστασης του κόμβου και της κατάστασης *out* εξωτερικά του χωρίου ροής. Το διάνυσμα αυτό προστίθεται με θετικό πρόσημο στις μεταβλητές που εκφράζουν το άθροισμα ροών τις σχέσης (4.22) και αφορούν καθεμιά από τις πέντε συντηρητικές μεταβλητές κάθε κόμβου.

Τέλος, εισάγεται και η οριακή συνθήκη μη εισχώρησης. Η συνθήκη αυτή εφαρμόζεται με έμμεσο τρόπο στα τρίγωνα που ανήκουν σε επιφάνειες που παριστάνουν τοιχώματα. Σαρώνονται λοιπόν τα τρίγωνα, που ανήκουν στην επιφάνεια της γεωμετρίας και στα αθροίσματα $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$ των κορυφών

τους προστίθεται το διάνυσμα \vec{H}_{wall} της σχέσης (3.39):

$$\vec{H}_{wall} = \begin{pmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ pn_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Το διάνυσμα αυτό παριστάνει το τεχνητό διάνυσμα ροής, που εισέρχεται από το τοίχωμα στην κυψέλη ελέγχου του οριακού κόμβου, στο οποίο έχει μηδενιστεί η κατάλληλη συνιστώσα της ταχύτητας, υλοποιώντας έμμεσα τη συνθήκη μη-εισχώρησης. Περισσότερες λεπτομέρειες είναι διαθέσιμες σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Στο διάνυσμα η πίεση p είναι η πίεση που έχει υπολογιστεί για τον οριακό κόμβο στην προηγούμενη επανάληψη, ενώ συνιστώσες n_x, n_y και n_z είναι οι τρεις συνιστώσες του μη-μοναδιαίου κάθετου διανύσματος, που υπολογίστηκε από προηγούμενη συνάρτηση για τα οριακά τρίγωνα.

4.2.18 Υπολογισμός του διανύσματος ελεύθερης ροής (free stream).

Κατά την εφαρμογή της οριακής συνθήκης εισόδου/ εξόδου της ροής (free stream) στο σχήμα του Roe προστίθεται στο άθροισμα των ροών $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$ των οριακών κόμβων ένα επιπλέον διάνυσμα ροής. Το διάνυσμα αυτό υπολογίζεται από την υπορουτίνα, η οποία περιγράφεται στην παρούσα παράγραφο.

Η οριακή συνθήκη εισόδου/ εξόδου της ροής εφαρμόζεται στους κόμβους, που ανήκουν στις αντίστοιχες επιφάνειες, και όχι στα οριακά τρίγωνα, όπως συμβαίνει στην οριακή συνθήκη μη-εισχώρησης. Η υπορουτίνα επιλύει για κάθε οριακό κόμβο ένα πρόβλημα Riemann με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν της υπορουτίνας εφαρμογής του σχήματος Roe. Το πρόβλημα Riemann επιλύεται μεταξύ της κατάστασης που περιγράφεται από τις μεταβλητές του οριακού κόμβου και της υποθετικής κατάστασης *out*, που επικρατεί έξω από το χωρίο ροής και σε μεγάλη απόσταση από τη γεωμετρία. Η κατάσταση αυτή περιγράφεται από τις συνθήκες ροής που έχει εισαγάγει ο χρήστης. Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στην αντίστοιχη παράγραφο του προηγούμενου κεφαλαίου.

Η υπορουτίνα σαρώνει τους οριακούς κόμβους, στους οποίους θα επιβληθεί η οριακή συνθήκη και για τον καθένα εκτελεί το παρακάτω σύνολο υπολογισμών. Αρχικά μηδενίζεται το άθροισμα ελεύθερης ροής, δηλαδή το αντίστοιχο άθροισμα του $\sum_{Q \in K_N(P)} (\vec{\Phi}_{PQ})^m$, που οφείλεται στη ροή που εισάγεται

ή εξάγεται από το εξωτερικό του χωρίου στην κυψέλη ελέγχου του οριακού κόμβου. Στη συνέχεια ανακτώνται οι τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών του και της ολικής ενθαλπίας του. Οι μέσες κατά Roe τιμές υπολογίζονται,

εφαρμόζοντας τη σχέση (3.24) για τις τέσσερις πρώτες πρωτεύουσες μεταβλητές και την ολική ενθαλπία, ενώ εφαρμόζεται η σχέση (3.25) για την μέση πίεση. Επίσης εφαρμόζεται η σχέση (4.6) για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας του ήχου. Οι μέσες κατά Roe τιμές που υπολογίζονται αφορούν στην κατάσταση του κόμβου και στην κατάσταση *out*. Για την περιγραφή της κατάστασης *out* στις σχέσεις που αναφέρθηκαν χρησιμοποιούνται τα μεγέθη με δείκτη *far*, τα οποία υπολογίστηκαν κατά την αρχικοποίηση του προβλήματος. Παράλληλα, υπολογίζεται το διάνυσμα V_n , που στην περίπτωση αυτή είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της μέσης κατά Roe ταχύτητας της ροής και του μοναδιαίου διανύσματος \hat{n} , που αφορά τους ακραίους κόμβους και υπολογίστηκε από την υπορουτίνα υπολογισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ακραίων κόμβων. Το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείται και στη συνέχεια στον υπολογισμό των πινάκων των σχέσεων (A.3) – (A.8), ενώ όλα τα μεγέθη στις σχέσεις αναφέρονται στις μέσες κατά Roe τιμές τους. Επιπλέον, για την εφαρμογή των σχέσεων, υπολογίζονται οι συντηρητικές μεταβλητές της κατάστασης *out* από τις συνθήκες ροής που έχει εισαγάγει ο χρήστης.

Αφού έχουν υπολογιστεί όλα τα απαιτούμενα μεγέθη, υπολογίζονται οι πίνακες \underline{A}_+ , \underline{A}_- , \underline{T} και \underline{T}^{-1} από τις αντίστοιχες σχέσεις του παραρτήματος Α. Ακολουθεί ο υπολογισμός των Ιακωβιανών \underline{A}^+ και \underline{A}^- , σύμφωνα με τη σχέση (A.7). Οι τελευταίοι πίνακες χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της σχέσης (3.40), από την οποία αποδίδεται το ζητούμενο διάνυσμα ελεύθερης ροής $\vec{H}_{P,out}$, που αντιστοιχεί στον ακραίο κόμβο:

$$\vec{H}_{P,out} = \underline{A}_P^+ \vec{W}_P + \underline{A}_P^- \vec{W}_{out} \quad (3.40)$$

Υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα \vec{W}_P είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών του ακραίου κόμβου και το \vec{W}_{out} είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της κατάστασης *out*. Το διάνυσμα ελεύθερης ροής $\vec{H}_{P,out}$ υπολογίζεται για κάθε ακραίο κόμβο των επιφανειών εισόδου/ εξόδου της ροής και χρησιμοποιείται από την υπορουτίνα εφαρμογής του σχήματος Roe, όπως αναφέρεται παραπάνω.

Κεφάλαιο 5

Πιστοποίηση του αλγορίθμου

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η πιστοποίηση όσων περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για διαφορετικές περιπτώσεις ροής και διαφορετικές γεωμετρίες. Εξετάζονται και σχολιάζονται οι διαφορές που προκύπτουν για τις ακόλουθες περιπτώσεις. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων είναι ποιοτική και προφανώς απαιτείται πιο συστηματική μελέτη (αφού όμως εισαχθεί το σχήμα δεύτερης τάξης που εκκρεμεί).

5.1 Πτέρυγα NACA0012

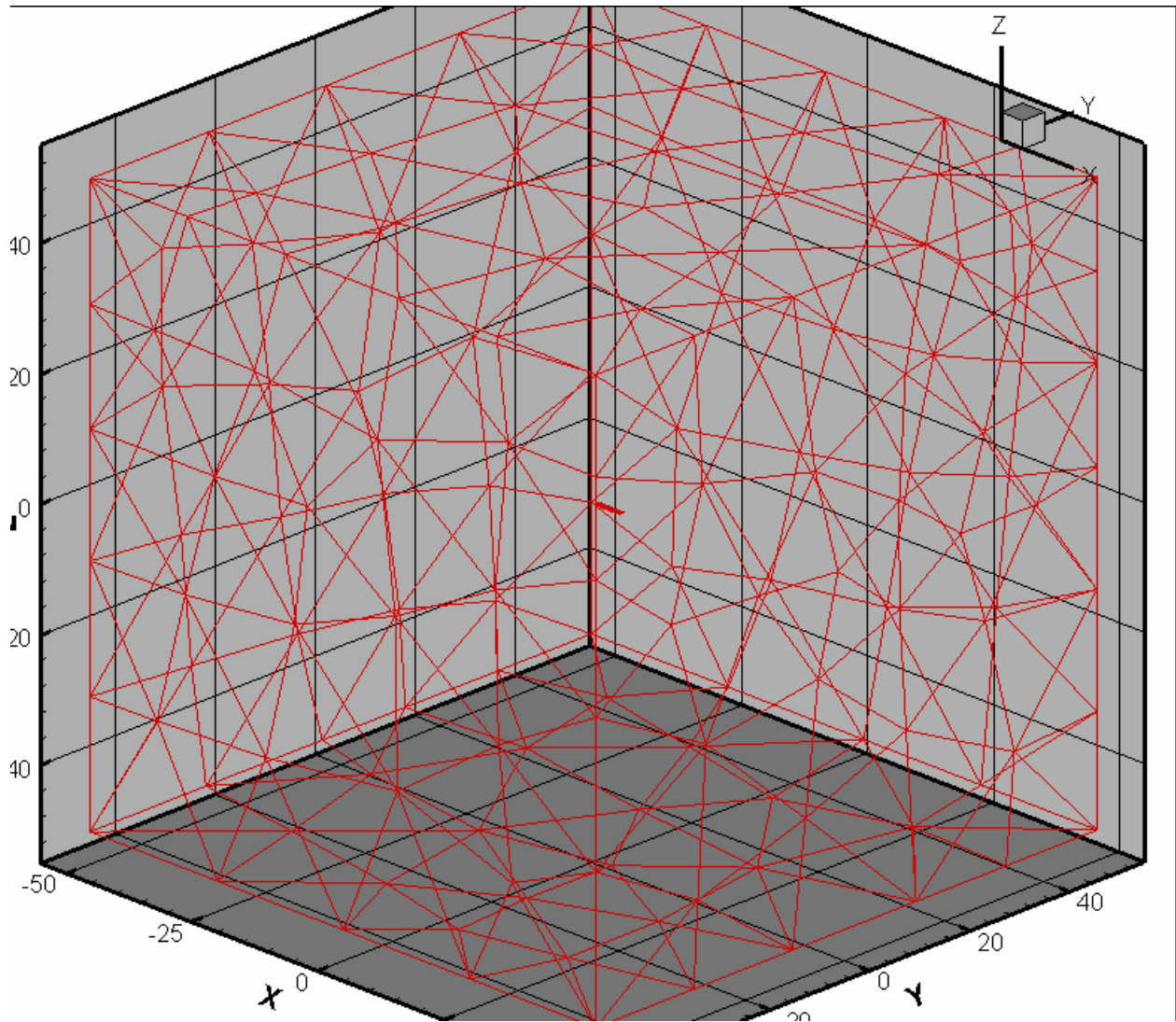
Μια από τις γεωμετρίες που εξετάστηκαν είναι μια πτέρυγα που αντιστοιχεί στην αεροτομή NACA0012 με λόγο πλάτους προς μήκος χορδής ίσο με 5. Εξετάστηκε χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά πλέγματα, που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια. Οι συνθήκες της ροής είναι οι ακόλουθες:

- Mach 0.85
- Γωνία προσβολής 0°
- Γωνία πλαγιολίσθησης 0°
- Εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής $\gamma = 1.4$

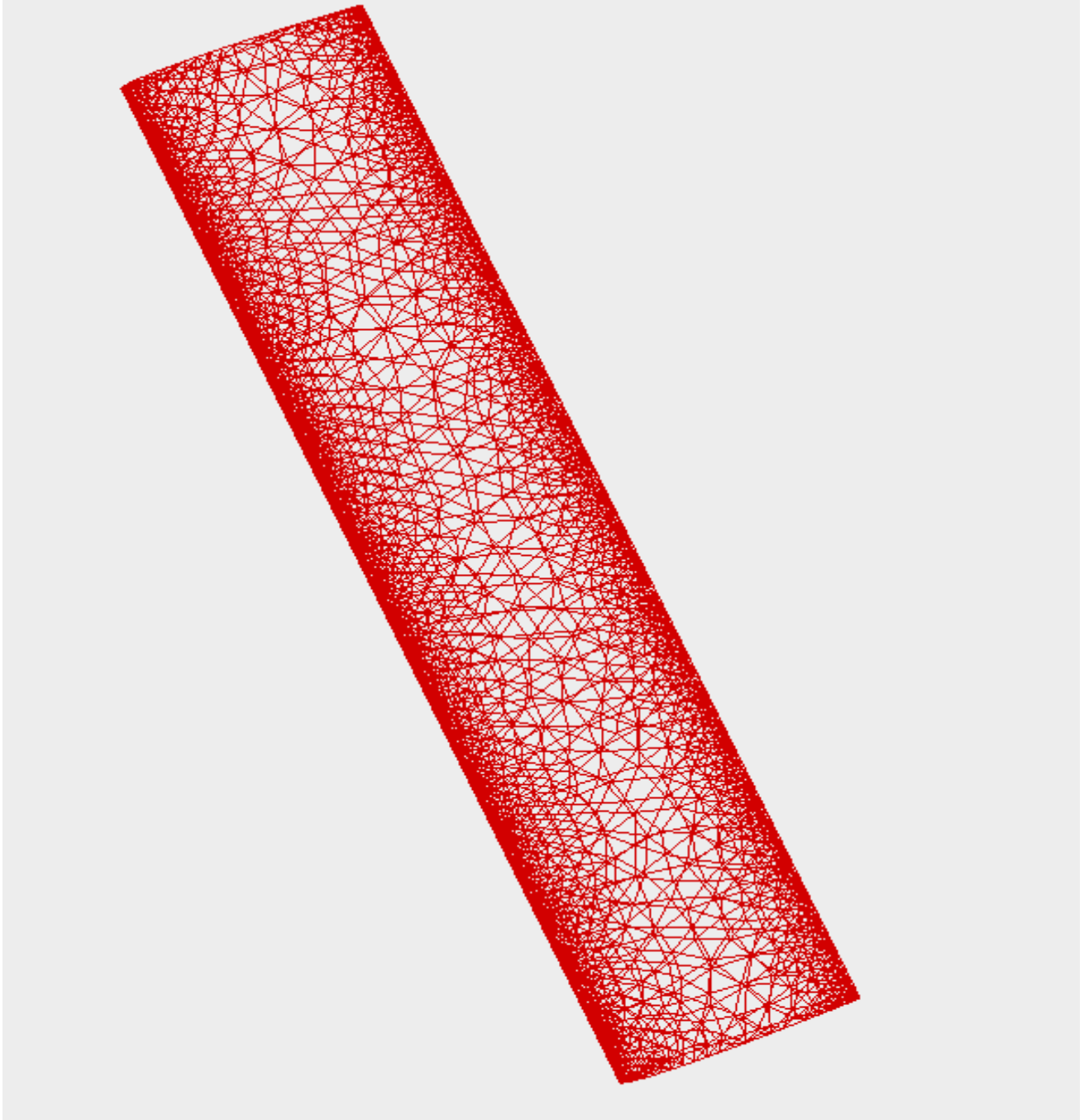
Οι παράμετροι της επαναληπτικής διαδικασίας ορίστηκαν:

- Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων 10000
- Μέγιστο υπόλοιπο 10^{-10}

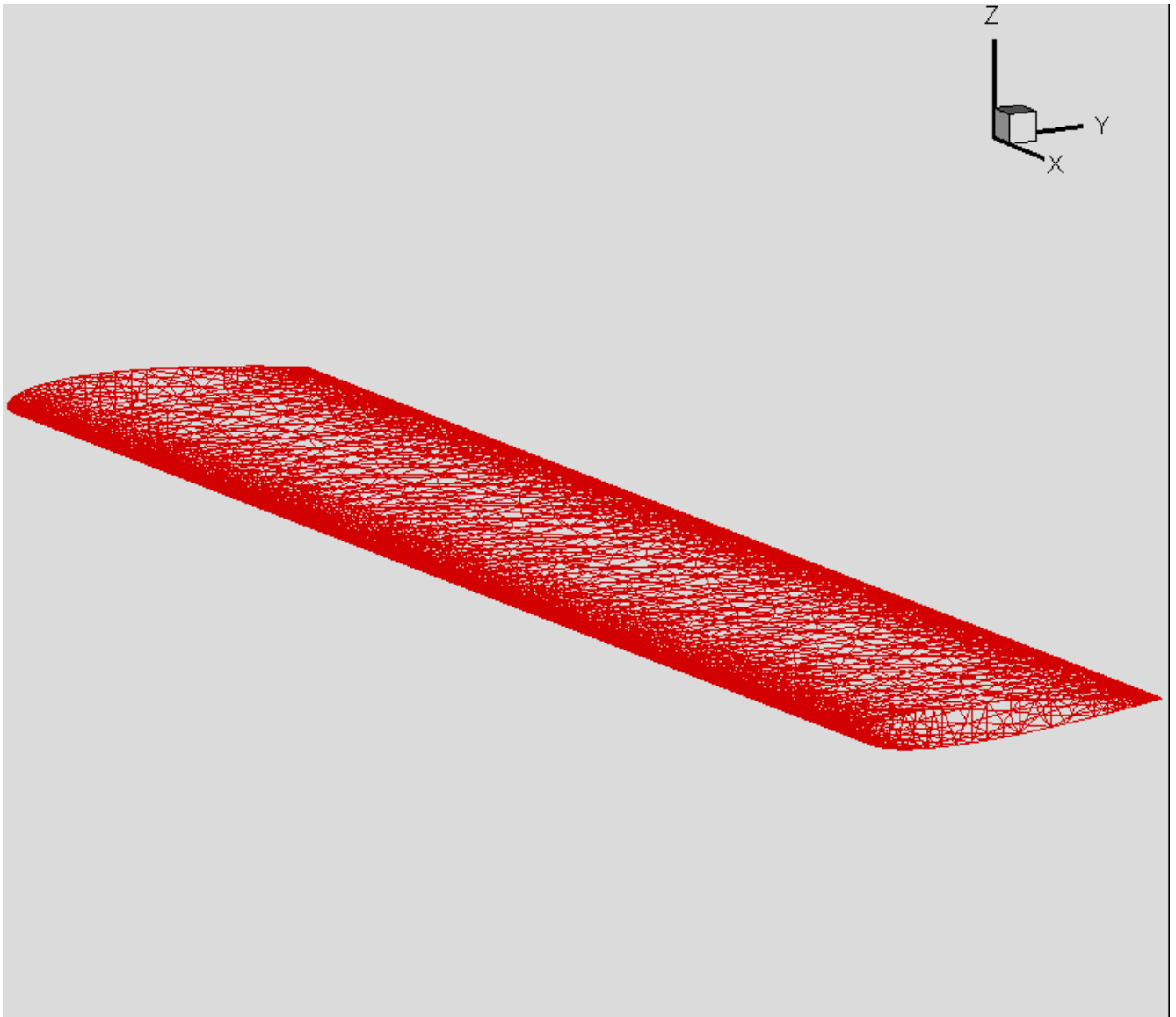
Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε έχει μορφή `‘.cfx5’` και αποτελείται από **48090 κόμβους** και **258295 τετράεδρα**. Η πτέρυγα βρίσκεται στο κέντρο ενός κύβου, ο οποίος ορίζει το χωρίο της ροής. Η μπροστά και πίσω έδρα του κύβου σχετικά με τη θέση της πτέρυγας ορίστηκαν ως επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες έδρες ορίστηκαν ως στερεά τοιχώματα. Ακολουθούν στις εικόνες 5.1 έως 5.3 απεικονίσεις του πλέγματος.



Εικόνα 5.1: Χωρίο ροής. Η γεωμετρία βρίσκεται στο κέντρο του.



Εικόνα 5.2: Τριδιάστατη απεικόνιση της υπό εξέταση γεωμετρίας με το επιφανειακό πλέγμα.

