



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Διπλωματική Εργασία

*Ανάπτυξη λογισμικού για την παραμετρική σχεδίαση
πτερυγώσεων στροβιλομηχανών*

Γεωργία Ν. Κοϊνη

Επιβλέπων:
Νικολός Ιωάννης, Λέκτορας

Χανιά 2005

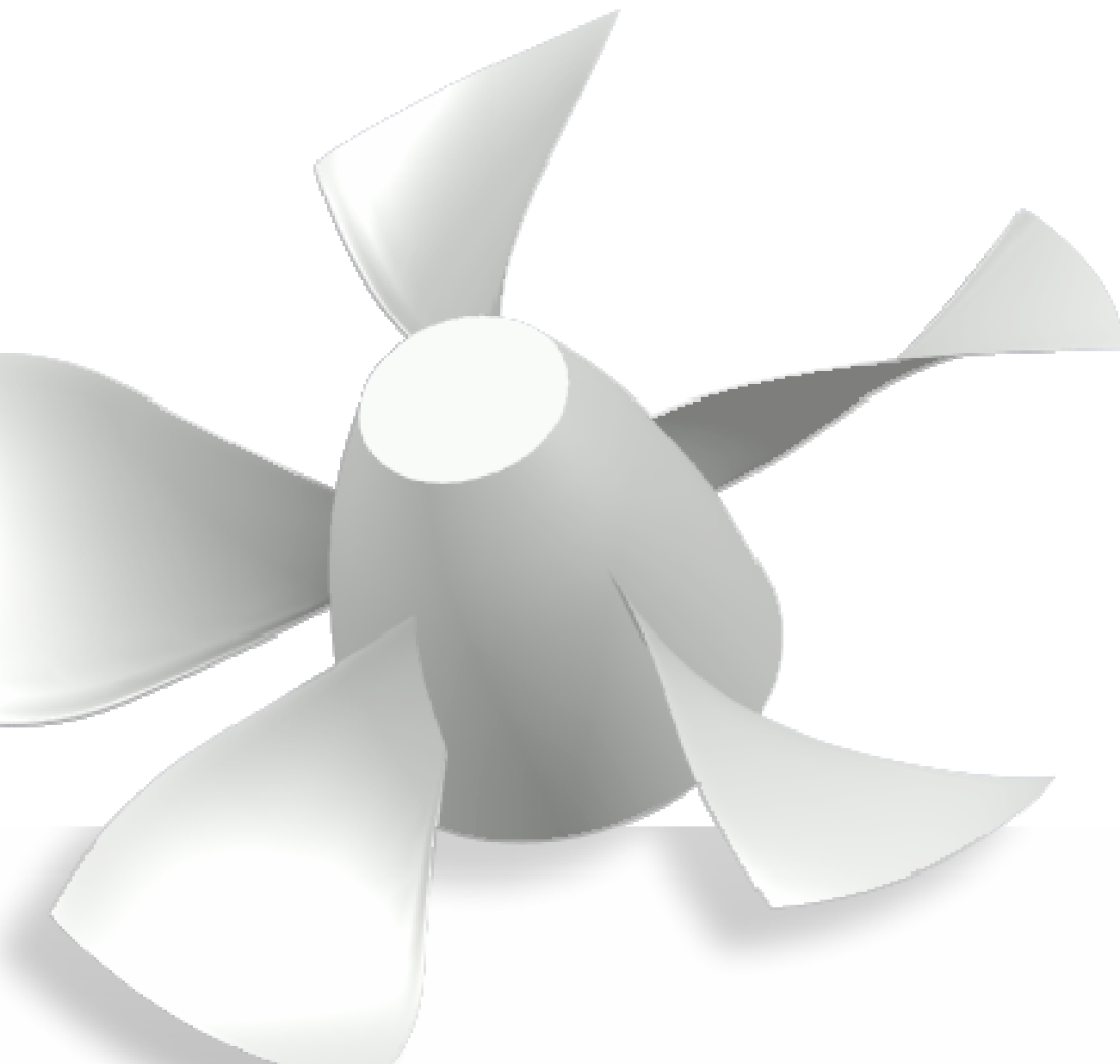
Ευχαριστίες

Με το πέρας της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Νικολό Ιωάννη για την προθυμία, την υπομονή και την αμέριστη συμβολή του κατά την διεκπεραίωση της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου, με τους οποίους έζησα πολλές και ευχάριστες στιγμές σε όλη τη διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής.

Τέλος, θέλω να πω ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου για την ηθική και υλική συμπαράσταση της όλα αυτά τα χρόνια.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφιερώνεται στη οικογένεια μου.



Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
Κεφάλαιο 1 – Επισκόπηση των διαθέσιμων προγραμμάτων σχεδίασης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών	
1.1. Εισαγωγή	2
1.2. BezBlade	2
1.3. BladeCAD	3
1.4. BladeModeler	5
1.5. FINE/Design3D™	7
1.6. Concepts NREC	9
1.7. PropCAD	10
1.8. TurboDesign ¹	11
1.9. Vista	13
1.10. T4T	14
Κεφάλαιο 2 - B-Spline και NURBS καμπύλες και επιφάνειες	
2.1. Εισαγωγή	15
2.2. Παραμετρική και πεπλεγμένη μορφή καμπύλων και επιφανειών	15
2.3. Ιστορική αναδρομή	16
2.4. Καμπύλες και επιφάνειες B-Spline	18
2.4.1. Σημεία ελέγχου (Control Points)	19
2.4.2. Βασικές συναρτήσεις B-Spline	19
2.4.3. Διανύσματα κόμβων	23
2.4.4. Καμπύλες B-Spline	26
2.4.5. Ιδιότητες των καμπυλών B-Spline	27
2.4.6. Επιφάνειες B-Spline	28
2.5. Μη Ομοιόμορφες Ρητές B-Spline καμπύλες και επιφάνειες –NURBS	29
2.5.1. Καμπύλες NURBS	32
2.5.2. Ιδιότητες των καμπυλών NURBS	34
2.5.3. Επιφάνειες NURBS	36
2.5.4. Ιδιότητες των επιφανειών NURBS	37
2.6. Επιφάνειες Περιστροφής (surfaces of revolution)	39
2.7. Τεχνική «Lofting»	41
2.8. Αλγόριθμοι	41
Κεφάλαιο 3 - Το λογισμικό Tools for Turbomachinery (T4T)	
3.1. Εισαγωγή	45
3.2. Διδιάστατη Απεικόνιση	45
3.2.1. Κατασκευή των διατομών ενός πτερυγίου	45
3.2.2. Πλήμνη & Κέλφος	54
3.3. Τρισδιάστατη Απεικόνιση	56
3.3.1. Κατασκευή ενός τρισδιάστατου πτερυγίου	56

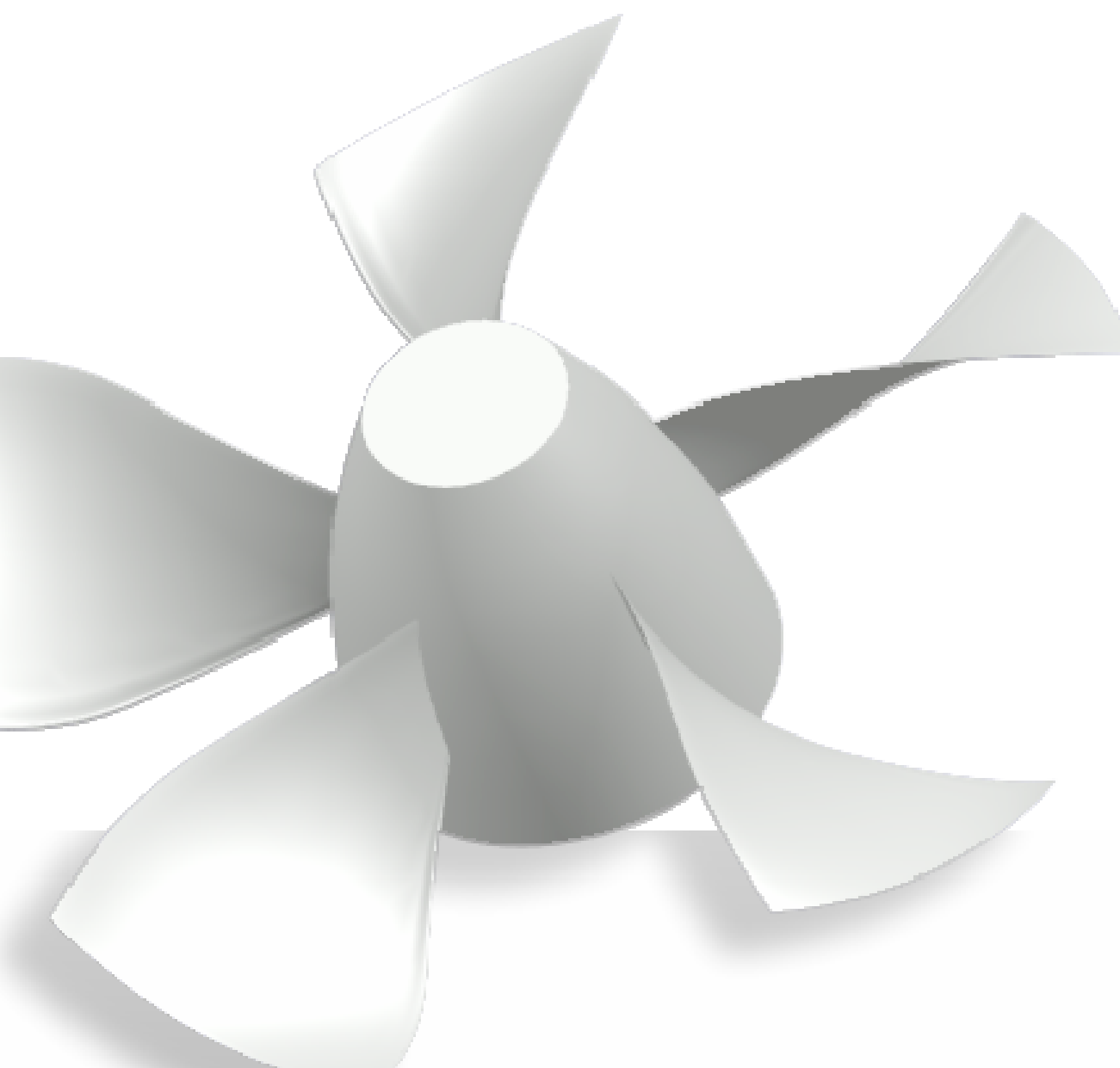
3.3.2. Κατασκευή των επιφανειών της πλήμνης και του κελύφους	60
3.3.3. Τρισδιάστατη Απεικόνιση Πτερωτής	64
3.4. Εγχειρίδιο Χρήσης του <i>T4T</i>	66

Κεφάλαιο 4 - Εφαρμογές

4.1. Εισαγωγή	77
4.2. Ανεμιστήρες	77
4.3. Έλικες	81
4.4. Στρόβιλοι	85

Κεφάλαιο 5 –Μελλοντικές Επεκτάσεις	87
------------------------------------	----

Βιβλιογραφία	88
--------------	----



Πρόλογος

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, με τίτλο «Ανάπτυξη λογισμικού για την παραμετρική σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών», παρουσιάζεται η ανάπτυξη της σχετικής μεθοδολογίας και του αντίστοιχου λογισμικού **T4T (Tools for Turbomachinery)**, για την παραμετρική σχεδίαση τρισδιάστατων πτερυγώσεων στροβιλομηχανών.

Η εργασία αναπτύσσεται σε 5 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορα πακέτα λογισμικού, εμπορικά και ακαδημαϊκά, που ειδικεύονται στη σχεδίαση τμημάτων στροβιλομηχανών. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην παραμετρική σχεδίαση καμπύλων και επιφανειών, κάνοντας χρήση B-Splines και NURBS (Non Uniform Rational B-Splines). Ο συγκεκριμένος τρόπος σχεδίασης χρησιμοποιείται από τα πιο σύγχρονα σχεδιαστικά πακέτα CAD, αποτελώντας ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία για την κατασκευή γεωμετριών αυξημένης πολυπλοκότητας. Οι NURBS καμπύλες και επιφάνειες είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια από το T4T για την μοντελοποίηση και απεικόνιση των σχεδιαζόμενων πτερυγώσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται αρχικά η δομή της λειτουργίας του T4T, που έχει δημιουργηθεί στη γλώσσα προγραμματισμού Visual Basic 6. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ένα αναλυτικό εγχειρίδιο χρήσης, για την πλήρη κατανόηση των σχεδιαστικών δυνατοτήτων του T4T. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται βήμα προς βήμα ο σχεδιασμός ορισμένων τυπικών πτερυγώσεων (ανεμιστήρων, ελίκων και στροβίλων) με τη χρήση του T4T. Μέσα σε 13 απλά βήματα ο χρήστης παράγει την επιθυμητή γεωμετρία, την οποία έπειτα μπορεί να εισάγει σε άλλα πακέτα λογισμικού για δημιουργία πλέγματος, ή επίλυση της ροής.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη παρούσα εργασία, ενώ προτείνονται και μελλοντικές επεκτάσεις της.

1

Επισκόπηση των διαθέσιμων προγραμμάτων σχεδίασης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών

1.1. Εισαγωγή

Τα σημερινά σχεδιαστικά πακέτα παρέχουν χρήσιμα εργαλεία για την παραμετρική περιγραφή περίπλοκων γεωμετριών. Εντούτοις, οι τεχνικές σχεδίασης που χρησιμοποιούν είναι γενικές και η χρησιμοποίησή τους για τη σχεδίαση τμημάτων στροβιλομηχανών θα ήταν χρονοβόρα και θα απαιτούσε πολύ μεγάλη επένδυση σε χρόνο και εμπειρία. Αιτία είναι το γεγονός ότι για το συγκεκριμένο αντικείμενο σχεδίασης απαιτείται η χρήση ειδικών παραμέτρων, των οποίων η εισαγωγή και διαχείριση από τα προγράμματα CAD είναι δυσχερής.

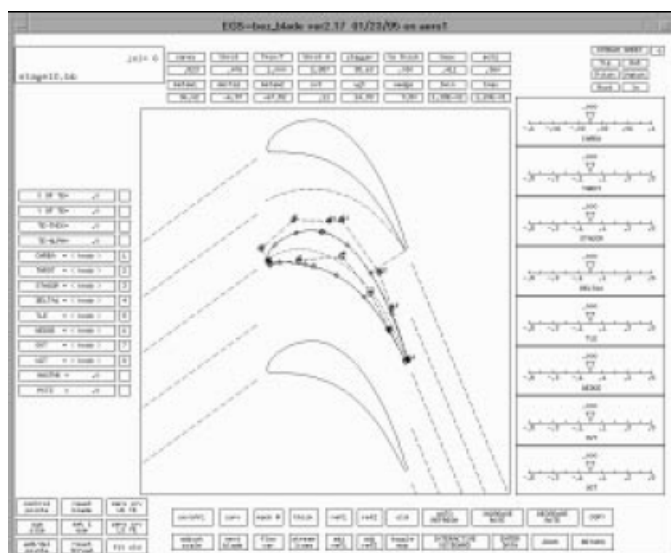
Είναι αναγκαία, επομένως, η ύπαρξη ειδικών σχεδιαστικών εργαλείων, τα οποία ειδικεύονται στην γενική, παραμετρική σχεδίαση στροβιλομηχανών. Τα συγκεκριμένα εργαλεία είναι εύκολα στη χρήση, αφού χρησιμοποιούν φυσικές παραμέτρους σχεδίασης (π.χ. γωνιές εισερχομένης και εξερχομένης ροής). Με αυτό τον τρόπο ο χρήστης υλοποιεί το σχεδιασμό πολύπλοκων γεωμετριών με αποδοτικό τρόπο. Επίσης, τα εργαλεία αυτά έχουν την δυνατότητα σύνδεσης με λογισμικά δημιουργίας πλέγματος και ανάλυσης, καθώς και με λογισμικά βελτιστοποίησης και CAD, για περεταίρω τροποποιήσεις των παραγόμενων γεωμετριών[1].

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, παρουσιάζονται διάφορα λογισμικά πακέτα (εμπορικά και ακαδημαϊκά), που ειδικεύονται στη σχεδίαση τμημάτων στροβιλομηχανών και εκπληρώνουν τις παραπάνω απαιτήσεις.

1.2. BezBlade

Το Bezblade [2] είναι ένα εργαλείο, που αναπτύχθηκε από την εταιρία General Electric για το σχεδιασμό επίπεδων διατομών (cross sections) πτερυγίων. Στην συνέχεια, οι διατομές που σχεδιάζονται, θα χρησιμοποιηθούν για τη κατασκευή της τρισδιάστατης γεωμετρίας της πτερωτής. Ο σχεδιασμός τόσο των επίπεδων διατομών όσο και ολόκληρης της πτερωτής γίνεται με τη χρήση καμπυλών Bezier.

Το πρόγραμμα διαθέτει ένα αρκετά φιλικό, ως προς το χρήστη, γραφικό περιβάλλον (Εικόνα 1.1), μέσω του οποίου πραγματοποιείται ο έλεγχος γνωστών σχεδιαστικών παραμέτρων των πτερυγίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο λογισμικό χρησιμοποιεί ένα γρήγορο επιλύτη της ροής στις δύο διαστάσεις, προκειμένου να υπολογίζονται σε μικρό χρονικό διάστημα οι επιδράσεις στη ροή, των αλλαγών στις παραμέτρους σχεδίασης.



Εικόνα 1.1. Το γραφικό περιβάλλον του BezBlade[2].

1.3. BladeCAD

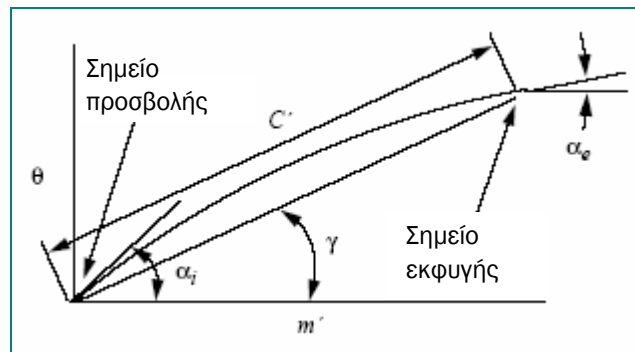
Το BladeCAD [3], είναι ένα γεωμετρικό εργαλείο σχεδίασης πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, που αναπτύχθηκε υπό την εποπτεία της NASA και εισήγαγε μία νέα μεθοδολογία για τον τρόπο σχεδιασμού των πτερυγίων. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη μεθοδολογία, αρχικά ορίζονται οι διατομές των πτερυγίων στο μεσημβρινό επίπεδο (blade sections) και στην συνέχεια με lofting [4]¹ προκύπτει η τρισδιάστατη γεωμετρία τους.

Αναλυτικότερα, για τον ορισμό μιας διατομής πτερυγίου χρησιμοποιούνται δύο καμπύλες που περιγράφουν τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης του. Οι δύο αυτές καμπύλες υπολογίζονται με παρεμβολή σημείων, που η κάθετη απόστασή τους από τη μέση γραμμή κυρτότητας (mean camber line [5])² είναι $\pm \frac{t}{2}$, όπου t είναι το πάχος του πτερυγίου στη συγκεκριμένη θέση.

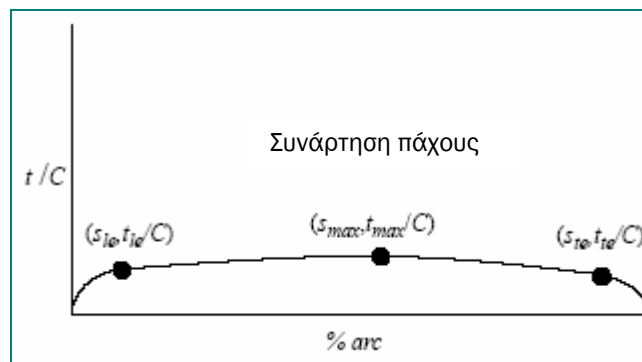
Η μέση γραμμή κυρτότητας είναι μία κυβική καμπύλη Bezier, που ορίζεται από τις παραμέτρους a_i (γωνία εισόδου), a_e (γωνία εξόδου), γ (γωνία κλίσης) και C' (χορδή) [6], όπως φαίνονται στην Εικόνα 1.2, ενώ η συνάρτηση πάχους του πτερυγίου (t) ορίζεται από τις μεταβλητές t_{le}/C , t_{te}/C , t_{max}/C στις αντίστοιχες θέσεις s_{le} , s_{te} , s_{max} του μήκους του τόξου της μέσης γραμμής κυρτότητας. Η συνάρτηση πάχους, στην ουσία, είναι συνδυασμός τριών καμπυλών, μίας κυβικής καμπύλης, που παρεμβάλλει τα τρία σημεία (s_{le} , t_{le}/C), (s_{max} , t_{max}/C) και (s_{te} , t_{te}/C) και δύο ελλείψεων στα άκρα (Εικόνα 1.3). Η συνάρτηση πάχους πρέπει να έχει κάθετες εφαπτόμενες και στα δύο της άκρα, ώστε οι καμπύλες υπερπίεσης και υποπίεσης να ενώνονται με συνέχεια καμπυλότητας C^2 [4]. Με αυτό τον τρόπο, οι δύο καμπύλες μπορούν να περιγραφούν με μία μόνο ομαλή NURBS καμπύλη (Εικόνα 1.4)

¹ **lofting**: η λειτουργία προσαρμογής επιφάνειας από καμπύλες στο χώρο

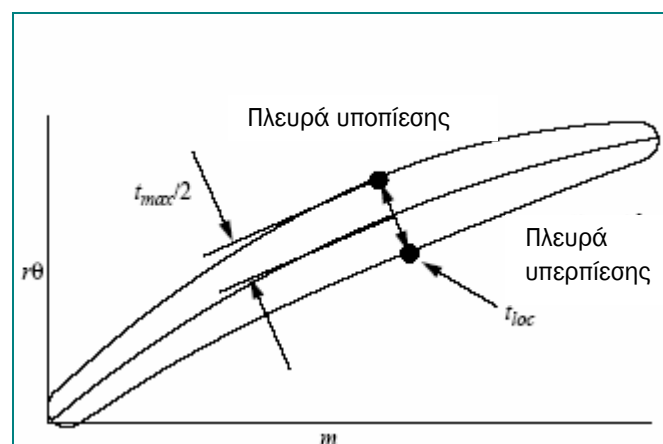
² **mean camber line**: η γραμμή που ισαπέχει από τις επιφάνειες πίεσης και αναρρόφησης του πτερυγίου



Εικόνα 1.2. Ορισμός της μέσης γραμμής σύμφωνα με το BladeCAD[3].



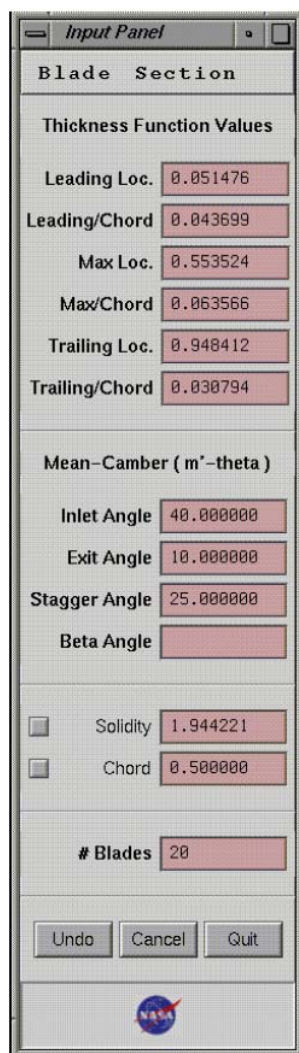
Εικόνα 1.3. Υπολογισμός της συνάρτησης πάχους (t) του πτερυγίου σύμφωνα με το BladeCAD[3].



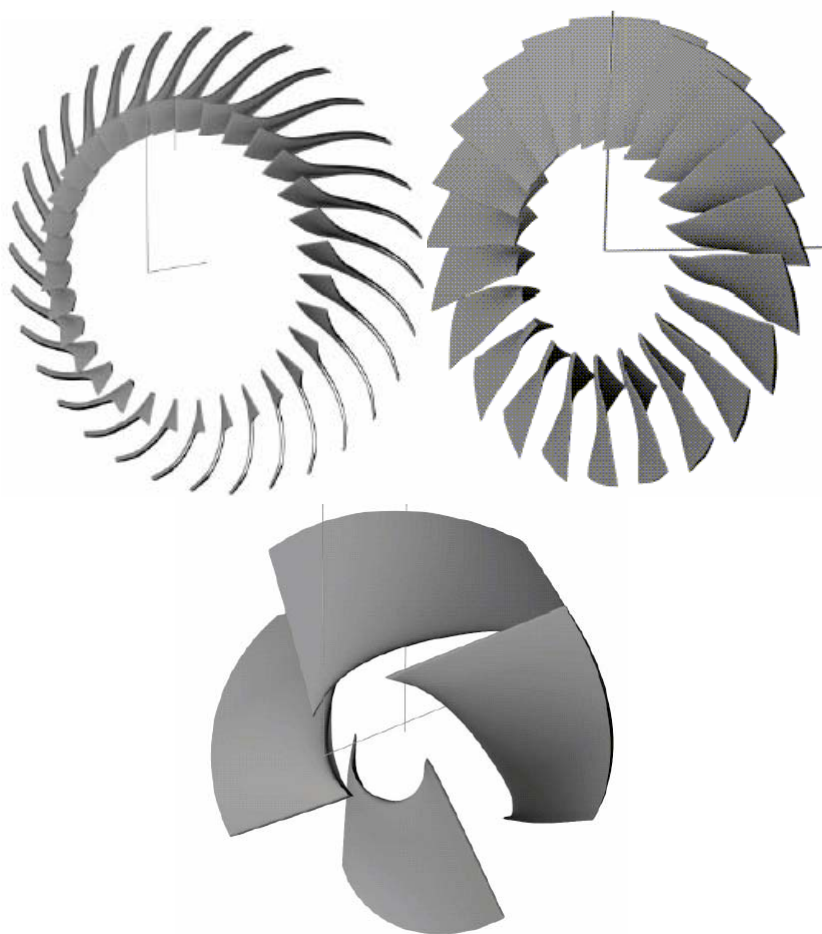
Εικόνα 1.4. Υπολογισμός της διατομής του πτερυγίου σύμφωνα με το BladeCAD[3].

Αφού προσδιοριστούν οι διατομές του πτερυγίου, πραγματοποιείται «lofting» και εξάγεται η τρισδιάστατη γεωμετρία του πτερυγίου.

Στην Εικόνα 1.5, παρουσιάζεται το Input Panel του BladeCAD από το οποίο ο χρήστης εισάγει τα απαιτούμενα δεδομένα των blade sections, ενώ στην Εικόνα 1.6 παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές του BladeCAD.



Εικόνα 1.5. Input Panel[3]



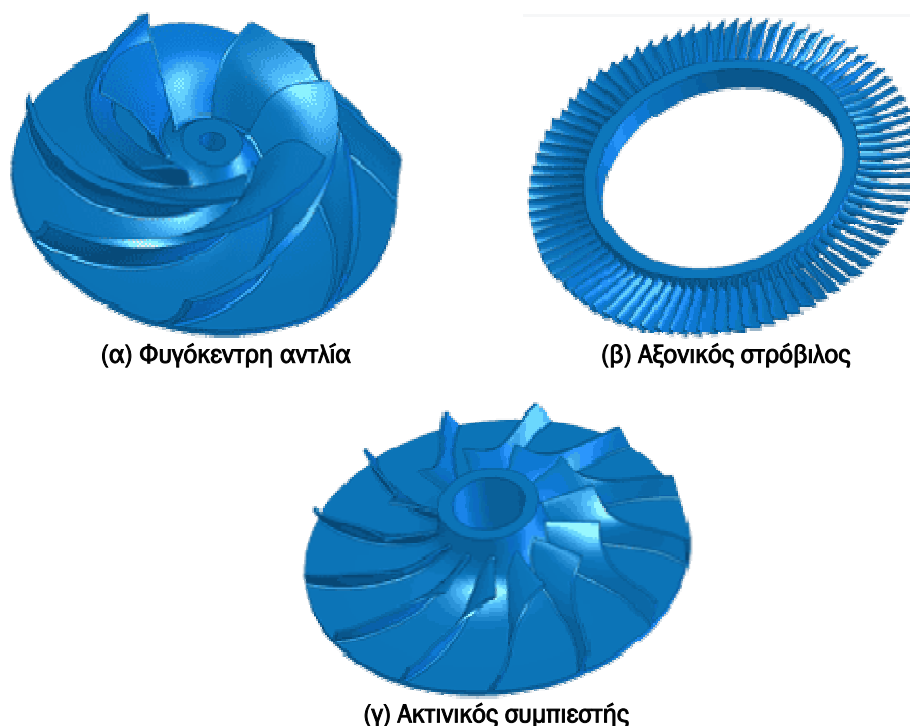
Εικόνα 1.6. Παραγόμενες γεωμετρίες του BladeCAD[3]

Τέλος, ο χρήστης του λογισμικού έχει την δυνατότητα εξαγωγής αρχείων IGES[4]³ για την περαιτέρω ανάλυση των πτερυγώσεων.

1.4. BladeModeler

Η εταιρεία ANSYS δημιούργησε το **BladeModeler** [7], ένα λογισμικό πακέτο που ειδικεύεται στην τρισδιάστατη σχεδίαση τμημάτων στροβιλομηχανών. Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει την δυνατότητα σχεδίασης πτερυγώσεων αξονικής, ακτινικής και μεικτής ροής για αντλίες (pumps), συμπιεστές (compressors), ανεμιστήρες (fans), φυσητήρες (blowers), στροβιλοϋπερπληρωτές (turbochargers) κ.α. (Εικόνα 1.7).

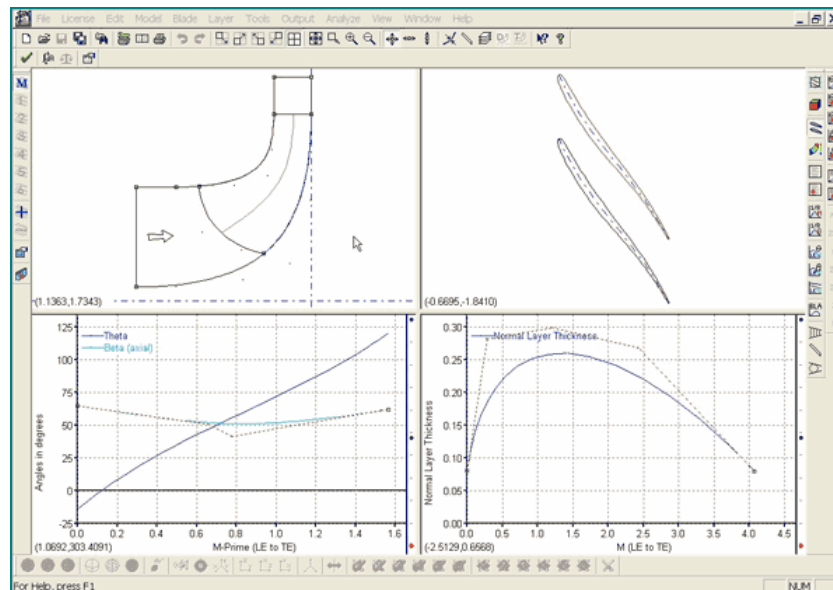
³ **IGES**: Initial **G**raphics **E**xchange **P**rogram – αρχεία μεταφοράς δεδομένων προς άλλα συστήματα, περιφερειακά, ή μηχανές. Γενικά, όλα τα αρχεία μεταφοράς δεδομένων IGES, STEP, DXF, VDA-FS δημιουργήθηκαν στη διεθνή προσπάθεια υποστήριξης ανταλλαγής δεδομένων μεταξύ συστημάτων CAD. Βασικά, αποτελούν μία προσπάθεια μετάφρασης των βάσεων δεδομένων σε μία κοινή ουδέτερη βάση δεδομένων.



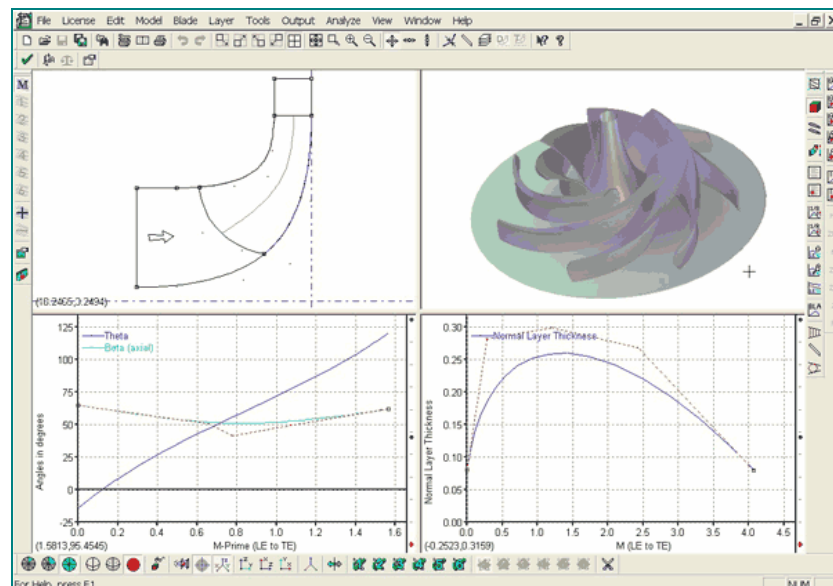
Εικόνα 1.7. Παραγόμενες γεωμετρίες του BladeModeler. (α) φυγόκεντρη αντλία (β) αξονικός στρόβιλος (γ) ακτινικός συμπιεστής[7].

Το BladeModeler είναι ένα αλληλεπιδραστικό εργαλείο. Ο χρήστης παρακολουθεί άμεσα και ξεκάθαρα τις σχεδιαστικές τροποποιήσεις που κάνει μέσω των διαφόρων όψεων (2-D και 3-D) των παραγόμενων γεωμετριών που παρέχονται από το λογισμικό (Εικόνες 1.8-1.9). Παράλληλα δίνεται στο χρήστη η δυνατότητα χρήσης πολλών παραμέτρων σχεδίασης, όπως γωνιές πτερυγίων, μεσημβρινή κατατομή, κατανομές πάχους κ.α. Σύμφωνα με τη διαδικασία σχεδίασης που θα ακολουθηθεί (και τις αντίστοιχες παραμέτρους) καθορίζεται το επίπεδο λεπτομέρειας της παραγόμενης γεωμετρίας.

Τέλος, το BladeModeler συνδέεται με διάφορους κώδικες προσομοίωσης, όπως υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) και ανάλυσης αντοχής, ενώ η τελική παραγόμενη γεωμετρία μπορεί να εξαχθεί σε διάφορους τύπους αρχείων (όπως AutoCAD, IGES, ProE, Parasolid).



Εικόνα 1.8. Το γραφικό περιβάλλον του BladeModeler [7].

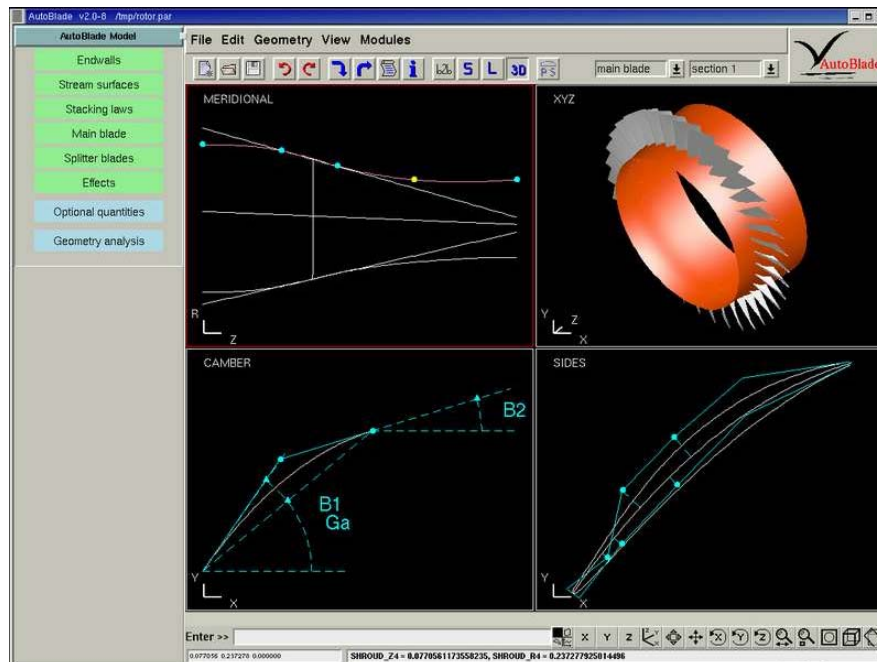


Εικόνα 1.9. Το γραφικό περιβάλλον του BladeModeler [7].