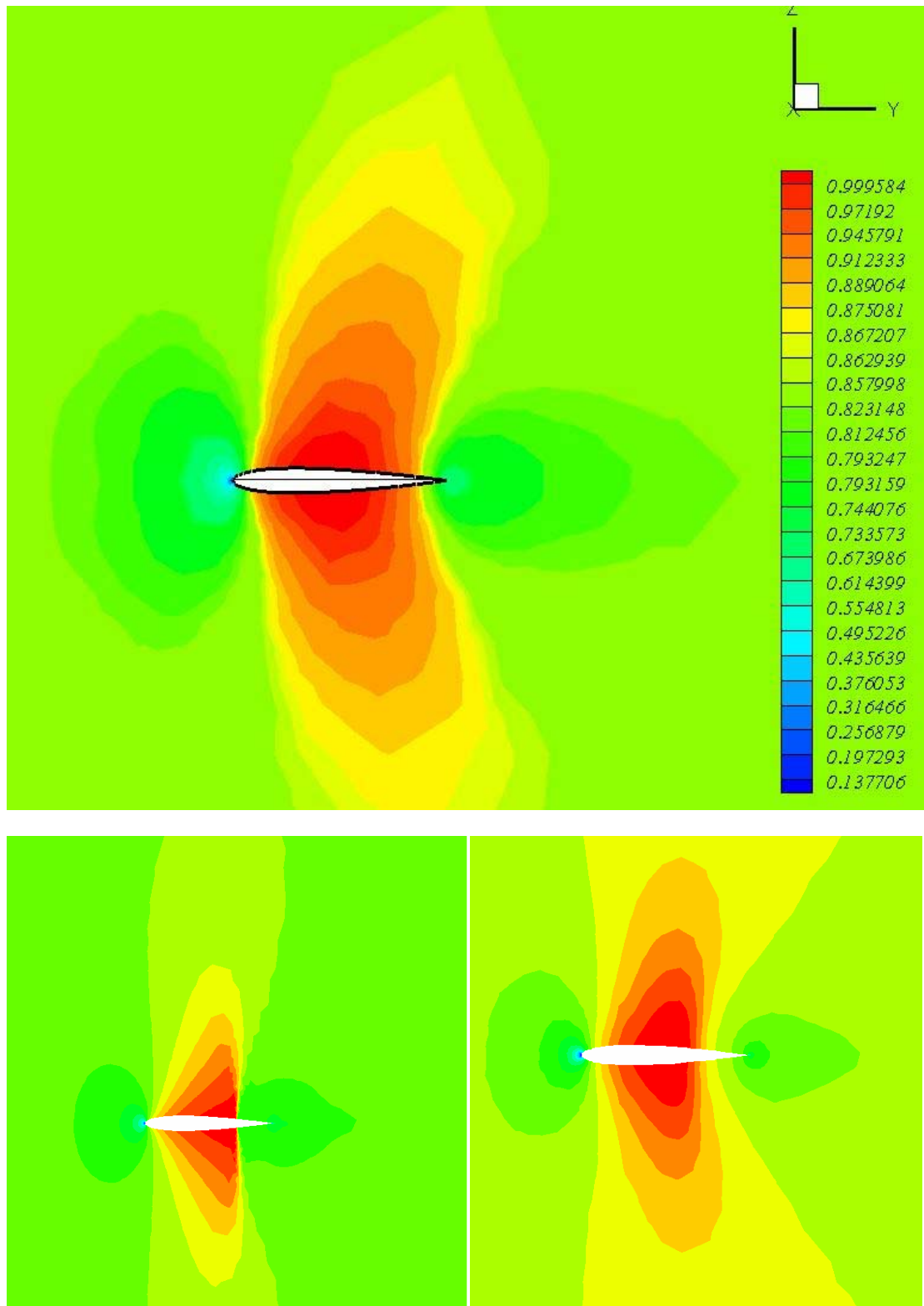


Εικόνα 5.3: Τριδιάστατη απεικόνιση της πτέρυγας NACA0012 με το επιφανειακό πλέγμα.

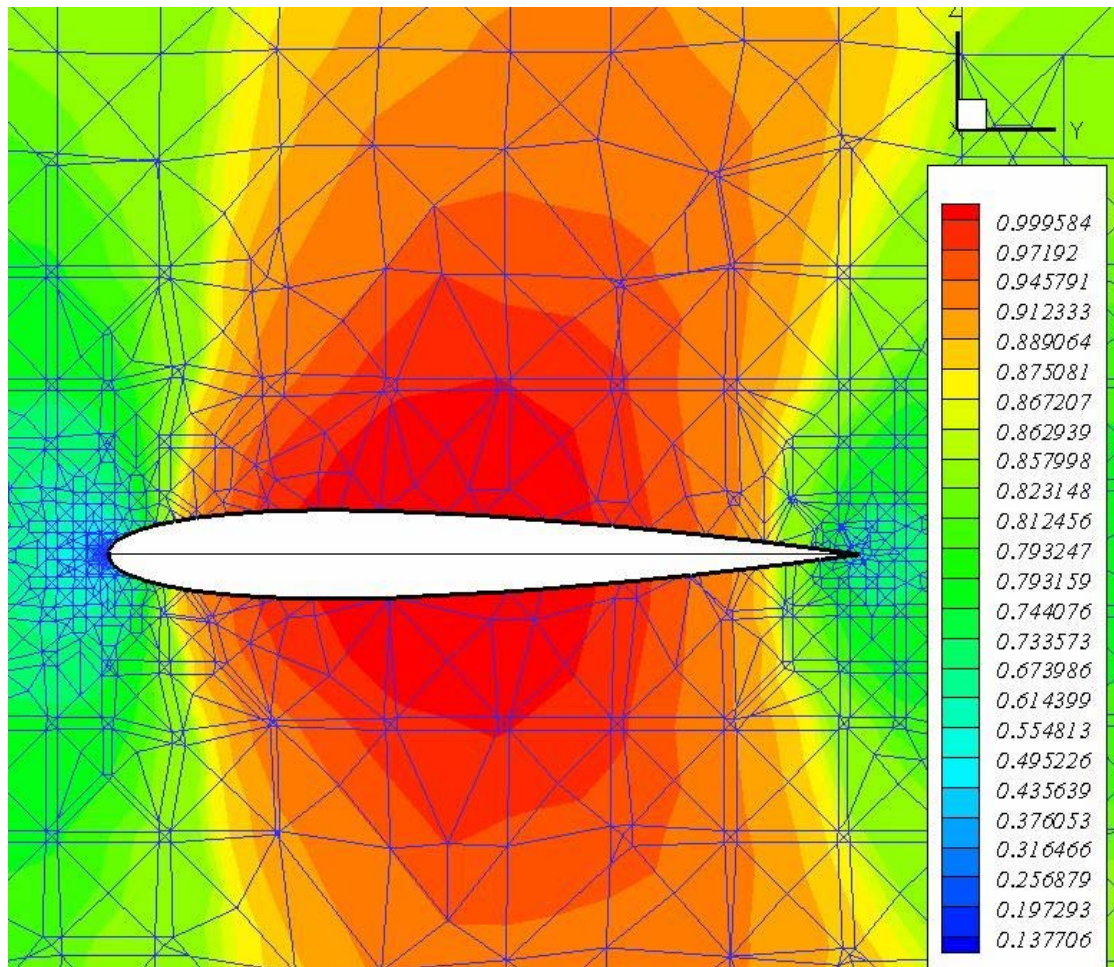
5.1.1 CFL=1.5

Ορίζοντας τον αριθμό CFL ίσο με 1.5 ο αλγόριθμος χρειάστηκε περίπου **2 ώρες** (σε Η/Υ με επεξεργαστή PENTIUM 4 των 3 GHz) για να ολοκληρωθούν **1069 επαναλήψεις** ώστε να φτάσει στη σύγκλιση και να εξαχθούν τα παρακάτω αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα, που απεικονίζονται στις εικόνες 5.4 έως 5.12 είναι τυπικά για τέτοιου είδους πτέρυγες. Όμως στο σχήμα 5.4 φαίνεται η απόκλιση του παρόντος υπολογισμού από αυτόν που πραγματοποιήθηκε με κώδικα επίλυσης των εξισώσεων σε 2 διαστάσεις και με 2^{ης} τάξης ακρίβεια, ενώ αντίθετα υπάρχει σημαντική ομοιότητα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα με 1^{ης} τάξης ακρίβεια. Ο παρών κώδικας αδυνατεί να συλλάβει το κύμα κρούσης, αν και ποιοτικά τα αποτελέσματα είναι λογικά (όσον αφορά στις τάξεις μεγέθους). Το πρόβλημα οφείλεται κυρίως στην πρώτη τάξη ακρίβειας του σχήματος που χρησιμοποιείται μέχρι στιγμής στον κώδικα, όπως πιστοποιεί και το σχήμα 5.4.

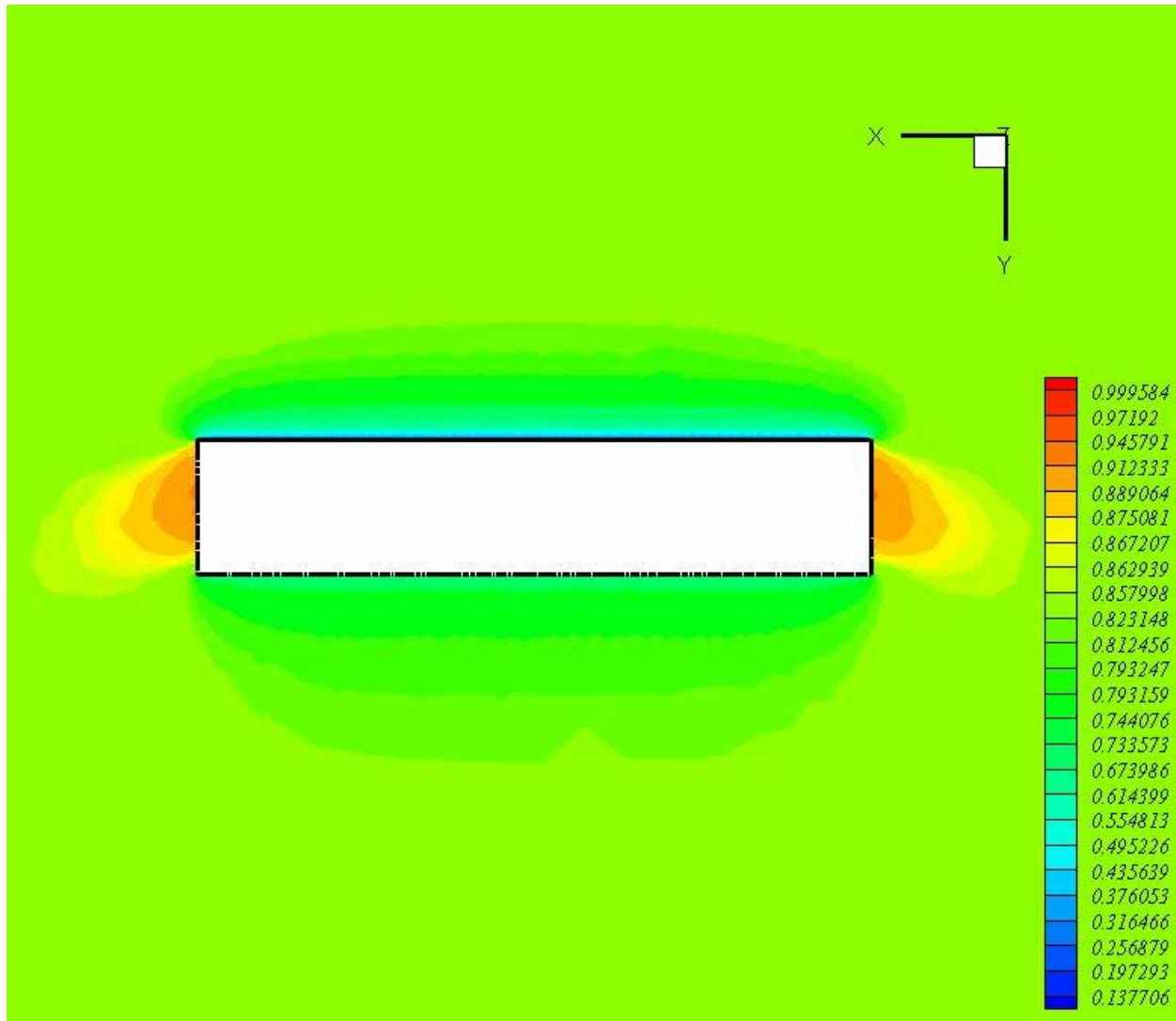
Από τον έλεγχο των τιμών των μεταβλητών στα όρια του πλέγματος επιβεβαιώθηκε η ορθότητα της επιβολής των οριακών συνθηκών. Στο σχήμα 5.13 δίδεται ένα γράφημα της σύγκλισης της εξίσωσης της συνέχειας, όπου πιστοποιείται η ικανότητα του αλγορίθμου για βαθιά σύγκλιση των εξισώσεων. Στο σχήμα 5.14 δίδεται η διανομή της πίεσης, της πυκνότητας και του αριθμού Mach στο μέσον της πτέρυγας στο άνω τμήμα της. Η μεταβολή τους είναι απόλυτα συνεχής, ενώ θα έπρεπε να εμφανίζεται ισχυρή ασυνέχεια στο πίσω τμήμα της πτέρυγας, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.14 (κάτω), όπου παρατίθεται υπολογισμός της αδιάστατης πίεσης με χρήση του κώδικα που επιλύει τις εξισώσεις Euler σε δύο διαστάσεις με σχήμα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης. Όπως φαίνεται χαρακτηριστικά, ο διδιάστατος κώδικας με σχήμα 1^{ης} τάξης αδυνατεί επίσης να συλλάβει το κύμα κρούσης.



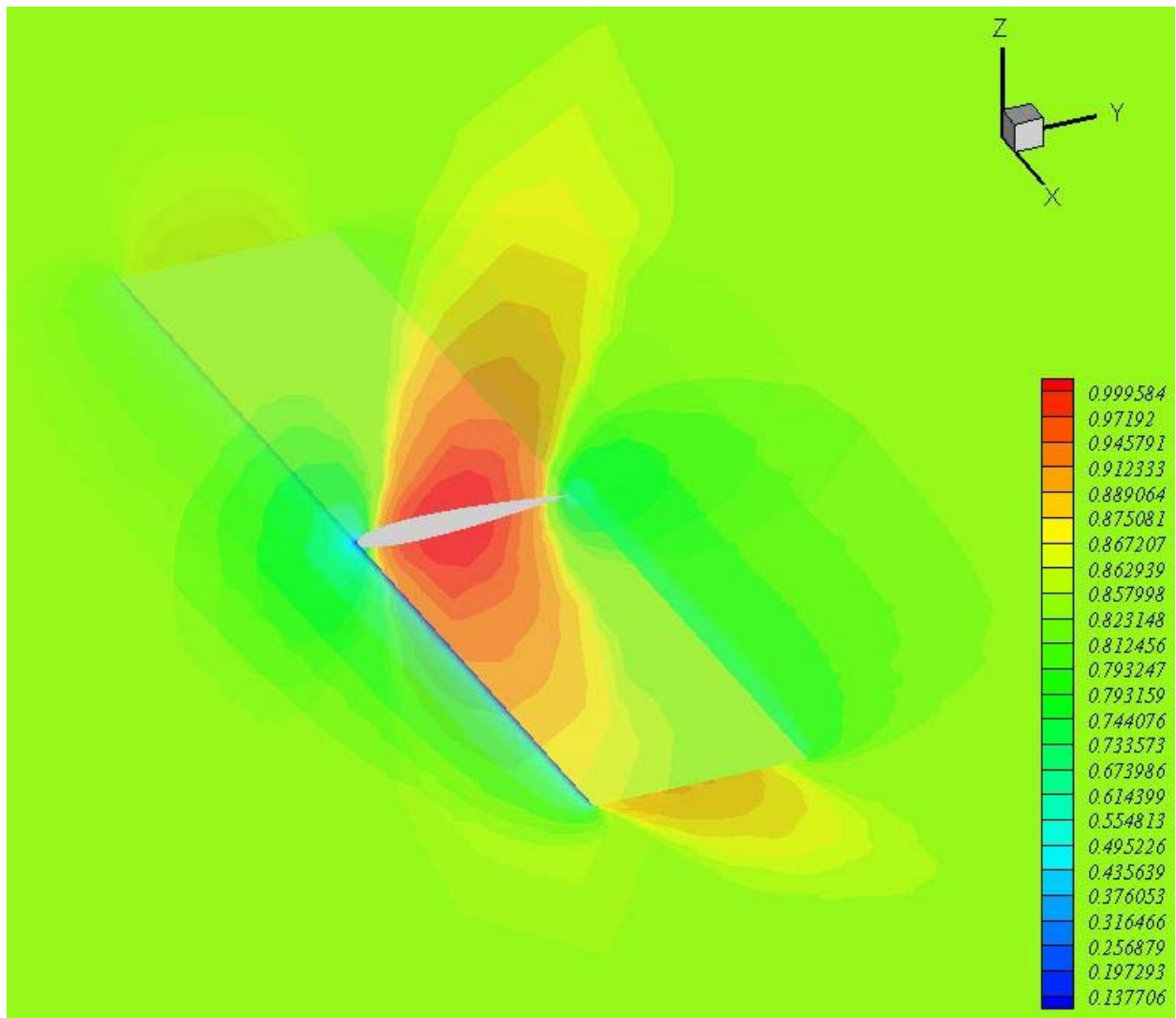
Εικόνα 5.4: (Πάνω) Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή της πτέρυγας στο μέσον της. (Κάτω) Αντίστοιχος διδιάστατος υπολογισμός στις ίδιες συνθήκες, αριστερά με 2^{ης} τάξης ακρίβεια και δεξιά με 1^{ης} τάξης ακρίβεια. Είναι φανερό η αδυναμία του τριδιάστατου κώδικα να συλλάβει το κύμα κρούσης, αλλά και η ομοιότητα με το αντίστοιχη εικόνα του διδιάστατου υπολογισμού για 1^{ης} τάξης ακρίβεια.



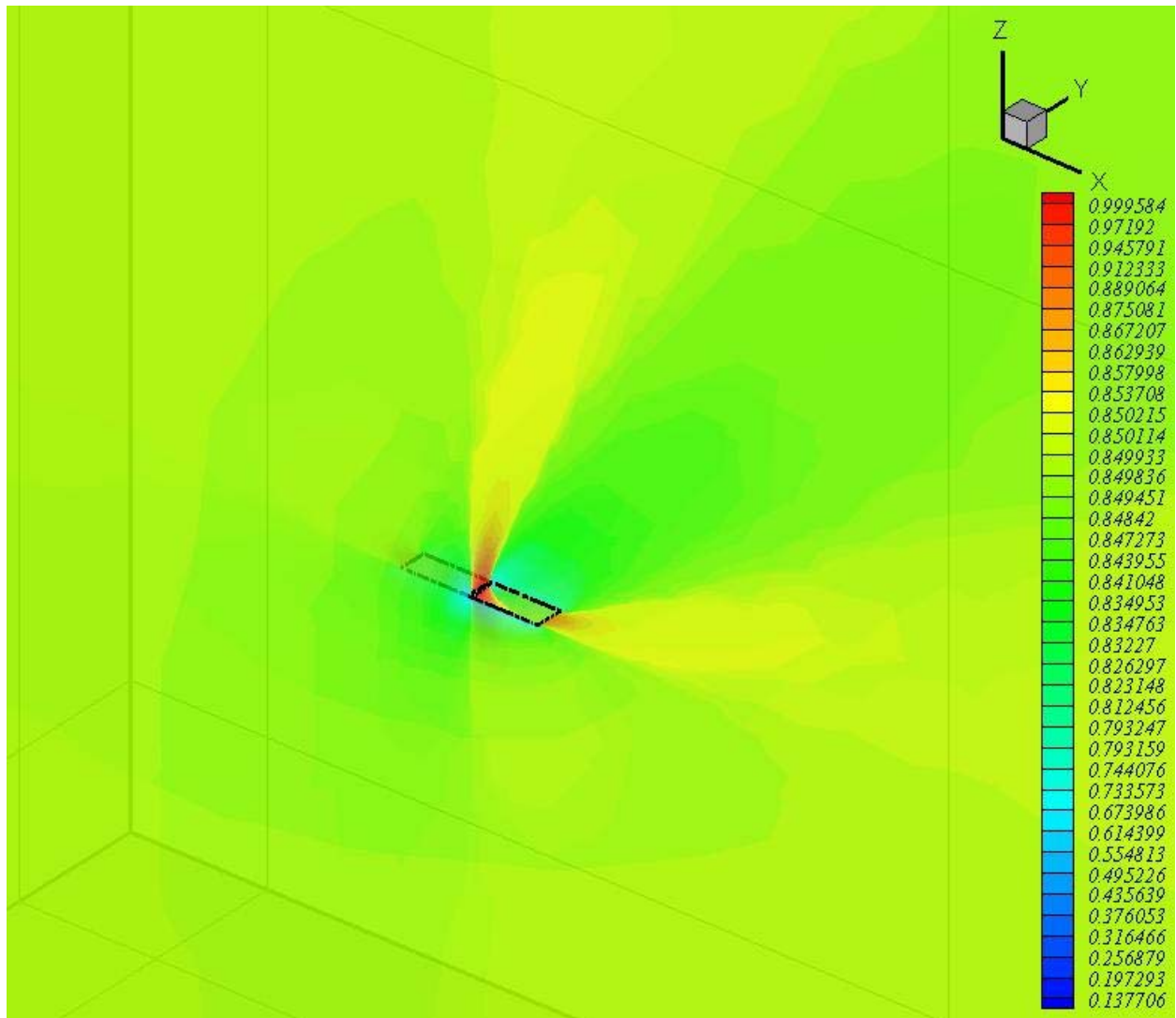
Εικόνα 5.5: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή της πτέρυγας (πάνω). Είναι ορατή και η κάθετη τομή του πλέγματος, όπου φαίνεται ότι είναι αρκετά αραιό σε σχέση με το διδιάστατο πλέγμα (κάτω), κάτι που επιδεινώνει την ποιότητα των αποτελεσμάτων σε σχέση με την διδιάστατη επίλυση, η οποία χρησιμοποιεί πολύ πυκνότερο πλέγμα (και οι δύο επιλύσεις με σχήμα 1^{ης} τάξης).