1.5. FINE/Design3D™

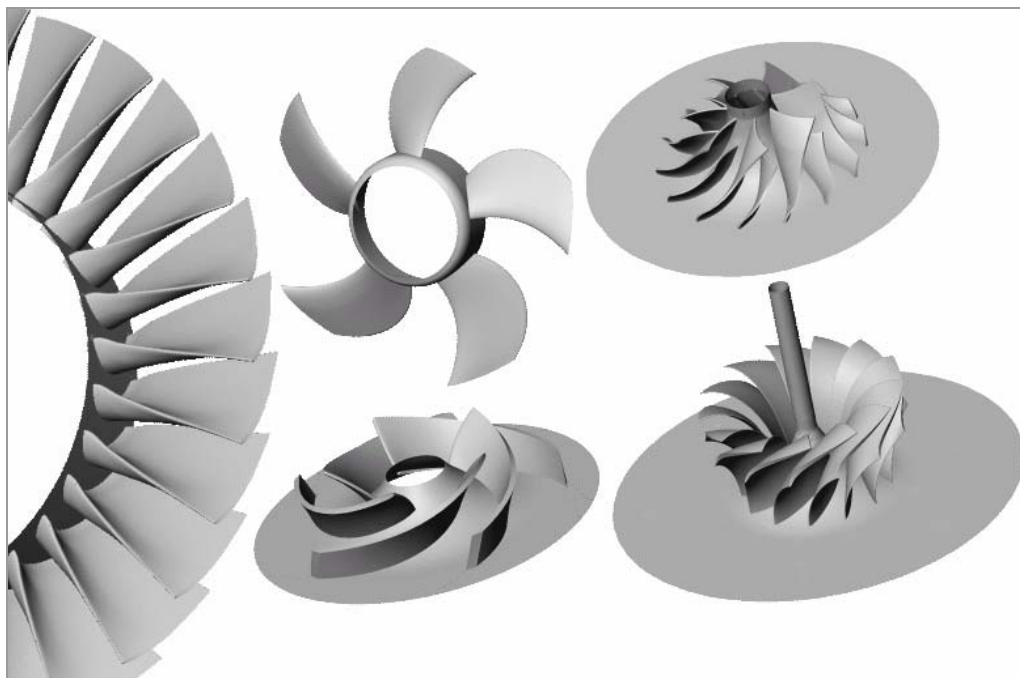
Υπάρχουν ορισμένα λογισμικά πακέτα που σχετίζονται με τη βελτιστοποίηση της απόδοσης στροβιλομηχανών και διαθέτουν κάποιο υποσύστημα σχεδίασης. Ένα από τα πιο αξιόλογα του είδους, είναι το FINE/Design3D™ [8] της NUMECA International, ένα λογισμικό πακέτο βελτιστοποίησης της απόδοσης περιστρεφόμενων πτερυγώσεων στροβιλομηχανών, που καλύπτει ένα πλήθος εφαρμογών (π.χ. βελτιστοποίηση της απόδοσης μιας πολυβάθμιας αξονικής, ακτινικής ή μικτής ροής μηχανής). Το FINE/Design3D™ έχει ενσωματωμένο ένα ευπροσάρμοστο παραμετρικό εργαλείο σχεδίασης, το Autoblade [9] (Εικόνα 1.9), το οποίο χρησιμοποιείται για την ακριβή σχεδίαση όλων των τύπων πτερυγώσεων. Ο καθορισμός της γεωμετρίας τους στο AutoBlade είναι γενικός και μπορεί να γίνει με

δύο τρόπους. Είτε με το προσδιορισμό των πλευρών υποπίεσης και υπερπίεσης, είτε με τον προσδιορισμό της μέσης γραμμής και της κατανομής πάχους του πτερυγίου.



Εικόνα 1.9. Το γραφικό περιβάλλον του AutoBlade[9].

Ένα ενδιαφέρον στοιχείο του FINE/Design3D™ είναι ότι διαθέτει βάση δεδομένων (Design3D [8]), η οποία συνδέεται με ένα νευρωνικό δίκτυο για γρήγορη βελτιστοποίηση της σχεδίασης, χωρίς να απαιτούνται αναλύσεις της ροής με χρήση λογισμικού CFD (Computational Fluid Dynamics). Εντούτοις, παρέχεται και συνδεσιμότητα με κώδικες CFD, μέσω των τυποποιημένων αρχείων ανταλλαγής (IGES).



Εικόνα 1.10. Παραγόμενες γεωμετρίες του FINE/Design3D™[9].

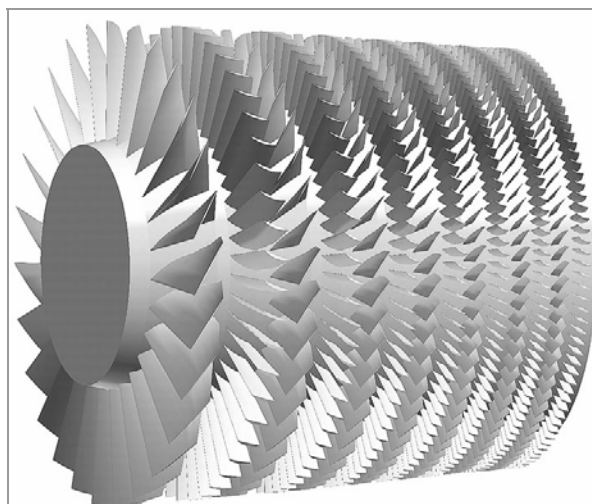
1.6. Concepts NREC

Η εταιρεία **Concepts NREC** έχει ασχοληθεί και με το σχεδιασμό τμημάτων στροβιλομηχανών, αναπτύσσοντας διάφορα λογισμικά πακέτα, όπως το **AXCAD**, και το **CCAD/ COMIG**.

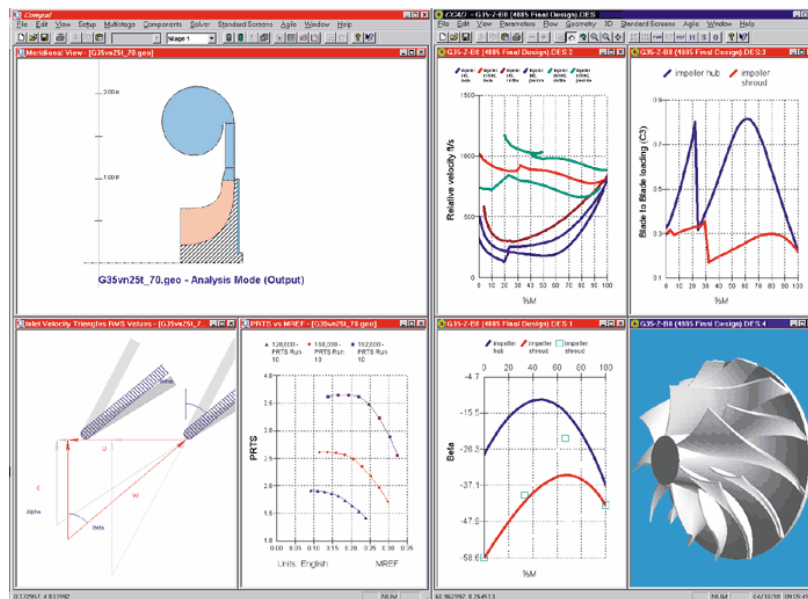
Το **AXCAD** [10] είναι ένα εργαλείο σχεδίασης πτερωτών για μονού ή πολλαπλών σταδίων αξονικούς συμπιεστές (compressors), στροβίλους (turbines) και αντλίες (pumps). Η γεωμετρία των πτερωτών παράγονται με προσαρμογή NURBS επιφανειών (lofting) στις διατομές (cross sections) των πτερυγίων, που παράγονται με καμπύλες Bezier.

Το λογισμικό **CCAD/ COMIG** [11] σχετίζεται με τη σχεδίαση και ανάλυση πτερωτών για φυγόκεντρους και μεικτής ροής συμπιεστές και αντλίες και για ακτινικούς και μεικτής ροής στροβίλους. Όλες οι παραγόμενες γεωμετρίες του λογισμικού ορίζονται με πολυώνυμα Bezier-Bernstein και NURBS επιφάνειες.

Όλα τα λογισμικά της Concepts NREC συνδέονται με προγράμματα CFD και FEA (Fine Element Analysis), για περαιτέρω ανάλυση, μέσω των αρχείων IGES που εξάγουν.



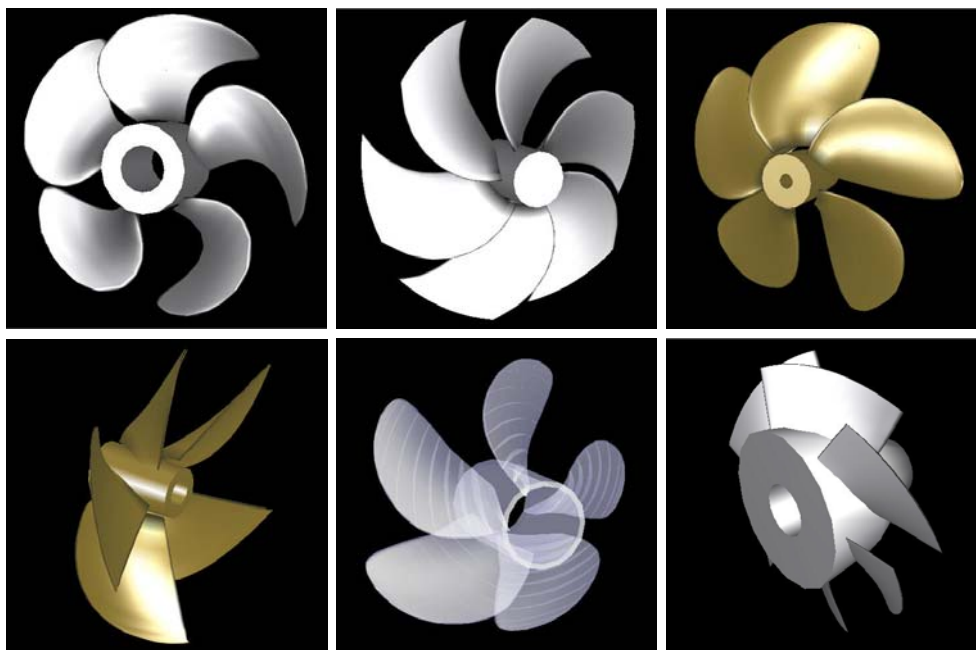
Εικόνα 1.11. Παραγόμενη γεωμετρία του **AXCAD**[10].



Εικόνα 1.12. Το γραφικό περιβάλλον του CCAD/ COMIG[11].

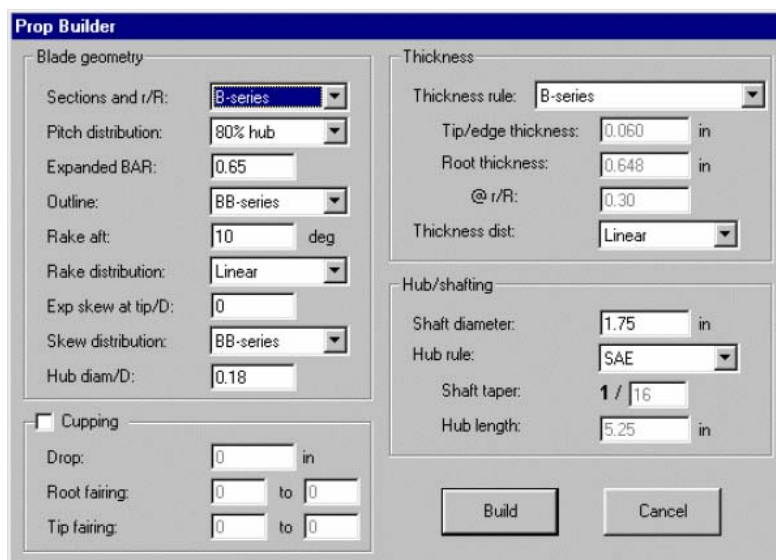
1.7. PropCAD

Στη αναζήτηση λογισμικών πακέτων, που σχετίζονται με το σχεδιασμό πτερυγώσεων, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, μόνο το PropCAD [12], της HydroComp.Inc, ασχολείται με το σχεδιασμό-κατασκευή ναυτικών ελίκων (Εικόνα 1.13). Ωστόσο, με το PropCAD μπορούν να παραχθούν και άλλα περιστρεφόμενα τμήματα μηχανών, όπως πτερυγώσεις στροβίλων και έλικες αεροσκαφών.



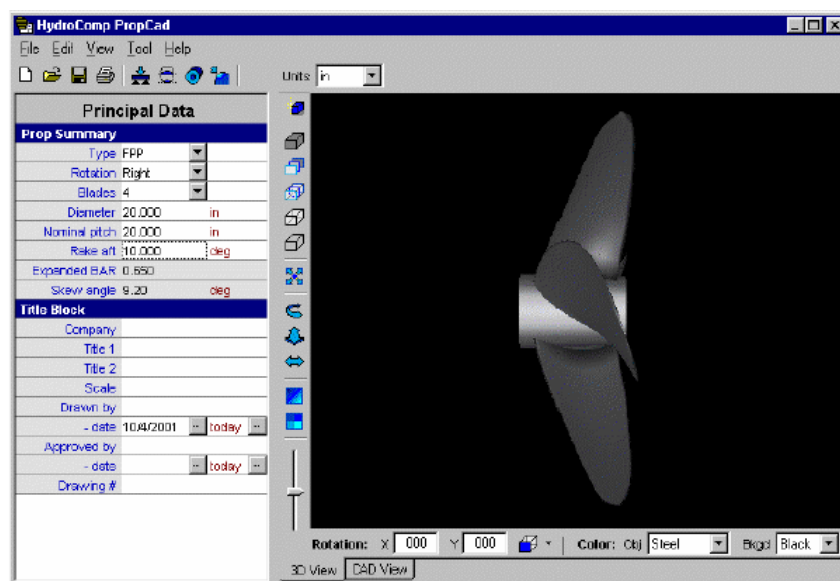
Εικόνα 1.13. Γεωμετρικές ελίκων που σχεδιάστηκαν με τη χρήση του PropCAD[12].

Η κατασκευή των 3D γεωμετριών επιτυγχάνεται με τη χρήση της ενσωματωμένης συλλογής βιομηχανικών μοντέλων ελίκων (π.χ. Gawn, B-series, Kaplan, AU, SK), τα οποία χρησιμοποιούνται ως πρότυπα σχεδίασης.



Εικόνα 1.14. Η φόρμα Prop Builder[12].

Στην Εικόνα 1.14, φαίνεται η φόρμα Prop Builder στην οποία ο χρήστης καθορίζει το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί, ενώ στην Εικόνα 1.15 παρουσιάζεται η κύρια φόρμα του λογισμικού.



Εικόνα 1.15. Η κύρια φόρμα του PropCAD[12].

Οι παραγόμενες γεωμετρίες του PropCAD μπορούν να μεταφερθούν σε άλλους υπολογιστικούς κώδικες για περαιτέρω ανάλυση.

1.8. TURBODesign¹

Το μοναδικό, μέχρι αυτή τη στιγμή, σχεδιαστικό λογισμικό για πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, που βασίζεται στην μέθοδο της τρισδιάστατης αντίστροφης σχεδίασης⁴ είναι το **TURBODesign¹** [13], της Advanced Design Technology.

⁴**Αντίστροφη Σχεδίαση:** Τρισδιάστατη αντιγραφή και ψηφιακή μοντελοποίηση πάσης φύσεως αντικειμένων και συσκευών με τη χρήση συστημάτων τρισδιάστατης σάρωσης (3D SCANNERS),

Το TURBODesign¹ είναι κατάλληλο για όλους τους τύπους στροβιλομηχανών, όπως ακτινικής, μεικτής και αξονικής ροής, σταθερές ή κινητές, με συμπιεστή ή ασυμπίεστη ροή (Εικόνα 1.16).



Συμπιεστής μεικτής ροής



Ακτινικός διαχύτης με πτερύγια



Αξονικός Στρόβιλος



Αξονικός Στρόβιλος



Κινητή πτερύγωση



Στρόβιλος ακτινικής ροής

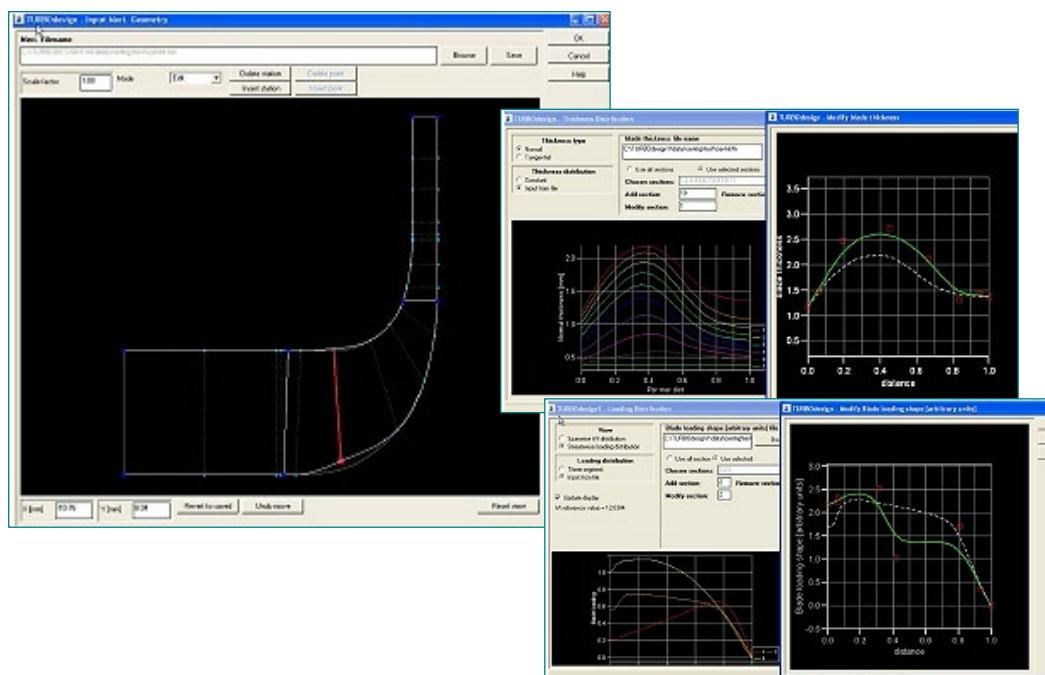
Εικόνα 1.16. Παραγόμενες γεωμετρίες του TURBODesign¹[13].

Οι πτερυγώσεις παράγονται παρέχοντας στο λογισμικό ένα σύνολο δεδομένων, όπως ταχύτητα περιστροφής, κατανομή εισερχόμενη ροής, μεσημβρινή κατατομή, αριθμό πτερυγίων και πάχος πτερυγίων. Το λογισμικό διαθέτει ένα λιτό γραφικό περιβάλλον, μέσω του οποίου παρέχονται από το χρήστη τα παραπάνω δεδομένα (Εικόνα 1.17).

Οι επιθυμητές γεωμετρίες παράγονται με τη χρήση καμπυλών και επιφανειών B-Spline. Το TURBODesign¹ επίσης συνδέεται με διάφορους κώδικες προσομοίωσης, όπως υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και ανάλυσης αντοχής.

Τέλος, η ADT έχει αναπτύξει και το λογισμικό TURBODesign², επίσης σχεδιαστικό λογισμικό για πτερυγώσεις στροβιλομηχανών το οποίο όμως ειδικεύεται στη σχεδίαση πολυβάθμιων συμπιεστών με υψηλούς λόγους συμπίεσης.

φορητών συστημάτων μετρήσεως συντεταγμένων (PORTABLE CMM'S) και εξειδικευμένων λογισμικών CAD/CAE.



Εικόνα 1.17. Επιμέρους φόρμες του γραφικού περιβάλλοντος του TURBODesign¹ [13].

1.9. VISTA

Η εταιρεία PCA Engineers Limited έχει αναπτύξει το λογισμικό πακέτο **VISTA** (Visual Turbomachinery Analysis), το οποίο σχετίζεται με την σχεδίαση και ανάλυση στροβιλομηχανών. Το **VISTA-AT Blade** και το **VISTA-AC Blade** είναι εργαλεία του λογισμικού, τα οποία σχεδιάζουν πτερυγώσεις για αξονικούς και για ακτινικούς στροβίλους, αντίστοιχα.



Εικόνα 1.18. Φυγόκεντρη πτερωτή με τη χρήση του Vista-AC Blade[15]

Το **Vista-AT Blade** [14], είναι ένα εύχρηστο και ιδιαίτερα αλληλεπιδραστικό εργαλείο σχεδιασμού διατομών πτερυγώσεων για στροβίλους. Ο σχεδιαστής μπορεί να δημιουργήσει μέχρι και 9 διαφορετικές διατομές, που περιγράφονται από καμπύλες Bezier, τις οποίες μπορεί να τροποποιήσει εύκολα, μετακινώντας τα σημεία ελέγχου των καμπυλών στην οθόνη. Αφού ολοκληρωθεί ο σχεδιασμός των διατομών, πραγματοποιείται «lofting» από τις καμπύλες.

Αντίστοιχα, το **Vista-AC Blade** [15], επικεντρώνεται στο σχεδιασμό διατομών πτερυγώσεων για συμπιεστές. Διαθέτει ενσωματωμένες σχεδόν όλες τις

χρησιμοποιούμενες τυποποιημένες διατομές (όπως DCA, MCA, NACA 65, C4 - C7, SFN και DPA), οι οποίες μπορούν να επιλεγθούν είτε για χρήση, είτε για τροποποίηση.

1.10. T4T

Στη παρούσα εργασία, όπως αναφέρθηκε και στο πρόλογο, σκοπός είναι η παρουσίαση του λογισμικού **T4T** (Tools for Turbomachinery), το οποίο ειδικεύεται στη σχεδίαση πτερυγώσεων για στροβιλομηχανές. Παρόλο που δεν διαθέτει όλες τις δυνατότητες των εμπορικών και ακαδημαϊκών πακέτων, καλύπτει αρκετές από τις βασικές απαιτήσεις.

Το λογισμικό, χρησιμοποιώντας τέσσερις φυσικές παραμέτρους και την κατανομή πάχους των πτερυγίων, προσδιορίζει τις διατομές τους στο μεσημβρινό επίπεδο. Στη συνέχεια, με προσαρμογή επιφάνειας σε αυτές, παράγεται η τρισδιάστατη γεωμετρία τους. Επίσης, σχεδιάζονται η πλήμνη και το κέλυφος της πτερωτής.

Όλες οι παραγόμενες γεωμετρίες σχεδιάζονται αποκλειστικά με καμπύλες και επιφάνειες NURBS και μπορούν μέσω αρχείων IGES να μεταφερθούν και σε άλλα πακέτα λογισμικού (βελτιστοποίησης, ανάλυσης, κ.λπ.) για περαιτέρω επεξεργασία. Το T4T θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα στο 3^ο και 4^ο κεφάλαιο της εργασίας.

2

B-Spline και NURBS καμπύλες και επιφάνειες**2.1. Εισαγωγή**

Τα σύγχρονα σχεδιαστικά πακέτα, όπως αναφέρθηκε και στο 1^ο Κεφάλαιο, για την παραμετρική αναπαράσταση των διαφορών γεωμετριών χρησιμοποιούν καμπύλες και επιφάνειες, είτε B-Spline είτε NURBS. Το T4T συγκεκριμένα για την απεικόνιση των πτερυγώσεων χρησιμοποιεί καμπύλες και επιφάνειες NURBS.

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται αναλυτικά οι καμπύλες και οι επιφάνειες NURBS, καθώς και οι αντίστοιχες B-Splines για να την καλύτερη κατανόηση των πρώτων. Επίσης αναφέρεται ο τρόπος δημιουργίας επιφανειών από περιστροφή καμπύλης[22] και με «lofting» [22], δύο διαδικασίες που χρησιμοποιούνται από το T4T για το σχεδιασμό πλήμνης/κελύφους και πτερυγώσεων αντίστοιχα.

Τέλος, αναφέρονται ορισμένοι αλγόριθμοι για το σχεδιασμό καμπυλών NURBS, που χρησιμοποιούνται στο λογισμικό T4T.

2.2. Παραμετρική και πεπλεγμένη μορφή καμπύλων και επιφανειών

Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι για την παράσταση καμπύλων ή επιφανειών είναι με χρήση πεπλεγμένων σχέσεων και με χρήση παραμετρικών σχέσεων. Μία καμπύλη στο XY επίπεδο μπορεί να παρασταθεί με μία πεπλεγμένη σχέση της μορφής

$$f(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει μια πεπλεγμένη σχέση μεταξύ των σημείων x και y της καμπύλης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κύκλος, που σχεδιάζεται με κέντρο την αρχή των αξόνων και μοναδιαία ακτίνα. Ο κύκλος αυτός δίνεται από την εξίσωση:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

Αντίστοιχα, στην παραμετρική μορφή της, η αναπαράσταση της καμπύλης μπορεί να έχει μορφή που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$C(u) = [x(u), y(u)] \quad (2.3)$$

με την ανεξάρτητη παράμετρο u να παίρνει τιμές σε συγκεκριμένο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ως παράδειγμα, ένας κύκλος μοναδιαίας ακτίνας σε παραμετρική μορφή γράφεται ως

$$\begin{aligned} x(u) &= \cos(u) \\ y(u) &= \sin(u) \end{aligned} \quad (2.4)$$

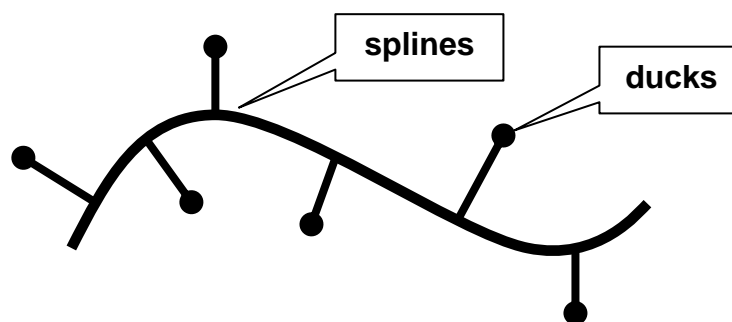
με την παράμετρο u να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Παρατηρώντας τις δύο εναλλακτικές μεθόδους περιγραφής του κύκλου, διαπιστώνουμε ότι η παραμετρική μορφή δεν μας δίνει άμεσα τη γεωμετρική πληροφορία για τη μορφή της καμπύλης. Αυτό είναι ένα γενικότερο χαρακτηριστικό των παραμετρικών καμπύλων. Συγκεκριμένα, είναι δύσκολο να είναι γνωστή η βασική γεωμετρία, που αντιπροσωπεύουν οι παραμετρικές σχέσεις, χωρίς να υπάρχει κάποια περαιτέρω ανάλυση. Οι συντελεστές των εξισώσεων δεν έχουν καμία γεωμετρική έννοια και είναι σχεδόν αδύνατο να προβλεφθεί η αλλαγή της μορφής εάν ένας ή περισσότεροι συντελεστές τροποποιούνται. Κατά συνέπεια, ο σχεδιασμός μιας καμπύλης, που ακολουθεί κάποιο συγκεκριμένο περίγραμμα, είναι πολύ δύσκολος. Αυτό συμβαίνει πολύ πιο έντονα στην περίπτωση των παραμετρικών καμπύλων B-Spline. Όμως η παραμετρική μορφή των καμπύλων και των επιφανειών είναι πολύ καλύτερα προσαρμοσμένη στη διαδικασία της σχεδίασης με χρήση H/Y.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουν μερικές τεχνικές για το σχεδιασμό καμπύλων. Θα αναλύσουμε τις καμπύλες καθώς και τις αντίστοιχες επιφάνειες B-Spline και NURBS, οι οποίες έχουν επικρατήσει διεθνώς στη διαδικασία σχεδίασης με χρήση H/Y [16].

2.3. Ιστορική αναδρομή

Πριν την εξέλιξη των H/Y, οι αρχιτέκτονες και οι μηχανικοί παρήγαγαν τα σχέδιά τους για οικοδομικά κτίρια, δρόμους και μηχανικά μέρη χρησιμοποιώντας χαρτί, μολύβι και διάφορα άλλα απλά εργαλεία. Αυτά τα εργαλεία συμπεριελάμβαναν χάρακες και ορθογώνια για σχεδίαση ευθειών, διαβήτες για σχεδίαση κύκλων και τόξων και τρίγωνα και μοιρογνωμόνια για σχεδίαση γωνιών. Φυσικά αρκετά ενδιαφέροντα και πιο σύνθετα σχήματα αντικειμένων δεν μπορούσαν να σχεδιαστούν μόνο με αυτά τα απλά εργαλεία, επειδή τα καμπύλα τμήματά τους δεν αποτελούνταν από κύκλους ή ελλείψεις. Συχνά, μία καμπύλη έπρεπε να περάσει ομαλά από ένα αριθμό προκαθορισμένων σημείων. Αυτό το πρόβλημα πρακτικά ήταν περισσότερο έντονο στην ναυπηγική. Παρόλο που ένας ικανός καλλιτέχνης μπορεί αξιόπιστα να σχεδιάσει με το χέρι καμπύλες σε ένα τραπέζι σχεδίασης, στην ναυπηγική συχνά απαιτούνταν να κατασκευαστούν τεράστια σχέδια. Εξαιτίας του τεράστιου μεγέθους, τέτοια σχέδια συχνά κατασκευάζονταν σε τεράστιους χώρους μεγάλων κτιρίων από ειδικούς γνωστούς ως «loftsmen». Αυτοί, για να βοηθηθούν, τοποθετούσαν μακριά, λεπτά, εύκαμπτα δοκάρια από ξύλο, πλαστικό, ή μέταλλο που ονομάζονταν «splines». Τα «splines» συγκρατούνταν στη θέση τους με βαρίδια, τα ονομαζόμενα «ducks», λόγω της ομοιότητάς τους με τα γνωστά πτηνά (Εικόνα 2.1).

Η καμπύλη που προέκυπτε ήταν ομαλή, ενώ η καμπύλωση προέκυπτε από τη θέση των «ducks». Με την εξέλιξη των H/Y και την εισαγωγή της σχεδίασης με χρήση H/Y, ανακαλύφθηκαν οι φυσικές ιδιότητες των «splines» και έτσι μπόρεσαν να μοντελοποιηθούν μαθηματικά.



Εικόνα 2.1. Παραδοσιακή μέθοδος σχεδίασης καμπύλων [16].

Στη συνέχεια, η πρώτη προσέγγιση για την σχεδίαση καμπύλων και επιφανειών με μη αναλυτική περιγραφή έγινε από τον Fergusson το 1960 στη Boeing. Ο Fergusson εισήγαγε την παραμετρική διανυσματική αναπαράσταση των καμπύλων και δημιούργησε το σύστημα FMILL για την περιγραφή επιφανειών ελεύθερης μορφής. Τα τμήματα Fergusson είναι κυβικά πολυωνυμικά τμήματα, που προσδιορίζονται από τα διανύσματα θέσης και τα εφαπτόμενα διανύσματα στα άκρα του τμήματος, χρησιμοποιώντας παρεμβολή Hermite.

Το 1964 και μετέπειτα το 1967, ο Coons στο M.I.T. εισήγαγε μια μέθοδο περιγραφής επιφανειακών μπαλωμάτων, προσδιορίζοντας πρώτα τα διανύσματα θέσης στα τέσσερα ακραία σημεία του μπαλώματος και στην συνέχεια τις τέσσερις οριακές καμπύλες του μπαλώματος.

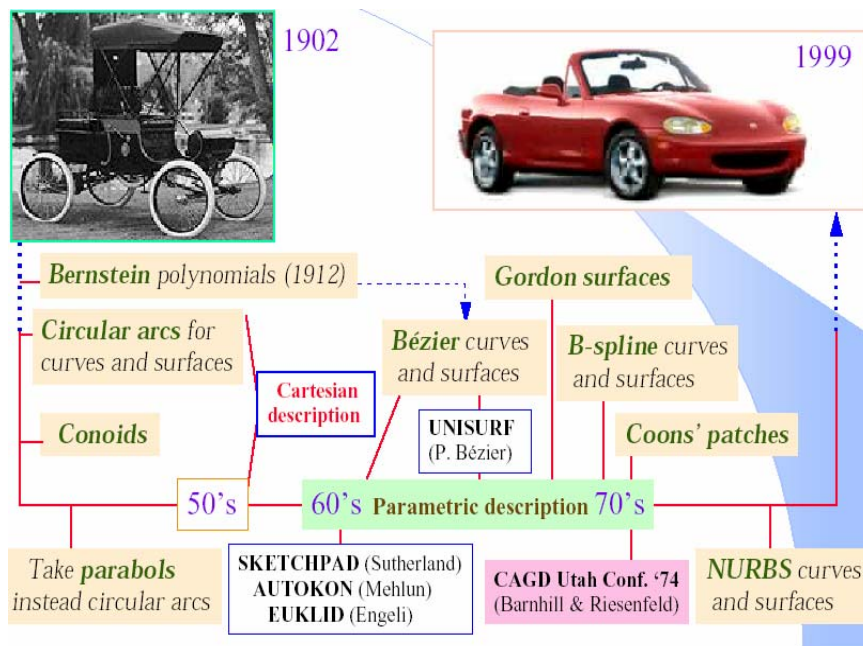
Οι δύο παραπάνω μέθοδοι όμως είχαν τα εξής μειονεκτήματα:

- ◆ Ήταν δύσκολος ο άμεσος έλεγχος της μορφής της καμπύλης.
- ◆ Κατά την ένωση διαδοχικών τμημάτων, η συνέχεια της παραγομένης καμπύλης δεν εξαρτάται από τα διαδοχικά τμήματα αλλά από όλη την καμπύλη.

Αργότερα, ο Bezier στη Renault εισήγαγε μια μέθοδο περιγραφής καμπύλης από το χαρακτηριστικό πολύγωνο ή πολύγωνο ελέγχου, χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Bernstein ως συναρτήσεις μείξης και με αυτή τη βάση δημιουργήθηκε το σύστημα UNISURF. Η μέθοδος αυτή παρέχει ευκολία ελέγχου της μορφής της καμπύλης αλλά παρουσιάζει προβλήματα σύνδεσης των διαφόρων τμημάτων μεταξύ τους, δημιουργεί πολυωνυμικές καμπύλες μεγάλου βαθμού και το τελικό μοντέλο αποτελείται από πολλά επιμέρους τμήματα και επιφανειακά μπαλώματα. Για μεγάλο χρονικό διάστημα ήταν η βασική μορφή αναπαράστασης καμπύλων και επιφανειών ελεύθερης μορφής σε πολλά συστήματα σχεδιομελέτης με χρήση υπολογιστή (CAD).

Οι Gordon [17] και Riesenfeld [18] χρησιμοποίησαν βασικές συναρτήσεις (basis functions) ως συναρτήσεις μείξης της καμπύλης και δημιούργησαν τις B-Splines. Για τον ορισμό τους χρησιμοποιείται το χαρακτηριστικό πολύγωνο, οι καμπύλες έχουν ανάλογες ιδιότητες με τις καμπύλες Bezier αλλά έχουν επιπλέον και την δυνατότητα τοπικού ελέγχου της καμπύλης. Ουσιαστικά αποτελούν γενίκευση των καμπύλων Bezier.

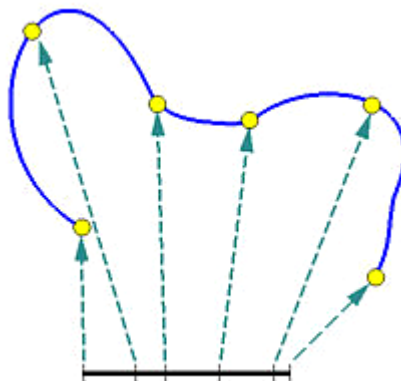
Όμως, όλες οι παραπάνω μέθοδοι δεν μπορούν να περιγράψουν με ακρίβεια κύκλους, ελλείψεις και κωνικές τομές. Η εξέλιξη των καμπύλων B-Splines στη μορφή των Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) ξεπέρασε και αυτό το πρόβλημα, δίνοντας πολύ μεγαλύτερη ελευθερία στη σχεδίαση πολύπλοκων ή τυποποιημένων καμπύλων με ενιαίο τρόπο. Οι παραπάνω μέθοδοι περιγράφονται σχηματικά στην Εικόνα 2.2, όπου παρουσιάζεται μια σχηματική αναπαράσταση της εξέλιξης των καμπύλων και των επιφανειών από το 1902 μέχρι σήμερα [16].



Εικόνα 2.2. Ιστορική εξέλιξη καμπύλων και επιφανειών [16].

2.4. Καμπύλες και επιφάνειες B-Spline

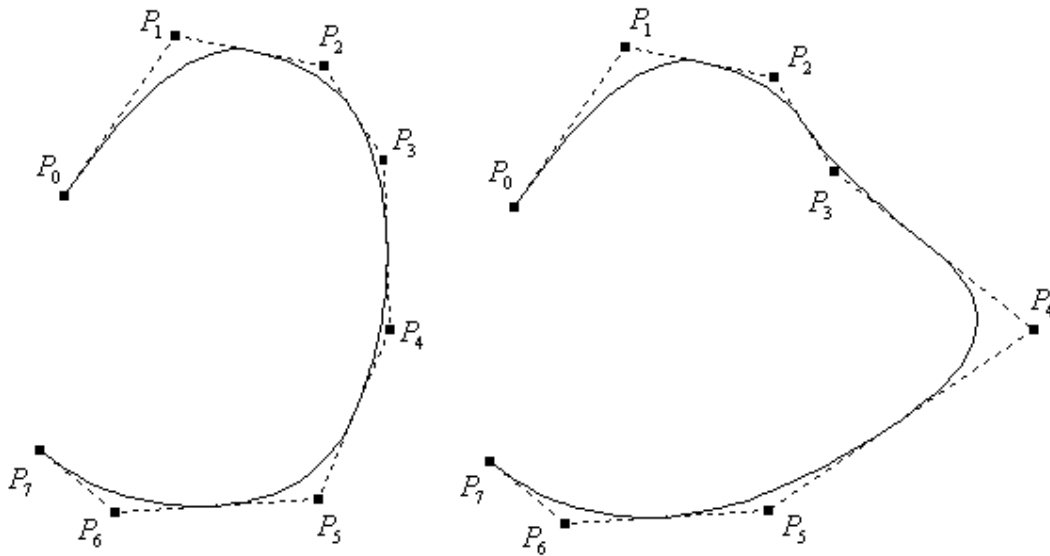
Για να οριστεί επαρκώς και να σχεδιαστεί μια καμπύλη ή μια επιφάνεια B-Spline, χρειαζόμαστε ένα σύνολο σημείων ελέγχου (control points), ένα σύνολο κόμβων (knots) και ένα σύνολο συντελεστών (coefficients), ένα για κάθε σημείο ελέγχου, έτσι ώστε όλα τα τμήματα καμπύλων ή επιφανειών να ενώνονται μαζί ικανοποιώντας ορισμένες συνθήκες συνοχής. Ο υπολογισμός των συντελεστών είναι ίσως το πιο σύνθετο βήμα, επειδή πρέπει να εξασφαλίσουν ορισμένες συνθήκες συνοχής. Στην Εικόνα 2.3 παρουσιάζεται μια καμπύλη B-Spline μαζί με τα χαρακτηριστικά της [16].



Εικόνα 2.3. Καμπύλη B-Spline [16]

2.4.1. Σημεία ελέγχου (Control Points)

Ο έλεγχος των καμπύλων B-Spline επιτυγχάνεται με την τροποποίηση των σημείων ελέγχου (control points), με τη μετακίνησή τους δηλαδή στο δισδιάστατο ή στον τρισδιάστατο χώρο. Συχνά τα σημεία ελέγχου ενώνονται μεταξύ τους για την πιο εύκολη αναγνώρισή τους, σχηματίζοντας με αυτό τον τρόπο το πολύγωνο ελέγχου (control polygon). Στην Εικόνα 2.4 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η επίδραση που έχει σε μια ανοικτή δευτεροβάθμια καμπύλη B-Spline με 8 σημεία ελέγχου, η μεταβολή ενός από αυτά (P_4). Επίσης, στο σχήμα φαίνεται πως η αλλαγή στο σχήμα της καμπύλης δεν πραγματοποιείται σε ολόκληρο το μήκος της αλλά μόνο σε μια περιοχή της, κοντά στο μετακινούμενο σημείο ελέγχου.



Εικόνα 2.4. Τοπική επίδραση με την μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου [19].

Αυτή είναι μια πολύ δημοφιλής ιδιότητα των καμπύλων B-Spline, αφού μας επιτρέπει να προκαλούμε αλλαγές σε ένα μικρό τμήμα της καμπύλης, χωρίς να επηρεάζεται η γενικότερη μορφή της (τοπική επίδραση). Κάθε σημείο ελέγχου επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης, που βρίσκεται πιο κοντά σε αυτό, αλλά έχει μικρή ή καθόλου επίδραση σε τμήματα της καμπύλης που απέχουν σημαντικά από το εν λόγω σημείο [19].

2.4.2. Βασικές συναρτήσεις B-Spline

Η συνάρτηση $N_{i,p}(u)$ [19], η οποία καθορίζει πόσο ισχυρά το σημείο ελέγχου P_i επηρεάζει την καμπύλη για δεδομένη τιμή της ελεύθερης παραμέτρου u , καλείται βασική συνάρτηση του συγκεκριμένου σημείου ελέγχου. Εξάλλου, στον όρο B-Spline το γράμμα «B» αντιστοιχεί στη λέξη Basic (Βασική). Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι, πως είναι δυνατόν να καθοριστεί κάθε βασική συνάρτηση. Κάθε περιοχή της καμπύλης επηρεάζεται από τα σημεία ελέγχου που βρίσκονται κοντά στην εν λόγω περιοχή. Όταν το τμήμα της καμπύλης που αναφερόμαστε βρίσκεται μακριά από κάποιο σημείο ελέγχου, αυτό το σημείο ελέγχου έχει μικρή επίδραση στο τμήμα της καμπύλης. Όσο το τμήμα της καμπύλης πλησιάζει στο σημείο ελέγχου, τόσο η

επιρροή του γίνεται και μεγαλύτερη, μέχρι να αρχίσει να ελαττώνεται πάλι όταν το τμήμα της καμπύλης αρχίσει να απομακρύνεται.

Επειδή οι καμπύλες B-Spline ορίζονται παραμετρικά, με ελεύθερη παράμετρο u , μπορεί να θεωρηθεί ένα μικρό τμήμα από αυτές, σε ένα μικρό διάστημα μεταβολής του u . Εφόσον κάθε σημείο ελέγχου έχει τη δική του βασική συνάρτηση, σε μια καμπύλη με 4 σημεία ελέγχου θα υπάρχουν 4 τέτοιες βασικές συναρτήσεις. Κάθε μία από αυτές θα καλύπτει και ένα ορισμένο τμήμα της καμπύλης.

Ας οριστεί τώρα ως U ένα διάνυσμα αποτελούμενο από $m+1$ στοιχεία, για τα οποία ισχύει $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m$. Τα u_i ονομάζονται κόμβοι (knots), το U διάνυσμα κόμβων (knot vector) και το διάστημα $[u_i, u_{i+1}]$ ονομάζεται το i -στό εύρος κόμβων (knot span). Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που δύο διαδοχικά u_i είναι ίσα, τότε το αντίστοιχο εύρος κόμβων είναι μηδενικό. Εάν ο κόμβος u_i εμφανίζεται k φορές (π.χ. $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}$) όπου $k > 1$, το u_i ονομάζεται πολλαπλός κόμβος πολλαπλότητας k και γράφεται $u_i(k)$. Διαφορετικά, εάν ο κόμβος u_i εμφανίζεται μια φορά, τότε ονομάζεται απλά κόμβος.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, οι βασικές συναρτήσεις B-Spline (βαθμού p , τάξης $k = p + 1$ με u_i κόμβους) υπολογίζονται από τις δύο αναδρομικές σχέσεις:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\acute{\iota}\omega\varsigma \end{cases} \quad (2.5)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.6)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συνήθως αναφέρονται ως **αναδρομικές σχέσεις Cox-DeBoor**. Πρόκειται για την πιο διαδεδομένη μέθοδο, που βασίζεται στην επαναληπτική σχέση που οφείλεται στους DeBoor [21] και Cox [20].

Αυτός ο ορισμός φαίνεται πολύπλοκος αλλά τελικά δεν είναι. Εάν ο βαθμός p είναι μηδέν, τότε οι βασικές συναρτήσεις είναι βηματικές (step functions). Δηλαδή, η βασική συνάρτηση $N_{i,0}(u)$ είναι 1 εάν το u βρεθεί μέσα στο i -οστό εύρος κόμβων (knot span).

Στις **αναδρομικές σχέσεις Cox-DeBoor** βασίζεται επίσης και ο υπολογισμός των παραγώγων της $N_{i,p}(u)$, που δίνεται από τη σχέση [19]:

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} \cdot N_{i,p-1}^{(k-1)}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}^{(k-1)}(u) \quad (2.7)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούν ορισμένες πολύ σημαντικές *ιδιότητες* των βασικών συναρτήσεων:

- ◆ Η $N_{i,0}(u)$ είναι μια βηματική συνάρτηση, ίση με μηδέν παντού εκτός από το εσωτερικό διάστημα του i -οστού εύρους κόμβων, δηλ. $u \in [u_i, u_{i+1})$.
- ◆ Για $p > 0$, η $N_{i,p}(u)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο βασικών συναρτήσεων βαθμού $(p-1)$.
- ◆ Ο υπολογισμός των βασικών συναρτήσεων απαιτεί τον καθορισμό ενός διανύσματος κόμβων, U , καθώς και του βαθμού p .

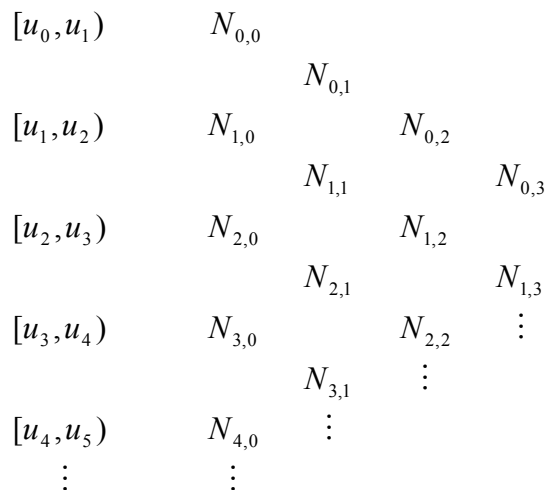
- ◆ Η δεύτερη αναδρομική σχέση Cox-DeBoor μπορεί να οδηγήσει σε πηλίκo $\frac{0}{0}$. Σε αυτή την περίπτωση το πηλίκo αυτό ορίζεται ίσο με 0.
- ◆ Τα $N_{i,p}(u)$ είναι πολυώνυμα καθορισμένα σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Συνήθως όμως, μόνο το εσωτερικό διάστημα $[u_0, u_m]$ είναι αυτό που μας ενδιαφέρει.
- ◆ Το εσωτερικό διάστημα $[u_i, u_{i+1})$ καλείται το i -στό εύρος κόμβων. Μπορεί να έχει μηδενικό εύρος, αφού οι κόμβοι δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικοί.
- ◆ Εάν ο αριθμός των κόμβων είναι $m+1$, ο βαθμός των βασικών συναρτήσεων είναι p και ο αριθμός των βασικών συναρτήσεων βαθμού p είναι $n+1$, τότε ισχύει

$$m = n + p + 1 \quad (2.8)$$

- ◆ Το άθροισμα των βασικών συναρτήσεων είναι ίσο με τη μονάδα, που σημαίνει ότι η καμπύλη και το πολύγωνο ελέγχου δεν αλλάζουν με τους μετασχηματισμούς:

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1 \quad (2.9)$$

- ◆ Κάθε βασική συνάρτηση παίρνει μόνο θετικές τιμές, $N_{i,p}(u) \geq 0$, που σημαίνει ότι ισχύει η ιδιότητα του κυρτού περιβλήματος.
- ◆ Κάθε σημείο ελέγχου επηρεάζει $(p+1)$ τμήματα, αφού οι βασικές συναρτήσεις είναι μηδενικές σε ορισμένες περιοχές, για u εκτός διαστήματος $[u_i, u_{i+(p+1)})$.
- ◆ Κάθε βασική συνάρτηση $N_{i,p}(u)$ διαφοροποιείται $(p-1)$ φορές, συνεπώς έχει και αντίστοιχη συνέχεια στην παραγόμενη καμπύλη, εφόσον δεν έχουμε πολλαπλότητα τιμών στο αντίστοιχο διάστημα κόμβων. Εάν η πολλαπλότητα ενός εσωτερικού κόμβου είναι q , τότε η συνέχεια της παραγόμενης καμπύλης είναι C^{p-q-1} .
- ◆ Ο υπολογισμός των βασικών συναρτήσεων $N_{i,p}(u)$ p βαθμού ($p>0$) βασίζεται στο τρίγωνο της Εικόνας 2.5.

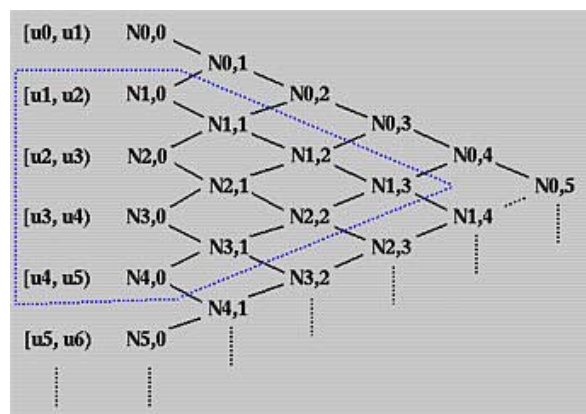


Εικόνα 2.5. Τρίγωνο υπολογισμού βασικών συναρτήσεων[19].

Επίσης, είναι πολύ σημαντικό για την εξοικονόμηση υπολογισμών να καθορισθεί το μη μηδενικό πεδίο ορισμού για τις βασικές συναρτήσεις $N_{i,p}(u)$, με βάση το τρίγωνο υπολογισμού. Έστω ότι επιθυμείται να βρεθεί το μη μηδενικό πεδίο ορισμού για την βασική συνάρτηση $N_{1,3}(u)$. Με βάση τα προηγούμενα, κινούμαστε από τα δεξιά προς τα αριστερά, μέχρι να καταλήξουμε στην πρώτη στήλη, μέσα στα όρια της μπλε διακεκομμένης γραμμής (Εικόνα 2.6). Συμπερασματικά, καταλήγουμε ότι η Βασική συνάρτηση $N_{1,3}(u)$ είναι μη μηδενική στα διαστήματα κόμβων $[u_1, u_2)$, $[u_2, u_3)$, $[u_3, u_4)$ και $[u_4, u_5)$ ή ισοδύναμα στο διάστημα $[u_1, u_5)$.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, προκύπτει η εξής σημαντική παρατήρηση που αναφέρεται και αλλιώς ως ιδιότητα **τοπικής επίδρασης**:

- ◆ Η βασική συνάρτηση $N_{i,p}(u)$ είναι μη μηδενική στο διάστημα $[u_i, u_{i+p+1})$ ή ισοδύναμα, η βασική συνάρτηση $N_{i,p}(u)$ είναι μη μηδενική για $p+1$ διαστήματα κόμβων: $[u_i, u_{i+1})$, $[u_{i+1}, u_{i+2})$, ..., $[u_{i+p}, u_{i+p+1})$ [19].

Εικόνα 2.6 Εύρεση μη μηδενικού διαστήματος για τη βασική συνάρτηση $N_{1,3}(u)$ [19]

2.4.3. Διανύσματα κόμβων

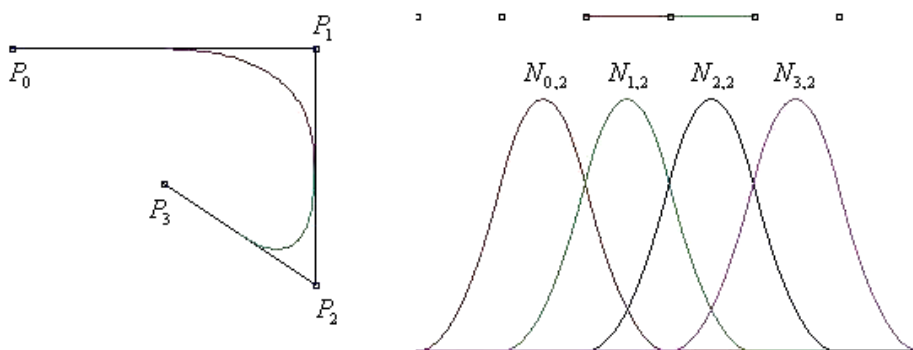
Σύμφωνα με την παράγραφο 2.4.2, γίνεται αντιληπτό ότι η επιλογή του διανύσματος κόμβων είναι πολύ σημαντικός παράγοντας, επειδή επηρεάζει τις βασικές συναρτήσεις και κατά συνέπεια την τελική καμπύλη. Η μόνη απαίτηση για το διάνυσμα κόμβων είναι $u_i \leq u_{i+1}$. Χρησιμοποιούνται τρεις τύποι διανυσμάτων κόμβων:

- ◆ το ομοιόμορφο (Uniform),
- ◆ το ανοικτό ομοιόμορφο (Open Uniform),
- ◆ το ανομοιόμορφο (Non-Uniform).

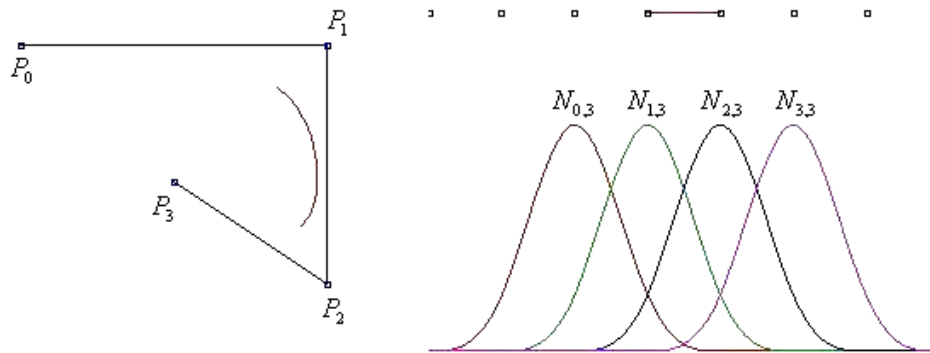
Στο **ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων**, οι επιμέρους κόμβοι ισαπέχουν μεταξύ τους. Ο γενικός τύπος ορισμού του διανύσματος κόμβων είναι $u_{i+1} - u_i = \text{σταθερο}, \forall i$. Για παράδειγμα έχουν την μορφή:

$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \text{ ή } [0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1.0]$$

Το χρήσιμο διάνυσμα κόμβων, όπου δηλαδή ορίζεται η καμπύλη, φαίνεται στις Εικόνες 2.7 και 2.8 και είναι η γραμμή που ενώνει τους κόμβους πάνω από τις βασικές συναρτήσεις. Δίνεται από τη σχέση $(p - 2) \leq j \leq n + 1$.



Εικόνα 2.7. Μία τετραγωνική ομοιόμορφη καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Αριστερά απεικονίζεται η καμπύλη και δεξιά παρουσιάζονται οι βασικές συναρτήσεις της. Πάνω από αυτές διακρίνεται η διάταξη των κόμβων καθώς και το διάστημα ορισμού της καμπύλης από τον 3ο μέχρι τον 5ο κόμβο [19].



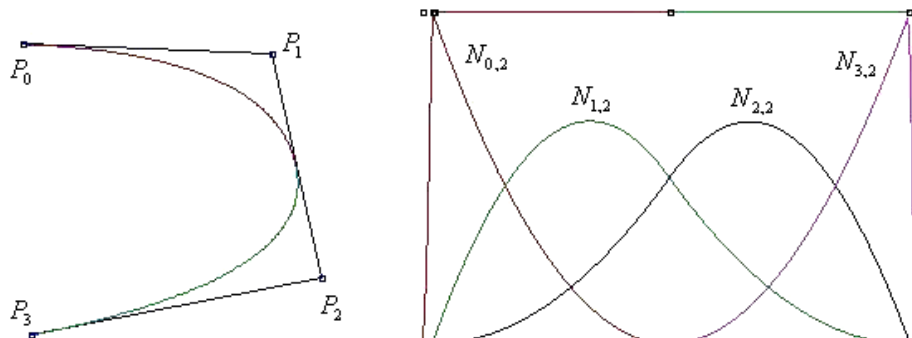
Εικόνα 2.8. Κυβική ομοιόμορφη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου αριστερά και οι βασικές συναρτήσεις της δεξιά. Είναι προφανές πως το διάστημα ορισμού είναι μικρότερο από αυτό της καμπύλης του προηγούμενου σχήματος (από τον 4ο έως τον 5ο κόμβο ή αλλιώς από το 2ο σημείο ελέγχου έως το 3ο περίπου) [19].

Στο **ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων**, υπάρχει μια πολλαπλότητα στους ακραίους κόμβους, η οποία ισούται με την τάξη $k = (p+1)$ των βασικών συναρτήσεων. Οι εσωτερικοί κόμβοι είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι, δηλαδή:

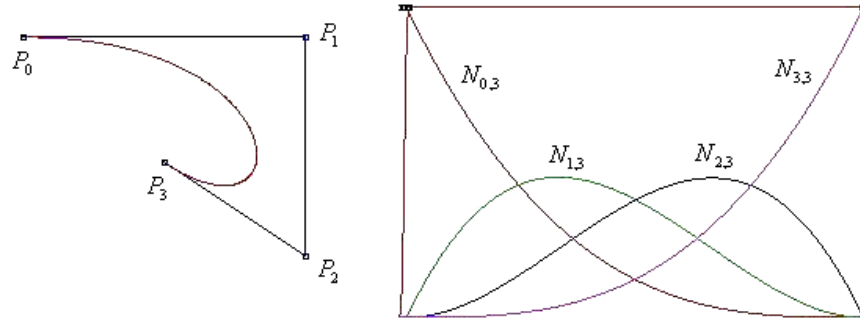
$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = u_1, i \leq k \\ u_{i+1} - u_i = \text{σταθερο}, k \leq i < n+2 \\ u_i = u_{k+(n+1)}, i \geq n+2 \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Μερικά παραδείγματα ανοικτών ομοιόμορφων διανυσμάτων κόμβων για διαφορετικές τιμές της τάξης k , δίδονται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} k=2 & : [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4] \\ k=3 & : [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3] \\ k=4 & : [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2] \end{aligned}$$



Εικόνα 2.9. Μία τετραγωνική ανοικτή καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Αριστερά παρουσιάζεται η μορφή της καμπύλης με τα σημεία ελέγχου και δεξιά απεικονίζονται οι βασικές συναρτήσεις. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η καμπύλη ξεκινάει από το αρχικό σημείο ελέγχου και τερματίζει στο τελικό. Αυτό φαίνεται επίσης και στο πεδίο ορισμού της καμπύλης (πάνω από τις βασικές συναρτήσεις) που καλύπτει όλο το φάσμα των κόμβων [19].



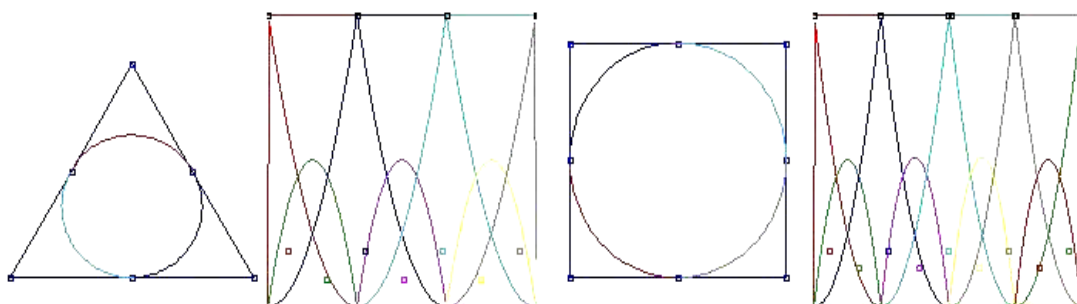
Εικόνα 2.10. Κυβική ανοικτή καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου. Μία ιδιότητα των ανοικτών B-Spline καμπύλων, που φαίνεται από τα σχήματα, είναι πως, όσο αυξάνει ο βαθμός της καμπύλης τόσο αυτές απομακρύνονται από τα σημεία ελέγχου. Στην ειδική περίπτωση των τετραγωνικών καμπύλων η καμπύλη τέμνει (ή εφάπτεται με) το πολύγωνο ελέγχου ακριβώς στην μέση κάθε πλευράς [19].

Οι καμπύλες B-Spline με ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων έχουν την πολύ βασική ιδιότητα η καμπύλη να παρεμβάλλει στο αρχικό και τελικό σημείο ελέγχου. Αυτό είναι αρκετά σημαντικό διότι, επιλέγοντας κατάλληλα το αρχικό και τελικό σημείο ελέγχου, ξέρουμε από που ξεκινάει και που καταλήγει η καμπύλη. Στην ειδική περίπτωση που ο πρώτος κόμβος είναι μηδενικός και η απόσταση των κόμβων είναι μοναδιαία, το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα τιμών προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < p+1 \\ i-p & p+1 \leq i < n+1 \\ n-p+1 & n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Το **ανομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων** μπορεί να παίρνει τιμές ανομοιόμορφα κατανομημένες ή να έχει πολλαπλούς εσωτερικούς κόμβους και μπορεί να είναι περιοδικό ή ανοικτό, π.χ.:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2] \text{ ή } [0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4] \text{ ή } [1 \ 3 \ 7 \ 22 \ 23 \ 23 \ 49 \ 50 \ 50]$$



Εικόνα 2.11: Ο μοναδικός τρόπος να σχηματίσουμε κύκλους ή άλλες κωνικές τομές με B-Spline είναι με χρήση ανομοιόμορφου διανύσματος κόμβων, όπως στις καμπύλες NURBS. Στο σχήμα παρουσιάζονται δύο κυβικές NURBS. Η πρώτη σχηματίζεται με 6 σημεία ελέγχου και διάνυσμα κόμβων $U = \{0,0,0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1,1,1\}$ ενώ η δεύτερη σχηματίζεται με 9 σημεία ελέγχου και διάνυσμα κόμβων $U = \{0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1,1,1\}$ [19].

2.4.4. Καμπύλες B-Spline

Μία p -βαθμού καμπύλη B-Spline με παράμετρο u , διάνυσμα κόμβων $U=\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ δίδεται σύμφωνα με τη σχέση [19]:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b \quad (2.12)$$

όπου τα $\{P_i\}$ είναι οι συντεταγμένες των $n+1$ σημείων ελέγχου (τα διανύσματα θέσης τους), και $\{N_{i,p}(u), i=0,1,\dots,n\}$ είναι οι p -βαθμού βασικές συναρτήσεις (τμηματικές πολυωνυμικές συναρτήσεις - piecewise polynomial functions), που καθορίζονται από το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων:

$$U = \{a, \dots, a, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, b, \dots, b\} \quad (2.13)$$

Κατά αναλογία, η παράγωγος k -τάξης μίας καμπύλης B-Spline υπολογίζεται από τις σχέσεις[19]:

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (2.14)$$

ή

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) Q_i^{(k-1)} \quad (2.15)$$

όπου

$$Q_i^{(k)} = \begin{cases} P_i & \text{για } k = 0 \\ p \cdot \frac{Q_{i+1}^{(k-1)} - Q_i^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} & \text{για } k > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ο αριθμός των κόμβων είναι $(m+1)$ και ισχύει η σχέση:

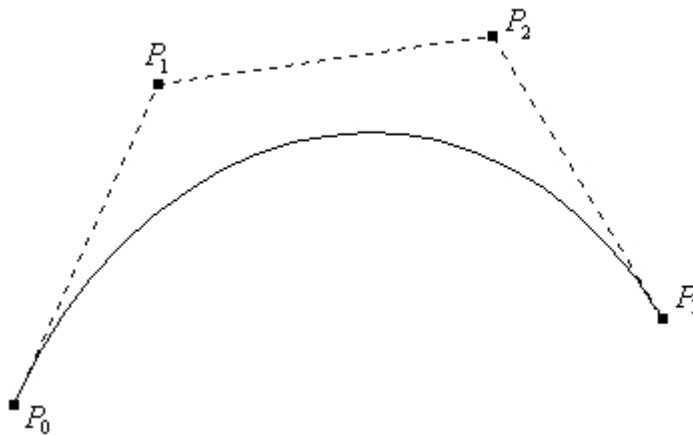
$$\begin{aligned} (\text{Βαθμός της καμπύλης} + 1) + (\text{Αριθμός Σημείων Ελέγχου}) &= (\text{Αριθμός κόμβων}) \Rightarrow \\ (p+1) + (n+1) &= (m+1) \Rightarrow m = p + n + 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Στις καμπύλες B-Spline, ο βαθμός p είναι ανεξάρτητος από το πλήθος $n+1$ των σημείων ελέγχου (σε αντίθεση με τις Bezier) και έχει άμεση σχέση μόνο με την τάξη k των καμπύλων:

$$\text{Τάξη της καμπύλης} = \text{Βαθμός της καμπύλης} + 1 \Rightarrow$$

$$k = p + 1 \quad (2.18)$$

Με βάση τον βαθμό της καμπύλης υπολογίζουμε όλες τις βασικές συναρτήσεις βαθμού p , πλήθους $(n+1)$ (όσα και τα σημεία ελέγχου), που αντιστοιχούν στο προηγούμενο ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων. Με συγκεκριμένο βήμα Δu , παράγουμε διαδοχικές τιμές στην παράμετρο u . Το διάστημα που κινείται η u είναι (για το συγκεκριμένο διάνυσμα κόμβων), το $[0, n-p+1]$, που αντιστοιχεί στο μήκος του διανύσματος κόμβων. Η αρχική σχέση που δίνει το κάθε σημείο της καμπύλης είναι διανυσματική, οπότε εφαρμόζεται για κάθε διαφορετική συντεταγμένη των σημείων ελέγχου, δίνοντας έτσι την αντίστοιχη συντεταγμένη του σημείου της καμπύλης, που αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του u . Στην Εικόνα 2.12 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κυβικής καμπύλης B-Spline με 4 σημεία ελέγχου [19].



Εικόνα 2.12. Κυβική καμπύλη B-Spline με 4 σημεία ελέγχου [19]

2.4.5. Ιδιότητες των καμπυλών B-Spline

- ◆ Ο βαθμός της καμπύλης επιλέγεται από το χρήστη, αλλά επειδή πρέπει να ισχύει η σχέση $n - k + 2 > 0 \Leftrightarrow n - p + 1 > 0$, τότε 2, 3 και 4 σημεία ελέγχου απαιτούνται για τον προσδιορισμό πρώτου, δεύτερου ή τρίτου βαθμού καμπύλης B-Spline.
- ◆ Εάν $n = p$ τότε προκύπτει καμπύλη Bezier.
- ◆ Τοπικός έλεγχος, που επιτυγχάνεται μετακινώντας ένα σημείο ελέγχου, ή έχοντας πολλαπλότητα σε ένα σημείο ελέγχου, ή αλλάζοντας το βαθμό της καμπύλης. Εν γένει σε μια καμπύλη επηρεάζονται μόνο $(p + 1)$ από τα τμήματά της.
- ◆ Η ανοικτή καμπύλη περνάει από τα ακραία σημεία ελέγχου και εφάπτεται στα ακραία τμήματα του πολυγώνου ελέγχου.
- ◆ Αύξηση του βαθμού της καμπύλης έχει ως αποτέλεσμα δυσκολία ελέγχου της μορφής της, καθώς και της πολυπλοκότητας των υπολογισμών.

- ◆ Η μορφή της καμπύλης εξαρτάται από το βαθμό της. Για $p = 0$ παίρνουμε τα σημεία ελέγχου και για $p = 1$ το πολύγωνο ελέγχου
- ◆ Η καμπύλη δευτέρου βαθμού εφάπτεται του πολυγώνου ελέγχου στο μέσο του κάθε τμήματος. Αυτό δεν συμβαίνει για καμπύλες μεγαλύτερου βαθμού.
- ◆ Πολλαπλά σημεία ελέγχου μας δίνουν υψηλή τιμή καμπυλότητας στο σημείο εκείνο και η καμπύλη έλκεται περισσότερο προς το συγκεκριμένο σημείο ελέγχου.
- ◆ Ισχύει η ιδιότητα του κυρτού πολύγωνου. Η καμπύλη B-Spline περιλαμβάνεται πλήρως στο κυρτό πολύγωνο που δημιουργείται από τα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Η ιδιότητα αυτή έχει μάλιστα και «τοπικό χαρακτήρα». Μια καμπύλη B-Spline αποτελείται από συνεχόμενα τμήματα καμπύλων. Το πρώτο τμήμα επηρεάζεται μόνο από τα πρώτα k σημεία ελέγχου (P_0, \dots, P_{k-1}). Το δεύτερο τμήμα από τα επόμενα k σημεία ελέγχου (P_1, \dots, P_k), κ.ο.κ. Το κάθε επί μέρους τμήμα B-Spline περιλαμβάνεται μέσα στο κυρτό πολύγωνο που σχηματίζουν τα σημεία ελέγχου που επηρεάζουν αυτό το τμήμα της καμπύλης.

Και οι περιοδικές καμπύλες έχουν τις ίδιες ιδιότητες και τα ίδια χαρακτηριστικά με τις ανοικτές εκτός του ότι :

- ◆ Δεν διέρχονται από τα ακραία σημεία ελέγχου.
- ◆ Δεν εφάπτονται των ακραίων τμημάτων [4].

2.4.6. Επιφάνειες B-Spline

Μια B-Spline επιφάνεια αντίστοιχα ορίζεται θεωρώντας ένα πλέγμα σημείων ελέγχου σε δύο διευθύνσεις (bidirectional control point net), με δύο διανύσματα κόμβων και δύο διαφορετικές παραμέτρους u, v με βάση τη παρακάτω σχέση:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (2.19)$$

Η επιφάνεια έχει $n + 1$ και $m + 1$ σημεία ελέγχου και βαθμό p και q σε κάθε διεύθυνση αντίστοιχα. Τα ανοικτά (μη περιοδικά) διανύσματα κόμβων είναι τα εξής:

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \quad (2.20)$$

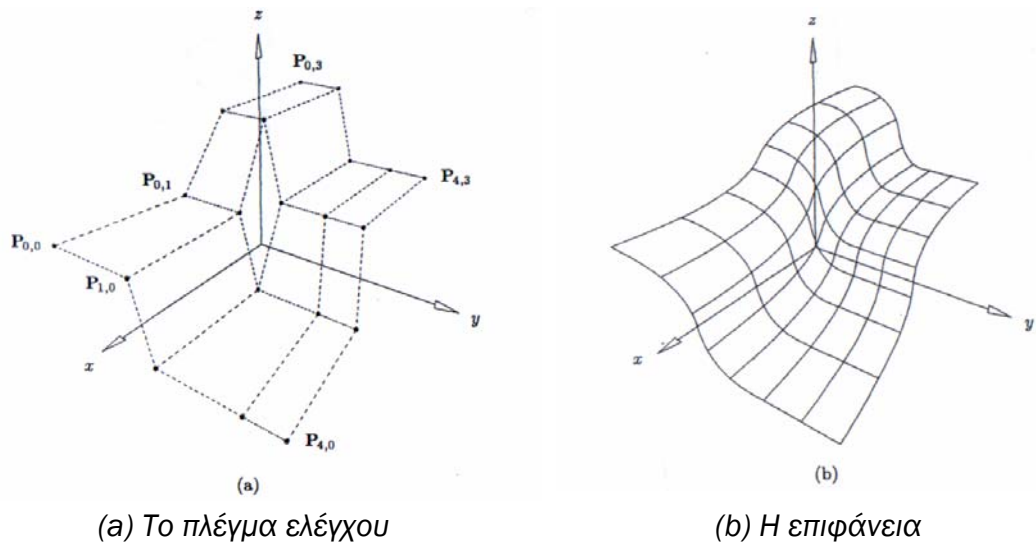
$$V = \{\underbrace{c, \dots, c}_{q+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{d, \dots, d}_{q+1}\} \quad (2.21)$$

Όπου τα διανύσματα κόμβων U, V έχουν αριθμό κόμβων $r+1$ και $s+1$ αντίστοιχα, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $r = n + p + 1$ και $s = m + q + 1$. Ο

υπολογισμός μιας επιφάνειας B-Spline επιτυγχάνεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογισμός του εύρους κόμβου στο οποίο ανήκει το u , έστω $[u_i, u_{i+1})$.
2. Υπολογισμός των μη μηδενικών βασικών συναρτήσεων $N_{i-p,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$.
3. Υπολογισμός του εύρους κόμβου στο οποίο ανήκει το v , έστω $[v_j, v_{j+1})$.
4. Υπολογισμός των μη μηδενικών βασικών συναρτήσεων $N_{j-q,q}(v), \dots, N_{j,q}(v)$.
5. Πολλαπλασιασμός των τιμών των μη μηδενικών βασικών συναρτήσεων με τις συντεταγμένες των αντίστοιχων σημείων ελέγχου χρησιμοποιώντας την αρχική σχέση.

Στην Εικόνα 2.13 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μιας επιφάνειας B-Spline μαζί με το αντίστοιχο πλέγμα των σημείων ελέγχου [19].



Εικόνα 2.13. Μια B-Spline επιφάνεια [19]

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι οι επιφάνειες B-Spline έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και οι αντίστοιχες καμπύλες. Παρουσιάζουν δυνατότητα τοπικού ελέγχου από την μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου και το διάστημα που επηρεάζει η μετακίνηση κάθε σημείου ελέγχου εξαρτάται από τον βαθμό της επιφάνειας. Μπορούν να αποδοθούν και επιφάνειες με ασυνεχή μορφή, όπως και με τις καμπύλες, επιλέγοντας το κατάλληλο διάλυσμα κόμβων προς τη μία ή προς την άλλη κατεύθυνση ή ταυτίζοντας ορισμένα από τα σημεία ελέγχου.