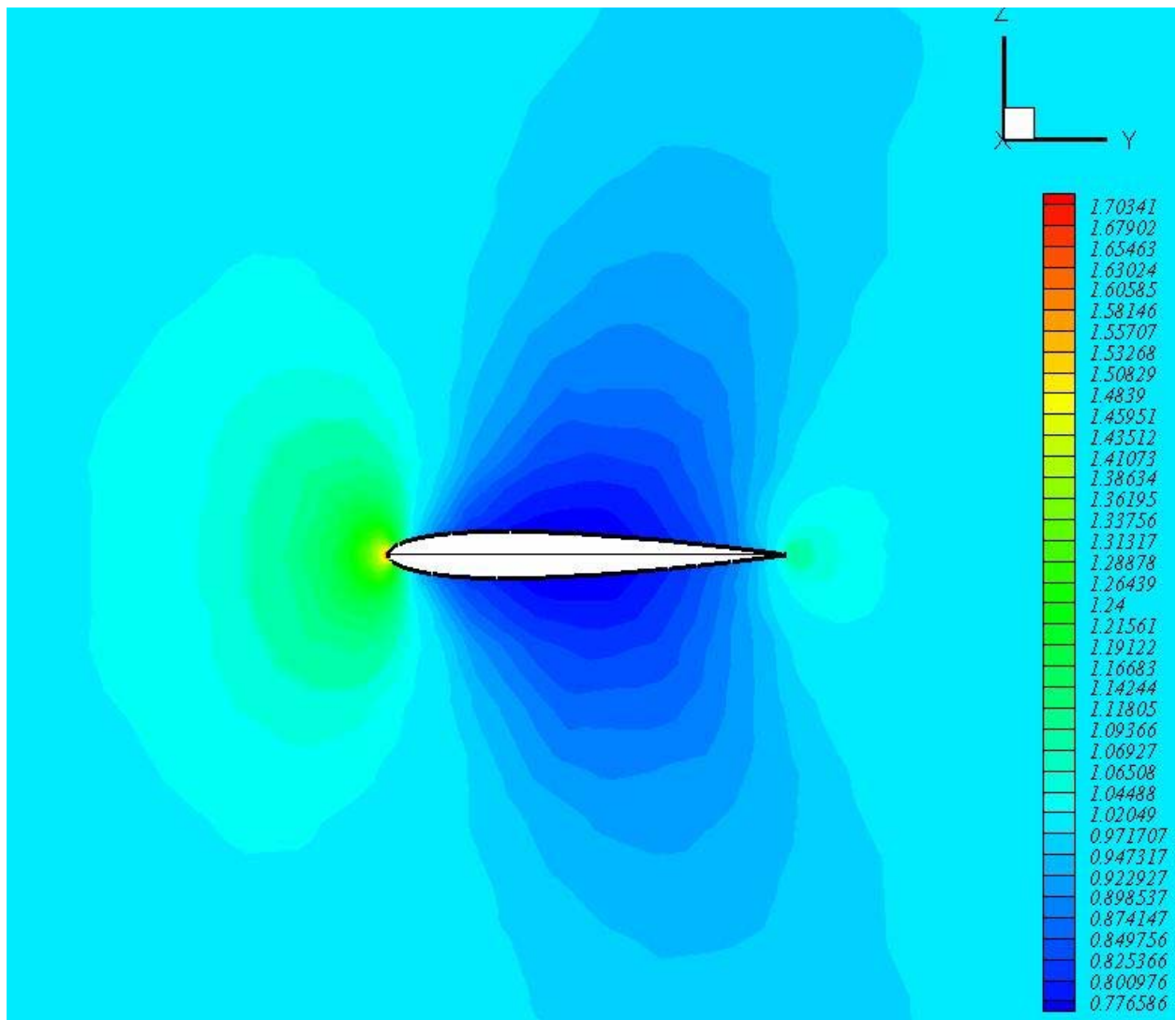
Εικόνα 5.6: Ισογραμμές αριθμού Mach σε οριζόντια τομή της πτέρυγας. Τα αποτελέσματα ποιοτικά δείχνουν τυπικά για πτέρυγες αντίστοιχης γεωμετρίας.



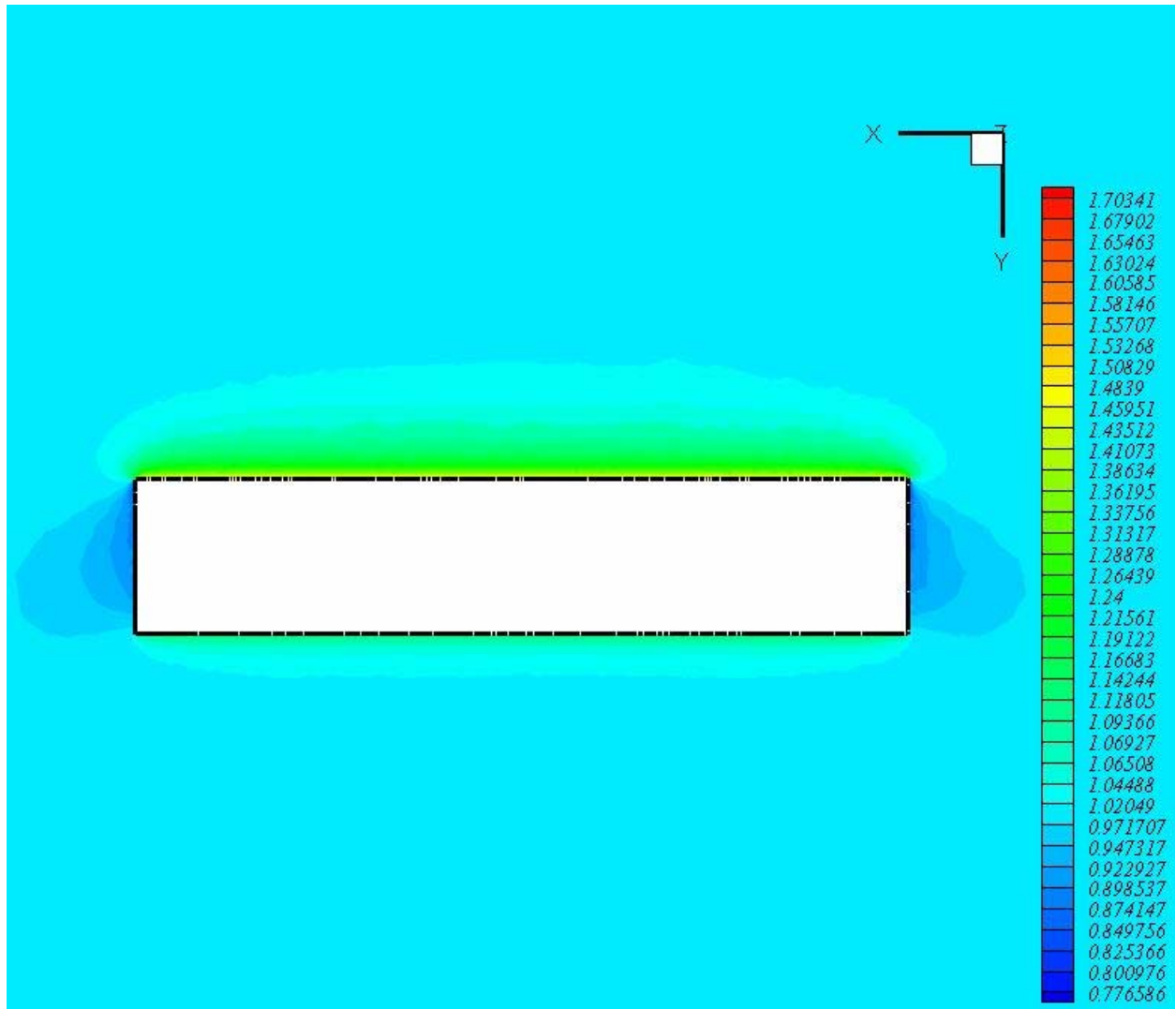
Εικόνα 5.7: Ισογραμμές αριθμού Mach σε τριδιάστατη ελεύθερη απεικόνιση.



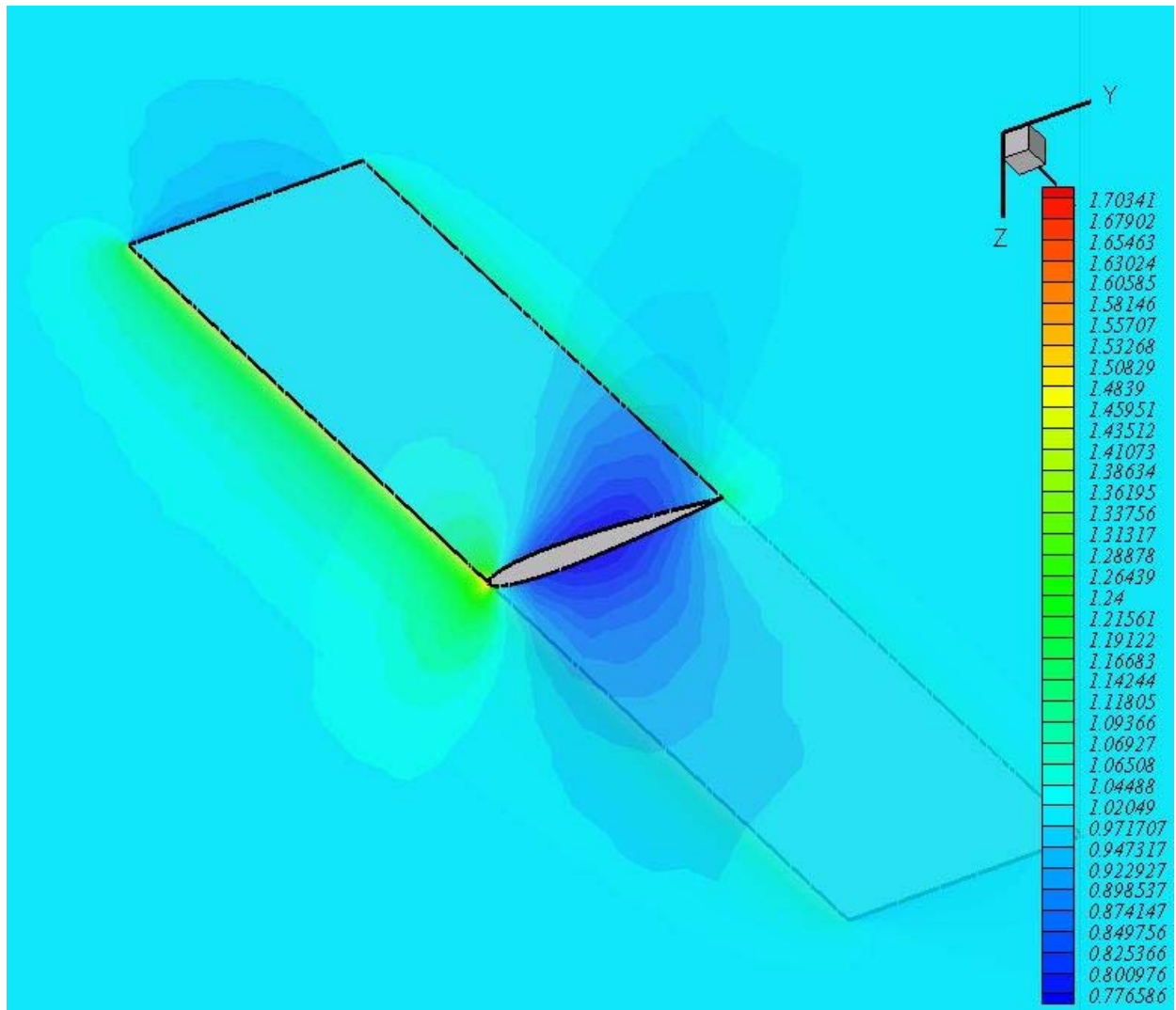
Εικόνα 5.8: Ισογραμμές αριθμού Mach σε τριδιάστατη ελεύθερη απεικόνιση.



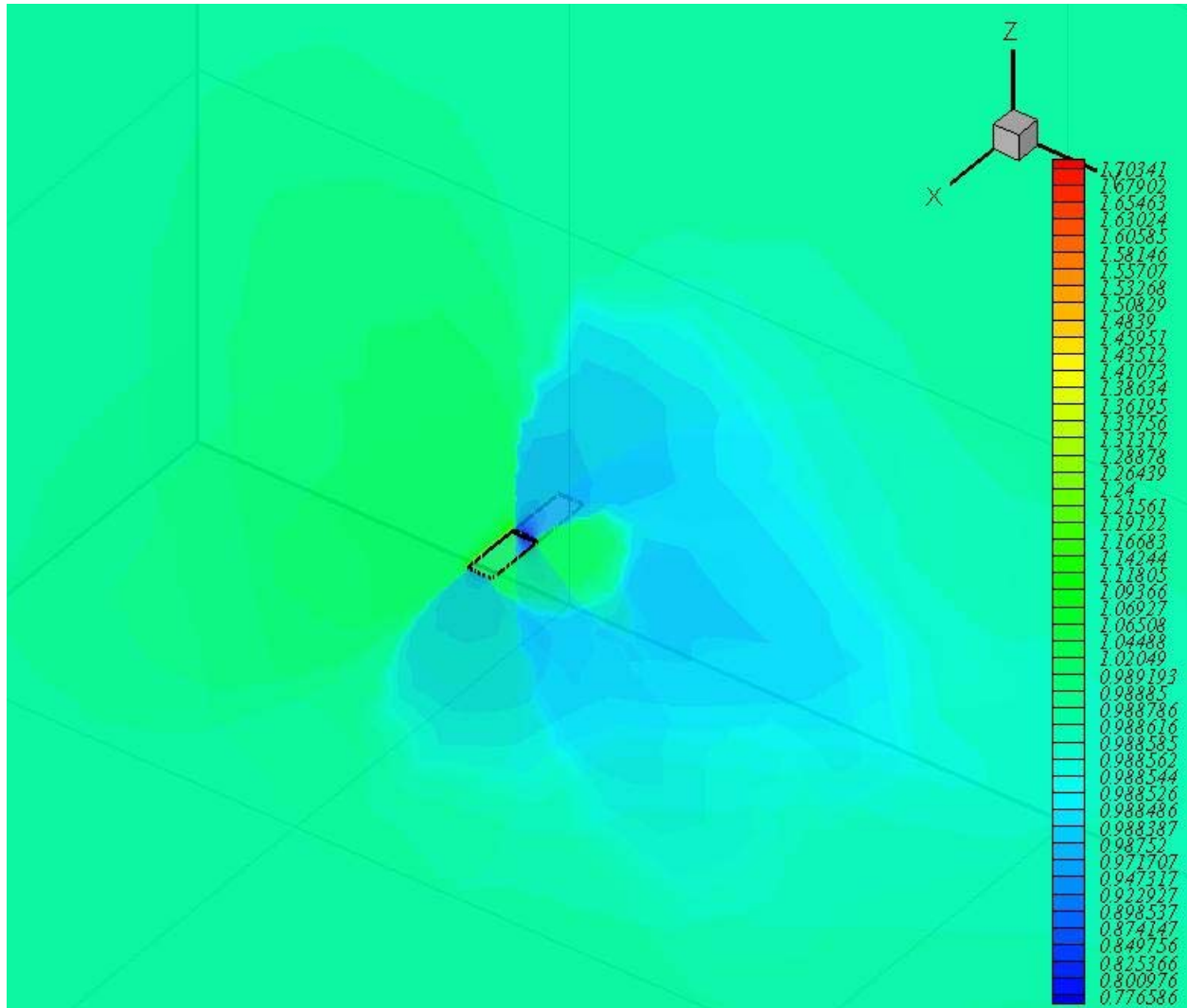
Εικόνα 5.9: Ισογραμμές πίεσης σε κάθετη τομή της πτέρυγας στο μέσον της.



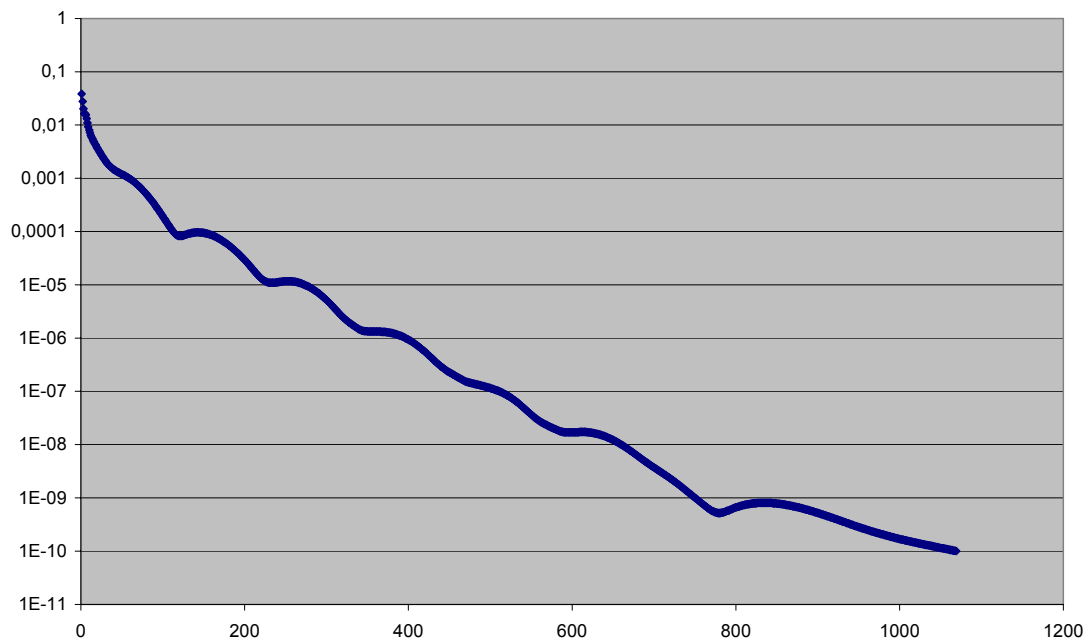
Εικόνα 5.10: Ισογραμμές πίεσης σε οριζόντια τομή της πτέρυγας.



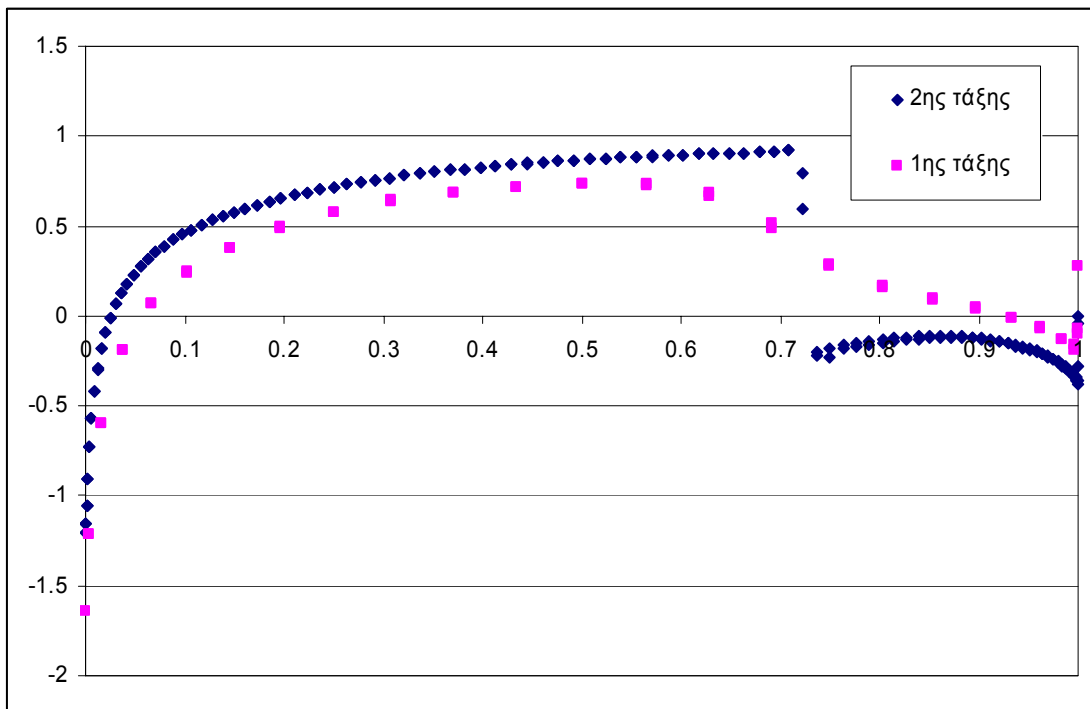
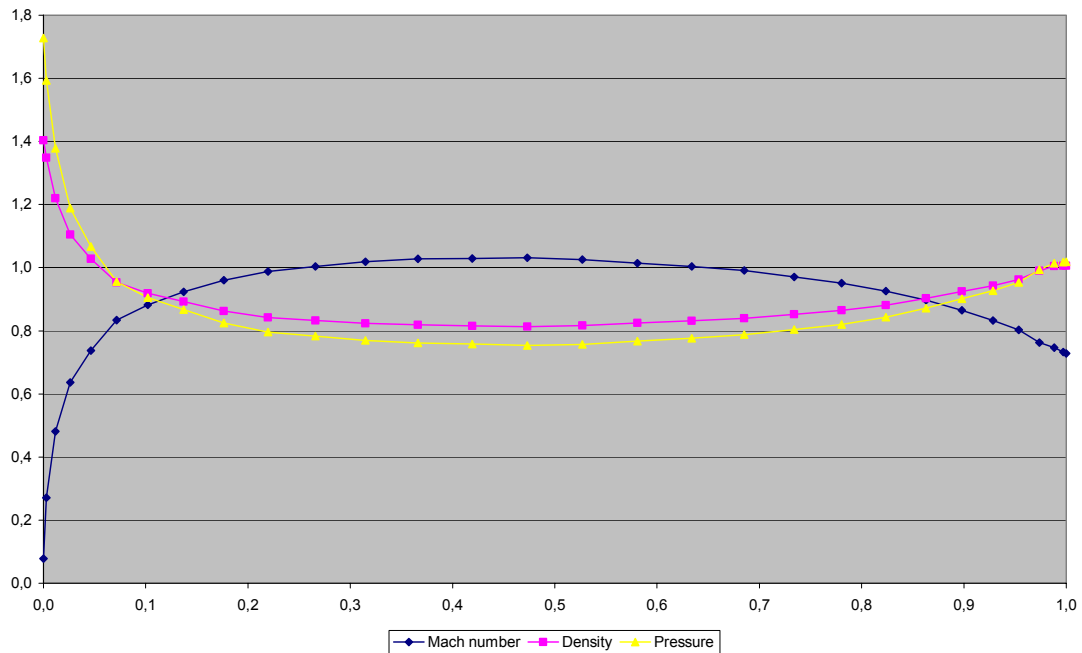
Εικόνα 5.11: Ισογραμμές πίεσης σε τριδιάστατη ελεύθερη απεικόνιση.



Εικόνα 5.12: Ισογραμμές πίεσης σε τριδιάστατη ελεύθερη απεικόνιση.