2.5. Μη Ομοιόμορφες Ρητές B-Spline καμπύλες και επιφάνειες – NURBS

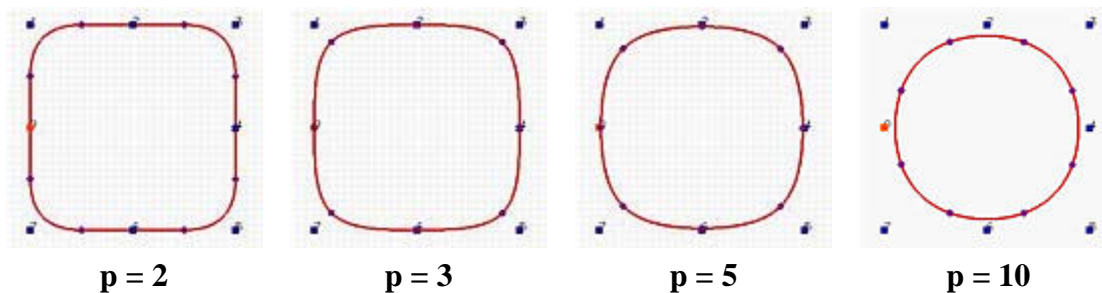
Οι καμπύλες B-Spline παρόλο που κατασκευάζονται από πολυωνυμικές βασικές συναρτήσεις, γεγονός που τους χαρίζει ευελιξία και εξαιρετικές ιδιότητες, δεν είναι ικανές να αναπαραστήσουν μια πολύ απλή καμπύλη όπως ο κύκλος. Για να

αντιμετωπιστεί επιτυχώς το πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται, στην κατασκευή όχι μόνο ενός κύκλου ή έλλειψης αλλά και πολλών άλλων καμπύλων, που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με πολυώνυμα, είναι αναγκαία μια προέκταση των καμπύλων B-Spline.

Για να καταστεί το πρόβλημα καλύτερα κατανοητό, θα γίνει μια προσπάθεια να κατασκευαστεί ένας κύκλος με την βοήθεια των B-Splines και 8 σημείων ελέγχου. Στην Εικόνα 2.14, από τα αριστερά προς τα δεξιά, έχουν χρησιμοποιηθεί 4 καμπύλες B-Spline με βαθμό 2, 3, 5 και 10 αντίστοιχα. Εύκολα διαπιστώνεται ότι για $p = 2$ και $p = 3$ το σχήμα δεν μοιάζει με κύκλο ενώ για $p = 5$ έχει προκύψει απλά ένα στρογγυλοποιημένο σχήμα. Αντιθέτως, για $p = 10$ έχει προσεγγιστεί αρκετά επιτυχημένα ο κύκλος, αλλά δεν είναι ακριβώς κύκλος. Ακόμη και αν γίνει η παραδοχή ότι έχουμε κύκλο, είναι μη επιθυμητή μια τόσο υψηλή τιμή για το p .

Σε αυτή την περίπτωση, η περισσότερο δημοφιλής μορφή αναπαράστασης καμπύλων και επιφανειών από άποψη αποθήκευσης, υπολογισμού και ελέγχου, είναι οι NURBS (Μη Ομοιόμορφες Ρητές B-Spline Καμπύλες και Επιφάνειες). Με τις Μη Ομοιόμορφες Ρητές Καμπύλες B-Spline μπορούμε να αναπαραστήσουμε και να σχεδιάσουμε κάθε γεωμετρικό σχήμα στον H/Y . Οι NURBS προσφέρουν μία γενική μαθηματική μορφή σχεδίασης, είτε πρόκειται για τυπικά αναλυτικά σχέδια (όπως κωνικές τομές), είτε πρόκειται για ελεύθερα σχέδια. Παρέχουν ευκαμψία για σχεδίαση μεγάλου και ποικίλου αριθμού μορφών. Το όνομά τους δείχνει και την φύση τους:

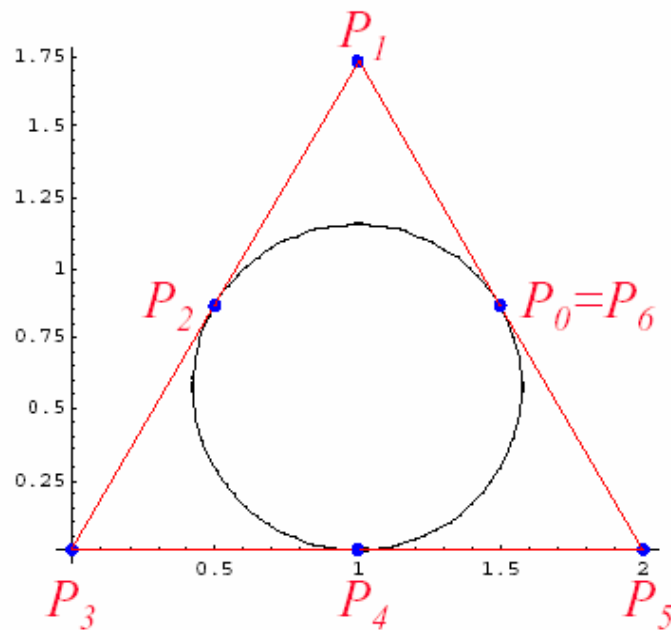
- ◆ **NU (Non Uniform)**: Μη ομοιόμορφες, επειδή το διάνυσμα των κόμβων περιέχει κόμβους που δεν είναι αναγκαίο να κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημά τους.
- ◆ **R (Rational)**: Ρητές, επειδή έχουν την ρητή μορφή (a/b) , όπου a και b είναι πολυώνυμα. Ένα πλεονέκτημα για τη χρησιμοποίηση της ρητής μορφής είναι ότι γίνεται πλέον επιτρεπτή η αναπαράσταση μερικών δημοφιλών σχημάτων (όπως είναι οι κωνικές τομές), που δεν μπορούσαν να δημιουργηθούν από τις καμπύλες B-Spline. Αυτός είναι και ο λόγος που εισάγουμε τα βάρη (weights).
- ◆ **BS (B-Spline)**: B-Spline επειδή οι NURBS στηρίζονται στις βασικές B-Spline, με πολυωνυμικές βασικές συναρτήσεις, που υπολογίζουν τα σημεία της καμπύλης ή της επιφάνειας τμηματικά.



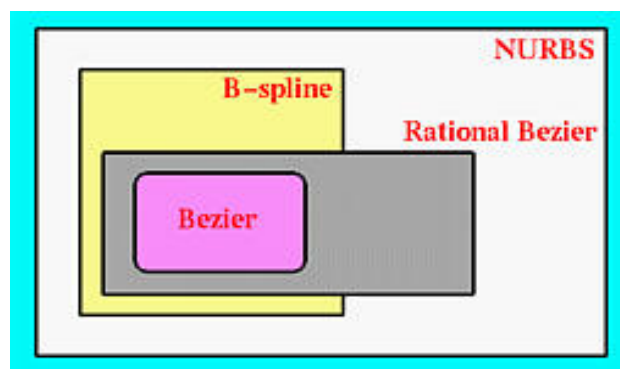
Εικόνα 2.14. Προσέγγιση ενός κύκλου με χρήση καμπύλων B-Spline [19].

Οι Μη Ομοιόμορφες Ρητές B-Spline καμπύλες και επιφάνειες, που αναφέρονται ως NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), έχουν γίνει εκ των πραγμάτων ισχυρό βιομηχανικό εργαλείο για την αναπαράσταση, σχεδίαση και ανταλλαγή γεωμετρικών δεδομένων στους Η/Υ. Πολλά ισχυρά διεθνή πρότυπα σχεδίασης όπως είναι το IGES κάνουν χρήση των NURBS ως ένα ισχυρό εργαλείο για γεωμετρική σχεδίαση. Η τεράστια επιτυχία των καμπύλων NURBS είναι γεγονός για τους παρακάτω κυρίως λόγους:

- ◆ Οι NURBS εξασφαλίζουν την αναπαραγωγή αναλυτικών σχημάτων (όπως είναι κωνικές τομές) και τετραγωνικών επιφανειών καθώς και ελευθέρων μορφών σχημάτων, όπως για σχεδίαση μοντέλων αυτοκινήτων ή της γάστρας ενός πλοίου.
- ◆ Η σχεδίαση με NURBS είναι διαισθητική. Σχεδόν κάθε εργαλείο και αλγόριθμος των καμπύλων και επιφανειών έχει έναν εύκολο τρόπο για την γεωμετρική κατανόηση.
- ◆ Οι αλγόριθμοι των NURBS είναι γρήγοροι και αριθμητικά σταθεροί.
- ◆ Οι καμπύλες και επιφάνειες NURBS είναι σταθερές υπό συνηθισμένους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, όπως περιστροφές και προοπτικές προβολές.
- ◆ Παρέχουν ένα πολύ καλό έλεγχο της μορφής του σχήματος, κάνοντας χρήση ενός αριθμού από σημεία ελέγχου, κόμβων και βαρών, που οδηγούν το σχήμα της καμπύλης και της επιφάνειας στο επιθυμητό, με τον πλέον ομαλό τρόπο.
- ◆ Οι NURBS αναπαριστούν πολύπλοκα σχήματα καταλαμβάνοντας λίγο χώρο δεδομένων. Για παράδειγμα, για να αναπαραστήσουμε γραφικά ένα κύκλο διαμέτρου ενός μέτρου με ευθύγραμμα τμήματα, θα απαιτούνταν μερικές χιλιάδες από τέτοια τμήματα, ώστε να μοιάζει το σχήμα μας με κύκλο, αντί για πολύγωνο. Αναπαριστώντας τον ίδιο κύκλο με NURBS θα απαιτούνταν μόνο 7 σημεία ελέγχου (Εικόνα 2.15).
- ◆ Οι καμπύλες και επιφάνειες NURBS αποτελούν την γενίκευση των ομοιόμορφων καμπύλων και επιφανειών B-Spline και ρητών – πολυωνυμικών καμπύλων και επιφανειών Bezier (Εικόνα 2.16) [16].



Εικόνα 2.15: Αναπαράσταση κύκλου με χρήση καμπύλης NURBS [16].



Εικόνα 2.16: Γενίκευση καμπύλων και επιφανειών NURBS [16].

2.5.1. Καμπύλες NURBS

Μία p βαθμού καμπύλη NURBS ορίζεται από την παρακάτω σχέση ως εξής :

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}, a \leq u \leq b \quad (2.22)$$

όπου τα $\{P_i\}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων ελέγχου που σχηματίζουν το πολύγωνο ελέγχου, τα $\{w_i\}$ είναι τα αντίστοιχα βάρη και οι $\{N_{i,p}(u)\}$ είναι οι p -βαθμού βασικές συναρτήσεις, που καθορίζονται από το μη περιοδικό (και μη ομοιόμορφο) διάνυσμα κόμβων:

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \quad (2.23)$$

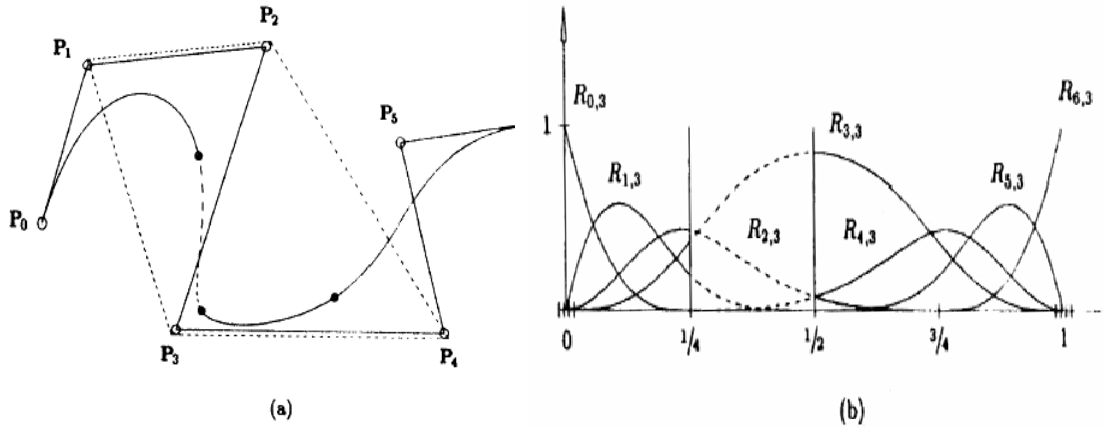
Αν δεν ορισθεί κάτι διαφορετικό, γίνεται η υπόθεση ότι $a = 0$, $b = 1$ και $w_i > 0$ για όλα τα i . Θέτοντας:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (2.24)$$

Οι $\{R_{i,p}(u)\}$ είναι οι ρητές βασικές συναρτήσεις με την παράμετρο u να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Με βάση τα παραπάνω η αρχική εξίσωση μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i \quad (2.25)$$

Στην Εικόνα 2.17 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μίας κυβικής NURBS καμπύλης μαζί με τις αντίστοιχες βασικές συναρτήσεις $R_{i,p}(u)$ [19].



(a) Μια κυβική NURBS καμπύλη

(b) Οι βασικές συναρτήσεις

Εικόνα 2.17. $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$ και $\{w_0, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}$ [19]

Η παράγωγος k -τάξης μίας NURBS καμπύλης υπολογίζεται από τη σχέση [19]:

$$C^{(k)}(u) = \frac{A^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \cdot w^{(i)}(u) \cdot C^{(k-1)}(u)}{w(u)} \quad (2.26)$$

$$\text{όπου } A(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \cdot w_i \cdot P_i$$

$$w(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) w_i$$

και από τις σχέσεις (2.15-2.16) προκύπτει

$$A^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) Q_i^{(k-1)} \quad \text{και} \quad w^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) w_i^{(k-1)} \quad (2.27)$$

όπου:

$$Q_i^{(k)} = \begin{cases} w_i \cdot P_i & \text{για } k = 0 \\ p \cdot \frac{Q_{i+1}^{(k-1)} - Q_i^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} & \text{για } k > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad w_i^{(k)} = \begin{cases} w_i & \text{για } k = 0 \\ p \cdot \frac{w_{i+1}^{(k-1)} - w_i^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} & \text{για } k > 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5.2. Ιδιότητες των καμπυλών NURBS

Αρχικά θα πρέπει να αναφερθούν ορισμένες πολύ σημαντικές *ιδιότητες* των ρητών βασικών συναρτήσεων. Οι ιδιότητες αυτές είναι :

- ◆ *Μη αρνητικότητα.* $R_i(u) \geq 0$ για κάθε i και u .
- ◆ Το άθροισμα όλων των ρητών βασικών συναρτήσεων είναι σταθερό για κάθε $u \in [0,1]$:

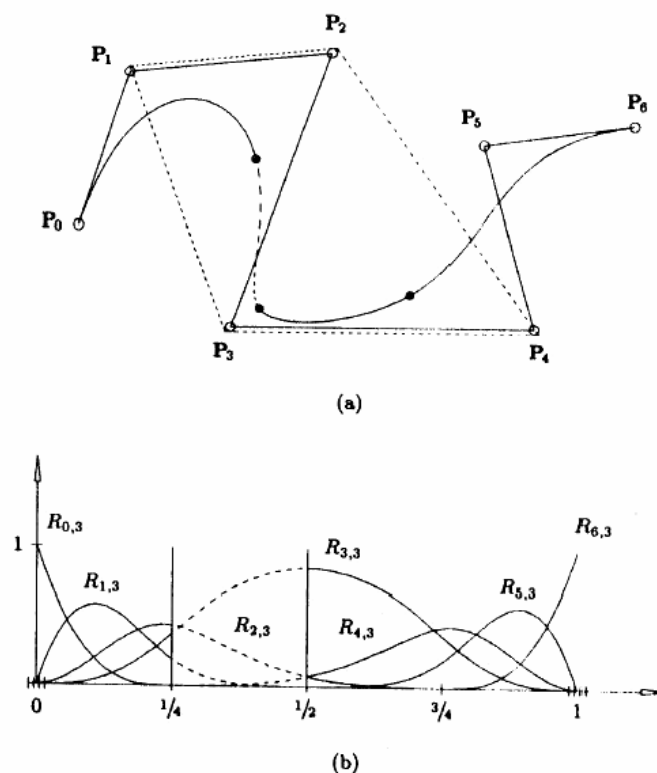
$$\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1 \quad (2.29)$$

- ◆ Ισχύει $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$.
- ◆ *Τοπικός έλεγχος.* $R_{i,p}(u) = 0$ εάν οι παράμετροι (u) πάρουν τιμές έξω από την περιοχή που ορίζεται από το τετράγωνο $[u_i, u_{i+p+1})$. Επιπλέον, για κάθε διάστημα κόμβων, τουλάχιστον $p+1$ από τις συναρτήσεις $R_{i,p}(u)$ είναι μη μηδενικοί και είναι οι $R_{i-p,p}(u), \dots, R_{i,p}(u)$ για το διάστημα $[u_i, u_{i+p+1})$.
- ◆ *Ακρότατο.* Η συνάρτηση $R_{i,p}(u)$ έχει ένα μέγιστο στο διάστημα $[0,1]$.

- ◆ Διαφορισιμότητα. Όλες οι παράγωγοι της $R_{i,p}(u)$ υπάρχουν στο δεδομένο εσωτερικό διάστημα των κόμβων. Σε ένα κόμβο u , η $R_{i,p}(u)$ είναι $p-k$ φορές διαφορίσιμη, όπου k είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.
- ◆ Αν ισχύει $w_i = a$ για $0 \leq i \leq n$ και $a \neq 0$, τότε $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$ για κάθε i .

Οι παραπάνω ιδιότητες αποδίδουν τα παρακάτω ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τις καμπύλες NURBS:

- ◆ Ιδιότητα κυρτού πολυγώνου. Η καμπύλη περιέχεται στο κυρτό πολύγωνο που ορίζουν τα σημεία ελέγχου της καμπύλης. Επιπλέον ισχύει και τοπικότητα στο κυρτό πολύγωνο. Το τμήμα της καμπύλης $C(u)$, που ορίζεται μεταξύ των κόμβων $[u_i, u_{i+1})$, περιέχεται μέσα στο κυρτό πολύγωνο που ορίζεται από τα σημεία ελέγχου P_{i-p}, \dots, P_i (Εικόνα 2.18).

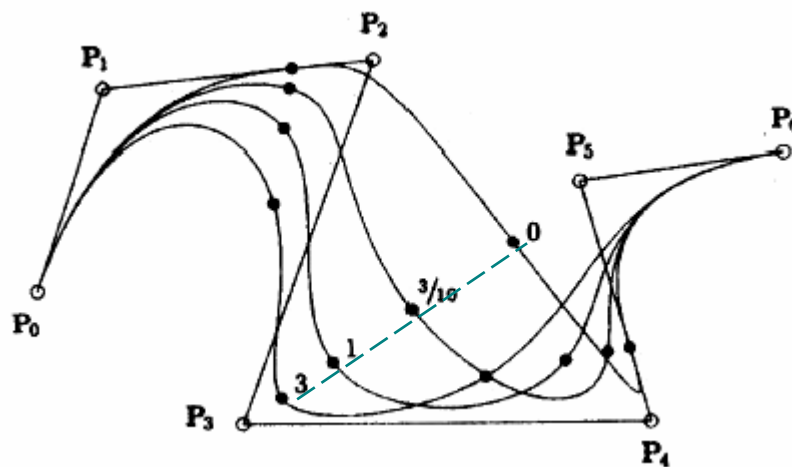


Εικόνα 2.18. Η ιδιότητα του κυρτού πολυγώνου σε ρητές καμπύλες B-Spline.

(a) Το κυρτό πολύγωνο για $u \in [1/4, 1/2)$ ορίζεται από τα σημεία ελέγχου $\{P_1, \dots, P_4\}$. (b) Οι αντίστοιχες βασικές συναρτήσεις [19].

- ◆ Δεν μεταβάλλονται από τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται με εφαρμογή στα σημεία ελέγχου.
- ◆ Ο αριθμός τομών επιπέδου (ή ευθείας για την περίπτωση της δυσδιάστατης καμπύλης) με την καμπύλη είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό τομών του επιπέδου με το πολύγωνο ελέγχου.
- ◆ Η καμπύλη διέρχεται από τα ακραία σημεία, $C(0)=P_0$ και $C(1)=P_n$.

- ◆ Στα εσωτερικά σημεία της καμπύλης (εκτός των τιμών των κόμβων) υπάρχει η παράγωγος οποιουδήποτε βαθμού. Στις τιμές των κόμβων υπάρχει η παράγωγος $k-p$ βαθμού, όπου k η πολλαπλότητα του κόμβου.
- ◆ Τοπική μεταβολή. Εάν μετακινήσουμε ένα σημείο ελέγχου, P_i , ή αλλάξουμε το βάρος του σημείου ελέγχου, τότε η αλλαγή αυτή επηρεάζει μόνο το τμήμα της καμπύλης $[u_i, u_{i+p+1})$.
- ◆ Για τιμές του $u \in [u_i, u_{i+p+1})$, όταν το w_i αυξάνεται ή μειώνεται, τότε το σημείο $C(u)$ κινείται πλησιέστερα ή απομακρύνεται αντίστοιχα από το σημείο P_i . Συνεπώς, και όλη η καμπύλη έλκεται ή απωθείται αντίστοιχα από το σημείο P_i . Η αντίστοιχη κίνηση του σημείου $C(u)$ είναι κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής για σταθερή τιμή του u (Εικόνα 2.19).[4]



Εικόνα 2.19. Μία ρητή κυβική καμπύλη B-Spline, με το βάρος w_3 να μεταβάλλεται.
Η κίνηση του σημείου $C(u)$ γίνεται κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής[4]

2.5.3. Επιφάνειες NURBS

Ομοίως, μια επιφάνεια NURBS p βαθμού στη u διεύθυνση και q βαθμού στη v διεύθυνση ορίζεται από μια διπαραμετρική, διανυσματική, τμηματική και ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}, a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \quad (2.30)$$

όπου τα διανύσματα θέσης $\{P_{i,j}\}$ σχηματίζουν το πλέγμα ελέγχου στις δύο διευθύνσεις (bidirectional control net), τα $\{w_{i,j}\}$ είναι τα αντίστοιχα βάρη και οι $\{N_{i,p}(u)\}$, $\{N_{j,q}(v)\}$ οι άρρητες B-Spline βασικές συναρτήσεις που καθορίζονται στα διανύσματα κόμβων:

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \quad (2.31)$$

$$V = \{\underbrace{c, \dots, c}_{q+1}, u_{q+1}, \dots, u_{s-q-1}, \underbrace{d, \dots, d}_{q+1}\} \quad (2.32)$$

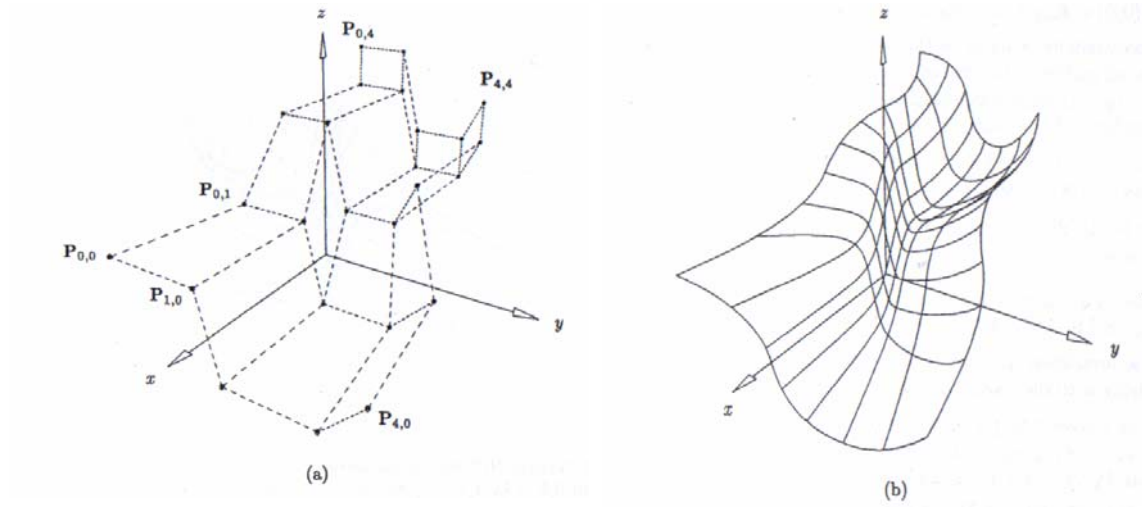
με $r = n + p + 1$ και $s = m + q + 1$. Θέτοντας τις τμηματικές, ρητές βασικές συναρτήσεις ως:

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}} \quad (2.33)$$

η αρχική εξίσωση μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \quad (2.34)$$

Στην Εικόνα 2.20 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μίας NURBS επιφάνειας μαζί με το αντίστοιχο πλέγμα των σημείων ελέγχου [19].



(a) Το πλέγμα ελέγχου

(b) Μια NURBS επιφάνεια

Εικόνα 2.20. $U = V = \{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1\}$ και $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{2,1} = w_{2,2} = 10$, με τα υπόλοιπα βάρη ίσα με 1 [19].

2.5.4. Ιδιότητες των επιφανειών NURBS

◆ Μη αρνητικότητα. $R_{i,j}(u,v) \geq 0$ για κάθε i, j, u και v .

- ◆ Το άθροισμα όλων των ρητών βασικών συναρτήσεων είναι σταθερό.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) = 1 \text{ για κάθε } (u,v) \in [0,1] \times [0,1].$$
- ◆ Τοπικός έλεγχος. $R_{i,j}(u,v) = 0$ εάν οι παράμετροι (u,v) πάρουν τιμές έξω από την περιοχή που ορίζεται από το τετράγωνο $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$.
- ◆ Σε ένα οποιοδήποτε τετράγωνο της μορφής $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$, το πολύ $(p+1)(q+1)$ βασικές συναρτήσεις είναι μη μηδενικές και πιο συγκεκριμένα οι $R_{i,j}(u,v)$ για $i_0 - p \leq i \leq i_0$ και $j_0 - q \leq j \leq j_0$ είναι μη μηδενικές.
- ◆ Ακρότατο. Εάν $p > 0$ και $q > 0$, τότε όλες οι $R_{i,j}(u,v)$ φτάνουν σε ένα ακριβώς μέγιστο.
- ◆ Ισχύει $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$.
- ◆ Διαφορισιμότητα. Όλες οι μερικές παράγωγοι των $R_{i,j}(u,v)$ υπάρχουν στο δεδομένο εσωτερικό διάστημα των κόμβων. Σε ένα κόμβο u (ή κόμβο v) οι $R_{i,j}(u,v)$ είναι $p-k$ (ή $q-k$) φορές διαφορίσιμη σε αυτή τη διεύθυνση, όπου k είναι η πολλαπλότητα του κόμβου.
- ◆ Αν ισχύει $w_{i,j} = a$ για $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$ και $a \neq 0$, τότε $R_{i,j}(u,v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ για κάθε i, j .

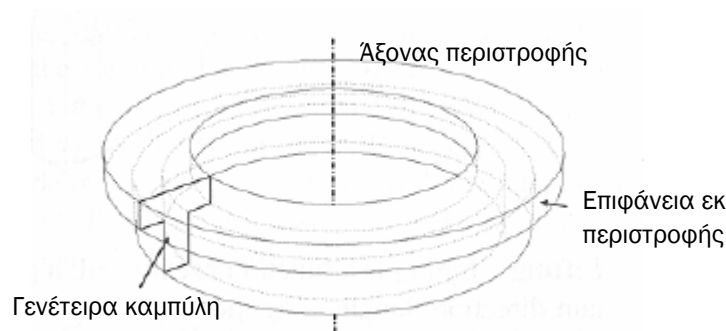
Οι παραπάνω ιδιότητες αποδίδουν τα παρακάτω ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά για τις επιφάνειες NURBS:

- ◆ Παρεμβολή ακρογωνιαίων σημείων. $S(0,0) = P_{0,0}$, $S(1,0) = P_{n,0}$, $S(0,1) = P_{0,m}$ και $S(1,1) = P_{n,m}$.
- ◆ Σταθερή τοπική μεταβολή. Κάθε τμήμα της επιφάνειας επηρεάζεται από συγκεκριμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Η περιοχή της επιφάνειας που είναι ήδη σχεδιασμένη παραμένει σταθερή με την εισαγωγή νέων σημείων ελέγχου για τη διαμόρφωσή της.
- ◆ Ιδιότητα κυρτού πολυγώνου. Υποθέτοντας ότι $w_{i,j} \geq 0$ για κάθε i, j εάν $(u,v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$, τότε τα σημεία $S(u,v)$ της επιφάνειας κυμαίνονται μεταξύ του κυρτού πολυγώνου των σημείων ελέγχου $P_{i,j}$ με $i_0 - p \leq i \leq i_0$ και $j_0 - q \leq j \leq j_0$.
- ◆ Τοπική μεταβολή. Αν ένα σημείο ελέγχου $P_{i,j}$ μετακινηθεί ή ένα βάρος $w_{i,j}$ μεταβληθεί, τότε η αλλαγή αυτή επηρεάζει μόνο την περιοχή της επιφάνειας που ορίζεται από το τετράγωνο $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$.

- ◆ Οι άρρητες B-Spline και Bezier και οι ρητές Bezier επιφάνειες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των NURBS επιφανειών.
- ◆ Διαφορισιμότητα. Τα σημεία $S(u, v)$ της επιφάνειας είναι $p-k$ (ή $q-k$) φορές παραγωγίσιμα για κάθε κόμβο u (ή κόμβο v) πολλαπλότητας k [19].

2.6. Επιφάνειες εκ περιστροφής (surfaces of revolution)

Ο ευκολότερος τρόπος για τον ορισμό επιφανειών περιστροφής είναι ο ορισμός μίας γενέτειρα καμπύλης στο χώρο (generator curve) και η περιστροφή της γύρω από έναν άξονα [22].



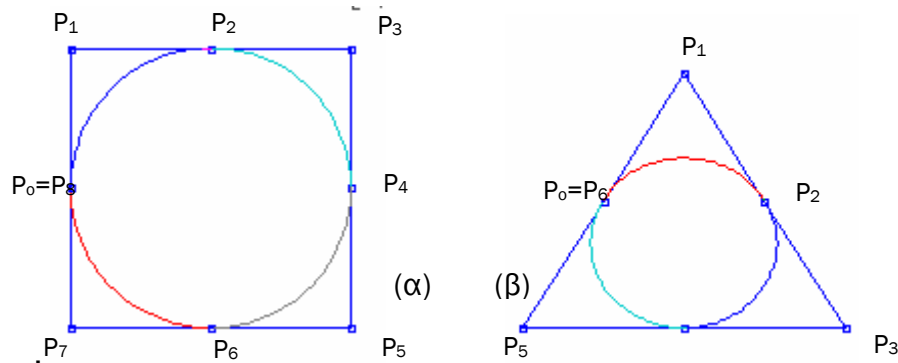
Εικόνα 2.21. Ο συνηθέστερος τρόπος κατασκευής μίας επιφάνειας εκ περιστροφής[22].

Υποθέτοντας ότι η γενέτειρα καμπύλη είναι μία NURBS καμπύλη, q βαθμού και με διάνυσμα κόμβων V , συμφωνά με τη σχέση (2.25) ισχύει:

$$C(v) = \sum_{j=0}^m R_{j,q}(v) P_j$$

Επομένως, η δημιουργία της επιφάνειας εκ περιστροφής επιτυγχάνεται συνδυάζοντας τη σχέση (2.34) με τη σχέση ορισμού του κύκλου.

Ένας κύκλος, μπορεί να περιγραφεί με αρκετούς τρόπους. Οι συνηθέστεροι τρόποι, είναι με μια NURBS καμπύλη 2^{ου} βαθμού, με 9 σημεία ελέγχου που σχηματίζουν τετράγωνο (Εικόνα 2.22-α) ή με 7 σημεία ελέγχου που σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο (Εικόνα 2.22-β)



Εικόνα 2.22. Ορισμός κύκλου. Τα σημεία ελέγχου της NURBS καμπύλης που το περιγράφουν δημιουργούν είτε τετράγωνο(α), είτε ισοσκελές τρίγωνο(β).

Ο κύκλος περιγράφεται από τη σχέση $C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,2}(u)P_i$,

όταν τα σημεία ελέγχου σχηματίζουν τετράγωνο, το διάνυσμα κόμβων U και τα βάρη των σημείων ελέγχου είναι:

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\} \text{ και} \quad (2.35)$$

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\},$$

ενώ, όταν τα σημεία ελέγχου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο, το διάνυσμα κόμβων U και τα αντίστοιχα βάρη είναι:

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1 \right\} \text{ και} \quad (2.36)$$

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Άρα, η συνάρτηση της επιφάνειας NURBS (2.34):

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,2;j,q}(u, v) P_{i,j},$$

περιγράφει την επιφάνεια περιστροφής.

◆ Για $i=0$, τα σημεία ελέγχου $P_{0,j}$ είναι τα σημεία ελέγχου P_j της γεννήτριας καμπύλης

◆ Για j =σταθερό ισχύει:

$$\{w_{i,j}\} = \left\{ w_j, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot w_j, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot w_j, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot w_j, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot w_j, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot w_j \right\}, \text{ όπου } i=0,\dots,8$$

ή

$$\{w_{i,j}\} = \left\{ w_j, \frac{1}{2} \cdot w_j, \frac{1}{2} \cdot w_j, \frac{1}{2} \cdot w_j, \frac{1}{2} \cdot w_j, \frac{1}{2} \cdot w_j \right\}, \text{ όπου } i=0,\dots,6$$
(2.37)

2.7.Τεχνική « Lofting »

Η τεχνική «**Lofting**» είναι μία τεχνική κατασκευής τρισδιάστατων επιφανειών, σύμφωνα με την οποία προσαρμόζεται επιφάνεια πάνω σε καμπύλες (cross sections) στο χώρο[4]. Δοθέντος του συνόλου NURBS καμπυλών (K) από τις οποίες η προς σχεδιασμό NURBS επιφάνεια πρέπει να περάσει, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

1. Όλες οι καμπύλες γίνονται, αν δεν είναι, συμβατές μεταξύ τους, ώστε να χαρακτηρίζονται από το ίδιο βαθμό και αριθμό σημείων ελέγχου καθώς και από κοινό διάνυσμα κόμβων. Θεωρούνται ισοπαραμετρικές γραμμές στη διεύθυνση u και είναι οι εξής :

$$C_k^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_{i,k}^w \quad \text{όπου } k=0,\dots,K$$
(2.38)

Οι $C_k^w(u)$ χαρακτηρίζονται από το ίδιο διάνυσμα κόμβων U .

2. Υπολογίζονται οι τιμές v_k και το διάνυσμα κόμβων V . Οι τιμές v_k είναι οι τιμές στις οποίες βρίσκονται οι καμπύλες $C_k^w(u)$, π.χ. η $C_0^w(u)$ βρίσκεται στο $v_k=0$.
3. Για κάθε i , όπου $i=0,\dots,n$ γίνεται παρεμβολή καμπύλης στην v διεύθυνση από τα σημεία $P_{i,k}^w$, όπου $k=0,\dots,K$, στις αντίστοιχες τιμές v_k , δηλ.

$$P_{i,k}^w = C(v_k) = \sum_{j=0}^K N_{j,q}(v) Q_{j,k}^w$$
(2.39)

και υπολογίζονται τα σημεία ελέγχου $Q_{j,k}^w$ που είναι και σημεία ελέγχου της επιθυμητής επιφάνειας [22].

2.8 Αλγόριθμοι

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία για το σχεδιασμό των καμπυλών NURBS στο λογισμικό **T4T**. Οι αλγόριθμοι αυτοί προτείνονται από τους Pieg1 and Tiller [19] και δίνουν μεγάλη ταχύτητα στην κατασκευή των καμπυλών. Οι εν λόγω αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του διαστήματος στο οποίο ανήκει η κάθε φορά χρησιμοποιούμενη τιμή της ελεύθερης παραμέτρου (**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1**), για τον

υπολογισμό των αντίστοιχων Βασικών συναρτήσεων (**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.2**), για τον υπολογισμό των σημείων της καμπύλης NURBS (**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.3**), για τον υπολογισμό των παραγώγων των Βασικών συναρτήσεων (**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.4**) και για τον υπολογισμό των παραγώγων των σημείων της καμπύλης NURBS (**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ 2.5-2.6**).

Οι αλγόριθμοι δίδονται στη συνέχεια σε ψευδοκώδικα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1

```
int FindSpan (n, p, u, U)
{
    if (u == U[n+1]) return(n);
    low = p;
    high = n+1;
    mid = (low + high)/2;
    while (u<U[mid] || u>=U[mid+1])
    {
        if (u<U[mid])
            high = mid;
        else
            mid = (low + high)/2;
    }
    return (mid);
}
```

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.2

```
AllBasisFuns (i, u, p, u, U, n)
{
    n[0] = 1.0;
    for (j=1; j<=p; j++) {
        left[j] = u-U[i+1-j];
        right[j] = U[i+j]-u;
        saved = 0.0;
        for (r=0; r<j; r++) {
            temp = n[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
            n[r] = saved + right[r+1]*temp;
            saved = left[j-r]*temp;
        }
        n[j] = saved;
    }
}
```

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.3

```
CurvePoint (n, p, U, P, W, u, C)
{
    span = FindSpan(n, p, u, U)
    BasiaFuns(span, u, p, U, n)
    Cw = 0.0;
    w= 0.0;
    for(j=0; j<=p; j++) {
        Cw += n[j]*P[span-p+j]* W[span-p+j];
        w+ = n[j]* W[span-p+j];
    }
```

```

    }
    C = Cw/w;
}

```

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.4

DersBasisFuns(i, u, p, n, U, ders)

```

{
    ndu[0][0] = 1.0;
    for (j=1;j<=p;j++){
        left[j]= u-U[i+1-j];
        right[j]= U[i+j] - u;
        saved= 0.0;
        for (r=0; r=j-1;r++){
            ndu[j][r]= right[r+1] + left[j-r];
            temp= ndu[r][j-1] / ndu[j][r];
            ndu[r][j]= saved + right[r+1]*temp;
            saved= left[j-r]*temp;
        }
        ndu[j][j]= saved;
    }
    for (j=0; j<=p;j++)
        ders[0][j]= ndu[j][p];
    for (r=0; r<=p; r++){
        s1= 0;
        s2= 1;
        a[0][0]= 1.0;
        for (k=1;k<=n;k++){
            d= 0.0;
            rk= r-k;
            pk= p-k;
            if (r >= k ){
                a[s2][0]= a[s1][0] / ndu[pk+1][rk];
                d = a[s2][0]*ndu[rk][pk];
            }
            if (rk>= -1) j1=1;
            else j1= -rk;
            if (r-1<= pk) j2=k-1;
            else j2=p-r;
            for (j=j1;j1<=j2;j1++){
                a[s2][j]=(a[s1][j]- a[s1][j-1]) / ndu[pk+1][rk+j];
                d+= a[s2][j]*ndu[rk+j][pk];
            }
            if (r<=pk) {
                a[s2][k]= -a[s1][k-1] / ndu[pk+1][r];
                d+= a[s2][k]* ndu[r][pk];
            }
            ders[k][r]= d;
            j= s1;
            s1= s2;
            s2= j;
        }
    }
}

```

```

    }
    r= p;
    for (k=1;k<=n;k++){
        for (j=0;j<=p;j++){
            ders[k][j]= ders[k][j]*r;
        }
        r=r*(p-k);
    }
}

```

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.5

CurveDerivsAlg1(n, p, U, P, W, u, d, aders, wders)

```

{
    du= min(d,p);
    for(k=p+1;k<=d;k++){
        aders[k]= 0.0;
        wders[k]= 0.0;
    }
    span= Findspan(n, p, u, U);
    DersBasisFuns(span, u, p, du, U, ders);
    for (k=0;k<=du;k++){
        aders[k]= 0.0;
        wders[k]= 0.0;
        for (j=0;j<=p;j++){
            aders[k]+= ders[k][j]*P[span-p+ j]*W[span-p+j];
            wdes[k]+= ders[k][j]*W[span-p+j];
        }
    }
}

```

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.6

RatCurveDerivs(aders, wders, d, CK)

```

{
    for (k=0; k<=d; k++){
        v= aders[k];
        for (i=1;i<=k; i++){
            v+= - Bin[k][i]*wders[i]* aders[k-i];
        }
        CK[k]= v/ wders[0];
    }
}

```


3

Το λογισμικό Tools for Turbomachinery



3.1. Εισαγωγή

Το λογισμικό **T4T** (*Tools for Turbomachinery*) είναι μια συλλογή από γεωμετρικά εργαλεία, τα οποία χρησιμοποιούνται για την παραγωγή και απεικόνιση τρισδιάστατων πτερωτών στροβιλομηχανών. Οι πτερωτές παράγονται με τη χρήση καμπυλών NURBS, η θεωρία των όποιων παρουσιάστηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, αναλύεται η μεθοδολογία, που ακολουθείται για την κατασκευή των τρισδιάστατων πτερυγώσεων:

- ◆ Δισδιάστατη απεικόνιση - Ορισμός των διατομών των πτερυγίων και των μεσημβρινών καμπυλών, που ορίζουν τη πλήμνη και το κέλυφος της πτερύγωσης (Παράγραφος 3.2).
- ◆ Τρισδιάστατη απεικόνιση - «Lofting» για την παραγωγή της τρισδιάστατης γεωμετρίας των πτερυγίων και περιστροφή των γεννητριών καμπυλών για τη παραγωγή των επιφανειών της πλήμνης και του κελύφους (Παράγραφος 3.3).

Επίσης, παρουσιάζεται ένα αναλυτικό εγχειρίδιο χρήσης του λογισμικού (Παράγραφος 3.4).

Το **T4T** τρέχει σε περιβάλλον Windows και αναπτύχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Visual Basic 6.0.

3.2. Δισδιάστατη Απεικόνιση

3.2.1. Κατασκευή των διατομών ενός πτερυγίου

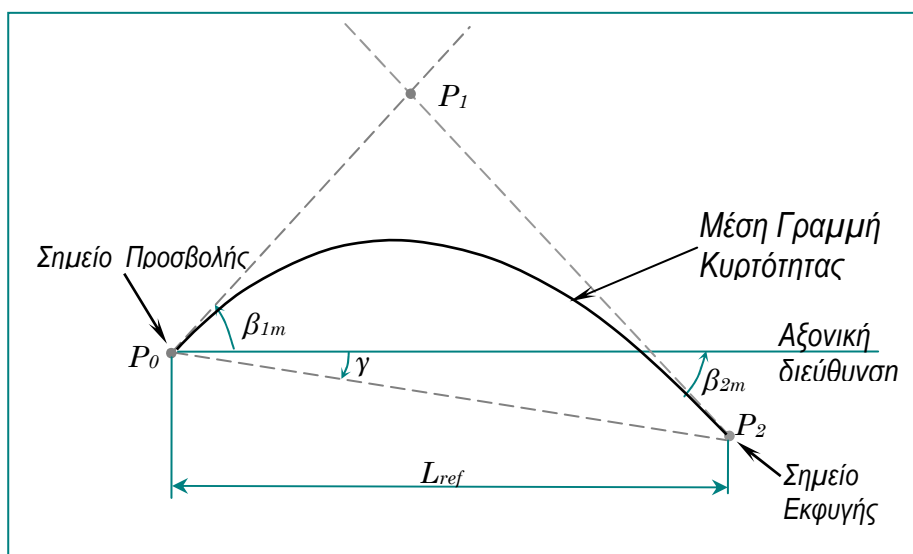
Το **T4T** για την κατασκευή μίας διατομής πτερυγίου χρησιμοποιεί 2 καμπύλες. Η πρώτη περιγράφει τη μέση γραμμή κυρτότητας του πτερυγίου (mean camber line) που συνήθως ισαπέχει από την άνω και κάτω πλευρά του και η δεύτερη που περιγράφει τις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης (pressure side και suction side) του πτερυγίου.

Η μέση γραμμή κυρτότητας περιγράφεται με μία 2^{ου} βαθμού NURBS καμπύλης με 3 σημεία ελέγχου, P_i , όπου $i = 0, 1, 2$. Το αρχικό σημείο ελέγχου P_0 της μέσης γραμμής συμπίπτει με το σημείο προσβολής του πτερυγίου, ενώ το τελικό σημείο P_2 συμπίπτει με το σημείο εκφυγής του πτερυγίου. Το πολύγωνο ελέγχου

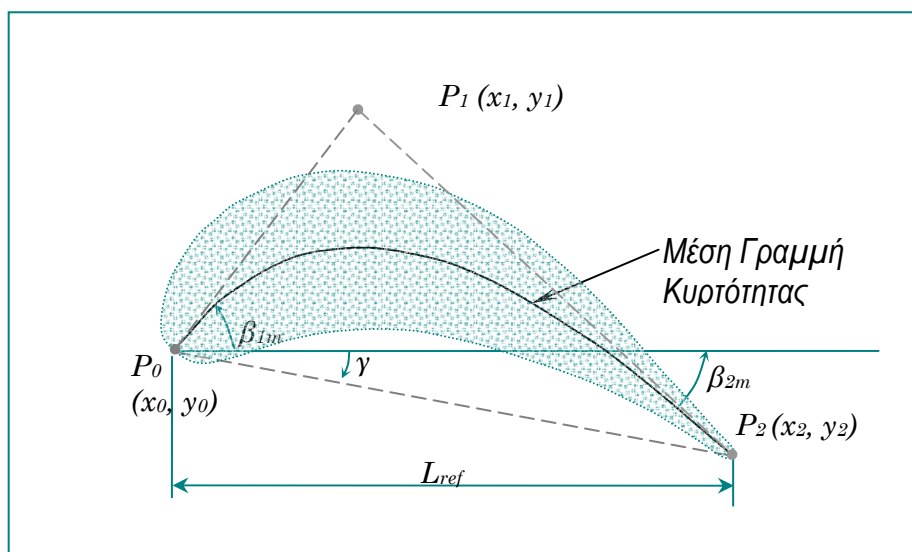
κάθε ανοικτής NURBS καμπύλης εφάπτεται στα άκρα της, επομένως η θέση του μεσαίου σημείου P_1 είναι το σημείο τομής των 2 γραμμών που περνάνε από τα σημεία προσβολής και εκφυγής και σχηματίζουν γωνίες β_{1m} και β_{2m} με την αξονική διεύθυνση, αντίστοιχα. Συνεπώς, ορίζοντας τις γωνίες του πτερυγίου (β_{1m} , β_{2m}) και χρησιμοποιώντας την αξονική απόσταση (L_{ref}) και τη γωνία κλίσης (γ) υπολογίζονται οι θέσεις των P_1 και P_2 συναρτήσει του P_0 (Εικόνα 3.1).

Με αυτό τον τρόπο χρησιμοποιούνται σχεδιαστικοί παράμετροι με φυσική σημασία για την κατασκευή της διατομής του πτερυγίου (Εικόνα 3.1) [23].

Οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της μέσης γραμμής δίνονται από τη σχέση (3.1) στη γενική μορφή (Εικόνα 3.2). Στις περιπτώσεις ιδιομορφίας όπου $\beta_{1m}=0$ και $\beta_{2m} \neq 0$ (Εικόνα 3.3) και $\beta_{1m}=\beta_{2m}=\gamma$ (Εικόνα 3.4) οι συντεταγμένες δίνονται από τις σχέσεις (3.2) και (3.3), αντίστοιχα.



Εικόνα 3.1. Σχεδιαστικοί παράμετροι για την κατασκευή διατομής πτερυγίου (β_{1m} , β_{2m} , L_{ref} , γ).



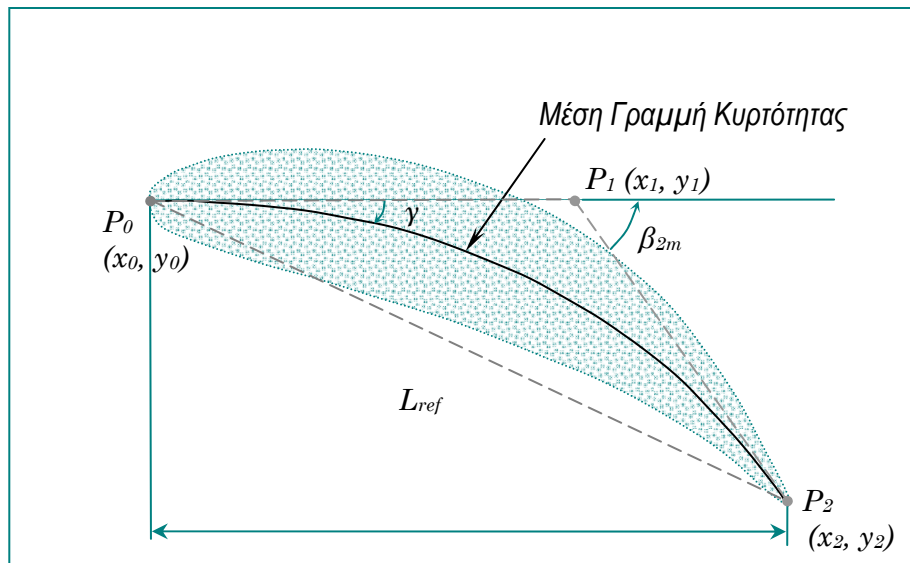
Εικόνα 3.2. Γενική μορφή της μέσης γραμμής κυρτότητας του πτερυγίου.

$$y_2 = y_0 + L_{ref} * \tan(\gamma)$$

$$x_2 = x_0 + L_{ref}$$

$$y_1 = \frac{(y_2 - L_{ref} * \tan(\beta_{1m}))}{\left(1 - \frac{\tan(\beta_{2m})}{\tan(\beta_{1m})}\right)} \quad (3.1)$$

$$x_1 = \frac{y_1}{\tan(\beta_{1m})}$$



Εικόνα 3.3. Η μορφή της μέσης γραμμής κυρτότητας για την περίπτωση $\beta_{1m}=0$ και $\beta_{2m} \neq 0$.

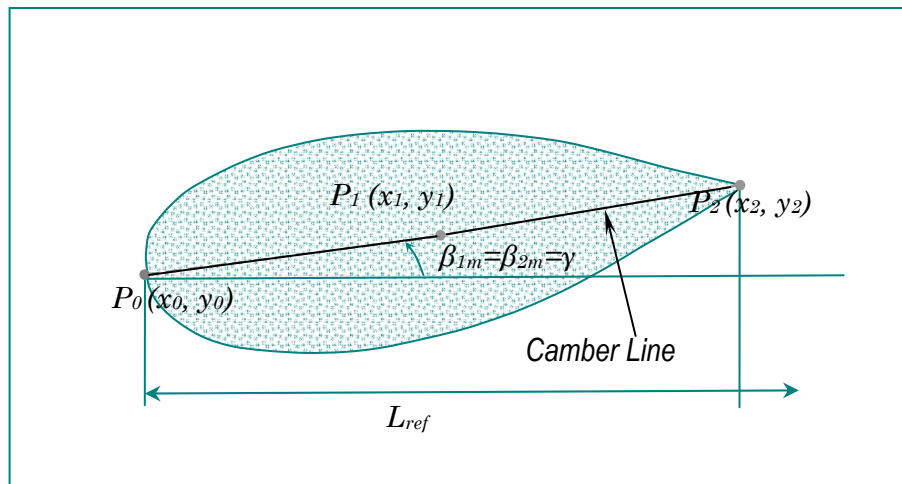
$$y_2 = y_0 + L_{ref} * \tan(\gamma)$$

$$x_2 = x_0 + L_{ref}$$

$$y_1 = y_0$$

$$x_1 = L_{ref} - \frac{y_2}{\tan(\beta_{2m})}$$

(3.2)



Εικόνα 3.4. Η μορφή της μέσης γραμμής κυρτότητας για την περίπτωση $\beta_{1m} = \beta_{2m} = \gamma$.

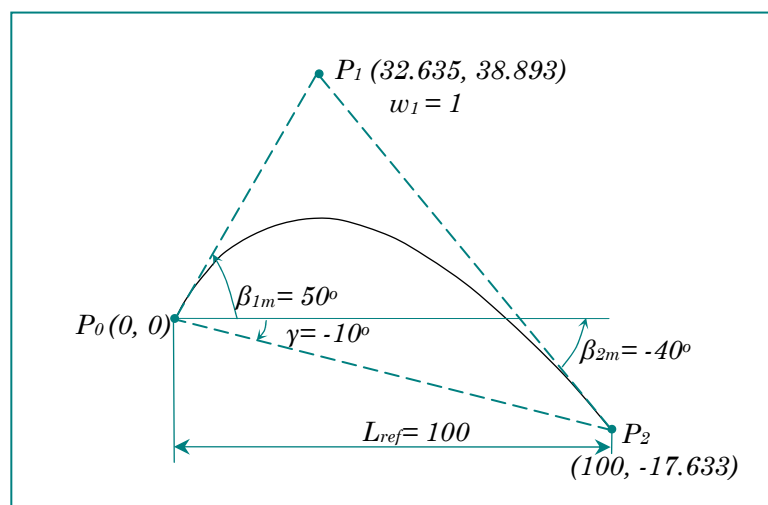
$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + L_{ref} * \tan(\gamma) \\ x_2 &= x_0 + L_{ref} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}$$

$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

Για την καλύτερη κατανόηση της δομής του λογισμικού θα χρησιμοποιηθεί μία απλή εφαρμογή, πάνω στην οποία θα εφαρμόζεται σταδιακά η εξέλιξή του. Οι τιμές που χρησιμοποιούνται είναι οι προεπιλεγμένες τιμές του λογισμικού (defaults settings).

✿ Έστω ότι οι παράμετροι της μέσης γραμμής παίρνουν τις τιμές: $\beta_{1m} = 50^\circ$, $\beta_{2m} = -40^\circ$, $L_{ref} = 100$, $\gamma = -10^\circ$ και οι συντεταγμένες του P_0 είναι $(0,0)$. Οι συντεταγμένες των P_1 και P_2 προκύπτουν $(32.635, 38.893)$, $(100, -17.633)$ αντίστοιχα (Εικόνα 3.5).



Εικόνα 3.5. Η μέση γραμμή για $\beta_{1m} = 50^\circ$, $\beta_{2m} = -40^\circ$, $L_{ref} = 100$, $\gamma = -10^\circ$.

Η επιφάνεια του πτερυγίου σχεδιάζεται με μία ανοικτή καμπύλη NURBS 3ου βαθμού, η οποία «χτίζεται» γύρω από την μέση γραμμή κυρτότητας, σύμφωνα με την κατανομή πάχους πτερυγίου, που παρέχεται μέσω αρχείου. Για τη δημιουργία αυτής της κλειστής επιφάνειας πρέπει το πρώτο σημείο ελέγχου της καμπύλης να συμπίπτει με το τελευταίο στο σημείο εκφυγής του πτερυγίου, ενώ ένα σημείο ελέγχου πρέπει να βρίσκεται πάντα στο σημείο προσβολής του πτερυγίου⁵. Οι συντεταγμένες των υπολοίπων σημείων υπολογίζονται με τη βοήθεια των κάθετων στην μέση γραμμή διανυσμάτων (normal vectors) στις αντίστοιχες θέσεις και την κατανομή πάχους του πτερυγίου.

Όπως προαναφέρθηκε, η κατανομή πάχους του πτερυγίου δίνεται μέσω αρχείου. Για την συγκεκριμένη έκδοση του λογισμικού η μορφή του αρχείου είναι η εξής:

N	←	Αριθμός διατομών
n_ps(i)	←	Αριθμός σημείων ελέγχου στην πλευρά υπερπίεσης για την διατομή i
n_ss(i)	←	Αριθμός σημείων ελέγχου στην πλευρά υποπίεσης για την διατομή i
p(i,j)	w(i,j)	Σημεία της μέσης γραμμής κυρτότητας για τα οποία δίνονται τα πάχη p(i,j) (δίνονται σαν ποσοστά του μήκους της μέσης γραμμής - u) και τα αντίστοιχα πάχη w(i,k) όπου j = 1,...,n_ps(i) και k = 1,...,n_ss(i)
⋮	⋮	
p(i,k)	w(i,k)	
⋮	⋮	

Αρχικά υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος της μέσης γραμμής και από αυτή τα κάθετα διανύσματα στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης του πτερυγίου για τα σημεία που γνωρίζουμε το πάχος του (Σχήμα 3.6). Τα κάθετα διανύσματα για τις πλευρές υπερπίεσης και υποπίεσης δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους (3.4) και (3.5):

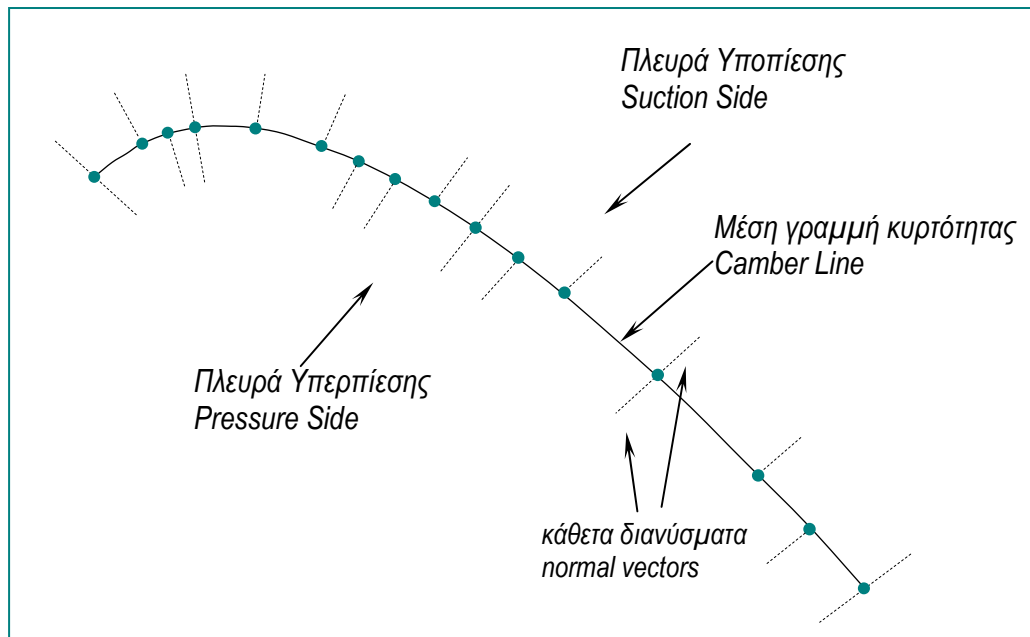
$$n = \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad \text{και} \quad (3.4)$$

$$n = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (3.5)$$

όπου (\dot{x}, \dot{y}) είναι η πρώτη παράγωγος της μέσης γραμμής στο σημείο (x, y) .

Πολλαπλασιάζοντας τα κάθετα διανύσματα με τα αντίστοιχα πάχη υπολογίζονται οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της επιφάνειας του πτερυγίου.

⁵ Στο σημείο εκφυγής βρίσκεται και το P₂ (3ο σημείο ελέγχου της μέσης γραμμής). Επομένως τα ακραία σημεία ελέγχου της καμπύλης που περιγράφει την επιφάνεια του πτερυγίου έχουν συντεταγμένες (x_2, y_2) . Αντίστοιχα, το σημείο ελέγχου που βρίσκεται στο σημείο προσβολής έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) .



Εικόνα 3.6. Τα κάθετα διανύσματα, για κάθε πλευρά της μέσης γραμμής κυρτότητας, υπολογίζονται στα σημεία που είναι γνωστά τα πάχη. Ο αριθμός και η θέση των σημείων μπορεί να διαφέρει για κάθε πλευρά.

✿ Έστω ότι κατανομή πάχους της συγκεκριμένης διατομής του πτερυγίου είναι:

11 p_i : σημεία πάνω στη μέση γραμμή (%)			Thickness _i : Πάχη		
Πλευρά Υπερπίεσης	(1)	1.0	1	0.0	5 (12)
	(2)	0.9	2	0.1	10 (13)
	(3)	0.8	6	0.2	12 (14)
	(4)	0.7	9	0.3	13 (15)
	(5)	0.6	11	0.4	13 (16)
	(6)	0.5	12	0.5	12 (17)
	(7)	0.4	13	0.6	11 (18)
	(8)	0.3	13	0.7	9 (19)
	(9)	0.2	12	0.8	6 (20)
	(10)	0.1	10	0.9	2 (21)
	(11)	0.0	5	1.0	1 (22)
			Πλευρά Υποπίεσης		

Το ανοιχτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων της μέσης γραμμής (2^{ου} βαθμού με 3 σημεία ελέγχου) είναι: $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$, άρα $\max_u = 1$. Για να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων της μέσης γραμμής κυρτότητας, στα οποία θα υπολογιστούν τα κάθετα διανύσματα, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

$$p_i \longrightarrow u = p_i * \max_u \longrightarrow C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i}$$

$$\longrightarrow C^{(k)}(u) = \frac{A^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u) C^{(k-i)}(u)}{w(u)}$$

Τα p_i είναι κοινά και για τις δύο πλευρές του πτερυγίου, δηλαδή είναι κοινά τα σημεία στα οποία θα υπολογιστούν τα κάθετα διανύσματα. Επομένως:

p_i	u	$C_u(x, y)$		$C'_u(x, y)$		Κάθετα Διανύσματα			
						Πλευρά Υπερπίεσης		Πλευρά Υποπίεσης	
1.0	1.0	100	-17.63	134.73	113.05	-0.64	-0.77	-0.77	0.64
0.9	0.9	86.87	-7.28	127.78	-93.97	-0.59	-0.81	-0.63	0.78
0.8	0.8	74.44	1.16	120.84	-74.88	-0.53	-0.85	-0.45	0.89
0.7	0.7	62.71	-10.70	113.89	-55.80	-0.44	-0.90	-0.23	0.97
0.6	0.6	51.66	12.32	106.95	-36.72	-0.32	-0.95	-0.02	1.00
0.5	0.5	41.32	15.04	100	-17.63	-0.17	-0.98	0.17	0.98
0.4	0.4	31.66	15.85	93.05	1.45	0.02	-1.00	0.32	0.95
0.3	0.3	20.71	14.75	86.11	20.53	0.23	-0.97	0.44	0.90
0.2	0.2	14.44	11.74	79.16	39.62	0.45	-0.89	0.53	0.85
0.1	0.1	6.87	6.82	72.22	58.70	0.63	-0.78	0.59	0.81
0.0	0.0	0	0	65.27	77.79	0.77	-0.64	0.64	0.77

Πίνακας 3.1. Υπολογισμός κάθετων διανυσμάτων

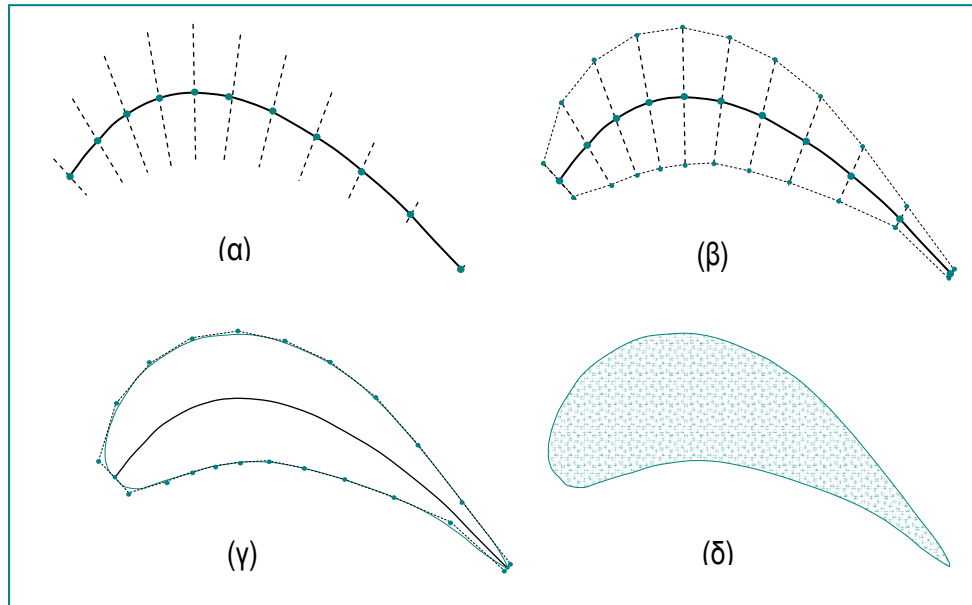
Αφού υπολογιστούν τα κάθετα διανύσματα και για τις δύο πλευρές, πολλαπλασιάζοντας τα με τα αντίστοιχα πάχη, προκύπτουν οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της διατομής του πτερυγίου (Εικόνα 3.7).

Αφού ολοκληρωθεί η κατασκευή της διατομής, υπολογίζεται το κέντρο βάρους της. Ο σχεδιασμός κάθε διατομής του πτερυγίου στη περιοχή σχεδίασης του **T4T**, γίνεται με ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν N σημεία της διατομής⁶ (Εικόνα 3.8). Επομένως, η διατομή μπορεί να θεωρηθεί ένα N -γωνο και οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους της δίνονται από τις σχέσεις (3.6).

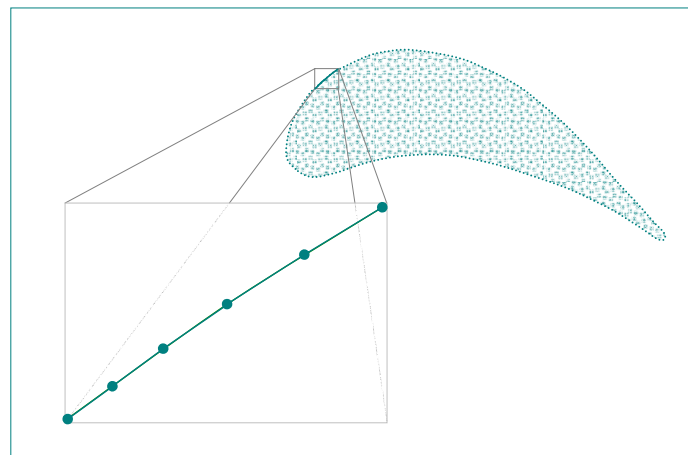
⁶ **Υπολογισμός N σημείων καμπύλης:** Έστω ότι η απόσταση 2 διαδοχικών σημείων καμπύλης είναι du , δηλ. $C_1=C(u)$ και $C_2=C(u+du)$. Για δεδομένο ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων U

$\left\{ \begin{array}{ll} u_i = u_1, & i \leq k \\ u_{i+1} - u_i = \sigma \alpha \theta \epsilon \rho \acute{o}, & k \leq i < n+2 \\ u_i = u_{k+(n+1)}, & i \geq n+2 \end{array} \right\}$ μπορούν να υπολογιστούν $N = \left(\frac{u_k + (n+1)}{du} \right) + 1$ σημεία

της καμπύλης. Καθένα από τα N σημεία $C_i=C(u_i)$ απέχει du από το προηγούμενο $C_{i-1}=C(u_{i-1})=C(u_i-du)$ και επόμενο $C_{i+1}=C(u_{i+1})=C(u_i+du)$ σημείο της καμπύλης. Το βήμα μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ΠΡΕΠΕΙ να είναι σταθερό για να υλοποιηθεί η σωστή σχεδίαση και όσο πιο μικρό επιλεγεί το du , τόσο πιο ακριβής θα είναι.



Εικόνα 3.7. (α) τα κάθετα διανύσματα πολλαπλασιασμένα με τα αντίστοιχα πάχη, (β) το πολύγωνο ελέγχου της διατομής του πτερυγίου, (γ-δ) η διατομή του πτερυγίου.



Εικόνα 3.8. Ο σχεδιασμός της διατομής του πτερυγίου γίνεται με ευθύγραμμα τμήματα.

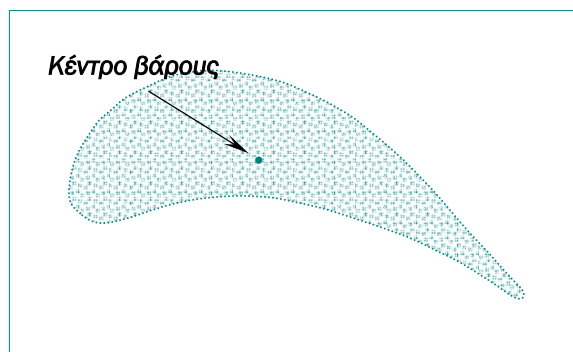
$$\begin{aligned}
 C_X &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\
 C_Y &= \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\
 A &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου C_X, C_Y : οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του πολυγώνου

x_i, y_i : οι συντεταγμένες της κορυφής i του πολυγώνου

A : το εμβαδόν του πολυγώνου

☼ Το βήμα du που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό της επιφάνειας του πτερυγίου είναι 0.01, ενώ το διάνυσμα κόμβων είναι:
 $U = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 22, 22, 22\}$ ⁷
 Άρα, υπολογίζονται 220 σημεία πάνω στη καμπύλη ($N=220$) και το κέντρο βάρους της διατομής, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.6), βρίσκεται στο σημείο (40.30,10.13) (Εικόνα 3.9).



Εικόνα 3.9. Το κέντρο βάρους της διατομής του πτερυγίου.

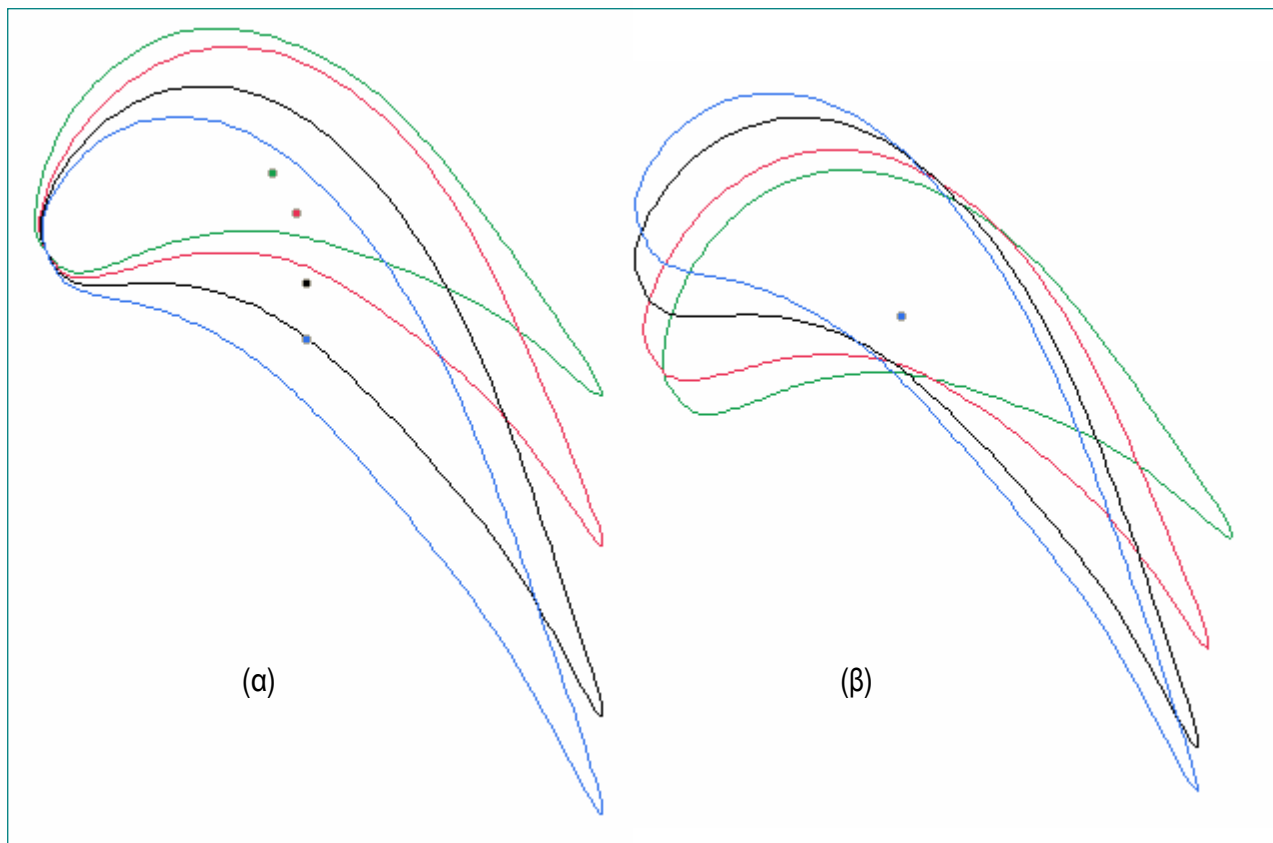
Στη συγκεκριμένη έκδοση του λογισμικού χρησιμοποιούνται 4 ανεξάρτητες μεταξύ τους διατομές για τον προσδιορισμό του τρισδιάστατου πτερυγίου, καθώς επίσης δίνεται και η δυνατότητα μεταφοράς τους, ταυτίζοντας τα κέντρα βάρους (Εικόνα 3.10).

Χρησιμοποιώντας και για τις 4 διατομές την ίδια κατανομή πάχους που χρησιμοποιήθηκε και πιο πάνω, η διαφορετικότητα των διατομών έγκειται στις διαφορετικές σχεδιαστικές παραμέτρους των τεσσάρων μέσω γραμμών.

	1 ^η διατομή	2 ^η διατομή	3 ^η διατομή	4 ^η διατομή
L_{ref}	100	100	100	100
β_{1m}	50	40	35	30
β_{2m}	-40	-55	-60	-60
γ	-10	-20	-30	-35

Πίνακας 3.2. Οι σχεδιαστικοί παράμετροι για τις τέσσερις διατομές του πτερυγίου με κοινή κατανομή πάχους.