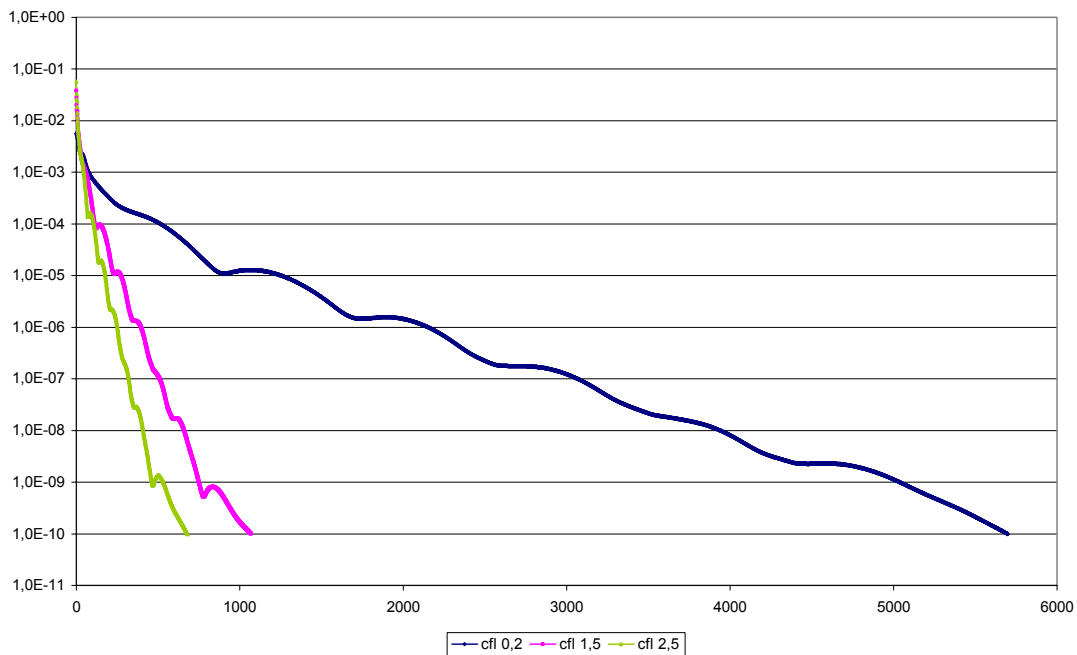
Εικόνα 5.13: Γράφημα της σύγκλισης του αλγορίθμου. Αναφέρεται στην σύγκλιση της εξίσωσης της συνέχειας.



Εικόνα 5.14: (Πάνω) Γράφημα διανομής του αριθμού Mach, της πυκνότητας και της πίεσης του ρευστού στην πάνω επιφάνεια της πτέρυγας. (Κάτω) Διδιάστατος υπολογισμός στις ίδιες συνθήκες της αδιάστατης πίεσης (C_p) με σχήμα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης ακρίβειας. Ο τριδιάστατος υπολογισμός, όπως και ο αντίστοιχος διδιάστατος με σχήμα 1^{ης} τάξης δεν έχουν καταφέρει να υπολογίσουν το κύμα κρούσης, λόγω μικρής ακρίβειας του σχήματος.

5.1.2 Διαφορετικές τιμές του αριθμού CFL

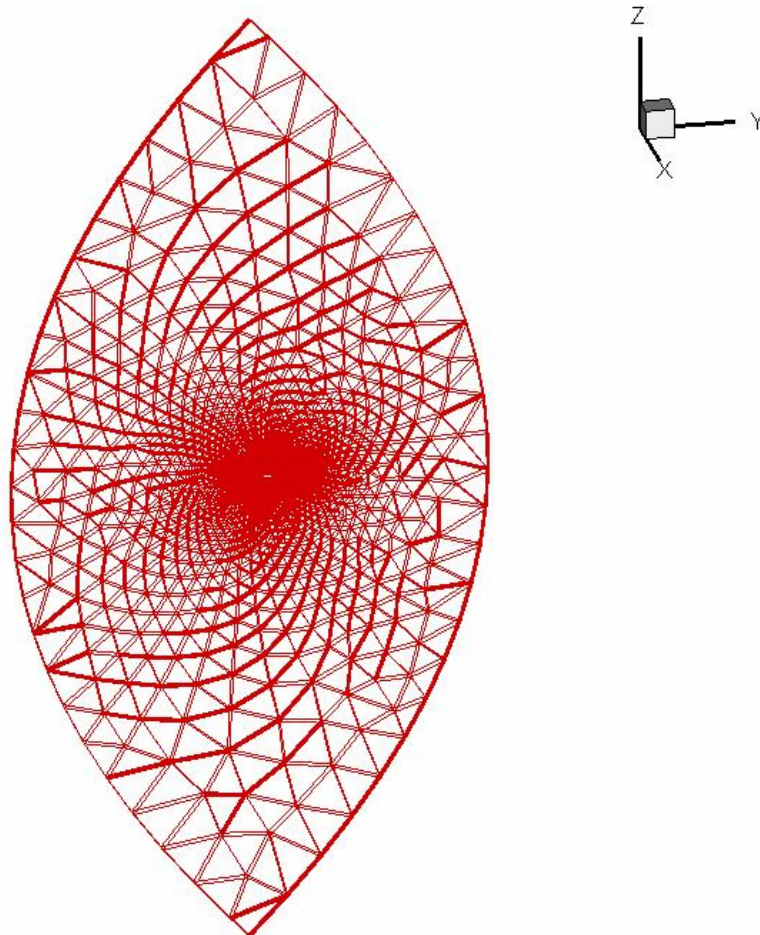
Για την ίδια γεωμετρία επιλύθηκαν οι εξισώσεις Euler δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές του αριθμού CFL. Ο αλγόριθμος έδωσε ίδια αποτελέσματα όσο αφορά τον αριθμό Mach, την πυκνότητα και την πίεση του ρευστού, αλλά εκτέλεσε διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων μέχρι να φτάσει στην επιθυμητή σύγκλιση και βέβαια χρειάστηκε διαφορετικό χρόνο κάθε φορά. Με **CFL 0,2** χρειάστηκε **13 ώρες** και **5698 επαναλήψεις**, ενώ για **CFL 2,5** χρειάστηκε μόλις **75 λεπτά** και **680 επαναλήψεις**. Για αριθμό CFL μεγαλύτερο του 2,5 ο αλγόριθμος χάνει τη σταθερότητά του και αποκλίνει. Συγκριτικά δίνεται το ακόλουθο γράφημα:



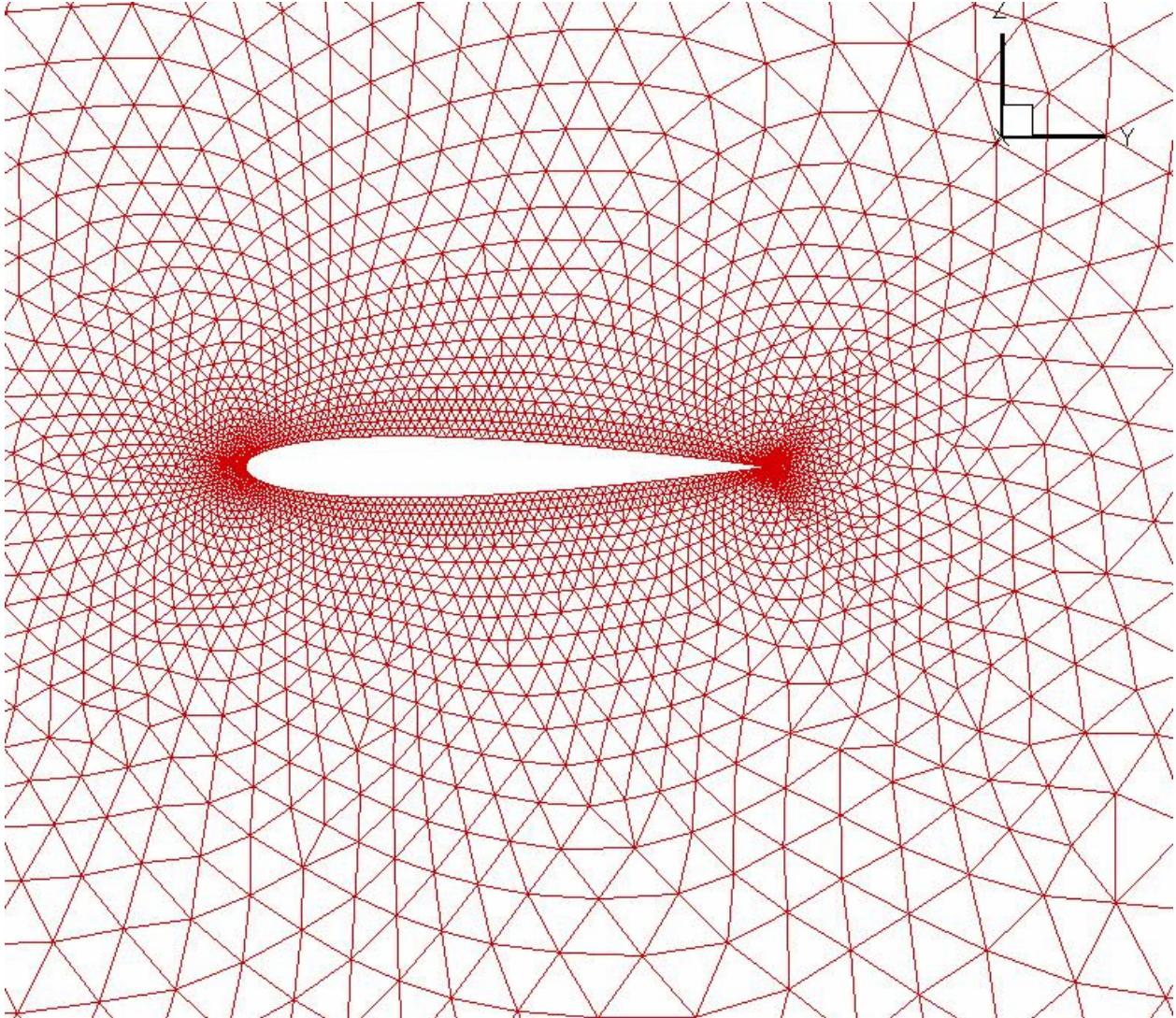
Εικόνα 5.15: Σύγκλιση του αλγορίθμου για διαφορετικές τιμές του αριθμού CFL. Αναφέρεται στη σύγκλιση της εξίσωσης της συνέχειας.

5.1.3 Εναλλακτικό πλέγμα

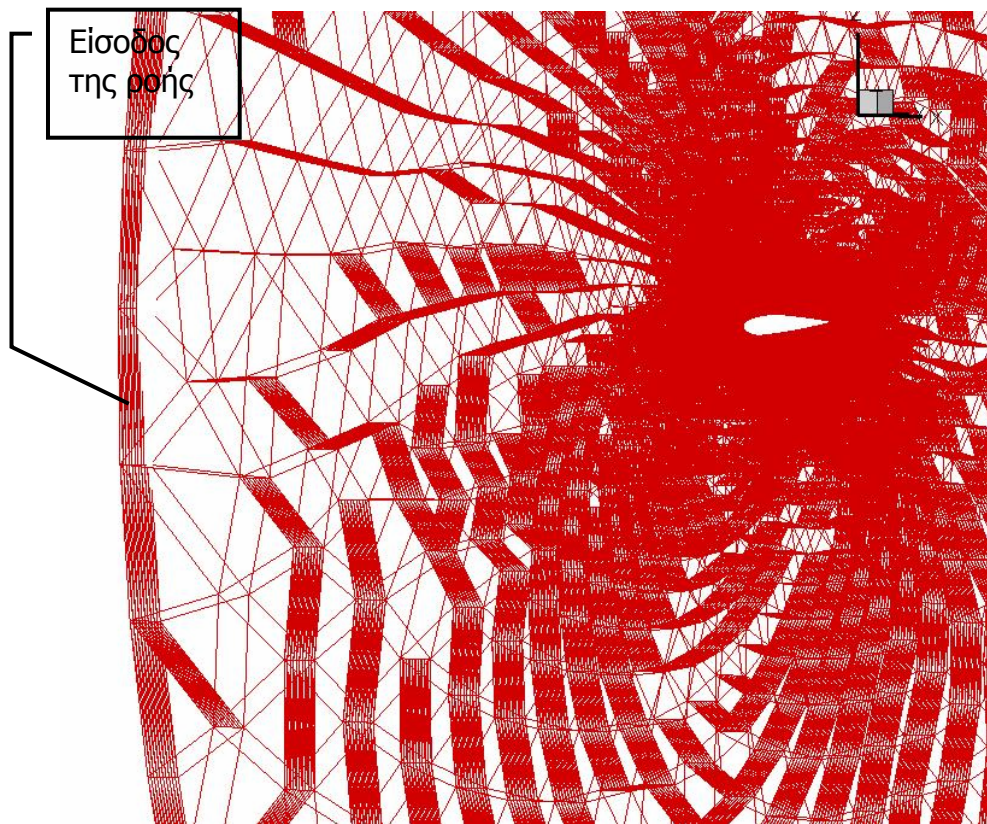
Για την επίλυση των εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε και ένα δεύτερο πλέγμα. Αυτό δημιουργήθηκε από την παράλληλη μετατόπιση κατά τη διεύθυνση του x ενός διδιάστατου μη δομημένου πλέγματος στο επίπεδο (y, z) . Το πλέγμα που προέκυψε αποτελείται από **38258 κόμβους** και **201780 τετράεδρα**. Για τη δημιουργία του τοποθετήθηκαν 11 όμοια πλέγματα σε ίσες και μικρές αποστάσεις ενώ ανάμεσά τους δημιουργήθηκαν κατάλληλες ακμές μεταξύ γειτονικών κόμβων. Η επίλυση των εξισώσεων στο εν λόγω πλέγμα έδωσε φτωχά αποτελέσματα από άποψη ακρίβειας και αυτό οφείλεται στην κακή ποιότητα του πλέγματος. Οι έντονες διαφορές στα εμβαδά γειτονικών τριγώνων προκαλούν έντονες ανομοιομορφίες κατά τον υπολογισμό των διανυσμάτων ροής και στην επιβολή των οριακών συνθηκών. Η καλή ποιότητα των πλεγμάτων με format `'.cfx5'` επιλύει το πρόβλημα που παρατηρήθηκε. Παρακάτω δίνονται απόψεις του εν λόγω πλέγματος.



Εικόνα 5.16: Άποψη τριδιάστατου πλέγματος.

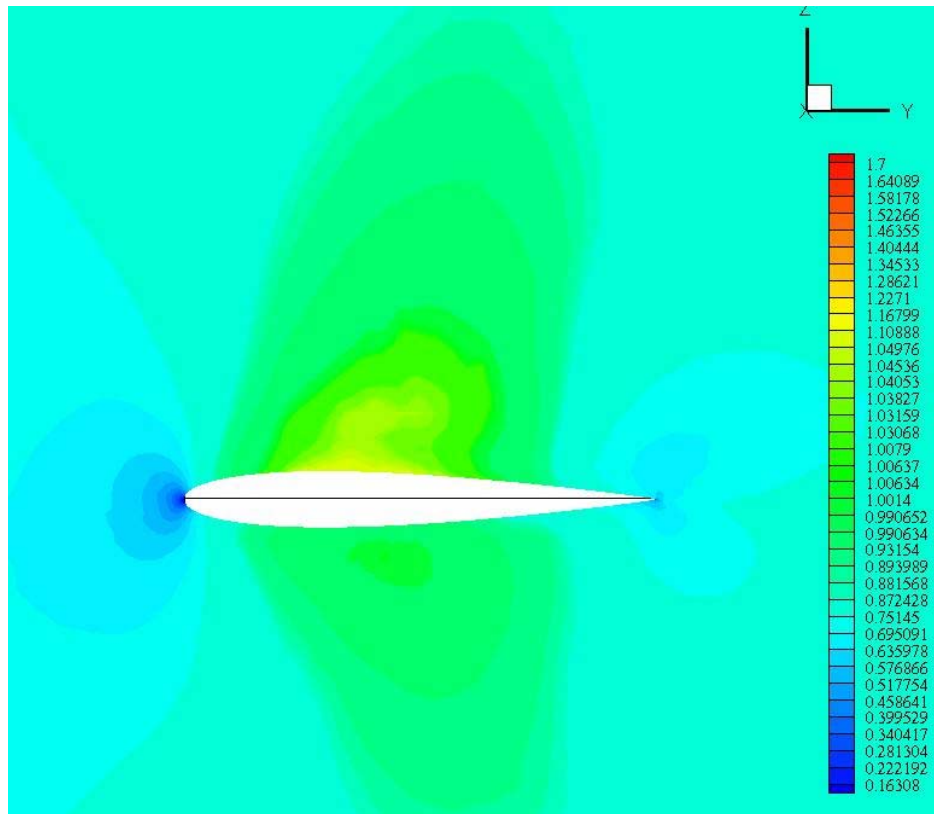


Εικόνα 5.17: Λεπτομέρεια του διδιάστατου πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε.

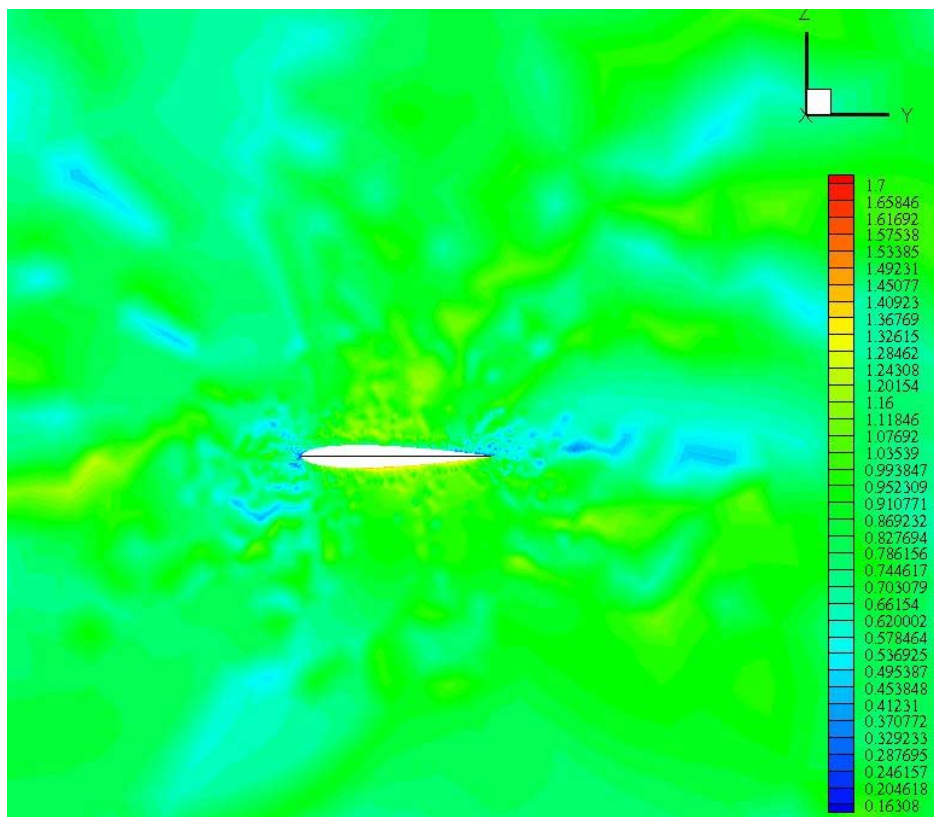


Εικόνα 5.18: Άποψη του πλέγματος.

Στο πλέγμα αυτό η πτέρυγα NACA0012 είναι τοποθετημένη μεταξύ δύο επιφανειών, στις οποίες εφαρμόζεται η συνθήκη στερεού τοιχώματος. Η πτέρυγα εκτείνεται σε όλο το πλάτος του χωρίου ροής (x -άξονας). Στις δύο πλαϊνές μικρότερες οριακές επιφάνειες που απομένουν, εφαρμόζεται η συνθήκη εισόδου/ εξόδου της ροής. Η επίλυση των εξισώσεων έγινε για τις ίδιες συνθήκες ροής που εφαρμόστηκαν και στο προηγούμενο πλέγμα, ενώ χρησιμοποιήθηκε αριθμός ***CFL* 0,2**. Τα αποτελέσματα εικονίζονται στη συνέχεια:



Εικόνα 5.19: Ισογραμμές του αριθμού Mach σε κάθετη τομή, στο μέσο της πτέρυγας.



Εικόνα 5.20: Ισογραμμές του αριθμού Mach στη πλαϊνή επιφάνεια στερεού τοιχώματος. Είναι εμφανής η αποτυχημένη εφαρμογή της οριακής συνθήκης.

Στην εικόνα 5.20 είναι εμφανής η αποτυχημένη εφαρμογή της οριακής συνθήκης μη εισχώρησης στο πλαϊνό οριακό τοίχωμα του χωρίου ροής. Αυτό αποδίδεται στην κακή ποιότητα του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε. Η παράλληλη τοποθέτηση ισαπεχώντων πλεγμάτων και η σύνδεσή τους απέδωσε ένα τριδιάστατο πλέγμα στο οποίο δεν υπάρχει η κατάλληλη πύκνωση και στις τρεις διαστάσεις. Ως αποτέλεσμα δημιουργήθηκαν τετράεδρα με έντονες ανομοιομορφίες, όσον αφορά στο μέγεθος των εδρών τους. Η έντονη διαφοροποίηση στα εμβαδά των τριγώνων αποφέρει τον αριθμητικό υπολογισμό ανομοιόμορφων κάθετων διανυσμάτων σ' αυτά και κατά συνέπεια υπολογίζονται ιδιόρρυθμα διανύσματα ροής στις αντίστοιχες κυψέλες ελέγχου. Το πρόβλημα εμφανίζεται εντονότερο στα τετράεδρα που έχουν μια οριακή έδρα στην επιφάνεια της πτέρυγας και μια οριακή έδρα στο πλαϊνό οριακό τοίχωμα. Η συνθήκη μη εισχώρησης εφαρμόζεται και στις δύο οριακές έδρες, που συνήθως παρουσιάζουν έντονη διαφορά στα εμβαδά τους, οπότε προκύπτει ένα ιδιόρρυθμο διάνυσμα ροής. Αυτό οφείλεται στη διδιάστατη και όχι τριδιάστατη πύκνωση του πλέγματος στην κρίσιμη τομή της πτέρυγας με το πλαϊνό οριακό τοίχωμα του χωρίου ροής.

Το παραπάνω πρόβλημα δεν παρουσιάζεται κατά την επίλυση των εξισώσεων με τη χρήση πλεγμάτων με format '.cfx5'. Τα πλέγματα αυτά, που δημιουργούνται από εμπορική γεννήτρια πλεγμάτων, παρουσιάζουν την κατάλληλη πύκνωση και στις τρεις διαστάσεις τους, οπότε προκύπτουν ομοιόμορφα τετράεδρα.

5.2 Ελλειψοειδές Α

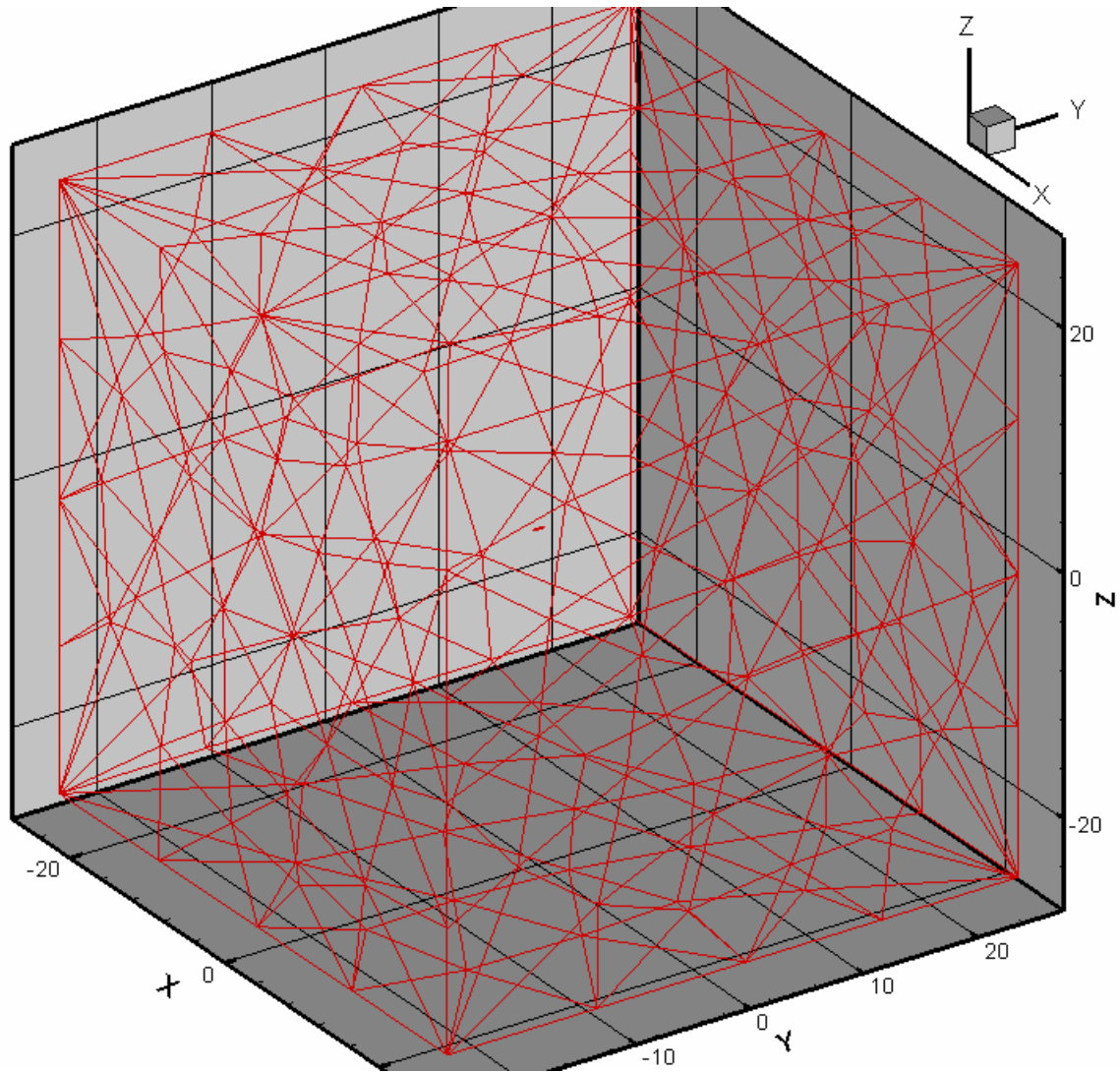
Η επόμενη γεωμετρία που εξετάστηκε είναι ένα γεωμετρικό στερεό, που δημιουργήθηκε κατά την περιστροφή μιας έλλειψης κατά 360° γύρω από τον κύριο άξονά της. Η έλλειψη που χρησιμοποιήθηκε έχει **λόγο αξόνων 10/1**. Το ελλειψοειδές σώμα που προέκυψε καλείται στη συνέχεια «Ελλειψοειδές Α». Οι συνθήκες ροής στις οποίες δοκιμάστηκε είναι:

- Mach 0.85
- Γωνία προσβολής 0°
- Γωνία πλαγιολίσθησης 0°
- Εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής $\gamma = 1.4$

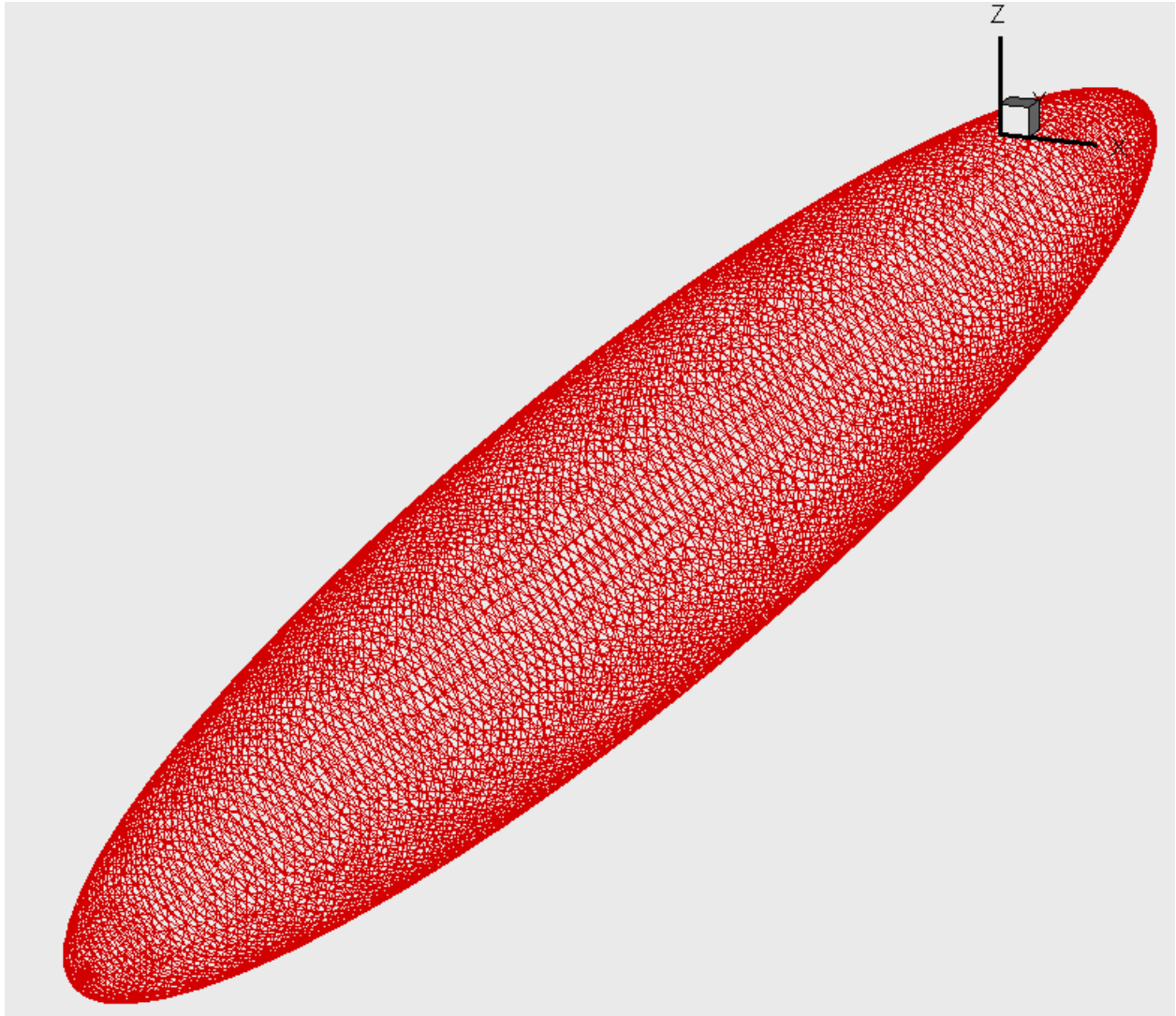
Οι παράμετροι της επαναληπτικής διαδικασίας ορίστηκαν:

- Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων 10000
- Μέγιστη απόκλιση 10^{-10}

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε έχει format '.cfx5' και αποτελείται από **33861 κόμβους** και **179410 τετράεδρα**. Όπως και στην προηγούμενη γεωμετρία, το στερεό βρίσκεται στο κέντρο ενός κύβου, που ορίζει το χωρίο της ροής. Η μπροστά και πίσω έδρα, σχετικά με τη θέση του ελλειψοειδούς, ορίστηκαν ως επιφάνειες εισόδου και εξόδου της ροής αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες έδρες ορίστηκαν ως στερεά τοιχώματα. Ακολουθούν απόψεις του πλέγματος στα σχήμα 5.21 και 5.22.



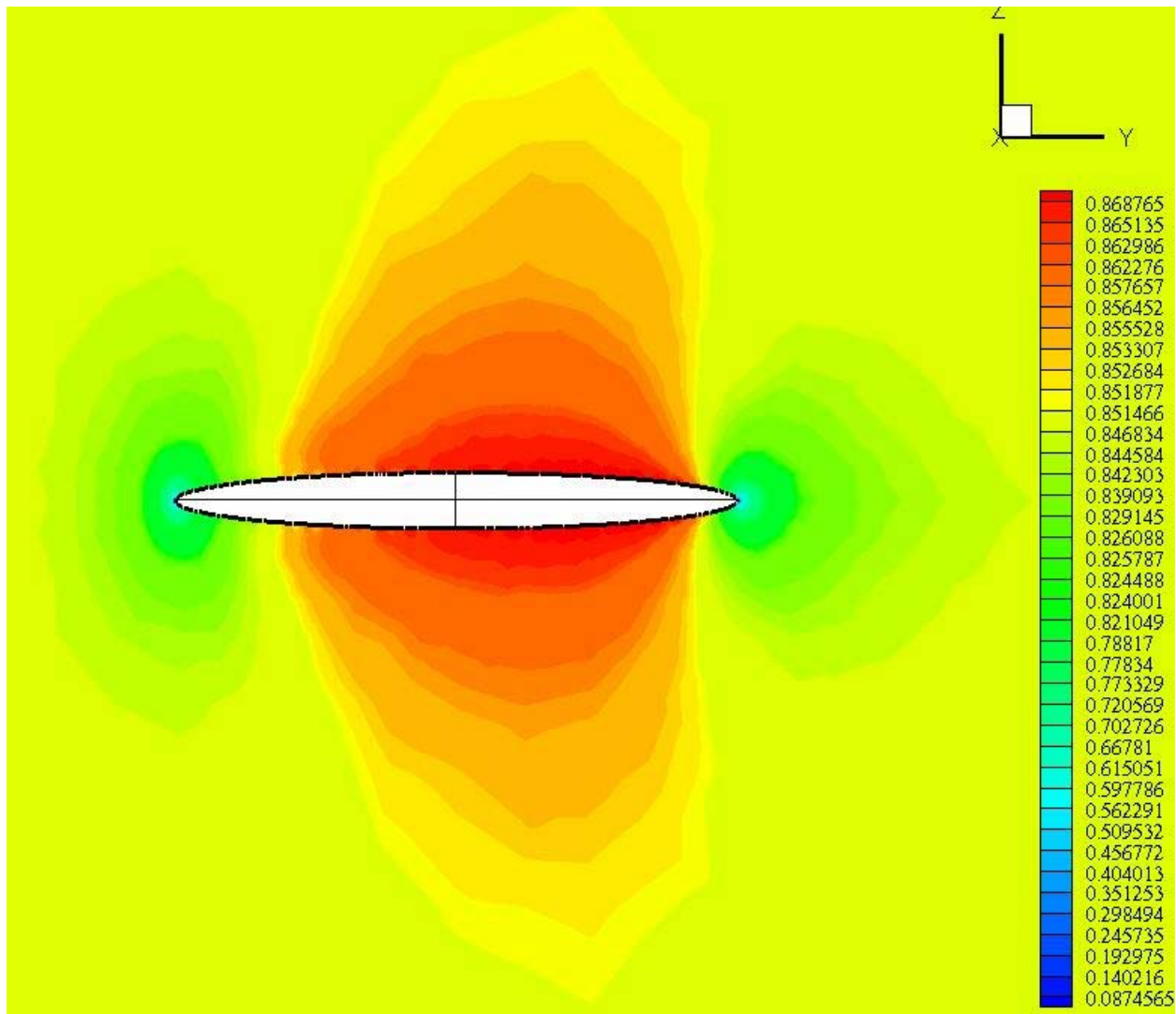
Εικόνα 5.21: Άποψη του χωρίου ροής για το ελλειψοειδές A.



Εικόνα 5.22: Το ελλειψοειδές Α. Λόγος αξόνων 10/1.

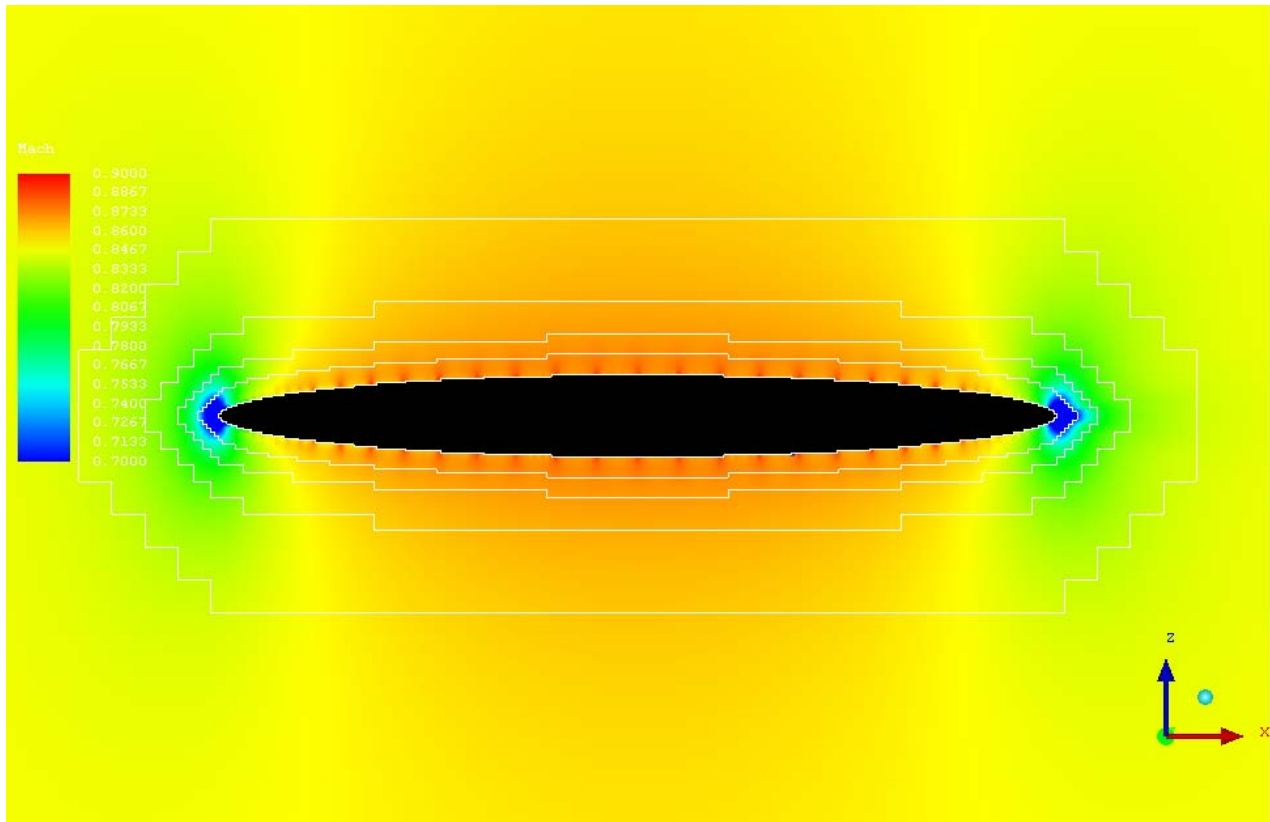
5.2.1 CFL 2.5

Ο αριθμός *CFL* ορίστηκε ίσος με 2.5 που είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την οποία διατηρείται η ευστάθεια του αλγορίθμου. Η επιθυμητή σύγκλιση επιτεύχθηκε μετά από **581 επαναλήψεις** και **70 περίπου λεπτά**. Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:



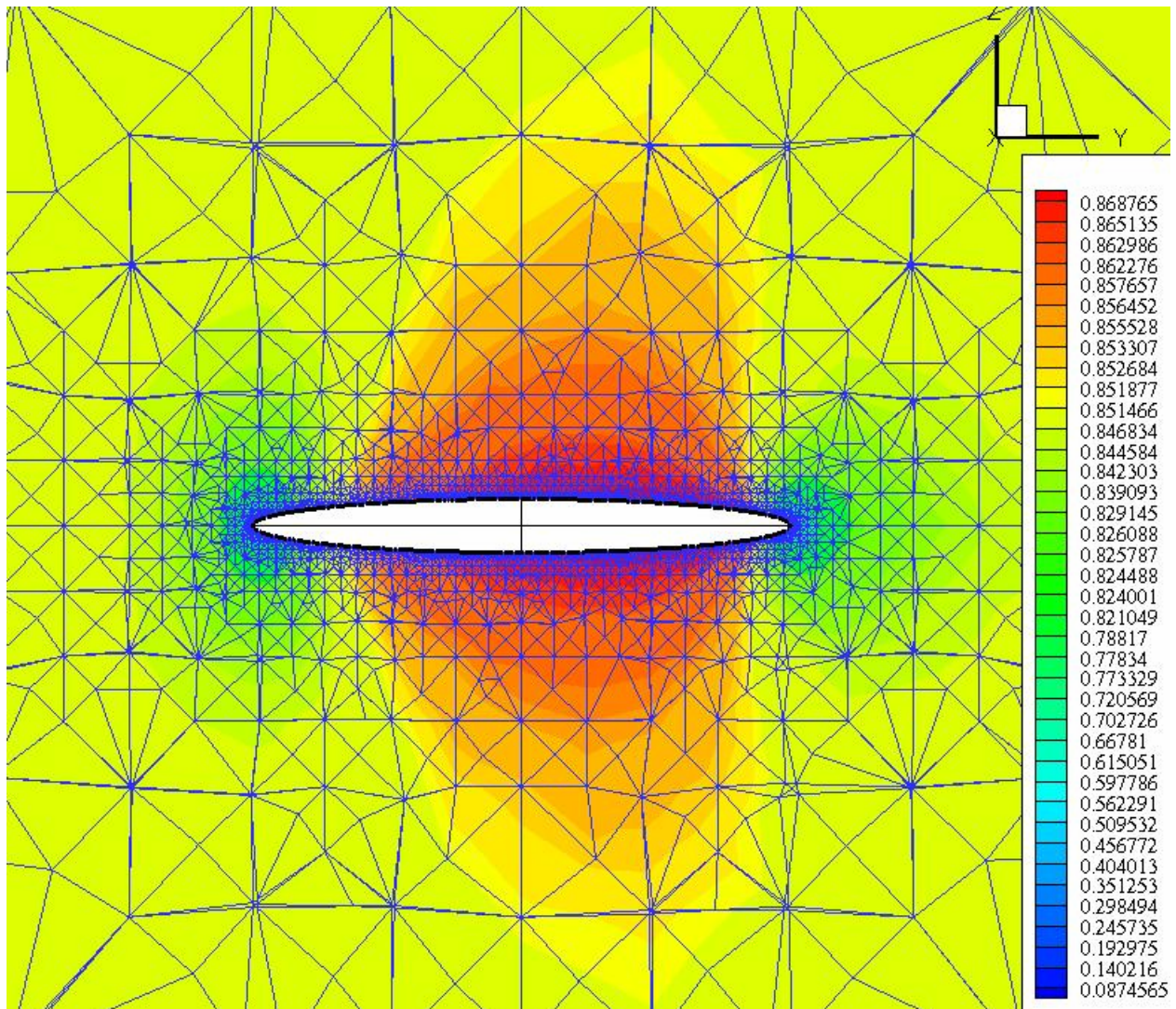
Εικόνα 5.23: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς Α.

Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγει ο αλγόριθμος και την πιστοποίηση της ορθότητάς τους, επιλύθηκαν οι εξισώσεις Euler για την ίδια ακριβώς περίπτωση στο λογισμικό CART-3D, δηλαδή σε χωρίο ροής γύρω από το ελλειψοειδές B υπό τις ίδιες συνθήκες. το εμπορικό αυτό πρόγραμμα έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

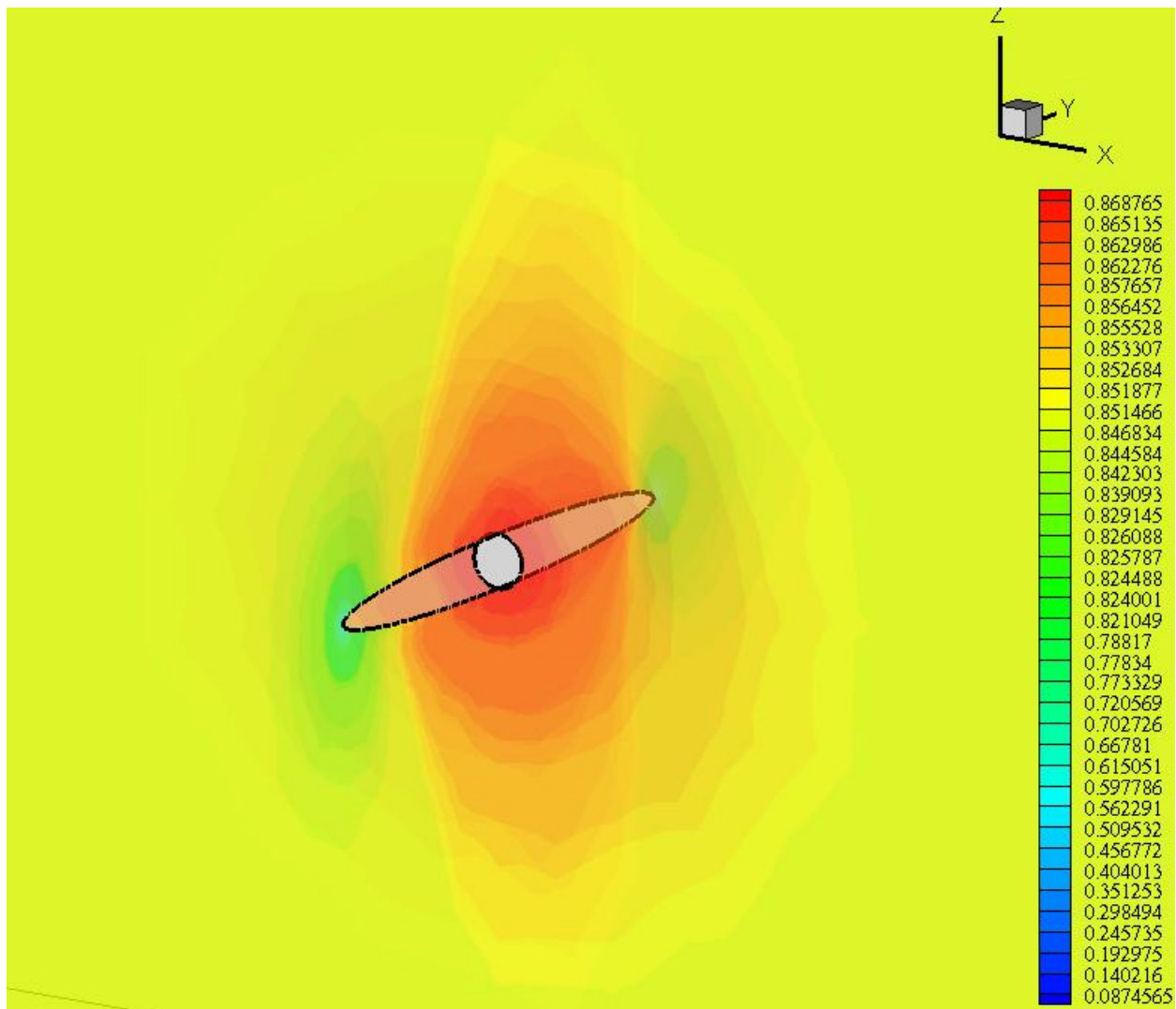


Εικόνα 5.24: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς A, όπως υπολογίστηκαν από το λογισμικό CART-3D.

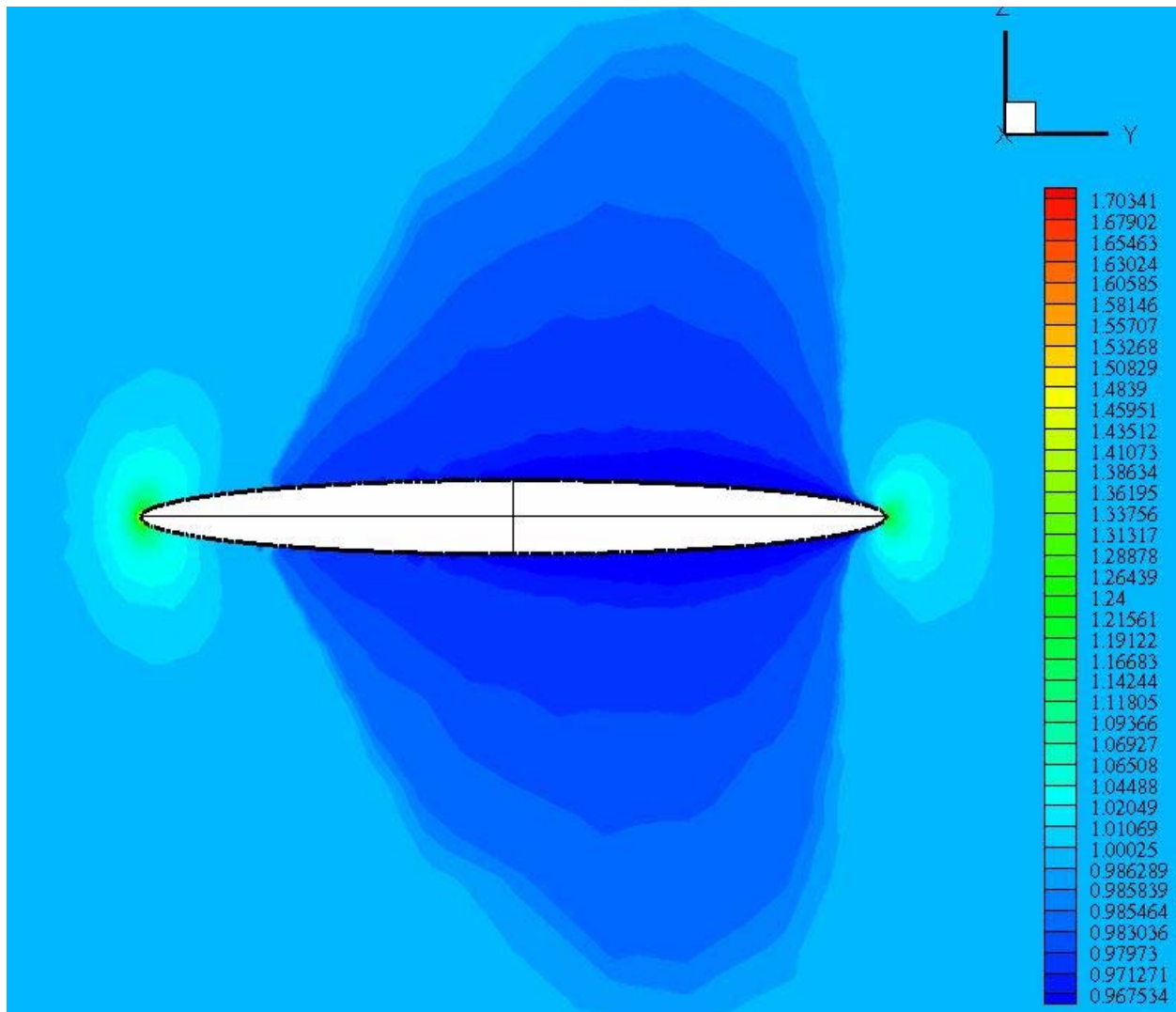
Παρατηρώντας τις εικόνες 5.23 και 5.24 διακρίνεται ποιοτική συμφωνία των αποτελεσμάτων, με ορισμένες όμως διαφορές. Οι διαφορές αυτές οφείλονται στην μειωμένη ακρίβεια της λύσης του λογισμικού που αναπτύχθηκε σε σχέση με αυτή του λογισμικού CART-3D. Το λογισμικό που αναπτύχθηκε υπολογίζει τη λύση με πρώτης τάξης ακρίβεια, σε αντίθεση με το λογισμικό CART-3D, το οποίο προσφέρει λύση με ακρίβεια δεύτερης τάξης. Ως αποτέλεσμα η λύση με το παρόν λογισμικό εμφανίζει αυξημένη αριθμητική διάχυση, η οποία διαπιστώνεται από τη μετακίνηση των ισογραμμών αριθμού Mach προς τα πίσω στο σχήμα 5.23 σε σχέση με το σχήμα 5.24.



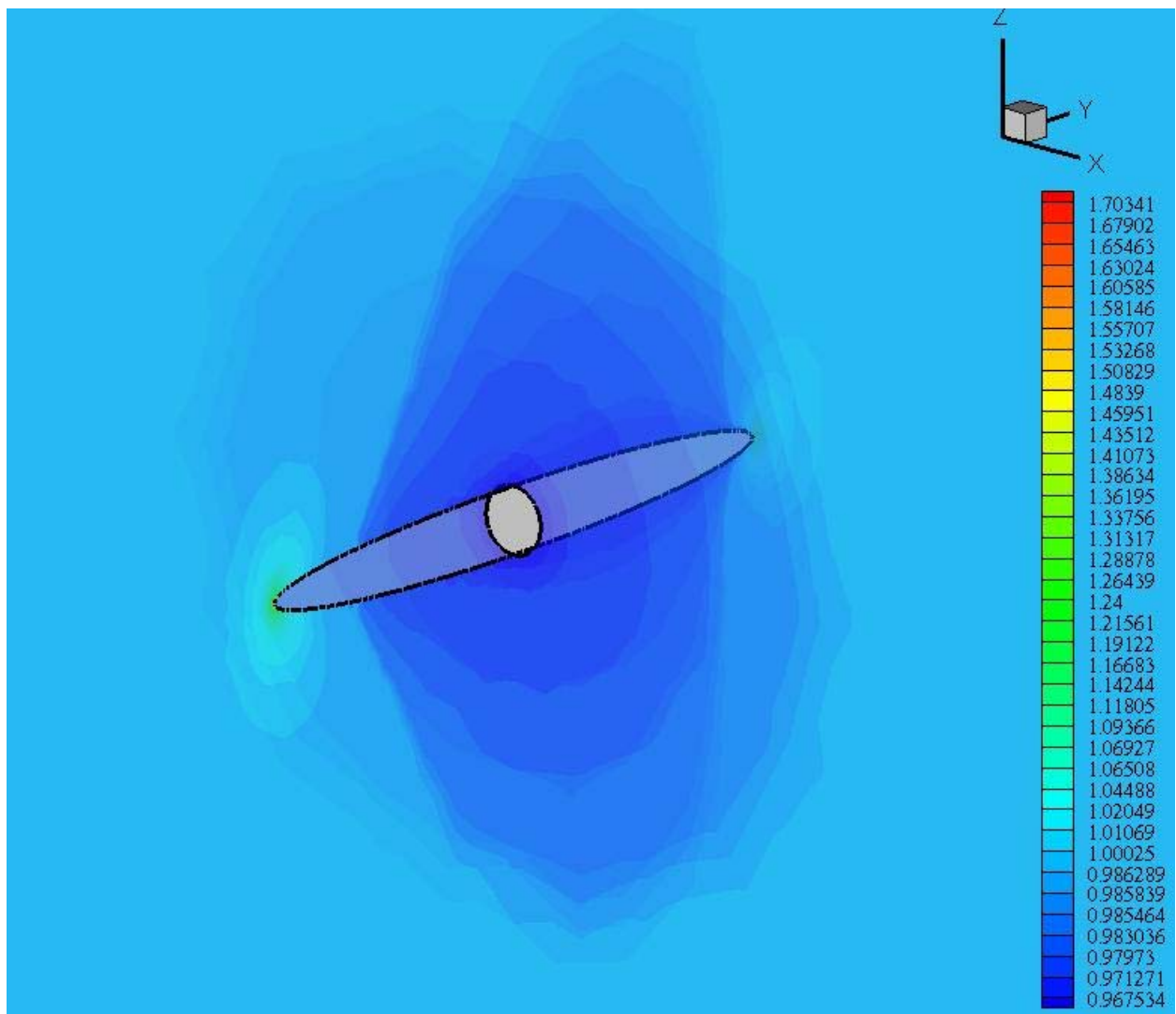
Εικόνα 5.25: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς Α. Διακρίνεται το πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία σε κάθετη τομή,



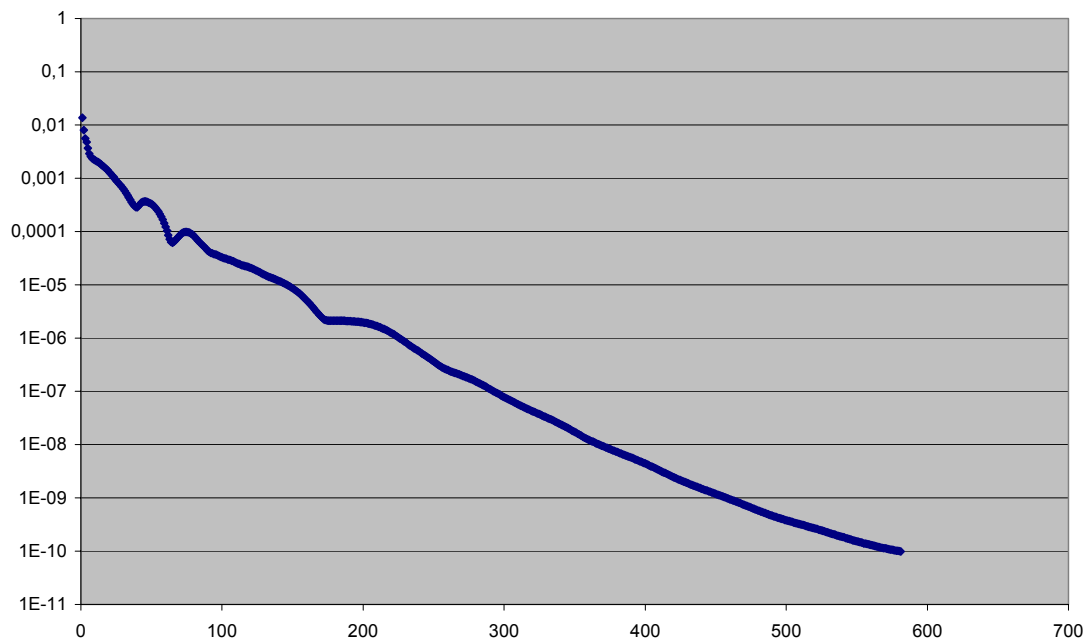
Εικόνα 5.26: Τριδιάστατη απεικόνιση των ισογραμμών του αριθμού Mach στο ελλειψοειδές Α.



Εικόνα 5.27: Ισογραμμές της πίεσης σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς Α.



Εικόνα 5.28: Αποψη των ισογραμμών πίεσης γύρω από το ελλειψοειδές Α.



Εικόνα 5.29: Γράφημα της σύγκλισης του αλγορίθμου. Αναφέρεται στη σύγκλιση της εξίσωση συνέχειας.

5.3 Ελλειψοειδές B

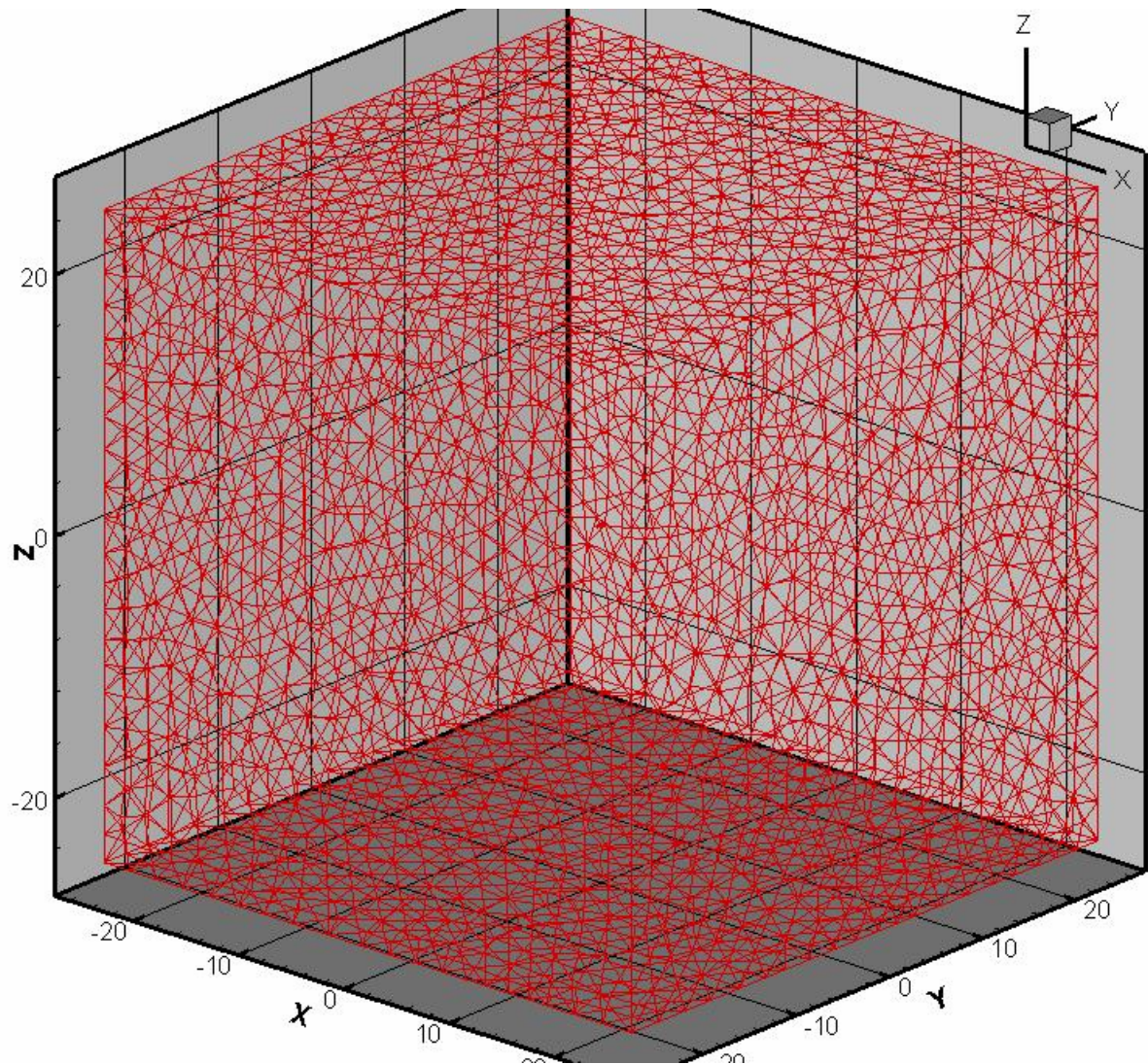
Η επόμενη γεωμετρία γύρω από την οποία επιλύθηκαν οι εξισώσεις Euler είναι το «Ελλειψοειδές B». Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, αυτό αποτελεί ένα στερεό σώμα που προέκυψε κατά την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον κύριο άξονά του κατά 360° . Η έλλειψη που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση αυτή έχει **λόγο αξόνων 10/2**. Οι συνθήκες ροής στις οποίες δοκιμάστηκε είναι:

- Mach 0.80
- Γωνία προσβολής 0°
- Γωνία πλαγιολίσθησης 0°
- Εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής $\gamma = 1.4$

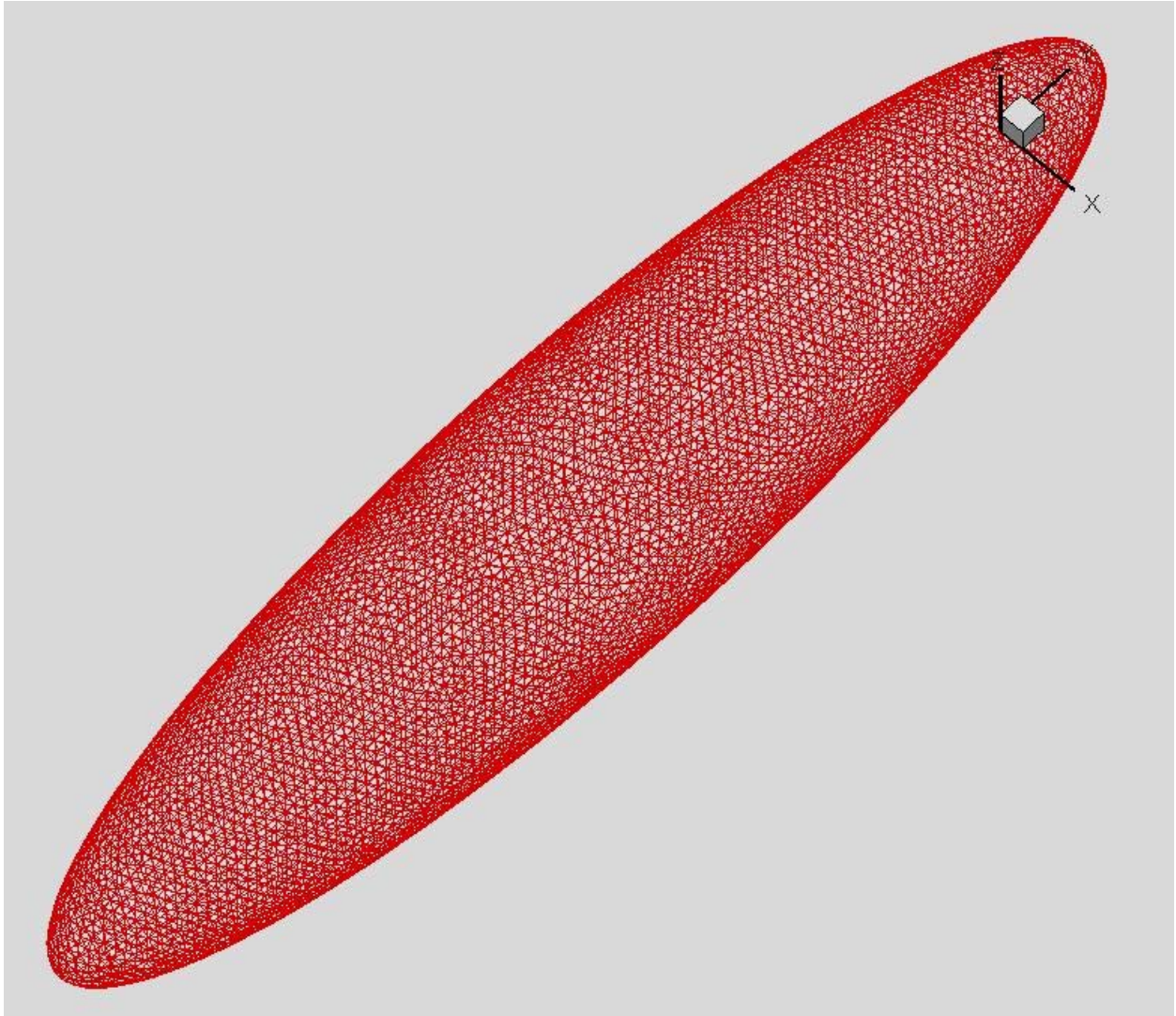
Οι παράμετροι της επαναληπτικής διαδικασίας ορίστηκαν:

- Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων 10000
- Μέγιστη απόκλιση 10^{-10}

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε έχει format '.cfx5' και αποτελείται από **53478 κόμβους** και **285334 τετράεδρα**. Ο αυξημένος αριθμός κόμβων και συνεπώς και τετραέδρων συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση προκαλούν αύξηση του όγκου δεδομένων που πρέπει να διαχειριστεί ο αλγόριθμος, οπότε παρατηρείται αυξημένη απαίτηση σε πόρους μνήμης και υπολογιστική ισχύ. Ακολουθούν απόψεις του πλέγματος. Ο ορισμός των εδρών του κύβου είναι ίδιος με αυτόν της προηγούμενης περίπτωσης:



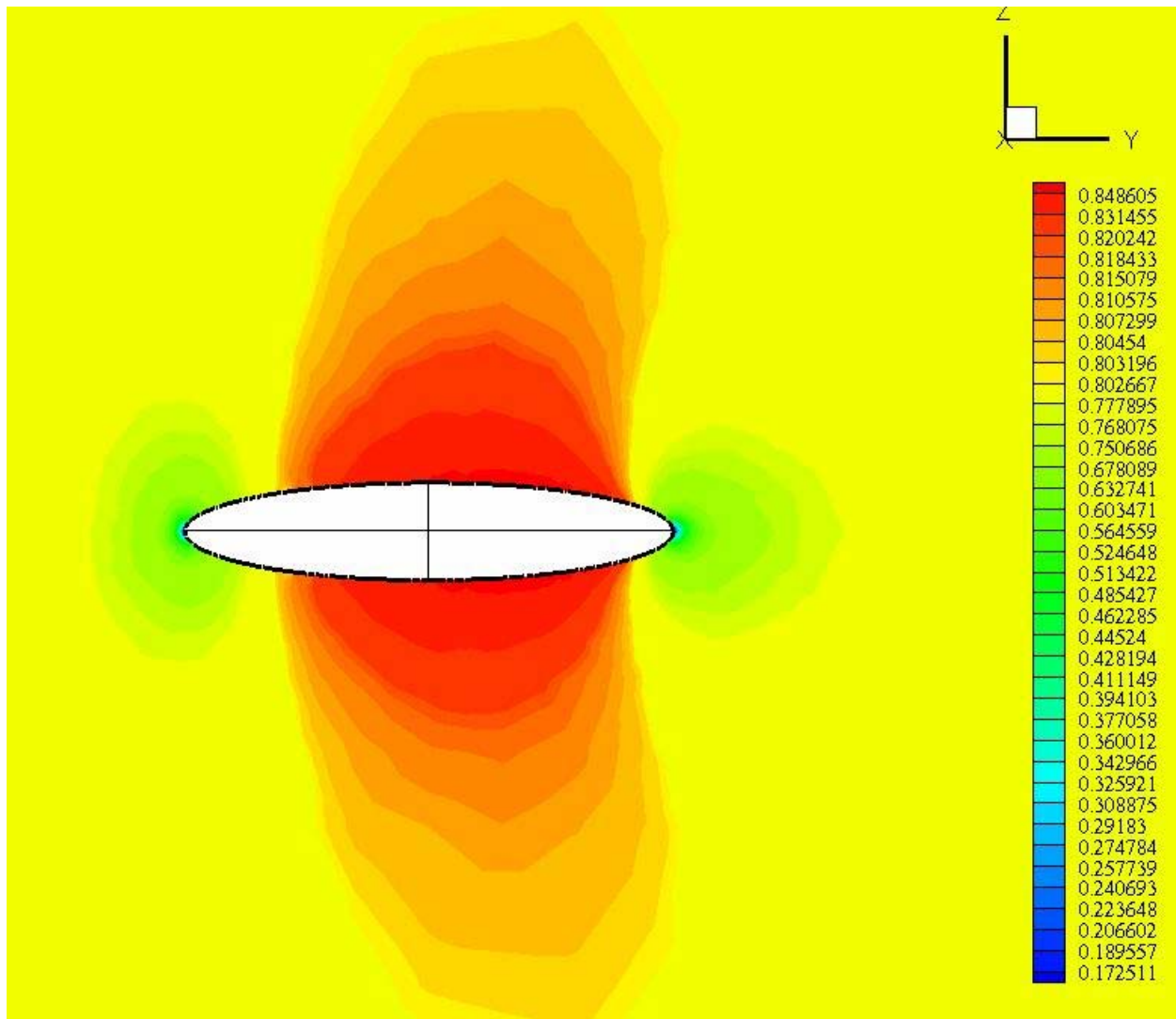
Εικόνα 5.30: Άποψη του πλέγματος γύρω από το ελλειψοειδές B.



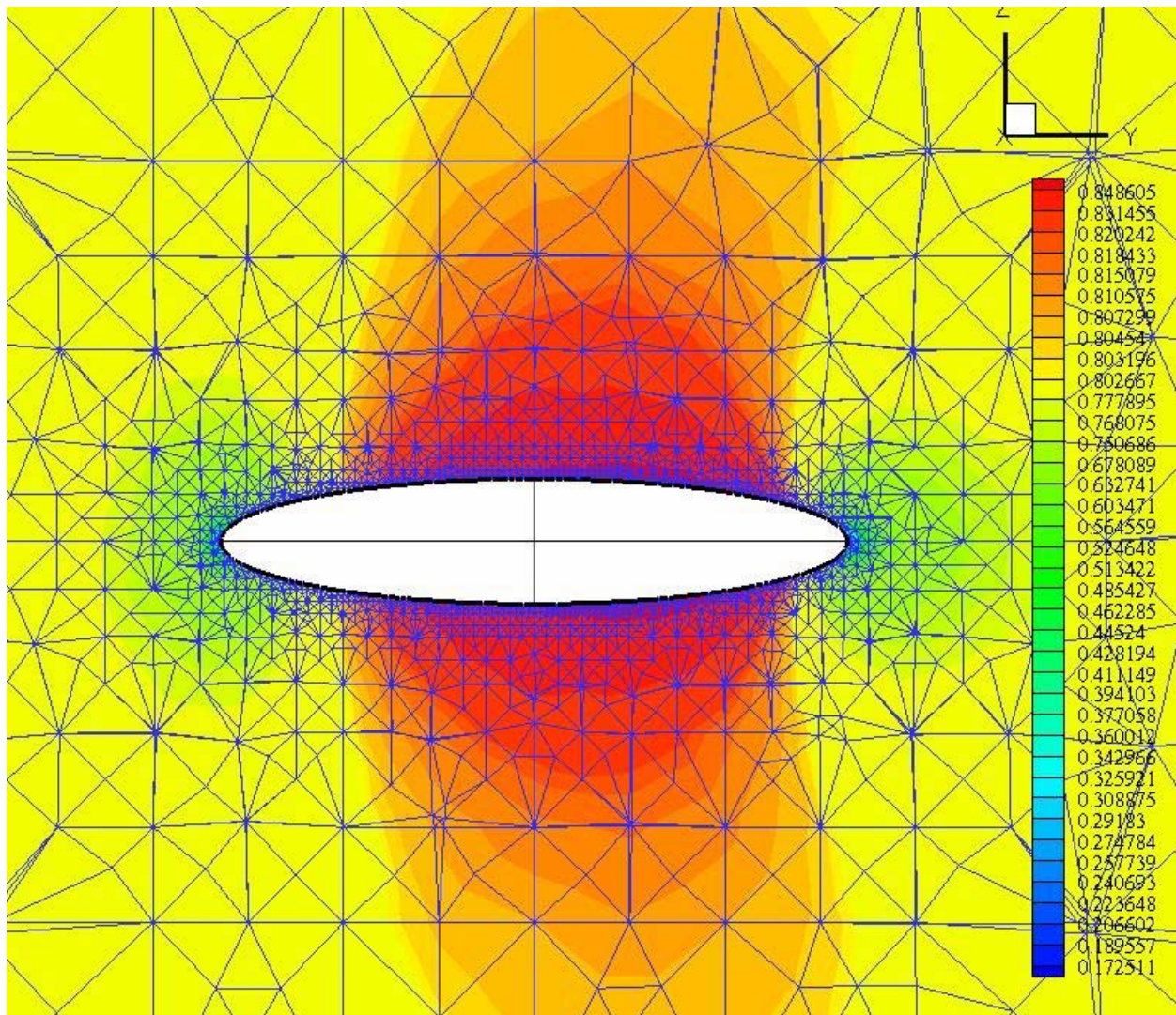
Εικόνα 5.31: Μη δομημένο πλέγμα στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς Β. Είναι εμφανής η αυξημένη πυκνότητα του πλέγματος.

5.3.1 CFL 1.5

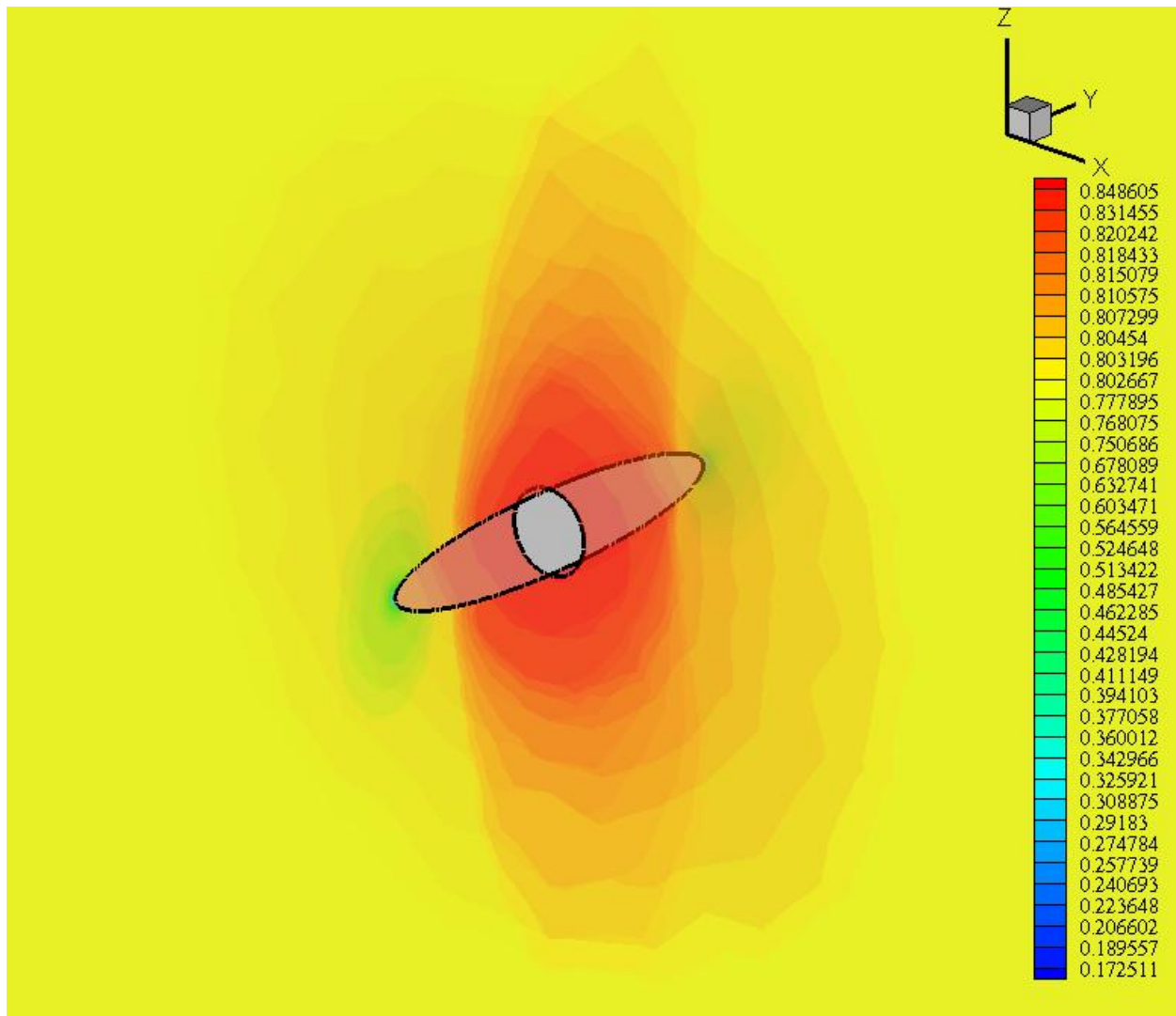
Ο αριθμός *CFL* ορίστηκε ίσος με 1.5 διατηρώντας την ευστάθεια του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος τερματίστηκε αφού έφτασε στις **898 επαναλήψεις** και στην επιθυμητή σύγκλιση, για τις οποίες χρειάστηκαν **2 ώρες** περίπου. Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:



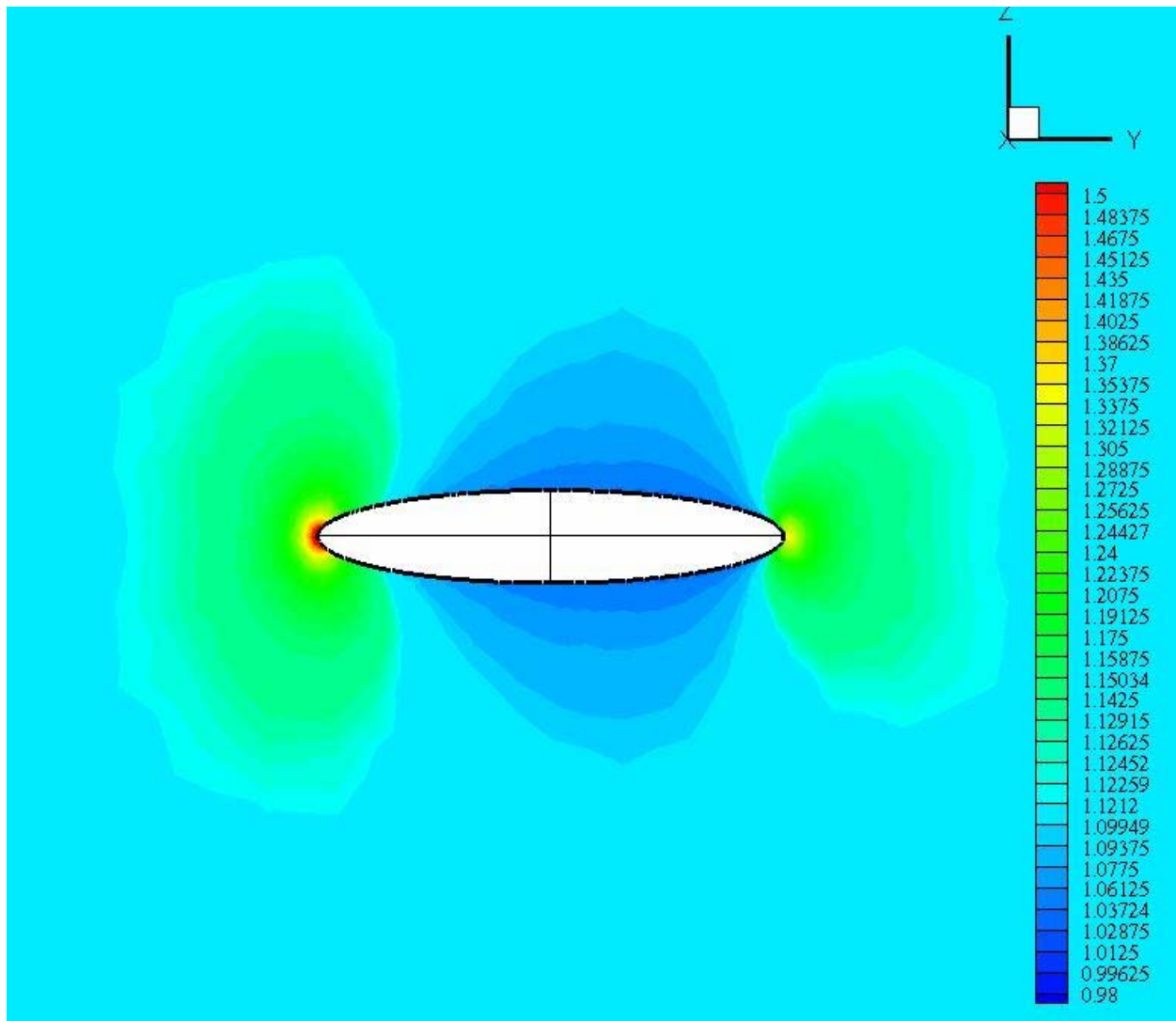
Εικόνα 5.32: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς Β.



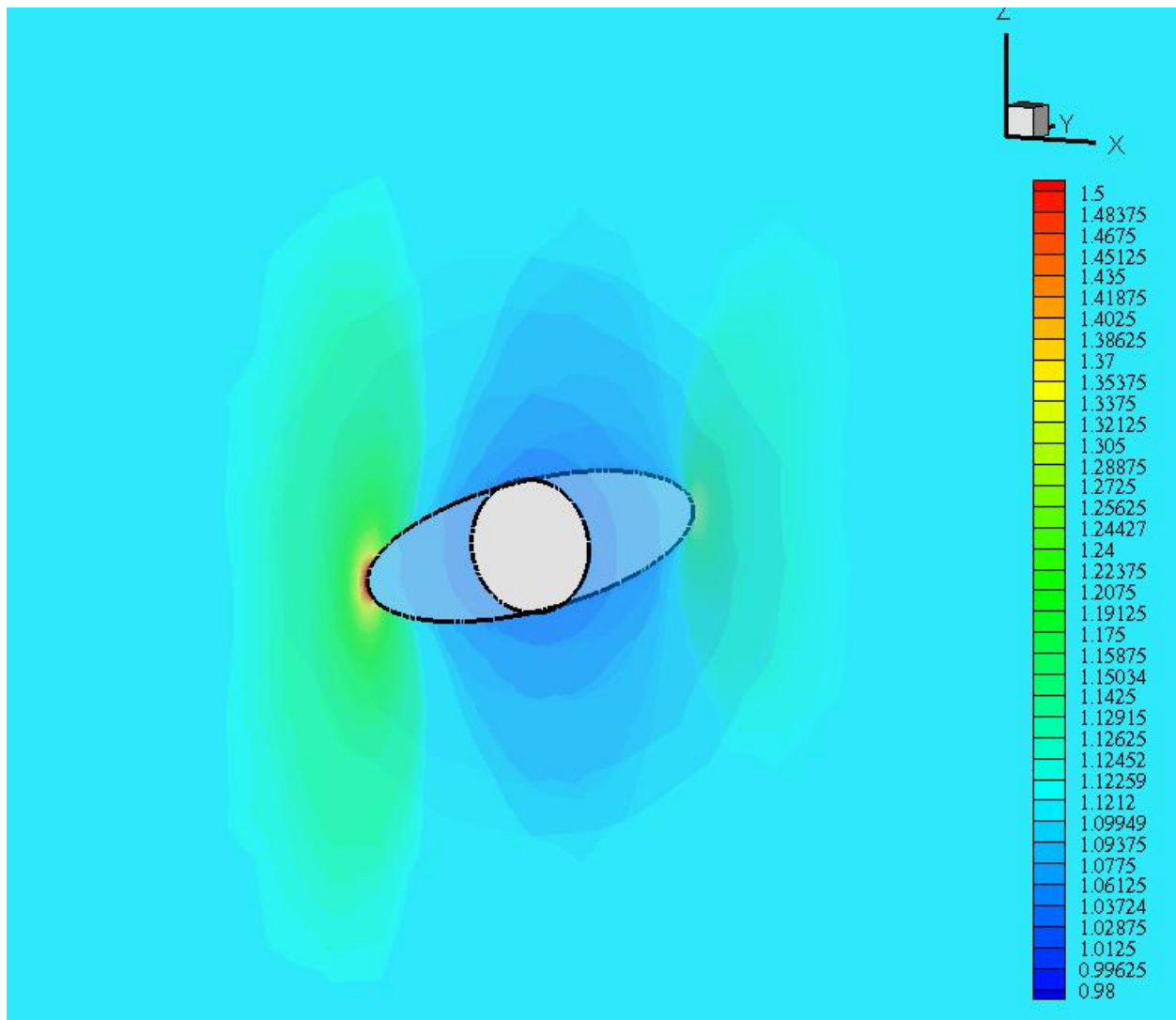
Εικόνα 5.33: Ισογραμμές αριθμού Mach σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς Β. Διακρίνεται το πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία σε κάθετη τομή.