⁷ Η καμπύλη είναι 3^{ου} βαθμού και έχει 25 σημεία ελέγχου, άρα το ανοικτό ομοιόμορφο διάνυσμα κόμβων U έχει μέγεθος 28.



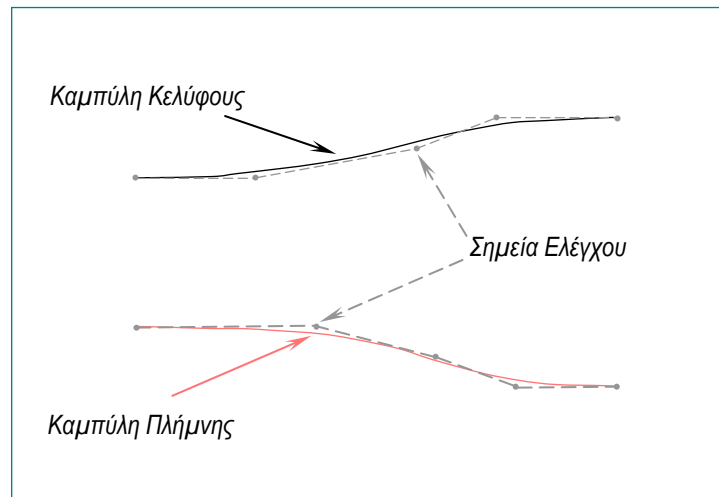
Εικόνα 3.10. (α) οι διατομές του πτερυγίου με κοινό σημείο προβολής (β) οι διατομές του πτερυγίου με κοινό κέντρο βάρους.

3.2.2. Πλήμνη & Κέλυφος (Hub & Shroud)

Οι κωνικές επιφάνειες της πλήμνης και του κελύφους ορίζονται ως επιφάνειες εκ περιστροφής και όπως αναφέρθηκε στο 2^ο Κεφάλαιο απαιτούνται δύο γεννήτριες καμπύλες (generators) και ο άξονας περιστροφής για τον ορισμό τους.

Στο T4T, οι γεννήτριες καμπύλες περιγράφονται με NURBS καμπύλες, σχεδιασμένες στο μεσημβρινό επίπεδο, ενώ ως άξονας περιστροφής λαμβάνεται ο άξονας z. Ο βαθμός των καμπυλών (p) καθώς και τα σημεία (n+1) που τις καθορίζουν είναι κοινός και δίνονται από το χρήστη. Τα σημεία μπορεί να επιλέξει να είναι είτε σημεία των καμπυλών είτε σημεία ελέγχου (Εικόνα 3.11).

Παράλληλα με το σχεδιασμό των καμπυλών της πλήμνης και του κελύφους σχεδιάζονται με γραμμική παρεμβολή αυτών, δύο επιπλέον καμπύλες. Η σχετική τους θέση, δίνεται ως ποσοστό της απόστασης των δύο ακραίων (πλήμνης και κελύφους). Οι δύο βοηθητικές αυτές καμπύλες αποτελούν γεννήτριες καμπύλες για το ορισμό δυο νέων κωνικών επιφανειών, που απαιτούνται για την σύμμορφη απεικόνιση των διατομών του πτερυγίου που θα περιγραφεί στην επόμενη παράγραφο.



Εικόνα 3.11. Οι καμπύλες πλήμνης - κελύφους και τα αντίστοιχα πολύγωνα ελέγχου.

✿ Έστω ότι οι καμπύλες είναι 3^{ου} βαθμού και δίνονται 5 σημεία ελέγχου για την κάθε μία:

Καμπύλη Πλήμνης	
Z	R
0	200
45	200
75	190
95	180
120	180

Πίνακας 3.3. Συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης της πλήμνης.

Καμπύλη Κελύφους	
Z	R
0	250
30	250
70	260
90	270
120	270

Πίνακας 3.4. Συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης του κελύφους

Και οι 2 ενδιάμεσες «βοηθητικές» καμπύλες βρίσκονται 35% και 70% μεταξύ των ακραίων καμπυλών . Δηλαδή ισχύει:

$$MC_1 = (1 - 0.35) * H + 0.35 * S$$

$$MC_2 = (1 - 0.70) * H + 0.70 * S$$

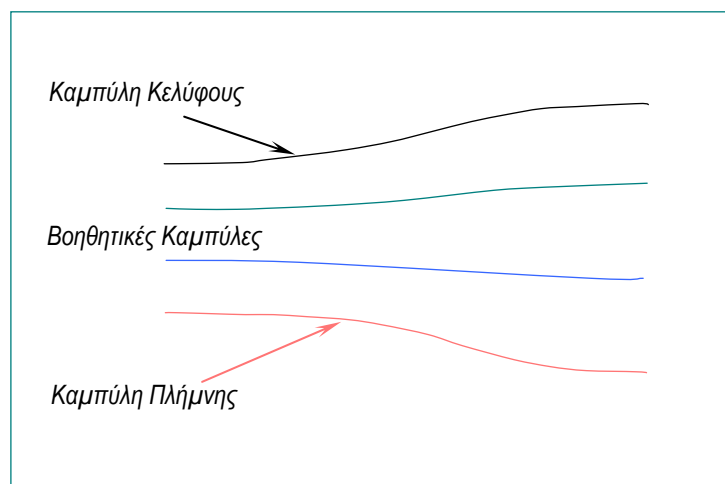
όπου MC_1 : σημείο της πρώτης βοηθητικής καμπύλης

MC_2 : σημείο της δεύτερης βοηθητικής καμπύλης

S : σημείο της καμπύλης κελύφους

H : σημείο της καμπύλης πλήμνης

Το αποτέλεσμα που προκύπτει δίδεται στην Εικόνα 3.12.



Εικόνα 3.12. Οι καμπύλες πλήμνης - κελύφους και οι ενδιάμεσες καμπύλες που προκύπτουν με γραμμική παρεμβολή των πρώτων.

3.3. Τρισδιάστατη Απεικόνιση

3.3.1. Κατασκευή ενός τρισδιάστατου πτερυγίου

Η διαδικασία της τρισδιάστατης κατασκευής του πτερυγίου πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Αρχικά, πραγματοποιείται η σύμμορφη απεικόνιση των τεσσάρων επίπεδων διατομών πάνω στις αντίστοιχες κωνικές επιφάνειες και εν συνεχεία με τη διαδικασία του «skinning» μέσω νέφους σημείων κατασκευάζεται μία NURBS επιφάνεια, που διατρέχει τα σημεία και των τεσσάρων διατομών. Επίσης, δίνεται στο χρήστη η δυνατότητα να επιλέξει τη φορά του συστήματος συντεταγμένων, στην ουσία να επιλέξει αν η τελική πτερωτή θα είναι δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη. Σύμμορφη απεικόνιση της αεροτομής πάνω στην αντίστοιχη κωνική επιφάνεια είναι η μεταφορά των σημείων της αεροτομής πάνω στην καμπύλη επιφάνεια, αντιστοιχώντας το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων της επίπεδης αεροτομής στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων της κωνικής επιφάνειας.

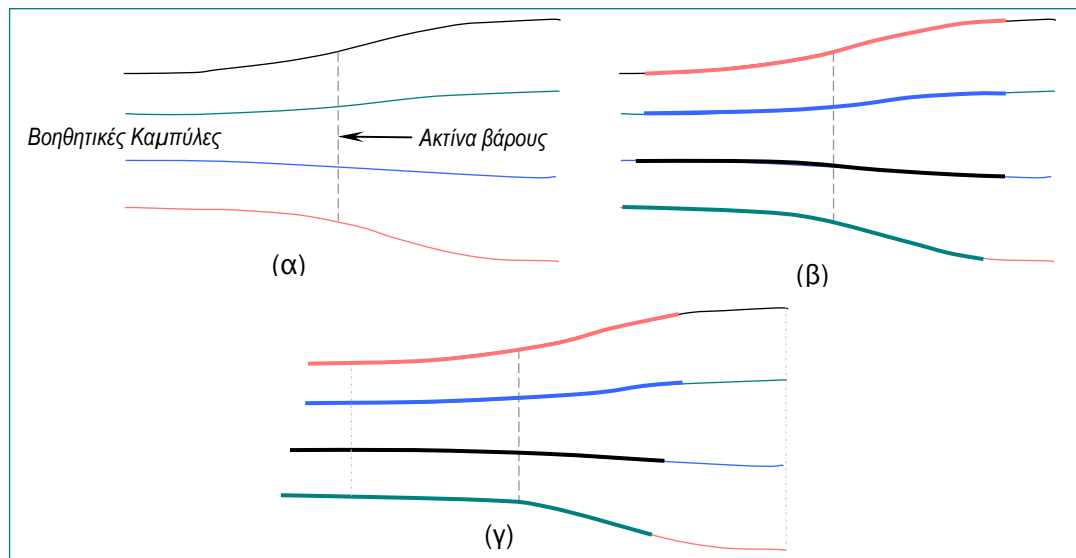
Πριν την σύμμορφη απεικόνιση των διατομών, ο χρήστης πρέπει να καθορίσει την αξονική θέση των κέντρων βάρους – «ακτίνα βάρους» (Εικόνα 3.13 -α), η οποία είναι κοινή για όλες τις διατομές και βάση της οποίας γίνεται η απεικόνιση. Έπειτα πραγματοποιείται ο έλεγχος εγκυρότητας.

Για να κατασκευαστεί το πτερύγιο θα πρέπει κάθε διατομή να εφάπτεται πλήρως πάνω στην αντίστοιχη κωνική επιφάνεια, επομένως ελέγχεται κατά πόσο το μήκος καθεμιάς εκ των καμπυλών που ορίζουν τις επιφάνειες επαρκεί για την απεικόνιση της αντίστοιχης διατομής συναρτήσει της «ακτίνας βάρους».

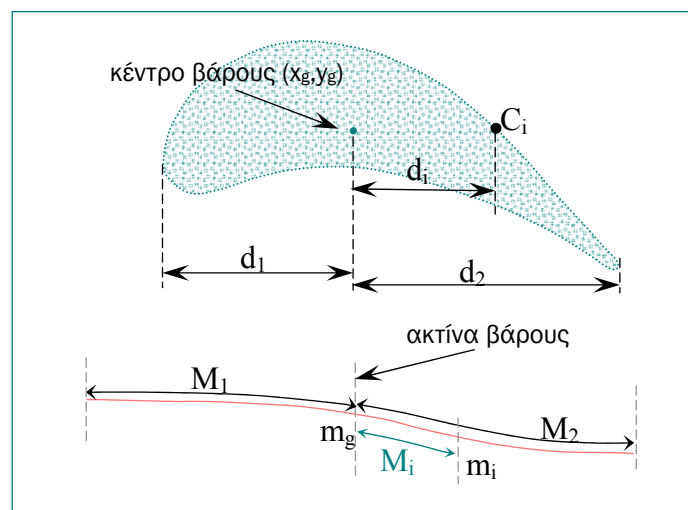
Αναλυτικότερα, για κάθε διατομή υπολογίζεται η απόσταση, ως προς την x-συντεταγμένη, του κέντρου βάρους της διατομής από τις ακμές προσβολής και εκφυγής. Έστω d_1 και d_2 οι δυο αποστάσεις αντίστοιχα. Για να θεωρηθεί εγκύρος ο έλεγχος θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες $d_1 \leq M_1$ **ΚΑΙ** $d_2 \leq M_2$, όπου M_1 και M_2 τα μήκη από την αξονική θέση του κέντρου βάρους μέχρι τα άκρα της αντίστοιχης

γενέτειρας καμπύλης (Εικόνα 3.14). Στην περίπτωση όπου οι συνθήκες δεν πληρούνται, ο χρήστης έχει τις εξής επιλογές:

- ◆ να μεγαλώσει το μήκος των μεσημβρινών καμπυλών,
- ◆ να μετατοπίσει την ακτίνα βάρους,
- ◆ να μικρύνει τις αξονικές αποστάσεις (L_{ref}) των διατομών (Εικόνα 3.13- β, γ).



Εικόνα 3.13. (α) Η ακτίνα βάρους του περυγίου βάση της οποίας γίνεται η σύμμορφη απεικόνιση των διατομών (β) Έγκυρη απεικόνιση των διατομών (γ) Μη έγκυρη απεικόνιση των διατομών, δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να μεγαλώσει το μήκος των καμπύλων ή να μεταφέρει την ακτίνα βάρους πιο δεξιά



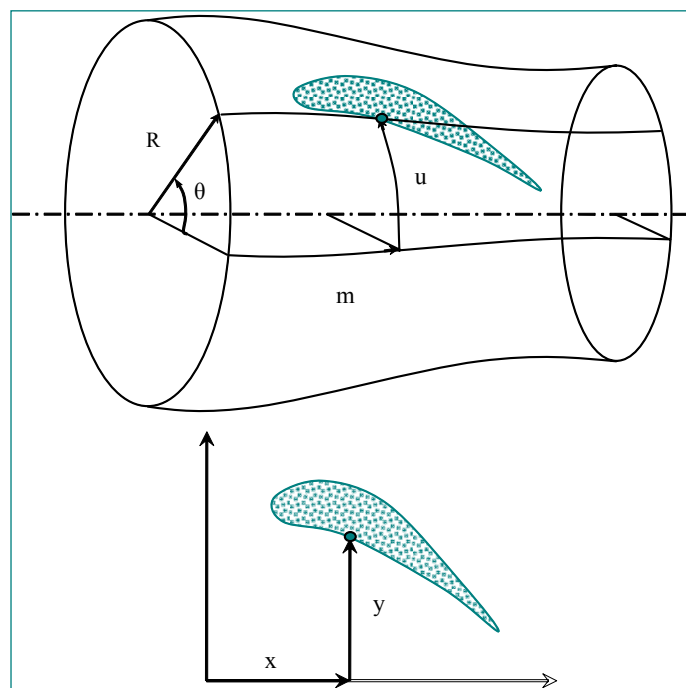
Εικόνα 3.14. Έλεγχος εγκυρότητας για την σύμμορφη απεικόνιση των διατομών του περυγίου

Αφού ολοκληρωθεί επιτυχώς ο έλεγχος, κάθε διατομή απεικονίζεται στην κωνική επιφάνεια, που ορίζεται από την αντίστοιχη καμπύλη, συναρτήσεως της ακτίνας βάρους. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες των καμπύλων διατομών του περυγίου υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη την πλήρη αντιστοιχία μεταξύ των y -

συντεταγμένων των επίπεδων διατομών με τις περιφερειακές συντεταγμένες (u) των καμπύλων διατομών και μεταξύ των x -συντεταγμένων των επίπεδων διατομών με τις μεσημβρινές συντεταγμένες (m) των καμπύλων διατομών (Εικόνα 3.15).

Έστω ότι το C_i σημείο μιας επίπεδης διατομής έχει συντεταγμένες (x_i, y_i) . Σύμφωνα με τα παραπάνω, αρχικά υπολογίζεται η απόσταση $d_i = |x_g - x_i|$ και εν συνεχεία η θέση (m_i) πάνω στη καμπύλη που απέχει από την ακτίνα βάρους (m_g) μήκος M_i ίσο με d_i (Εικόνα 3.14). Κατά αυτόν το τρόπο προκύπτει το σημείο $(m_i, R_i * \theta_i)$, που βρίσκεται πάνω στην κωνική επιφάνεια. Εντούτοις, για δεδομένη μεσημβρινή συντεταγμένη της καμπύλης (m_i), υπολογίζεται η αντιστοιχη ακτίνα R_i . Επομένως, για κάθε σημείο της επίπεδης διατομής (x_i, y_i) υπολογίζεται το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης διατομής με κυλινδρικές συντεταγμένες $(m_i, R_i, \theta_i = y_i / R_i)$.

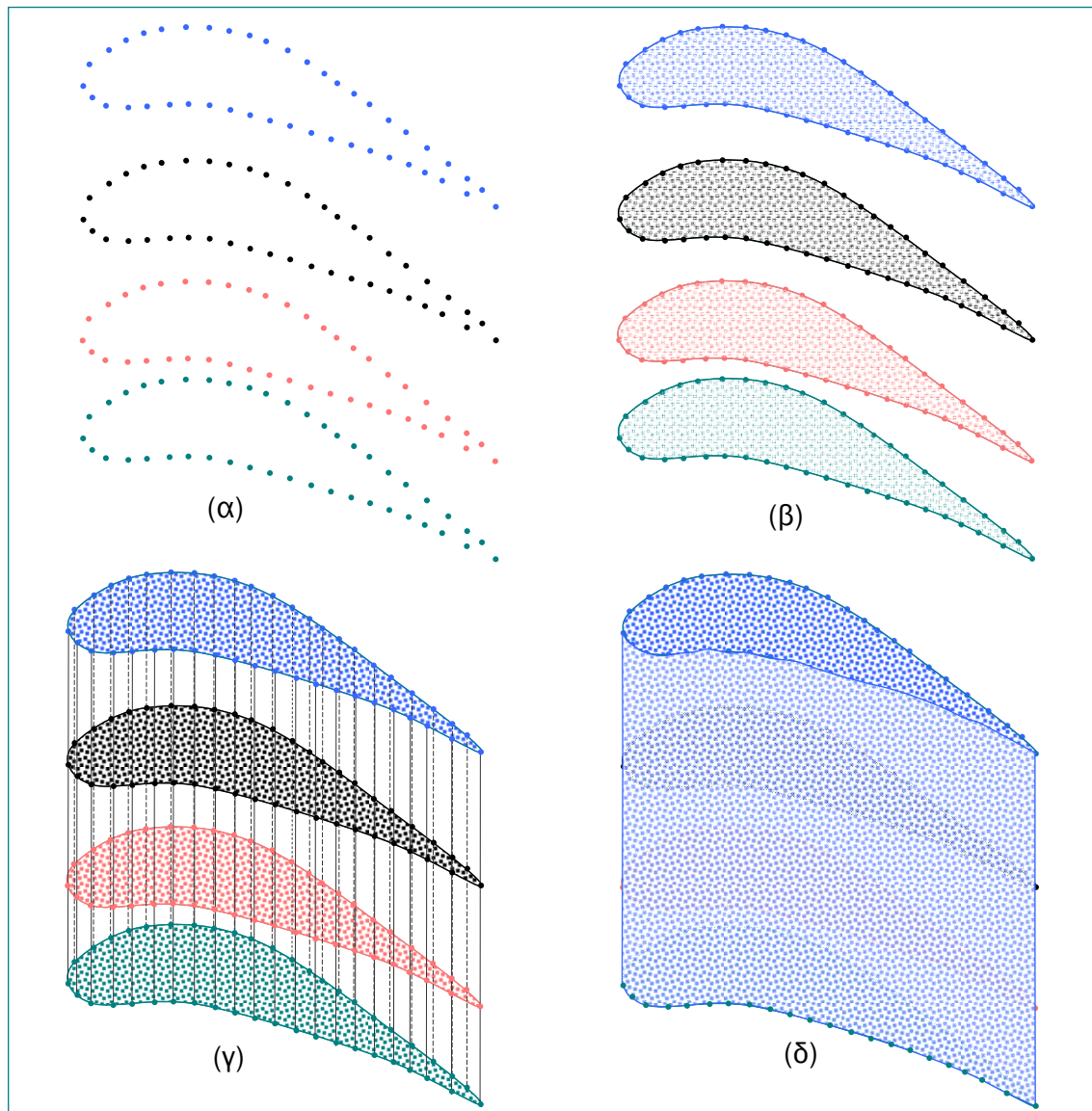
Μετατρέποντας στη συνέχεια τις κυλινδρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές, παράγεται η τρισδιάστατη μορφή του καμπύλου πτερυγίου και, όπως προαναφέρθηκε, με τη διαδικασία του «*skinning*» μέσω νέφους σημείων κατασκευάζεται η NURBS επιφάνεια του.



Εικόνα 3.15. Η σύμμορφη απεικόνιση της διατομής του πτερυγίου πάνω στην κωνική επιφάνεια που παράχθηκε από την αντίστοιχη μεσημβρινή καμπύλη.

Σύμφωνα με τη διαδικασία του «*skinning*» πραγματοποιείται παρεμβολή καμπυλών και στις δύο διευθύνσεις (περιφερειακή και αξονική). Ο χρήστης δίνει το βαθμό (p, q) της επιφάνειας (p στη περιφερειακή διεύθυνση, q στη αξονική διεύθυνση). Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία θα πρέπει κάθε διατομή να έχει τον ίδιο αριθμό σημείων. Αρχικά, γίνεται παρεμβολή καμπυλών στην περιφερειακή διεύθυνση. Οι καμπύλες που προκύπτουν είναι όσες και οι διατομές του πτερυγίου (Εικόνα 3.16- β).

Στην συνέχεια, στην αξονική διεύθυνση, πραγματοποιούνται τόσες παρεμβολές όσες και ο αριθμός των σημείων που αποτελούν την κάθε διατομή (Εικόνα 3.16-γ). Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία, έχει δημιουργηθεί το τρισδιάστατο πτερύγιο (Εικόνα 3.16- δ).

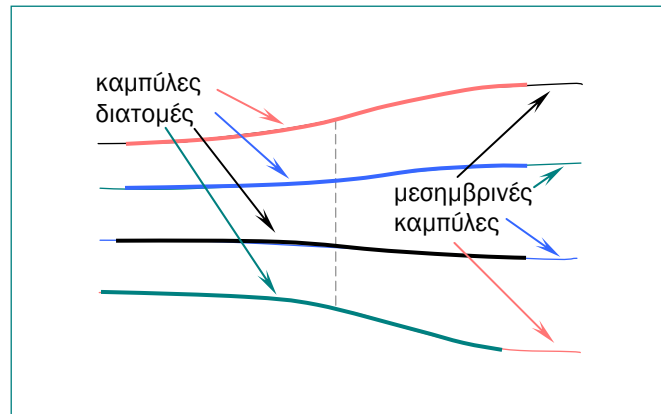


Εικόνα 3.16. «Skinning» μέσω νέφους σημείων (α) Το νέφος σημείων από το οποίο πρέπει να περνάει το περύγιο (β) Παρεμβολή καμπυλών στην περιφερειακή διεύθυνση – οι καμπύλες είναι όσες και ο αριθμός διατομών του περυγίου (γ) Παρεμβολή καμπυλών στην αξονική διεύθυνση – οι καμπύλες είναι όσες και ο αριθμός των σημείων κάθε διατομής, για αυτό και όλες οι διατομές πρέπει να χαρακτηρίζονται από τον ίδιο αριθμό σημείων.

✿ Έστω ότι η επιφάνεια είναι 3^{ου} βαθμού στην περιφερειακή διεύθυνση και 2^{ου} στην αξονική, το σύστημα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφο και η αξονική θέση των κέντρων βάρους είναι $z=60$.

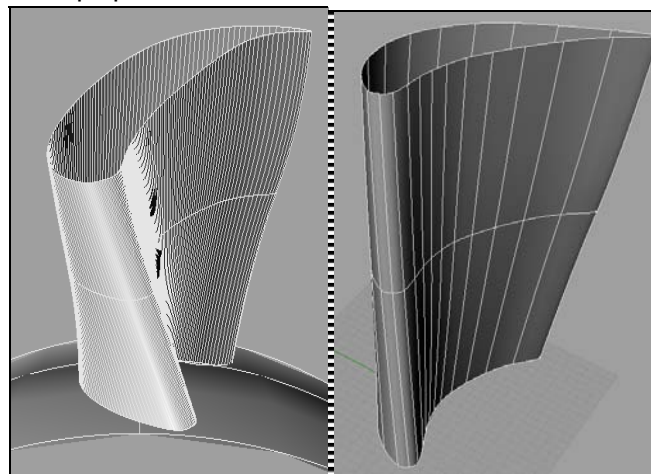
Όπως προαναφέρθηκε, για το σχεδιασμό κάθε διατομής, της συγκεκριμένης εφαρμογής, υπολογίζονται 220 σημεία. Επομένως κατά το skinning πρέπει να παρεμβληθούν 4 καμπύλες από 220 σημεία η καθεμία στη περιφερειακή διεύθυνση και 220 καμπύλες από 4 σημεία η καθεμία στην αξονική διεύθυνση, δηλαδή η επιφάνεια του περυγίου που προκύπτει περιγράφεται από 220×4 σημεία ελέγχου. Όμως, η επιφάνεια θα είναι πρακτικά η ίδια ακόμα και αν στην περιφερειακή διεύθυνση παρεμβληθούν καμπύλες από 110 ή 55 ή 45 σημεία αντί για 220. Για το λόγο αυτό, το λογισμικό πριν προχωρήσει στη διαδικασία του skinning επιλέγει από ποια σημεία θα παρεμβληθούν οι 4 καμπύλες, παίρνοντας από τα 220 σημεία 45, με

βήμα 5 . Γενικά, το λογισμικό επιλέγει από τα M σημεία, που υπολογίζονται κατά το σχεδιασμό κάθε διατομής, τα $M/5$ με βήμα 5 για τη διαδικασία του «skinning». Ο μόνος περιορισμός που τίθεται είναι το τελευταίο σημείο να συμπίπτει με το πρώτο, ώστε να δημιουργείται κλειστή επιφάνεια.



Εικόνα 3.17. Μεσημβρινή διατομή του πτερυγίου.
Η σύμμορφη απεικόνιση των διατομές στις αντίστοιχες επιφάνειες.

Με τη βοήθεια του σχεδιαστικού λογισμικού Rhinoceros, το τρισδιάστατο καμπύλο πτερύγιο φαίνεται στην Εικόνα 3.18-α, ενώ στην Εικόνα 3.18-β φαίνεται το αντίστοιχο επίπεδο πτερύγιο.

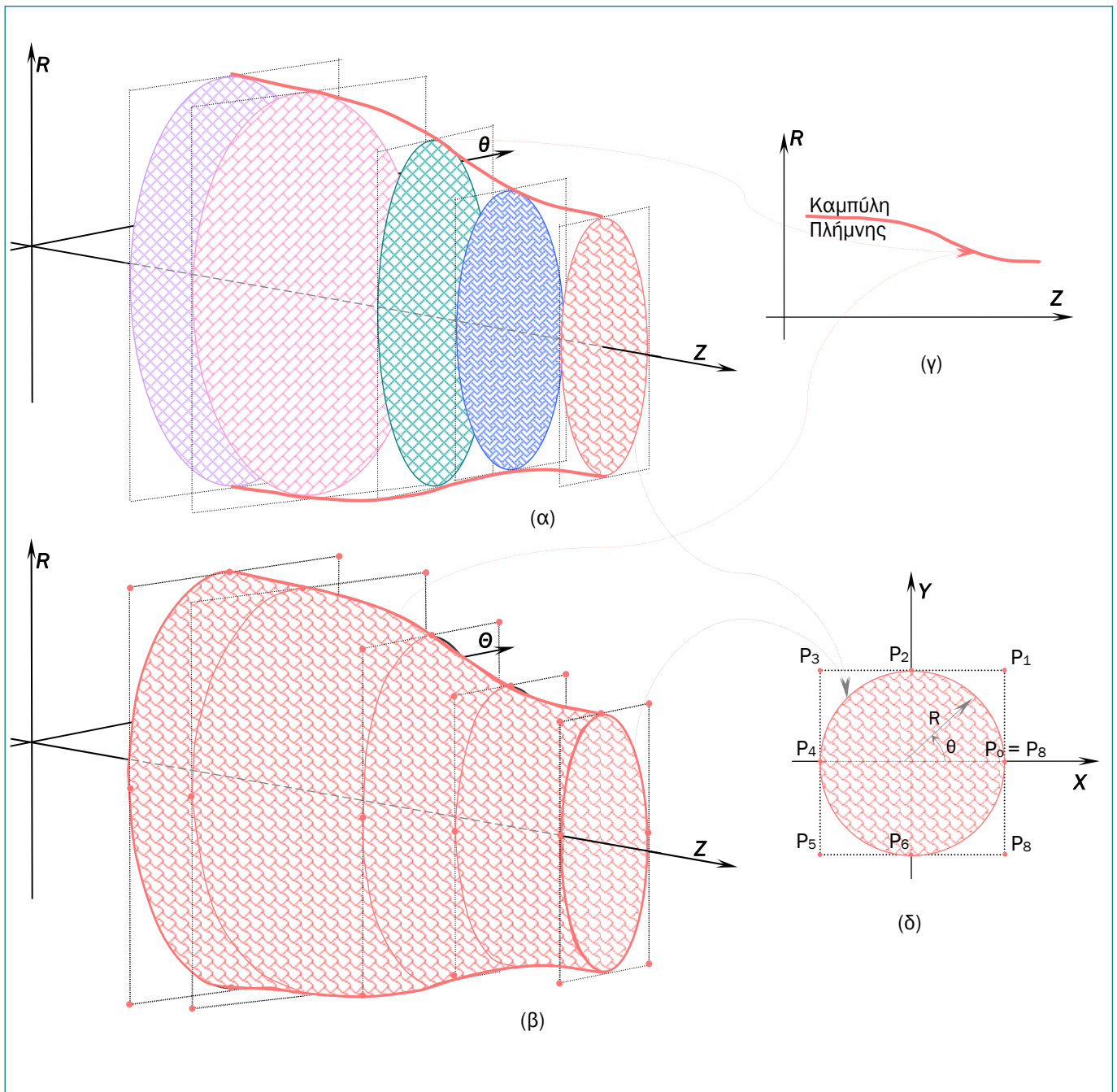


Εικόνα 3.18. Τρισδιάστατη απεικόνιση του πτερυγίου με καμπύλες (α - αριστερά) και επίπεδες διατομές (β - δεξιά).

3.3.2. Κατασκευή των επιφανειών πλήμνης και κελύφους

Οι επιφάνειες πλήμνης και κελύφους προκύπτουν με περιστροφή των αντίστοιχων μεσημβρινών καμπυλών (γύρω από τον άξονα z (Εικόνα 3.19 -α).

Για την κατασκευή του κύκλου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του τετραγώνου, όπου 9 σημεία ελέγχου βρίσκονται στις ακμές του τετραγώνου, με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου πρέπει να ταυτίζονται (Εικόνα 3.19 -δ).



Εικόνα 3.19. Δημιουργία περιστρεφόμενης επιφάνειας. (α) Τα σημεία ελέγχου της γενέτειρας καμπύλης στρέφονται γύρω από τον άξονα περιστροφής z δημιουργώντας κύκλους (β) Η μεσημβρινή καμπύλη της πλήμνης που περιστρέφεται. (γ) Η περιστρεφόμενη επιφάνεια (δ) Τα σημεία ελέγχου ενός κύκλου, P_0 είναι τα σημεία ελέγχου της γεννήτριας καμπύλης

Από την Εικόνα 3.19-δ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου ενός κύκλου είναι:

$$\{P_i\} = \left\{ \left(R_i * \sin 0^0, R_i * \cos 0^0, z_i \right), \left(R_i * \sin 45^0, R_i * \cos 45^0, z_i \right), \left(R_i * \sin 90^0, R_i * \cos 90^0, z_i \right), \right. \\ \left. \left(R_i * \sin 135^0, R_i * \cos 135^0, z_i \right), \left(R_i * \sin 180^0, R_i * \cos 180^0, z_i \right), \right. \\ \left. \left(R_i * \sin 225^0, R_i * \cos 225^0, z_i \right), \left(R_i * \sin 270^0, R_i * \cos 270^0, z_i \right), \right. \\ \left. \left(R_i * \sin 315^0, R_i * \cos 315^0, z_i \right), \left(R_i * \sin 360^0, R_i * \cos 360^0, z_i \right) \right\}$$

$$\{P_i\} = \{(R_i, 0, z_i), (R_i, R_i, z_i), (0, R_i, z_i), (-R_i, R_i, z_i), \\ (-R_i, 0, z_i), (-R_i, -R_i, z_i), (0, -R_i, z_i), \\ (R_i, -R_i, z_i), (R_i, 0, z_i)\} \quad (3.7)$$

ενώ τα αντίστοιχα βάρη τους και το διάνυσμα κόμβων είναι:

$$\{w_i\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$$

$$U = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$

Επομένως, για να κατασκευαστούν οι περιστρεφόμενες επιφάνειες της πλήμνης και του κελύφους αρκεί να περιστρέφουν τα σημεία ελέγχου των γενετειρών καμπυλών τους⁸. Το σύνολο των σημείων που προκύπτουν από αυτή τη διαδικασία αποτελούν τα πολύγωνα ελέγχου των επιφανειών.

❁ Τα σημεία ελέγχου της καμπύλης της πλήμνης, που χρησιμοποιήθηκαν και νωρίτερα, είναι:

Z	R
0	200
45	200
75	190
95	180
120	180

Πίνακας 3.5. Συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης της πλήμνης

και σύμφωνα με τη σχέση (3,7), τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας εκ περιστροφής (Εικόνα 3.20) είναι τα εξής:

⁸ Περιστροφή των σημείων ελέγχου μίας καμπύλης ισοδυναμεί με περιστροφή της ίδιας της καμπύλης

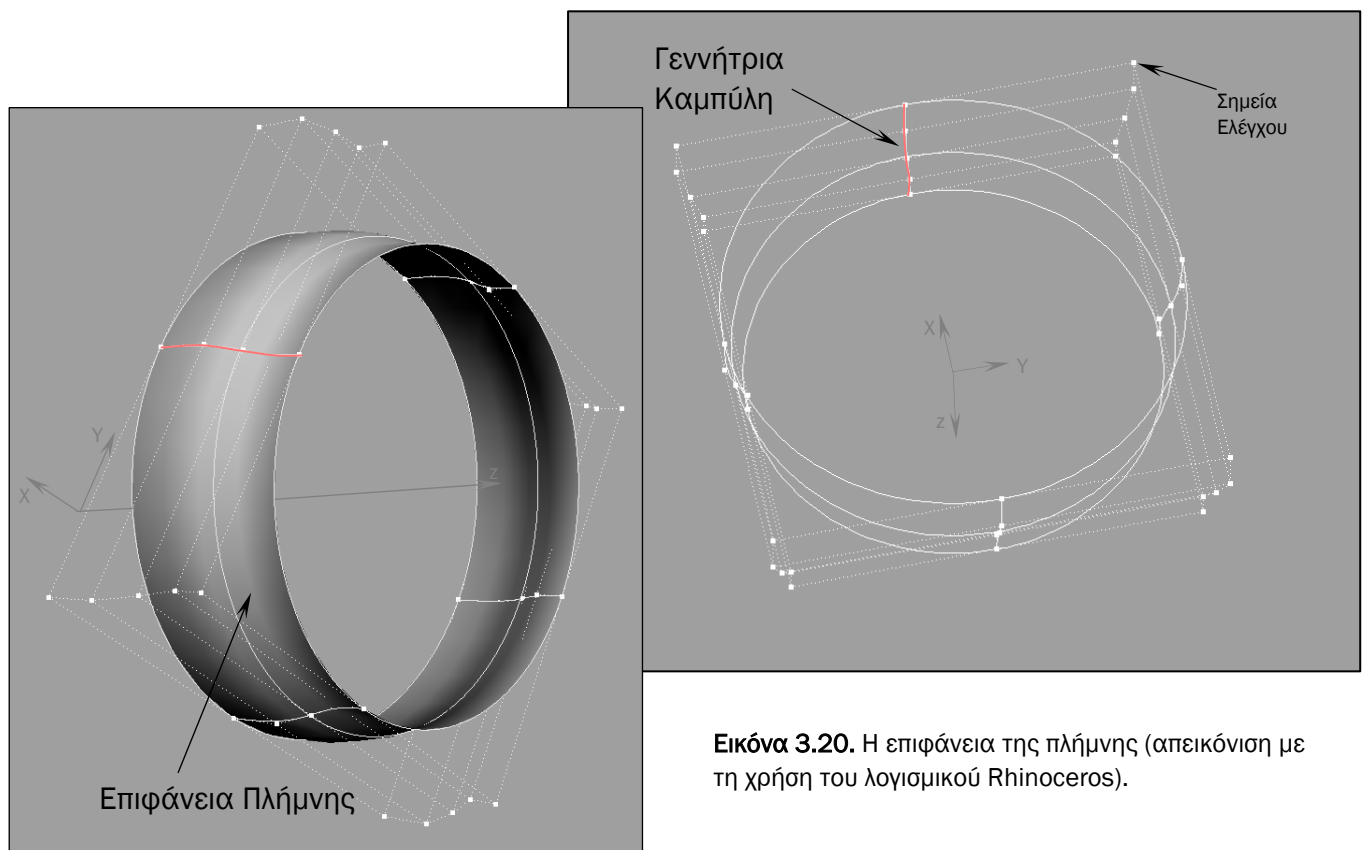
P_0	(200,0,0)	(200,0,45)	(190,0,75)	(180,0,95)	(180,0,120)
P_1	(200,200,0)	(200,200,45)	(190,190,75)	(180,180,95)	(180,180,120)
P_2	(0,200,0)	(0,200, 45)	(0,190, 75)	(0,180, 95)	(0,180, 120)
P_3	(-200,200,0)	(-200,200,45)	(-190,190,75)	(-180,180,95)	(-180,180,120)
P_4	(-200,0,0)	(-200,0,45)	(-190,0,75)	(-180,0,95)	(-180,0,120)
P_5	(-200,-200,0)	(-200,-200,45)	(-190,-190,75)	(-180,-180,95)	(-180,-180,120)
P_6	(0,-200,0)	(0,-200, 45)	(0,-190, 75)	(0,-180, 95)	(0,-180, 120)
P_7	(200,-200,0)	(200,-200,45)	(190,-190,75)	(180,-180,95)	(180,-180,120)
P_8	(200,0,0)	(200,0,45)	(190,0,75)	(180,0,95)	(180,0,120)

Πίνακας 3.6. Τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας εκ περιστροφής που προκύπτουν από τα σημεία ελέγχου του Πίνακα 3.4.