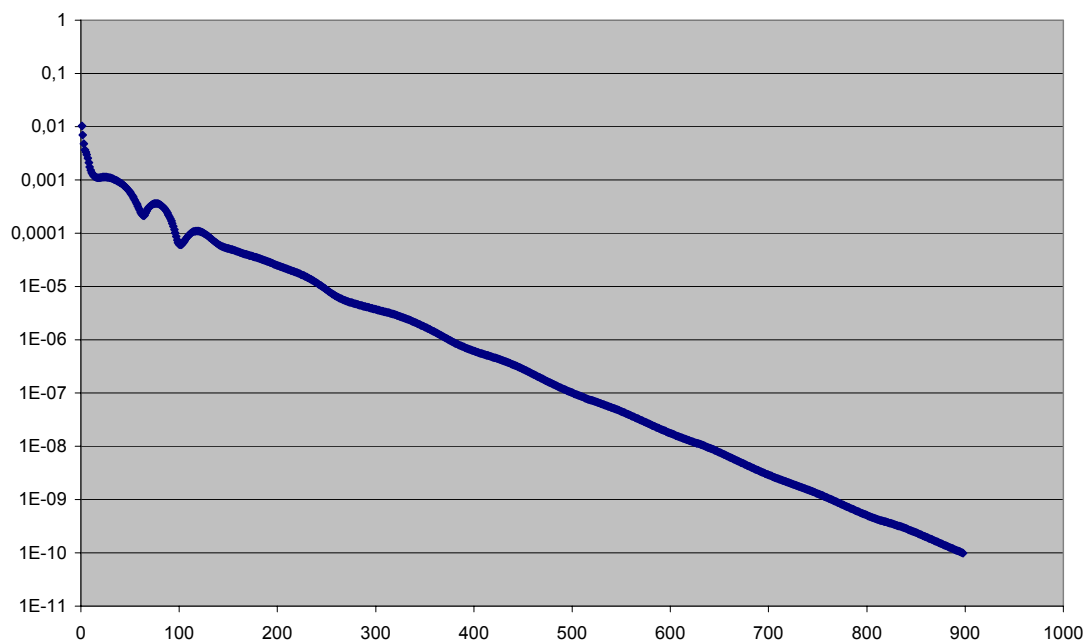
Εικόνα 5.34: Τριδιάστατη άποψη των ισογραμμών του αριθμού Mach γύρω από το ελλειψοειδές Β.



Εικόνα 5.35: Ισογραμμές της πίεσης σε κάθετη τομή του ελλειψοειδούς B.



Εικόνα 5.36: Τριδιάστατη άποψη των ισογραμμών της πίεσης γύρω από το ελλειψοειδές B.



Εικόνα 5.37: Γράφημα της σύγκλισης του αλγορίθμου. Αναφέρεται στη σύγκλιση της εξίσωσης συνέχειας.

Κεφάλαιο 6

Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

6.1 Ανακεφαλαίωση της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την υπολογιστική ρευστοδυναμική. Το αντικείμενο μελέτης είναι η ανάπτυξη μιας αριθμητικής μεθόδου επίλυσης των εξισώσεων Euler με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η μέθοδος επίλυσης χρησιμοποιεί τριδιάστατα μη-δομημένα πλέγματα τετραεδρικών στοιχείων. Για την ολοκλήρωση της εργασίας αναπτύχθηκε αλγόριθμος που επιλύει αριθμητικά τις εξισώσεις Euler στη γλώσσα προγραμματισμού Fortran90. Ο αλγόριθμος αποτελεί ουσιαστικά εξέλιξη του λογισμικού EU2 του κ. Νικολού Κ. Ιωάννη.

Η πολυπλοκότητα των εξισώσεων Euler καθιστά σχεδόν αδύνατη την αναλυτική επίλυσή τους. Η αριθμητική επίλυση ωστόσο προϋποθέτει την χρήση προσεγγίσεων καθώς και την διακριτοποίηση του χωρίου της ροής που θα επιλυθεί. Η χωρική διακριτοποίηση εφαρμόστηκε με την μέθοδο πεπερασμένων όγκων σε συνδυασμό με την κεντροκομβική μέθοδο επίλυσης. Η μέθοδος μετατρέπει ουσιαστικά ένα πολύπλοκο σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε ένα επιλύσιμο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Η αριθμητική μέθοδος επίλυσης διακρίνεται σε βήματα. Αρχικά διαμορφώνεται το μαθηματικό μοντέλο των εξισώσεων που θα επιλυθεί. Ουσιαστικά αυτό αποτελείται από το σύστημα των εξισώσεων Euler. Στο μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, με ανάλογο τρόπο με αυτόν που παρουσιάστηκε. Χρησιμοποιείται ένα τριδιάστατο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων που παρουσιάζεται αναλυτικά. Εφαρμόζονται κατάλληλες προσεγγίσεις που απλοποιούν τις εξισώσεις, όπως η προσέγγιση των τριπλών ολοκληρωμάτων με επιφανειακά ολοκληρώματα, σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss. Ο μαθηματικός υπολογισμός των διανυσμάτων ροής γίνεται επιλύνοντας ένα τοπικό πρόβλημα Riemann μεταξύ των ακραίων κόμβων κάθε ακμής, χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό επιλύτη του Roe, ενώ εφαρμόζονται κατάλληλα οι οριακές συνθήκες εισόδου/ εξόδου της ροής και στερεού τοιχώματος. Ακολουθεί η χρονική διακριτοποίηση και η χρήση της τεχνικής βέλτιστου τοπικού χρονικού βήματος. Η επίλυση γίνεται με πολυβηματική ρητή μέθοδο, και συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge-Kutta τεσσάρων βημάτων.

Η ανάπτυξη του λογισμικού, που εφαρμόζει τα παραπάνω, βασίστηκε στο λογισμικό EU2. Ωστόσο η επέκτασή του από τις δύο στις τρεις διαστάσεις απαιτεί την χρήση πολυπλοκότερων και αποδοτικότερων δομών δεδομένων. Στην παρούσα εργασία περιγράφονται αναλυτικά οι βοηθητικοί υπολογισμοί

που εκτελούνται στην αρχή του αλγορίθμου και οι κύριοι υπολογισμοί που γίνονται κατά την επαναληπτική διαδικασία. Η αναπαράσταση του πλέγματος προϋποθέτει την αποδοτική διαχείριση ενός μεγάλου όγκου δεδομένων με κατάλληλες δομές δεδομένων και τεχνικές. Παρουσιάζεται ο αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών δεδομένων, όπως τα κάθετα διανύσματα, η εφαρμογή του προσεγγιστικού επιλύτη του Roe και η εφαρμογή των οριακών συνθηκών στο χωρίου ροής. Τέλος περιγράφεται η εφαρμογή της ρητής πολυβηματικής μεθόδου επίλυσης.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται σχηματικά τα σχολιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου σε διαφορετικές γεωμετρίες και συνθήκες ροής.

6.2 Συμπεράσματα

Κατ' αρχήν, τα αποτελέσματα του κώδικα είναι ποιοτικά αρκετά σωστά, δίνοντας λογική απεικόνιση της ροής, ενώ η συμπεριφορά της σύγκλισης είναι επίσης λογική. Όμως ο αλγόριθμος εμφανίζει αδυναμία να υπολογίσει τα κύματα κρούσης, ενώ εμφανίζει και αυξημένη αριθμητική διάχυση. Απαιτείται συνεπώς η άμεση εισαγωγή σχημάτων διακριτοποίησης υψηλότερης τάξης, που θα αυξήσουν την ακρίβεια της λύσης. Με τον τρόπο αυτό αναμένεται να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά το πρόβλημα της αριθμητικής διάχυσης, που εισάγει το πρώτης τάξης σχήμα επίλυσης. Με την αύξηση της ακρίβειας αναμένεται να αυξηθεί σημαντικά η ευαισθησία του αλγορίθμου σε ασυνέχειες της ροής και η ικανότητά του να εντοπίζει με ακρίβεια τα κύματα κρούσης.

Ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα, που προέκυψε από την παρούσα εργασία, είναι η καίρια σημασία των δομών δεδομένων κατά την αλγοριθμική επίλυση των εξισώσεων Euler. Πριν την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας, όπου λαμβάνει χώρα η επίλυση των εξισώσεων, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη και αποθήκευση ενός όγκου δεδομένων, που απαιτούνται από τον επιλύτη. Σε τριδιάστατα προβλήματα ο όγκος αυτός έχει συνήθως μεγάλες διαστάσεις με αποτέλεσμα να γίνεται εξαιρετικά χρονοβόρα η διαδικασία υπολογισμού των δεδομένων, ιδιαίτερα απαιτητική η αποθήκευσή τους, αλλά κυρίως καθίσταται πολύ δύσκολη η διαχείρισή τους. Συνεπώς, είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση κατάλληλων δομών δεδομένων, που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Η χρήση τέτοιων δομών συνήθως αυξάνει τις απαιτήσεις του αλγορίθμου σε μνήμη, αλλά μειώνει σημαντικά τις υπολογιστικές απαιτήσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μείωση από δύο ώρες σε μερικά δευτερόλεπτα του χρόνου διεξαγωγής των βοηθητικών υπολογισμών του αλγορίθμου μετά τη χρήση του «πίνακα επαναδιατύπωσης» [For99].

Η επέκταση του αλγορίθμου EU2 για την επίλυση των εξισώσεων Euler από τις δύο στις τρεις διαστάσεις παρουσίασε σημαντικές δυσκολίες. Η σημαντικότερη ίσως αποτελεί η ανάπτυξη και διαχείριση των απαραίτητων από τον επιλύτη δομών δεδομένων. Η αναπαράσταση ενός τριδιάστατου μη-δομημένου πλέγματος προϋποθέτει την ανάπτυξη πολύ περισσότερων δομών δεδομένων από ένα αντίστοιχο διδιάστατο μη-δομημένο πλέγμα. Ωστόσο, η ανάπτυξη πολλών δομών δεδομένων, που περιγράφουν αναλυτικά το πλέγμα,

απλοποιεί τον επιλύτη. Για το λόγο αυτό δίνεται μεγάλη βαρύτητα στην ανάπτυξη κατάλληλων δομών στη διάρκεια των βοηθητικών υπολογισμών, ώστε να απλουστευθεί η επίλυση των εξισώσεων κατά την επαναληπτική διαδικασία. Παράλληλα, όπως ήδη έχει ειπωθεί, το τριδιάστατο πλέγμα δημιουργεί μεγάλο όγκο δεδομένων, οπότε είναι απαραίτητη η εύρεση κατάλληλων τεχνικών και δομών για την αποδοτική ανάπτυξη και διαχείρισή τους.

Μια ακόμα δυσκολία που αντιμετωπίστηκε κατά την επέκταση του διδιάστατου αλγορίθμου στις τρεις διαστάσεις ήταν η εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Η επιβολή της συνθήκης στερεού τοιχώματος γίνεται στα οριακά τρίγωνα, ενώ η συνθήκη εισόδου/ εξόδου της ροής επιβάλλεται στους οριακούς κόμβους. Η διαφορά αυτή δημιουργεί και την ανάγκη για τον αριθμητικό υπολογισμό διαφορετικών γεωμετρικών στοιχείων στις οριακές επιφάνειες.

Ωστόσο υπάρχουν και ομοιότητες μεταξύ των δύο αλγορίθμων, όπως ο αριθμητικός υπολογισμός των διανυσμάτων ροής. Και στις δύο περιπτώσεις υπολογίζονται τα διανύσματα για κάθε ακμή του πλέγματος επιλύνοντας το τοπικό πρόβλημα Riemann μεταξύ των καταστάσεων των δύο ακραίων κόμβων. Με την τεχνική αυτή προσεγγίζεται το σύστημα των πολύπλοκων διαφορικών εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που αφορούν κάθε κόμβο του πλέγματος.

Η χρησιμότητα του αλγορίθμου, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι ότι αποτελεί ένα ευέλικτο και γρήγορο εργαλείο για την αρχική εκτίμηση της ροής του ρευστού σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής. Σε περιπτώσεις ροής με υψηλό αριθμό Reynolds τα κύματα κρούσης και γενικά η ροή διαμορφώνεται κυρίως από την επίδραση των μη-συνεκτικών όρων της ροής. Στις περιπτώσεις αυτές, που είναι οι συνηθέστερες για διηχητικές πτήσεις αεροσκαφών, η επίλυση των εξισώσεων Euler παρέχουν χρήσιμα συμπεράσματα σε μικρό χρονικό διάστημα έναντι της χρονοβόρας επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes.

Μια άλλη επέκταση της παρούσας εργασίας (εκτός του σχήματος ανώτερης τάξης ακρίβειας) είναι η ανάπτυξη κατάλληλης τεχνικής, η οποία θα πυκνώνει το τριδιάστατο πλέγμα σε σημεία του χωρίου ροής ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, όπως σε περιοχές ασυνέχειας της ροής στα κύματα κρούσης. Η ίδια τεχνική μπορεί να έχει τη δυνατότητα αραίωσης του πλέγματος σε περιοχές του χωρίου ροής μειωμένου ενδιαφέροντος, ώστε να αντισταθμίζεται η αύξηση των υπολογιστικών απαιτήσεων και του όγκου των δομών δεδομένων.

Άλλη προτεινόμενη επέκταση είναι η τροποποίηση του αλγορίθμου ώστε να έχει τη δυνατότητα να επεξεργαστεί μη δομημένα πλέγματα εξαεδρικών ή εν γένει πολυεδρικών στοιχείων, ή ακόμα και δομημένα πλέγματα. Τα πλέγματα αυτά είναι ιδανικά για συγκεκριμένες περιπτώσεις και γεωμετρίες, αυξάνοντας την εφαρμοσιμότητα του λογισμικού.

Παράρτημα Α

Ιακωβιανό Μητρώο του Διανύσματος Ροής

Το διάνυσμα ροής στην κατεύθυνση του διαστατού διανύσματος \vec{n} είναι [Κου98]:

$$\vec{H} = n_x \vec{F} + n_y \vec{G} + n_z \vec{J} = \begin{pmatrix} \rho V_n |\vec{n}| \\ \rho u V_n |\vec{n}| + p n_x \\ \rho v V_n |\vec{n}| + p n_y \\ \rho w V_n |\vec{n}| + p n_z \\ (E + p) V_n |\vec{n}| \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

όπου με $V_n = \vec{V} \cdot \hat{\vec{n}}$ συμβολίζεται η προβολή του διανύσματος της ταχύτητας στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\vec{n}} = \vec{n} / |\vec{n}|$. Η Ιακωβιανή του διανύσματος ροής σχηματίζεται ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές. Συμβολίζεται με \underline{A} και διαγωνοποιείται ως εξής [Hir90]:

$$\underline{A} = \underline{T} \underline{\Lambda} \underline{T}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Στην παραπάνω σχέση με $\underline{\Lambda}$ συμβολίζεται το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και με \underline{T} και \underline{T}^{-1} τα μητρώα των δεξιών (στήλης) και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων (γραμμής) αντίστοιχα. Τα μητρώα αυτά είναι τα ακόλουθα:

$$\underline{\Lambda} = \text{diag} \left\{ V_n |\vec{n}|, V_n |\vec{n}|, V_n |\vec{n}|, (V_n + c) |\vec{n}|, (V_n - c) |\vec{n}| \right\} \quad (\text{A.3})$$

όπου βέβαια $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ και $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Ακόμα:

$$\underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} B\hat{n}_x - \frac{X}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_x}{c^2} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_y}{c^2} + \frac{\hat{n}_z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_x V_z}{c^2} - \frac{\hat{n}_y}{\rho} & \frac{-(\gamma-1)\hat{n}_x}{c^2} \\ B\hat{n}_y - \frac{Y}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_x}{c^2} - \frac{\hat{n}_z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_y}{c^2} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_y V_z}{c^2} + \frac{\hat{n}_x}{\rho} & \frac{-(\gamma-1)\hat{n}_y}{c^2} \\ B\hat{n}_z - \frac{Z}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_x}{c^2} + \frac{\hat{n}_y}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_y}{c^2} - \frac{\hat{n}_x}{\rho} & \frac{(\gamma-1)\hat{n}_z V_z}{c^2} & \frac{-(\gamma-1)\hat{n}_z}{c^2} \\ \frac{c}{\rho} \left\{ \frac{(\gamma-1)V^2}{2c^2} - \frac{V_n}{c} \right\} & \left\{ \hat{n}_x - \frac{(\gamma-1)V_x}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \left\{ \hat{n}_y - \frac{(\gamma-1)V_y}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \left\{ \hat{n}_z - \frac{(\gamma-1)V_z}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \\ \frac{c}{\rho} \left\{ \frac{(\gamma-1)V^2}{2c^2} + \frac{V_n}{c} \right\} & \left\{ -\hat{n}_x - \frac{(\gamma-1)V_x}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \left\{ -\hat{n}_y - \frac{(\gamma-1)V_y}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \left\{ -\hat{n}_z - \frac{(\gamma-1)V_z}{c^2} \right\} \frac{1}{\rho} & \frac{(\gamma-1)}{\rho c} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$B = 1 - \frac{(\gamma-1)V^2}{2c}, \quad X = \hat{n}_z V_y - \hat{n}_y V_z, \quad Y = \hat{n}_x V_z - \hat{n}_z V_x, \quad Z = \hat{n}_y V_x - \hat{n}_x V_y \quad (\text{A.5})$$

Τέλος,

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \hat{n}_x & \hat{n}_y & \hat{n}_z & C & C \\ \hat{n}_x V_x & \hat{n}_y V_x - \hat{n}_z \rho & \hat{n}_z V_x + \hat{n}_y \rho & C(V_x + c\hat{n}_x) & C(V_x - c\hat{n}_x) \\ \hat{n}_x V_y + \hat{n}_z \rho & \hat{n}_y V_y & \hat{n}_z V_y - \hat{n}_x \rho & C(V_y + c\hat{n}_y) & C(V_y - c\hat{n}_y) \\ \hat{n}_x V_z - \hat{n}_y \rho & \hat{n}_y V_z + \hat{n}_x \rho & \hat{n}_z V_z & C(V_z + c\hat{n}_z) & C(V_z - c\hat{n}_z) \\ \frac{V^2}{2} \hat{n}_x + \rho X & \frac{V^2}{2} \hat{n}_y + \rho Y & \frac{V^2}{2} \hat{n}_z + \rho Z & C(H + cV_n) & C(H - cV_n) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{όπου } C = \frac{\rho}{2c}, H = \frac{V^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1}.$$

Άλλες χρήσιμες σχέσεις για το σχήμα Roe είναι:

$$\begin{aligned} \underline{A}^{\pm} &= \underline{T} \underline{\Lambda}^{\pm} \underline{T}^{-1}, \quad \underline{\Lambda}_{\pm} = \text{diag} \{ \lambda_i^{\pm} \}, \quad i = 1, \dots, 5 \\ |\underline{A}| &= \underline{T} |\underline{\Lambda}| \underline{T}^{-1}, \quad |\underline{\Lambda}| = \text{diag} \{ |\lambda_i| \}, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

όπου

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= \max(\lambda_i, 0), \quad i = 1, \dots, 5 \\ \lambda_i^- &= \min(\lambda_i, 0), \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Υπενθυμίζεται ότι τα μεγέθη που αναφέρονται είναι αδιαστατοποιημένα.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- [Κου98] Κουμπογιάννης Γ. Δημήτριος, *Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes με χρήση μη-δομημένων πλεγμάτων σε περιβάλλον παράλληλης επεξεργασίας*, Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 1998.
- [Νικ04] Νικολός Κ. Ιωάννης, *Σημειώσεις μαθήματος Ρευστομηχανική*, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2004.

Διεθνής

- [For99] Formaggia L., "Data Structures for Unstructured Mesh Generation", in J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds.), *Handbook of Grid Generation*, CRC Pres, 1999.
- [Hir90] Hirsch C., *Numerical Computation of External and Internal Flows*, Vol. 1&2, John Wiley & Sons, 1990.
- [Lal88] Lallemand M. H., "Etude de schemas Runge-Kutta a 4 pas pour la resolution multigrille des equations d' Euler 2-D", Rapport de Recherche INRIA, 1988.
- [Mun90] Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, 3rd Edition, 1990.
- [Pan93] Pan D., Cheng J-C., "Upwind Finite-Volume Navier-Stokes Computations on Unstructured Triangular Meshes", *AIAA J.*, Vol. 31, No. 9, pp. 1618-1625, September 1993.
- [Pul85] Pulliam T. H. and Steger J. L., "Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms", AIAA Paper 85-0360, AIAA 23rd Aerospace Science Meeting, Reno, Jan. 14-17, 1985.
- [Roe81] Roe P., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, nad Difference Schemes", *J. of Comp. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-371, 1981.

- [Sla 94] Slack D. C., Whitaker D. L. and Walters R. W., "Time Integration Algorithms for the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Meshes", *AIAA J.*, Vol. 32, No. 6, pp. 1158-1166, June 1994.
- [Ste88] Steve H., *Schemas Implicites Linearises Decentres pour la Resolution des Equations d' Euler en Plusieurs Dimensions*, These, L' Universite de Provence Aix-Marseille 1, 1989.
- [vAl82] van Albada G. D., van Leer B. and Roberts W. W., "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics", *Astron. Astrophys.* 108, pp. 76-84, 1982.
- [vLe72] van Leer B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme I: The Quest of Monotonicity", *Lecture Notes in Physics*, 18, 163, 1972.
- [vLe79] van Leer B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V: A Second Order Sequel to Godunov's Method", *J. Comp. Phys.*, Vol. 32, pp. 101-136, 1979.
- [vLe82] van Leer B., "Flux Vector Splitting for the Euler Equations", *Lecture Notes in Physics*, Vol. 170, pp. 405-512, 1982.