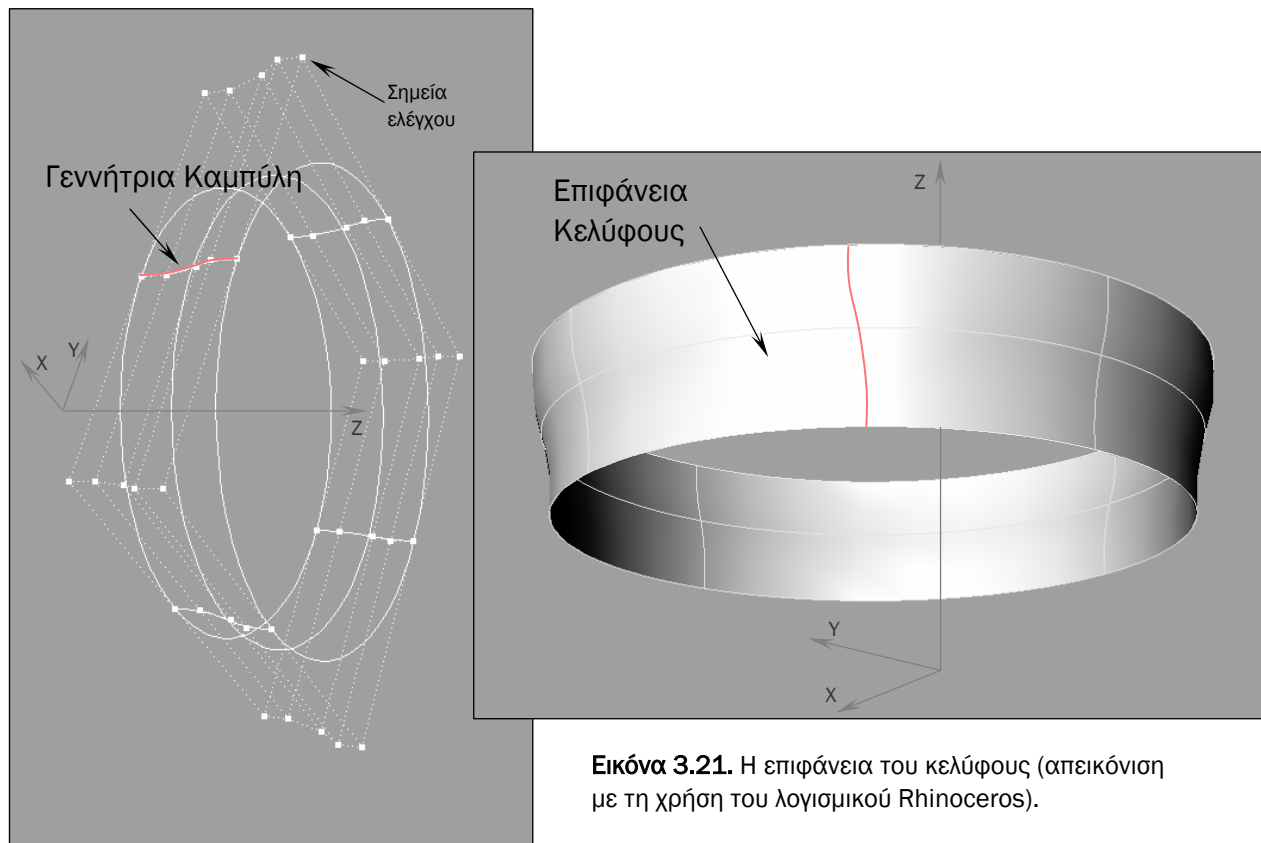
Με τον ίδιο τρόπο, το λογισμικό σχεδιάζει και την επιφάνεια του κελύφους. Στην Εικόνα 3.21, παρουσιάζεται η περιστρεφόμενη επιφάνεια του κελύφους, παίρνοντας σαν σημεία ελέγχου της γεννήτριας καμπύλης τα ακόλουθα:

Z	R
0	250
30	250
70	260
90	270
120	270

Πίνακας 3.7. Συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης του κελύφους



Εικόνα 3.20. Η επιφάνεια της πλήμνης (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού Rhinoceros).



Εικόνα 3.21. Η επιφάνεια του κελύφους (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού Rhinoceros).

3.3.3. Τρισδιάστατη Απεικόνιση Πτερωτής

Αφού έχει ολοκληρωθεί η κατασκευή ενός πτερυγίου, της πλήμνης και του κελύφους, για τον σχεδιασμό μιας ολοκληρωμένης πτερωτής το μόνο που χρειάζεται να γίνει είναι ο καθορισμός του αριθμού των πτερυγίων που έχει η πτερωτή και ο σχεδιασμός τους. Για το σχεδιασμό των επιπλέον πτερυγίων της πτερωτής δεν χρειάζεται να ακολουθηθεί ξανά η διαδικασία των παραγράφων 3.1.1 και 3.2.1. Απλά ακολουθείται η διαδικασία της περιφερειακής μεταφοράς και αντιγραφής («pattern»).

Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη διαδικασία, τα σημεία ελέγχου του αρχικού πτερυγίου («πρότυπο»), περιστρέφονται κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα περιστροφής z και τα νέα σημεία που προκύπτουν αποτελούν σημεία ελέγχου του δεύτερου πτερυγίου της πτερωτής (Εικόνα 3.22). Οι θέσεις των νέων σημείων προκύπτουν από τη σχέση (3.8-α)

$$P_i' = Rot(z, \varphi) * P_i \quad (3.8-\alpha)$$

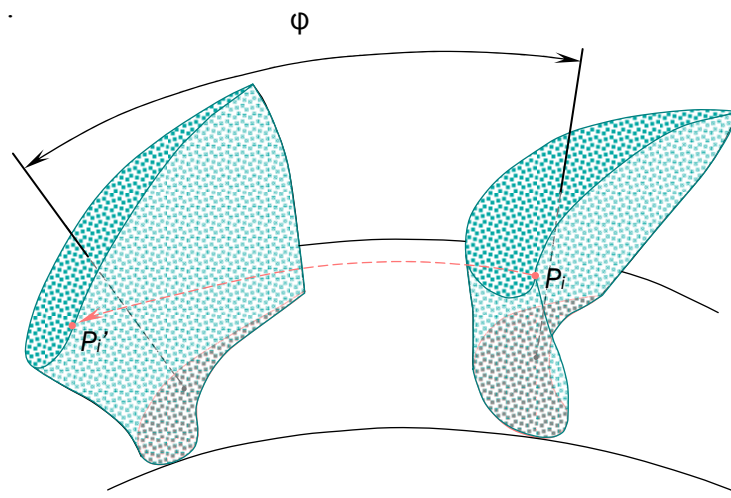
$$\text{όπου } Rot(z, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ο πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα } z$$

κατά γωνία φ

$$\text{και} \quad \left. \begin{aligned} P_{i_x} &= P_{0_x} * \cos \varphi + P_{0_y} * \sin \varphi \\ P_{i_y} &= -P_{0_x} * \sin \varphi + P_{0_y} * \cos \varphi \\ P_{i_z} &= P_{0_z} \end{aligned} \right\} \quad (3.8-\beta)$$

Η γωνία περιστροφής φ είναι η γωνία μεταξύ των «ακτινών βάρους» δύο διαδοχικών πτερυγίων και καθορίζεται εμμέσως από τον χρήστη. Ο χρήστη παρέχει στο λογισμό τον αριθμό των πτερυγίων (Q) της πτερωτής και η γωνία περιστροφής φ ορίζεται ως $360^\circ / Q$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται όλα τα πτερύγια της πτερωτής. Κάθε πτερύγιο i προκύπτει με περιστροφή του πρώτου κατά γωνία $(i-1)*\varphi$ γύρω από τον άξονα z , όπου $i = 2, \dots, Q$.



Εικόνα 3.22. Διαδικασία της περιφερειακής μεταφοράς και αντιγραφής. Το σημείο ελέγχου P_i στρέφεται κατά γωνία φ και μετατρέπεται σε P_i' . Η διαδικασία πραγματοποιείται για το σύνολο των σημείων ελέγχου του αρχικού πτερυγίου και έτσι αντιγράφεται στη νέα του θέση.

✿ Έστω ότι αριθμός των πτερυγίων της πτερωτής είναι 16. Η γωνία περιστροφή φ είναι 22.5° και ο αντίστοιχος πίνακας περιστροφής είναι

$$Rot\left(z, (i-1) * 22.5^\circ\right) = \begin{bmatrix} \cos(i-1) * 22.5^\circ & -\sin(i-1) * 22.5^\circ & 0 \\ \sin(i-1) * 22.5^\circ & \cos(i-1) * 22.5^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

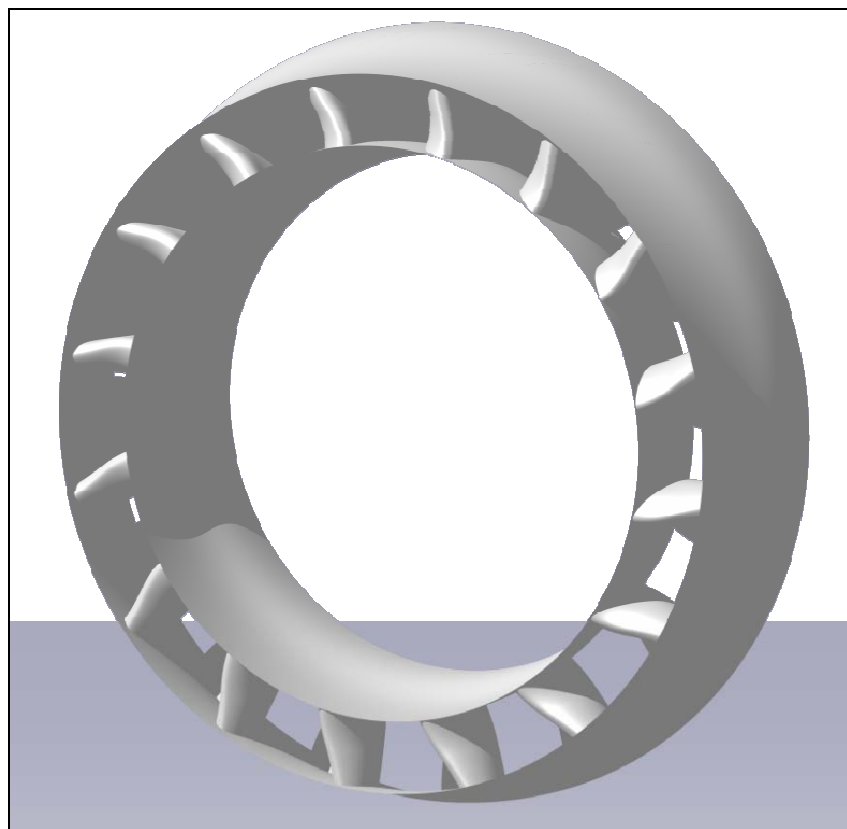
όπου $i=2, \dots, 10$

$$\begin{aligned} P_{i_x} &= P_{0_x} * \cos(i-1) * 22.5^\circ + P_{0_y} * \sin(i-1) * 22.5^\circ \\ \text{και} \quad P_{i_y} &= -P_{0_x} * \sin(i-1) * 22.5^\circ + P_{0_y} * \cos(i-1) * 22.5^\circ \\ P_{i_z} &= P_{0_z} \end{aligned}$$

Παραδείγματος χάριν, 5 σημεία ελέγχου του αρχικού πτερυγίου και τα αντίστοιχα σημεία του δεύτερου πτερυγίου φαίνονται στο πίνακα που ακολουθεί.

Σημεία Ελέγχου	P_0	$P_i' = Rot(z, 22.5^\circ) * P_0$
1	(179.15, 27.65, 100.66)	(176.10, -43.01, 100.66)
2	(180.14, 26.04, 95.99)	(176.39, -44.88, 95.99)
3	(182.18, 21.38, 89.78)	(176.49, -49.96, 89.78)
4	(185.80, 16.91, 80.89)	(178.13, -55.48, 80.89)
5	(188.84, 14.41, 74.08)	(179.98, -58.95, 74.08)

Πίνακας 3.8. Οι συντεταγμένες πέντε σημείων ελέγχου του πρώτου πτερυγίου (P_0) και τα αντίστοιχα πέντε σημεία ελέγχου του δευτέρου (P_i'). Τα P_i' προέκυψαν με περιστροφή των P_0 κατά γωνία $22,5^\circ$ γύρω από τον άξονα z.



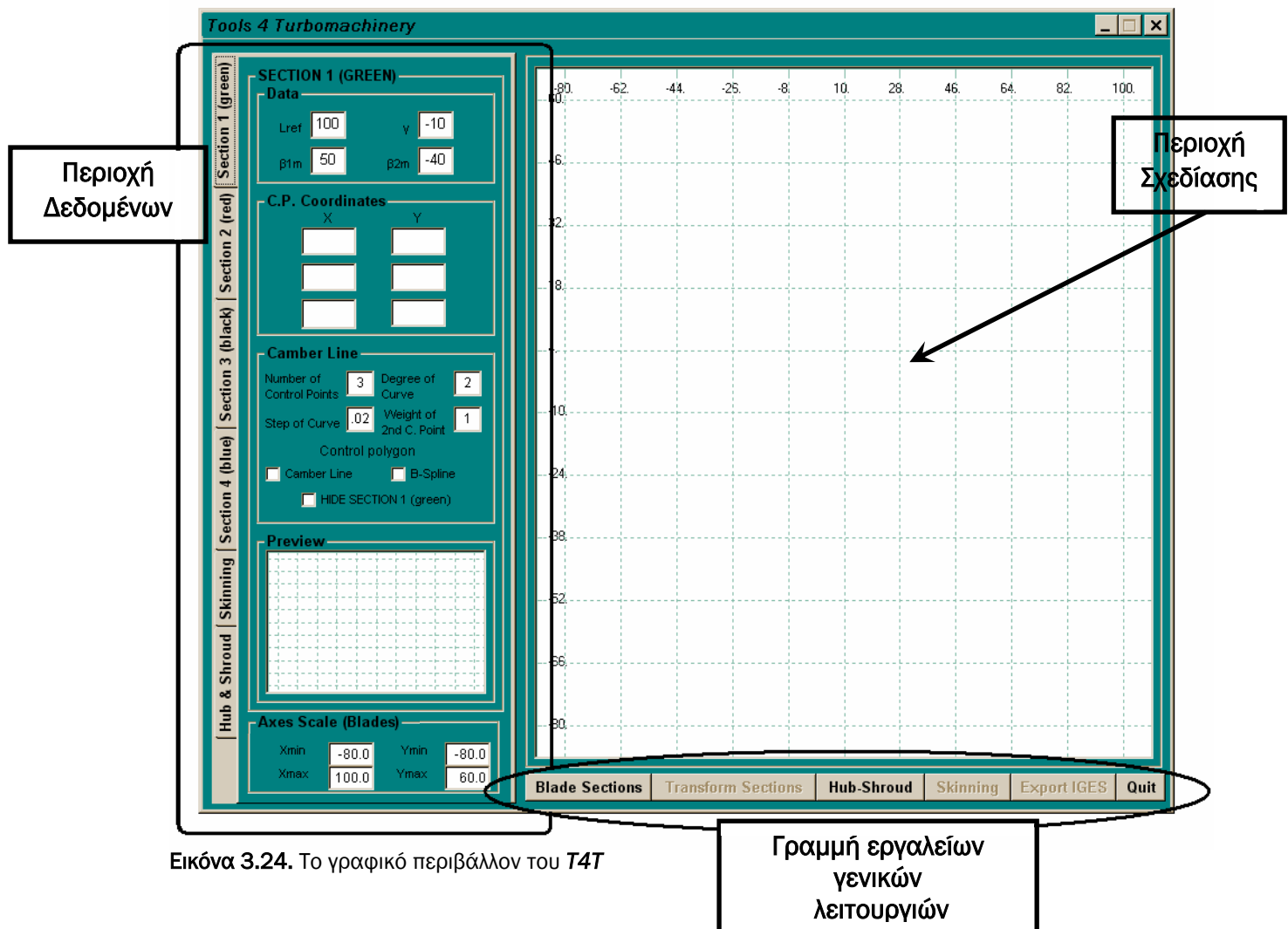
Εικόνα 3.23. Ολοκληρωμένη η πτερωτή αποτελούμενη από 16 πτερύγια (16 NURBS επιφάνειες).

3.4. Εγχειρίδιο Χρήσης του **T4T**

Ο χρήστης ενός λογισμικού, σχεδιαστικού ή μη, επικεντρώνει το ενδιαφέρον στις δυνατότητες που του παρέχει το εν λόγω λογισμικό, δεν ενδιαφέρεται για το τρόπο με τον οποίο αυτές υλοποιούνται. Για το λόγο αυτό, με την ανάπτυξη ενός λογισμικού είναι αναγκαία και η σύνταξη ενός εγχειριδίου χρήσης.

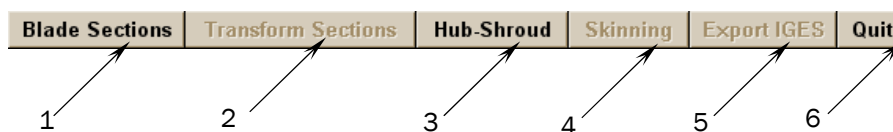
Ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση της κεντρικής φόρμας του λογισμικού και για την καλύτερη κατανόηση του χρησιμοποιείται η εφαρμογή που αναπτύχθηκε στις παραγράφους 3.3 και 3.4.

Εκτελώντας το πρόγραμμα **T4T.exe** εμφανίζεται στην οθόνη το γραφικό περιβάλλον του προγράμματος (Εικόνα 3.24). Η φόρμα του προγράμματος αποτελείται από την περιοχή σχεδίασης, την περιοχή δεδομένων και τη γραμμή εργαλείων γενικών λειτουργιών.



Εικόνα 3.24. Το γραφικό περιβάλλον του T4T

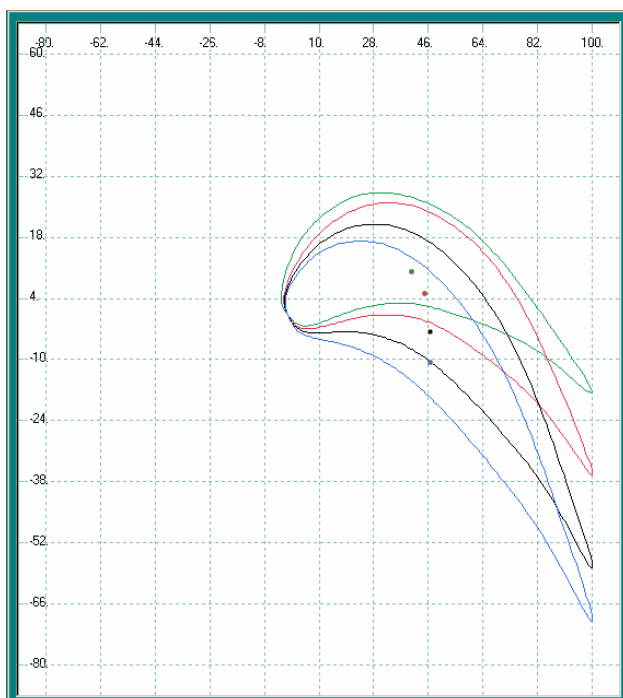
Στην εκκίνηση του προγράμματος, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα είτε να προχωρήσει στη σχεδίαση των διατομών του πτερυγίου είτε στη σχεδίαση των μεσημβρινών καμπυλών της πλήμνης και του κελύφους. Στη γραμμή εργαλείων, είναι μόνο ενεργοποιημένα τα αντίστοιχα κουμπιά (Εικόνα 3.25).



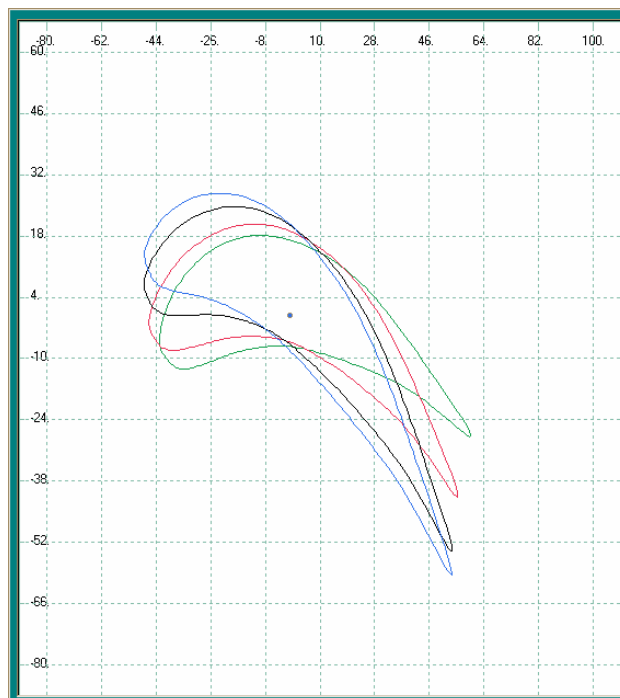
Εικόνα 3.25. Γραμμή εργαλείων γενικών λειτουργιών

1. **Blade Sections**
Εκτελεί την αλληλουχία εντολών για την δημιουργία των διατομών του πτερυγίου (Εικόνα 3.26).
2. **Transform Sections**
Μη ενεργό. Εκτελεί την αλληλουχία εντολών για την μεταφορά των διατομών του πτερυγίου ταυτίζοντας τα κέντρα βάρους τους. Ενεργοποιείται αφού πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός των διατομών (**Blade Sections**) (Εικόνα 3.27).
3. **Hub-Shroud**
Εκτελεί την αλληλουχία εντολών για την δημιουργία της πλήμνης και του κελύφους (Εικόνα 3.28).

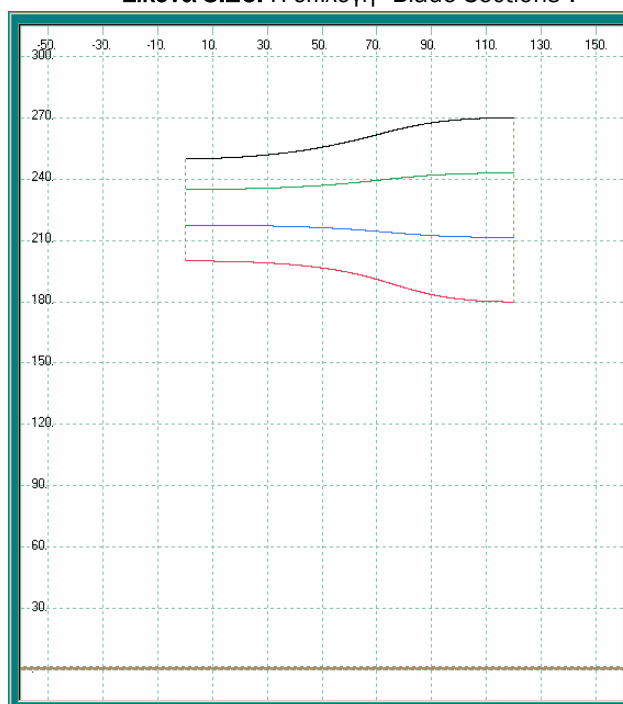
4. **Skinning** Μη ενεργό. Εκτελεί την αλληλουχία εντολών για την προσαρμογή επιφανειών από τις καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί («skinning»). Ενεργοποιείται αφού πραγματοποιηθεί η δισδιάστατη σχεδίαση (**Blade Sections**, **Hub-Shroud**) (Εικόνα 3.29).
5. **Export IGES** Μη ενεργό. Εξάγει αρχεία IGES (Initial Graphics Exchange Program). Ενεργοποιείται αφού πραγματοποιηθεί η διαδικασία «skinning» (**Skinning**).
6. **Quit** Τερματισμός προγράμματος.



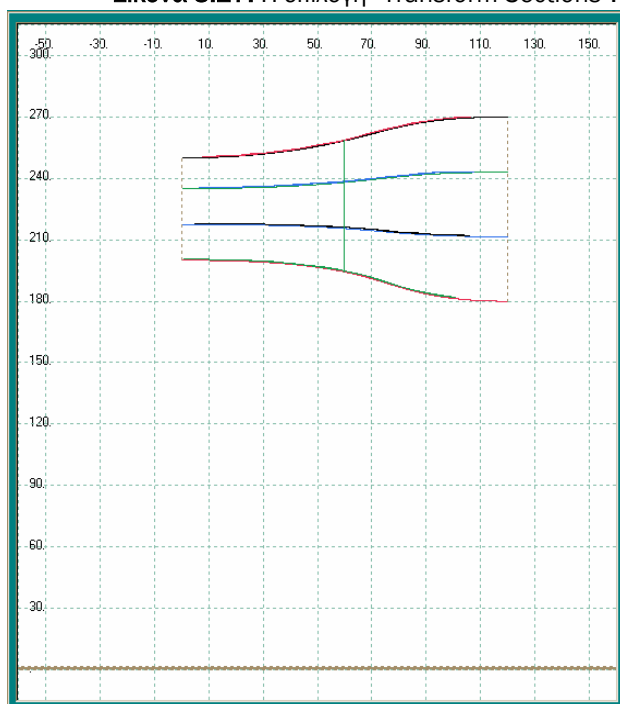
Εικόνα 3.26. Η επιλογή «Blade Sections».



Εικόνα 3.27. Η επιλογή «Transform Sections».

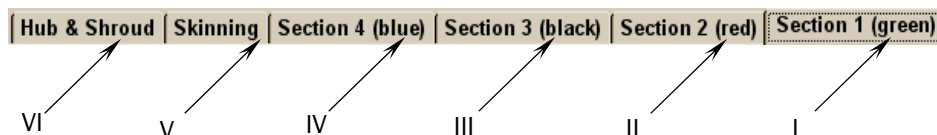


Εικόνα 3.28. Η επιλογή «Hub-Shroud».



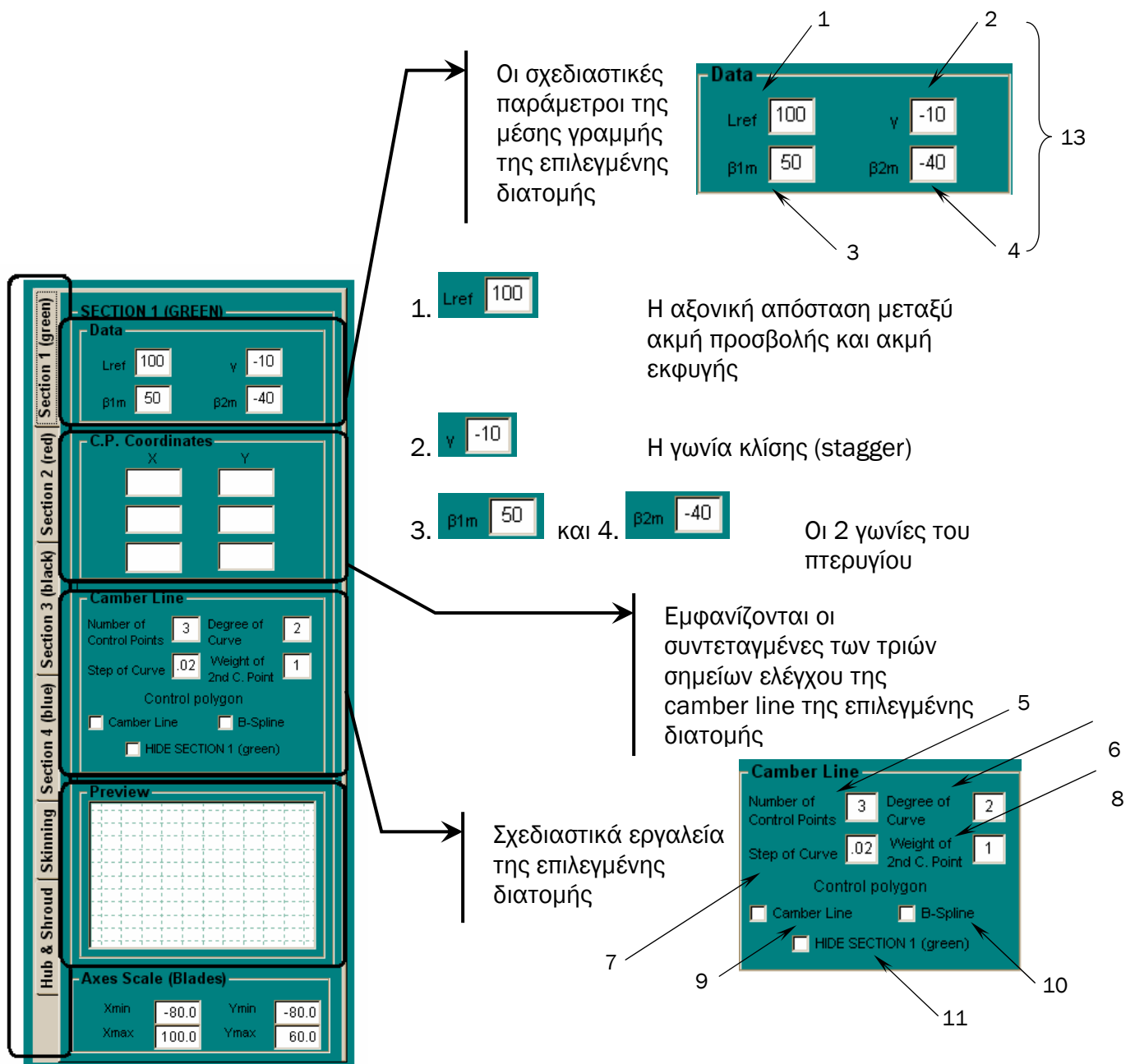
Εικόνα 3.29. Η επιλογή «Skinning».









Η περιοχή δεδομένων είναι χωρισμένη σε 4 ενότητες. Οι τέσσερις πρώτες έχουν την ίδια δομή και αναφέρονται στις τέσσερις διατομές του πτερυγίου, η πέμπτη αναφέρεται στο «skinning» των πτερυγίων και η τελευταία αναφέρεται στο σχεδιασμό της πλήμνης και του κελύφους (Εικόνα 3.30). Οι ενότητες που αναφέρονται στις διατομές των πτερυγίων αναλύονται στην εικόνα 3.31, ενώ η ενότητα του «skinning» των πτερυγίων και της κατασκευής των επιφανειών πλήμνης/κελύφους αναλύονται στις Εικόνες 3.36 και 3.37, αντίστοιχα.

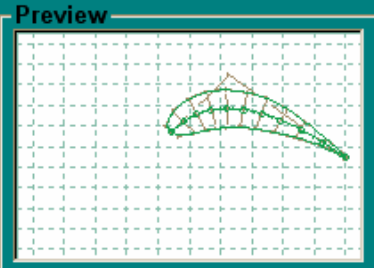


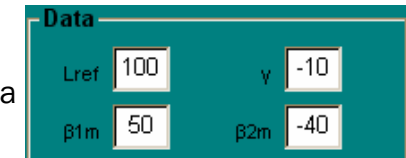
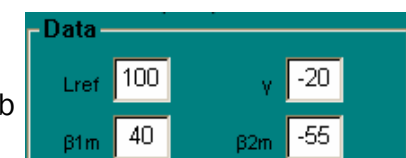
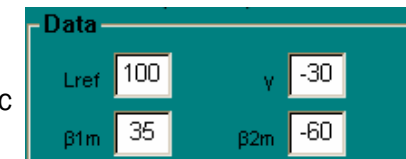
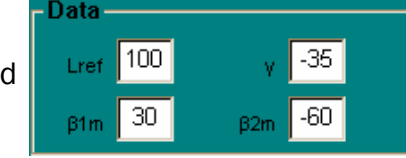
Εικόνα.3.30. Οι 6 ενότητες της περιοχής δεδομένων.

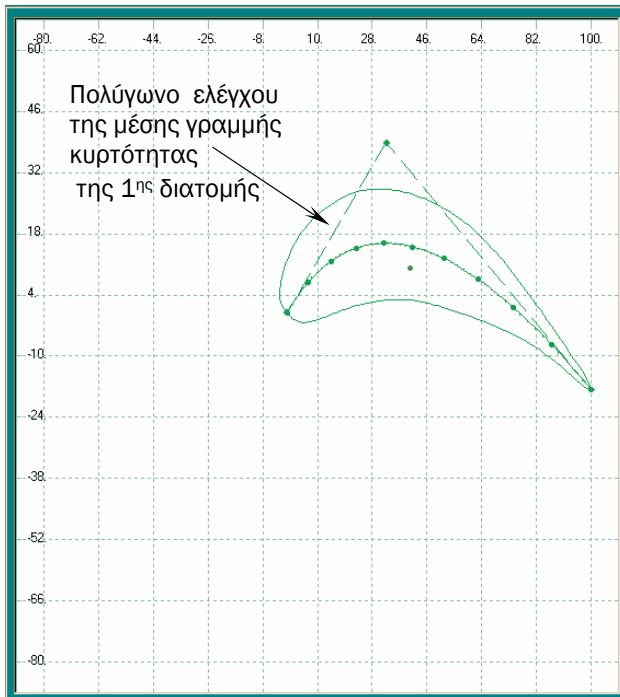
- | | | |
|------|--------------------------|---|
| I. | Section 1 (green) | Περιέχει δεδομένα και σχεδιαστικά εργαλεία που αφορούν την πρώτη διατομή (πράσινη). |
| II. | Section 2 (red) | Περιέχει δεδομένα και σχεδιαστικά εργαλεία που αφορούν την δεύτερη διατομή (κόκκινη). |
| III. | Section 3 (black) | Περιέχει δεδομένα και σχεδιαστικά εργαλεία που αφορούν την τρίτη διατομή (μαύρη). |
| IV. | Section 4 (blue) | Περιέχει δεδομένα και σχεδιαστικά εργαλεία που αφορούν την τέταρτη διατομή (μπλε). |
| V. | Skinning | Περιέχει δεδομένα που αφορούν το «skinning» των πτερυγίων. |
| VI. | Hub & Shroud | Περιέχει δεδομένα και σχεδιαστικά εργαλεία που αφορούν στην πλήμη και στο κέλυφος. |



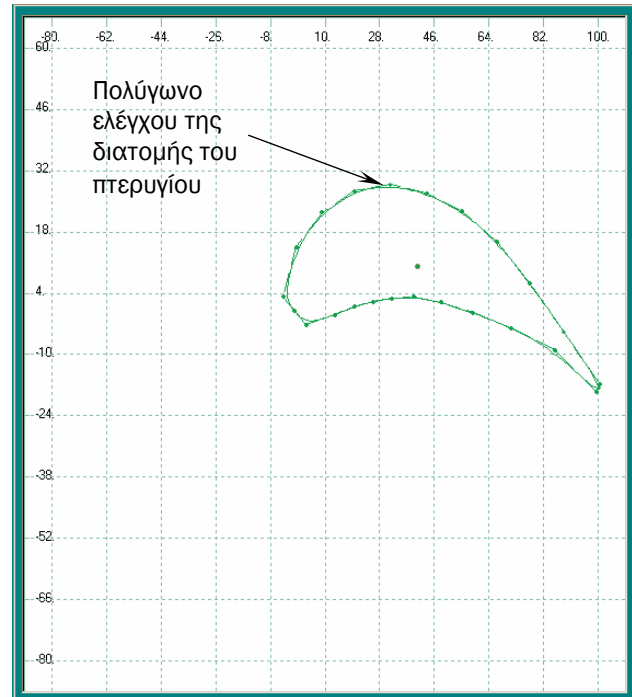
8.  1 Εισάγει το βάρος του μεσαίου σημείου ελέγχου της μέσης γραμμής κυρτότητας της επιλεγμένης διατομής.
9.  Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει τα σημεία ελέγχου της μέσης γραμμής κυρτότητας της επιλεγμένης διατομής στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.32).
10.  Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει τα σημεία ελέγχου της επιλεγμένης διατομής στην περιοχή σχεδίασης. (Εικόνα 3.33)
11.  Όταν είναι ενεργοποιημένο δεν εμφανίζει την επιλεγμένη διατομή στη περιοχή σχεδίασης. Σε κάθε ενότητα (I - IV) εμφανίζεται η αντίστοιχη εντολή ( ,  ,  , ) (Εικόνες 3.34-3.35)

12.  Στο παράθυρο προεπισκόπησης της επιλεγμένης διατομής, εμφανίζεται η διατομή, η αντίστοιχη μέση γραμμή με το πολύγωνο ελέγχου της και τα σημεία για τα οποία γνωρίζουμε την κατανομή πάχους του περυγίου

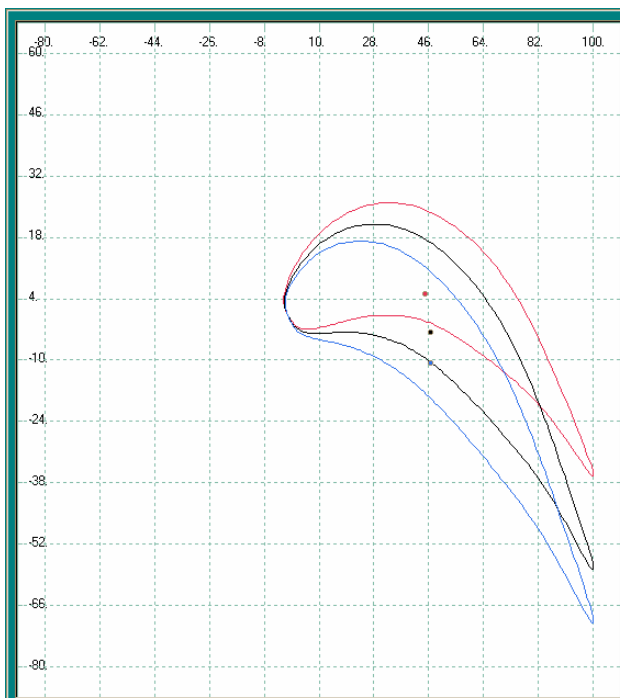
13.  a
-  b
-  c
-  d
- Προεπιλεγμένες τιμές των σχεδιαστικών παραμέτρων των τεσσάρων διατομών (section 1 - a, section 2 - b, section 3 - c, section 4 - d)



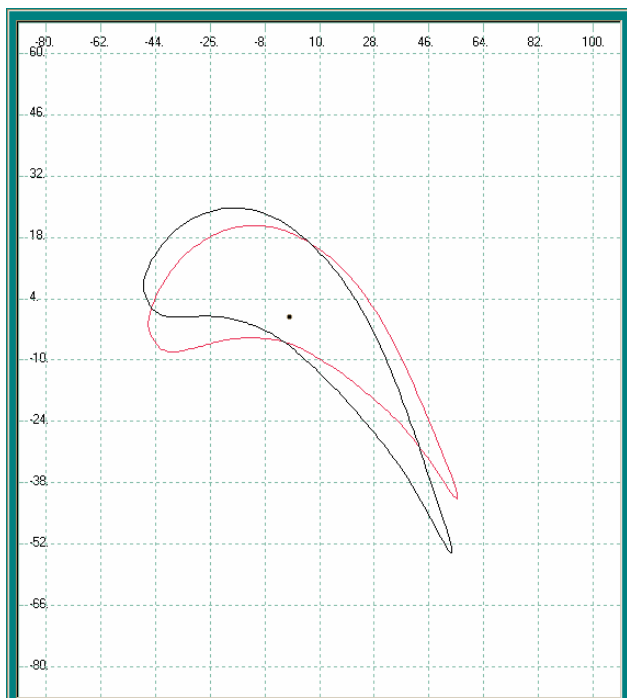
Εικόνα 3.32. Εμφάνιση του πολύγωνου ελέγχου της μέσης γραμμής της πρώτης διατομής.



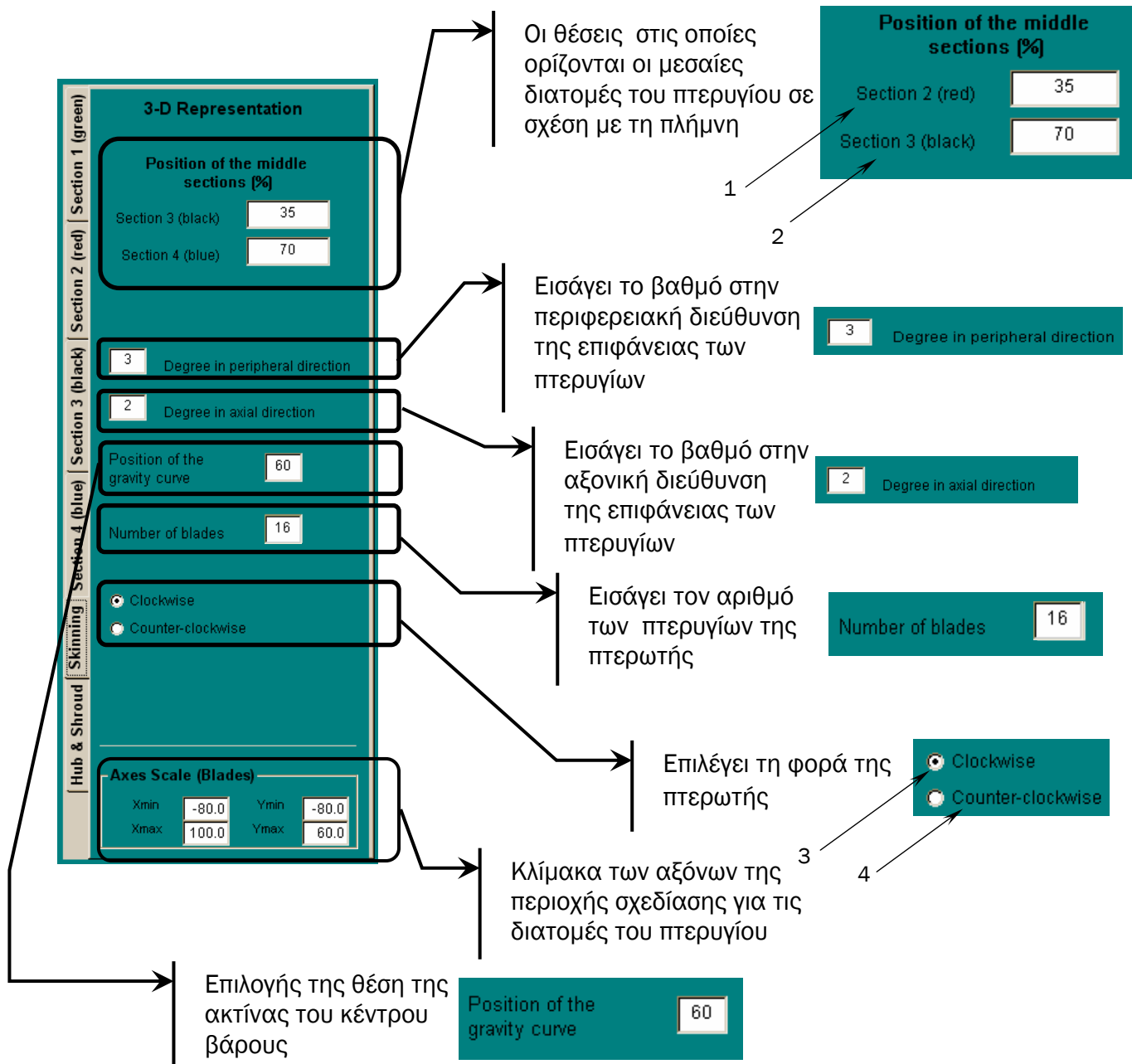
Εικόνα 3.33. Εμφάνιση του πολύγωνου ελέγχου της πρώτης διατομής.



Εικόνα 3.34. Η επιλογή HIDE Section 1. Μη απεικόνιση της πρώτης διατομής του πτερυγίου.

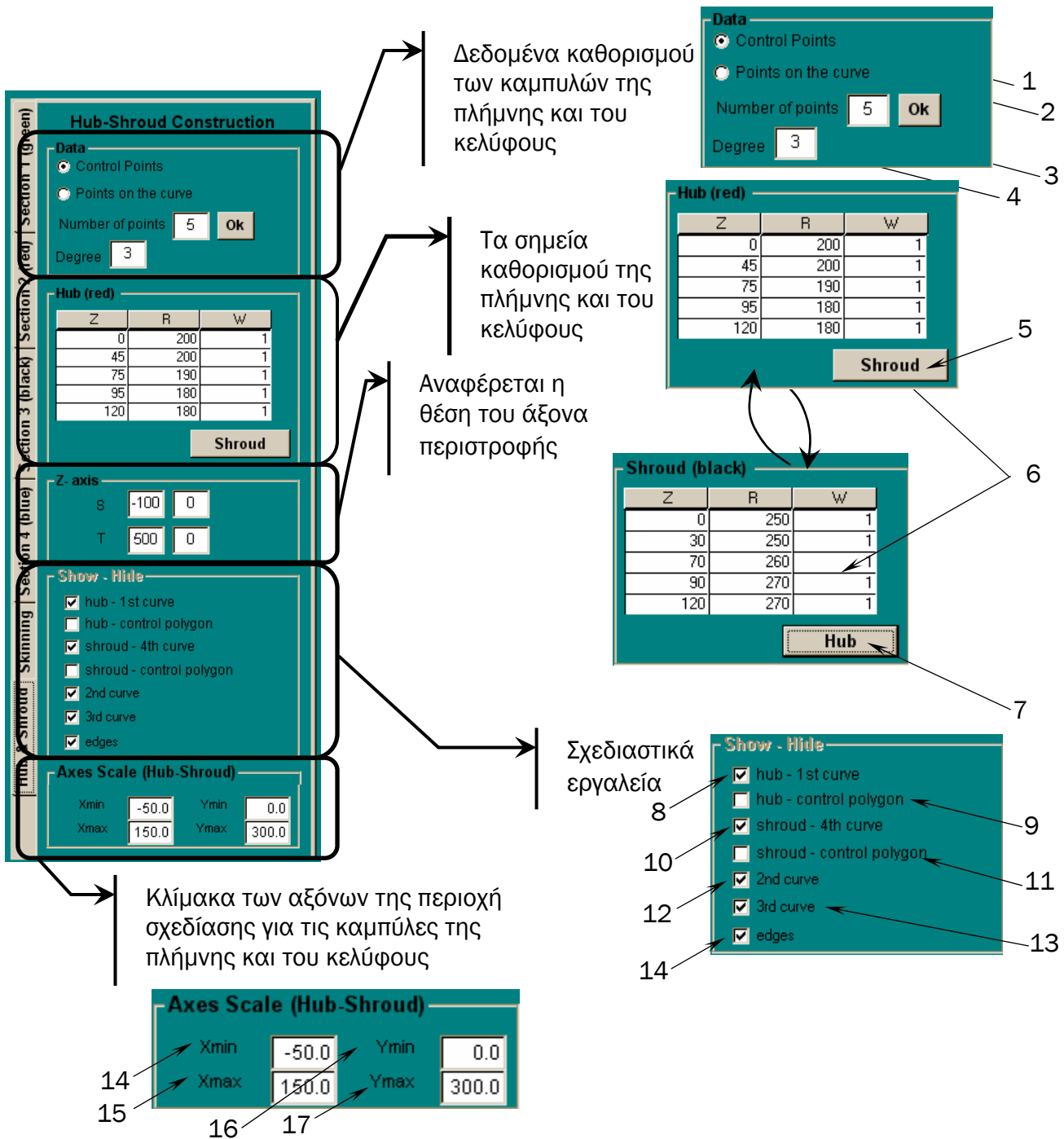


Εικόνα 3.35. Οι επιλογές HIDE Section 1 & 4 και Transform Sections. Απεικόνιση της δεύτερης και τρίτης διατομής με κοινό κέντρο βάρους.



Εικόνα 3.36. Παρουσίασης της ενότητας του «skinning».

1. Section 2 (red) 35 Εισάγει την απόσταση της δεύτερης διατομής από την επιφάνεια της πλήμνης (%).
2. Section 3 (black) 70 Εισάγει την απόσταση της τρίτης διατομής από την επιφάνεια της πλήμνης (%).
3. ☒ Clockwise Επιλογή δεξιόστροφης πτερωτής.
4. ☐ Counter-clockwise Επιλογή αριστερόστροφης πτερωτής.



Εικόνα 3.37. Παρουσίαση της ενότητας σχεδιασμού των επιφανειών πλήμνης/κελύφους.

1. **Control Points** Επιλέγει τα σημεία που καθορίζουν τις καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους ως σημεία ελέγχου.
2. **Points on the curve** Επιλέγει τα σημεία που καθορίζουν τις καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους ως σημεία της καμπύλης.

3. **Number of points**

Εισάγει τον αριθμό των σημείων που καθορίζουν τις καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους ως σημεία ελέγχου. Για να καταχωρηθεί αριθμός και να δημιουργηθεί ο κατάλληλος σε μέγεθος πίνακας συντεταγμένων πρέπει να πατηθεί το πλήκτρο (**Ok**).

4. **Degree**

Εκφράζει τον βαθμό των καμπυλών.

5. **Shroud**

Εμφανίζει τον πίνακα συντεταγμένων των σημείων του κελύφους (μόλις τον εμφανίσει μετατρέπεται σε **Hub**).

6.

Z	R	W
0	200	1
45	200	1
75	190	1
95	180	1
120	180	1

Εισάγει τις συντεταγμένες των σημείων που καθορίζουν τις καμπύλες πλήμνης και του κελύφους. Εάν τα σημεία είναι σημεία ελέγχου (**Control Points**) τότε εισάγει και τα αντίστοιχα βάρη.

7. **Hub**

Εμφανίζει τον πίνακα συντεταγμένων των σημείων της πλήμνης (μόλις τον εμφανίσει μετατρέπεται σε **Shroud**).

8. ☒ **hub - 1st curve**

Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει την καμπύλη της πλήμνης στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

9. ☐ **hub - control polygon**

Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης της πλήμνης στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

10. ☒ **shroud - 4th curve**

Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει την καμπύλη του κελύφους στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

11. ☐ **shroud - control polygon**

Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει το πολύγωνο ελέγχου της καμπύλης του κελύφους στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

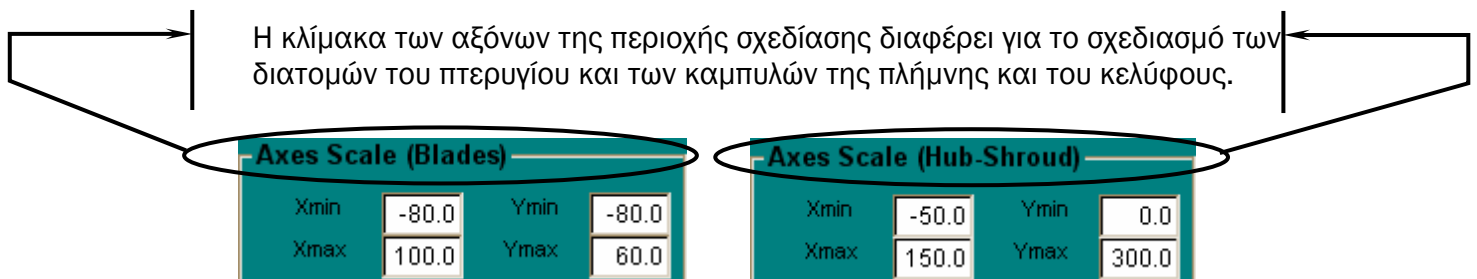
12. ☒ **2nd curve**

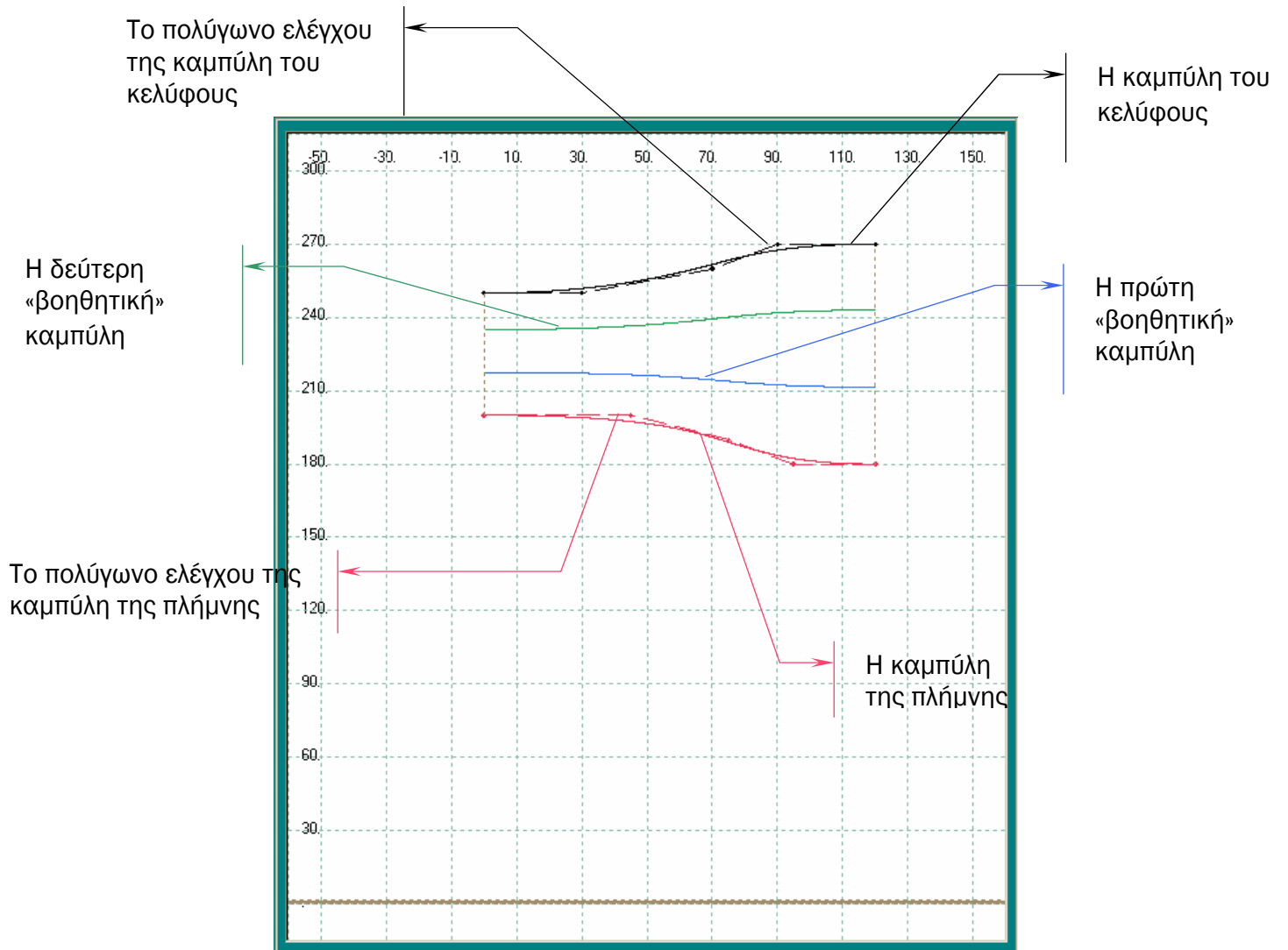
Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει την δεύτερη βοηθητική καμπύλη στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

13. ☒ **3rd curve**

Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει την δεύτερη βοηθητική καμπύλη στην περιοχή σχεδίασης (Εικόνα 3.38).

14. ☒ edges Όταν είναι ενεργοποιημένο απεικονίζει τις γραμμές που ενώνουν τα άκρα της πλήμνης με τα άκρα του κελύφους (Εικόνα 3.38).
15. -50.0 Είσοδος της ελάχιστης τιμής του x-άξονα για την περιοχή σχεδίασης.
16. 150.0 Είσοδος της μέγιστης τιμής του x-άξονα για την περιοχή σχεδίασης.
17. 0.0 Είσοδος της ελάχιστης τιμής του y-άξονα για την περιοχή σχεδίασης.
18. 300.0 Είσοδος της μέγιστης τιμής του y-άξονα για την περιοχή σχεδίασης.





Εικόνα 3.38. Σχεδιαστικά εργαλεία της πλάνης και του κελύφους.

4

Εφαρμογές

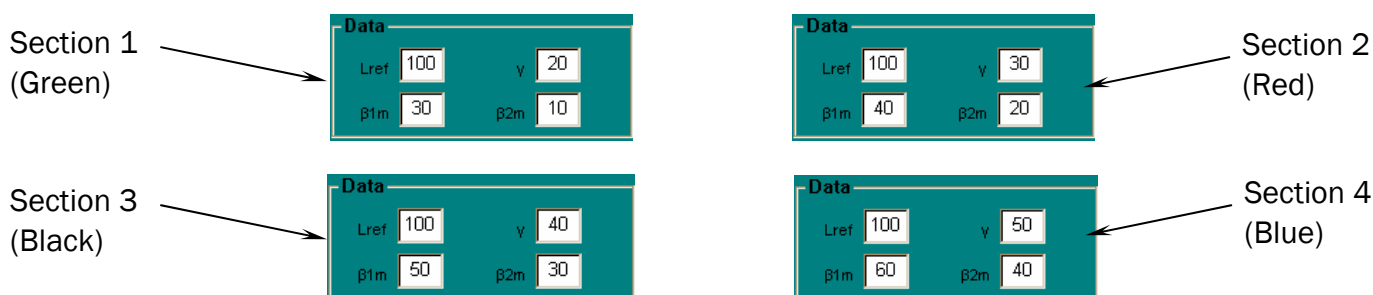
4.1. Εισαγωγή

Το T4T μπορεί να μη διαθέτει όλες τις δυνατότητες των εμπορικών και ακαδημαϊκών πακέτων που παρουσιάστηκαν στο 1^ο Κεφάλαιο, αλλά ικανοποιεί πολλές από τις βασικές απαιτήσεις ενός χρήστη για το σχεδιασμό πτερυγώσεων στροβιλομηχανών. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάστηκε η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται από το λογισμικό για την παραγωγή τρισδιάστατων πτερυγώσεων καθώς και οι σχεδιαστικές του δυνατότητες μέσα από ένα εύχρηστο γραφικό περιβάλλον.

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται παραδείγματα πτερυγώσεων, που παρήχθησαν με τη βοήθεια του λογισμικού T4T. Ο σχεδιασμός τους επιτυγχάνεται σε δεκατρία βήματα.

4.2. Ανεμιστήρες

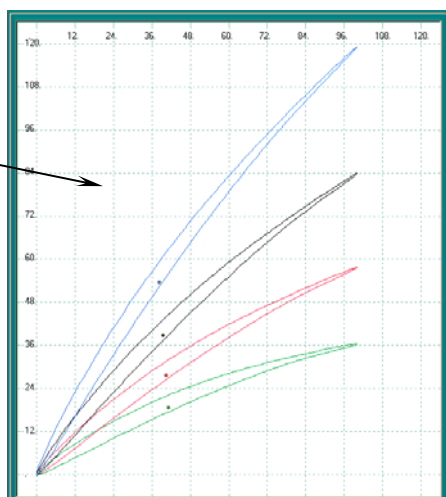
Βήμα 1^ο: Είσοδος παραμέτρων σχεδίασης των 4 διατομών (L_{ref} , β_{1m} , β_{2m} και γ)



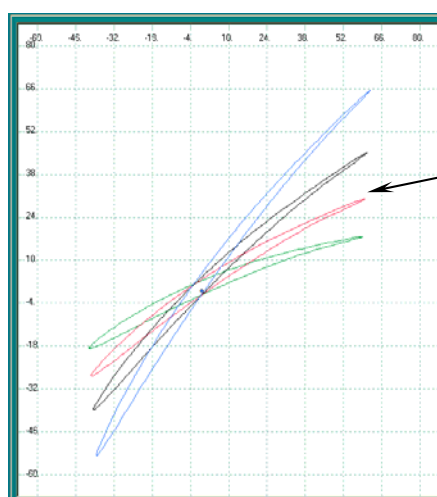
Βήμα 2^ο: Είσοδος της κατανομής πάχους του πτερυγίου (δημιουργία αρχείου).

Βήμα 3^ο: Σχεδιασμός διατομών **Blade Sections** και μεταφορά των διατομών **Transform Sections** **

Σχεδιασμός
(Βήμα 2°)



Μεταφορά
(Βήμα 2°)



****Ο σχεδιασμός με ταύτιση των κέντρων βάρους είναι προαιρετικός.**

Βήμα 4°: Είσοδος του αριθμού των σημείων που περιγράφουν τις γεννήτριες καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους και καταχώρηση του αριθμού

Βήμα 5°: Επιλογή του είδους των σημείων (σημεία ελέγχου ή σημεία της καμπύλης)

- ☒ Control Points
- ☐ Points on the curve

Βήμα 6°: Είσοδος του βαθμού των καμπυλών πλήμνης και κελύφους

Βήμα 7°: Είσοδος των συντεταγμένων των σημείων που καθορίζουν τις καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους.

Πλήμνη
(Red)

Z	R	W
0	0	1
50	50	1
100	80	1
150	100	1
200	105	1

Κελυφος
(Black)

Z	R	W
0	250	1
50	240	1
100	230	1
150	220	1
200	210	1

Βήμα 8°: Σχεδιασμός των μεσημβρινών καμπυλών ⁹.

Βήμα 9°: Είσοδος της θέσης της ακτίνας του κέντρου βάρους και του βαθμού της επιφάνειας στην περιφερειακή και αξονική διεύθυνση.

Degree in peripheral direction , Degree in axial direction

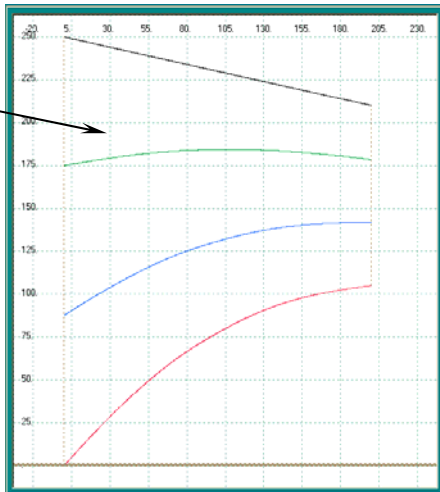
Βήμα 10°: Επιλογή της φοράς της πτερωτής (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη).

- ☒ Clockwise
- ☐ Counter-clockwise

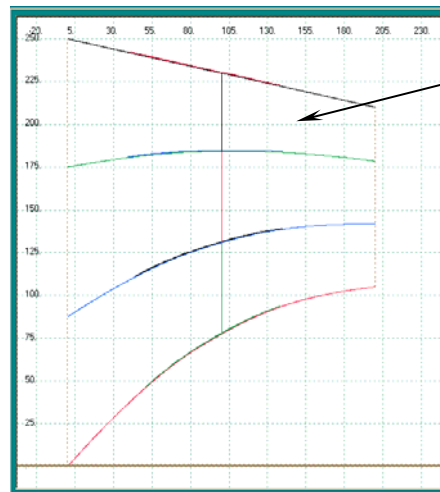
Βήμα 11°: Skinning

⁹ Τα Βήματα 1 – 3 αφορούν τη κατασκευή των διατομών των πτερυγίων, ενώ τα Βήματα 4 – 8 αφορούν τη κατασκευή των επιφανειών της πλήμνης και του κελύφους. Οι δύο αυτές αλληλουχίες εντολών, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως ο χρήστης μπορεί να τις εκτελέσει με όποια σειρά επιθυμεί.

Σχεδιασμός
Πλήμνης/
Κελύφους
(Βήμα 8°)



Skinning
(Βήμα 11°)

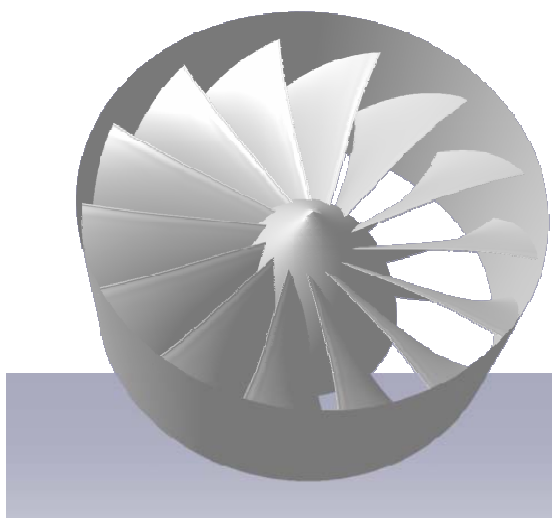
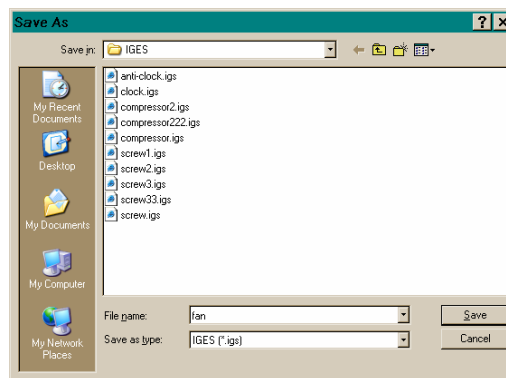


Βήμα 12°: Είσοδος του αριθμού των πτερυγίων

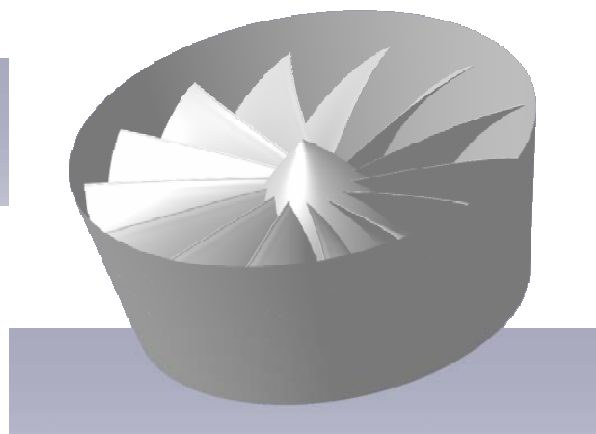
Number of blades 14

Βήμα 13°: Έξοδος Αρχείου IGES

Fan.igs

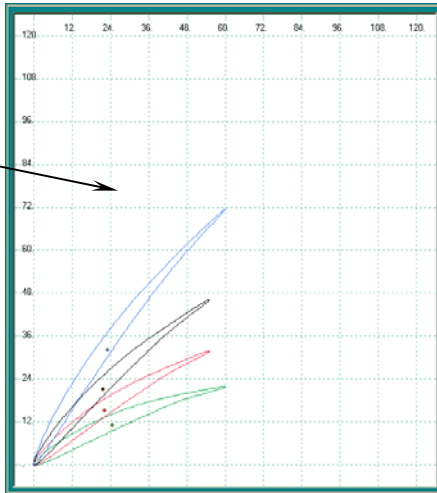


Εικόνα 4.1. Δεξιόστροφος ανεμιστήρας με 14 πτερύγια, σχεδιασμένος με 16 επιφάνειες NURBS (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού CATIA).

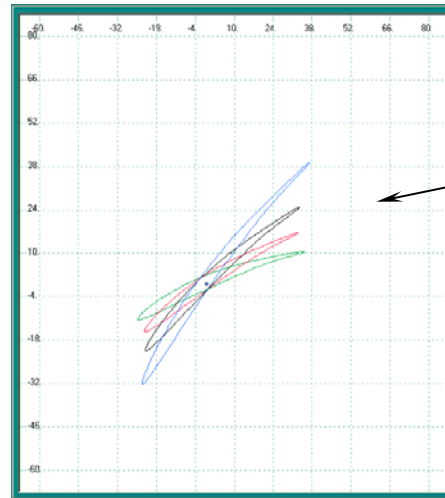


Μετατρέποντας μόνο τις αξονικές αποστάσεις των διατομών (L_{ref}) (Βήμα 1^ο), οι διατομές γίνονται :

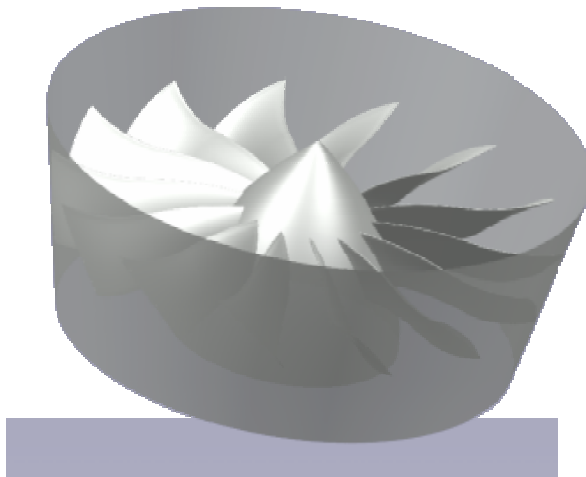
Σχεδιασμός
(Βήμα 3^ο)



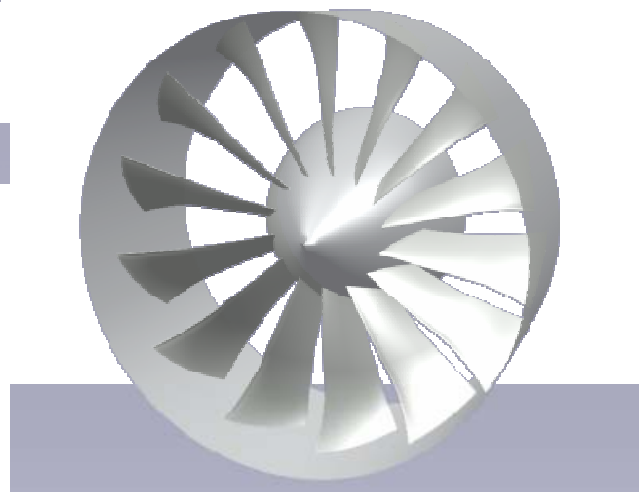
Μεταφορά
(Βήμα 3^ο)



και η παραγόμενη γεωμετρία είναι πλέον η εξής:



Εικόνα 4.2. Δεξιόστροφος ανεμιστήρας με 14 πτερύγια, σχεδιασμένος με 16 επιφάνειες NURBS (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού CATIA).



Η κατανομή πάχους των πτερυγίων που χρησιμοποιήθηκε (Βήμα 2^ο) και για τους δύο ανεμιστήρες και θα χρησιμοποιηθεί και για τις έλικες στην επόμενη παράγραφο είναι η εξής:

11		
11		
1.0	0.25	Πλευρά υπερπίεσης (Pressure Side)
0.9	0.5	
0.8	0.75	
0.7	1.25	
0.6	1.75	
0.5	2	
0.4	2.25	
0.3	2.25	
0.2	2	
0.1	1.75	
0.0	0.5	Πλευρά υποπίεσης (Suction Side)
0.0	0.5	
0.1	1.75	
0.2	2	
0.3	2.25	
0.4	2.25	
0.5	2	
0.6	1.75	
0.7	1.25	
0.8	0.75	
0.9	0.50	
1.0	0.25	

4.3. Έλικες

Τα βήματα για τη κατασκευή έλικας είναι τα ίδια που ακολουθηθήκαν στο σχεδιασμό ανεμιστήρα.

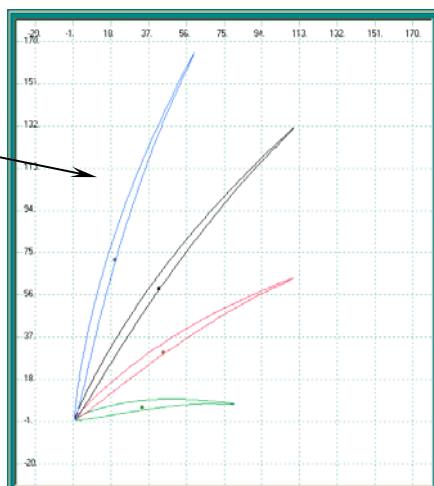
Βήμα 1ο: Είσοδος παραμέτρων σχεδίασης των 4 διατομών (L_{ref} , β_{1m} , β_{2m} και γ)

Section 1 (Green)		Section 2 (Red)	
Section 3 (Black)		Section 4 (Blue)	

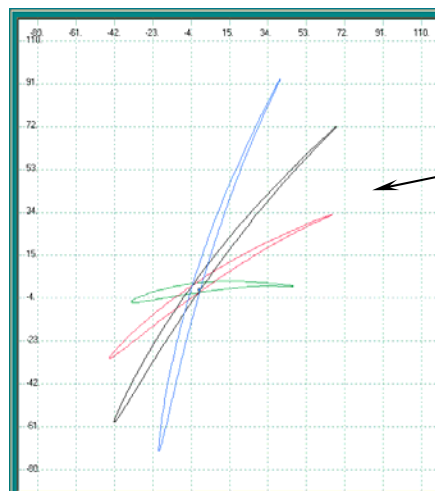
Βήμα 2ο: Είσοδος της κατανομής πάχους του πτερυγίου (δημιουργία αρχείου)

Βήμα 3ο: Σχεδιασμός διατομών **Blade Sections** και μεταφορά των διατομών **Transform Sections** **

Σχεδιασμός
(Βήμα 3°)



Μεταφορά
(Βήμα 3°)



**Ο σχεδιασμός με ταύτιση των κέντρων βάρους είναι προαιρετικός.

Βήμα 4°: Είσοδος του αριθμού των σημείων που περιγράφουν τις γεννήτριες καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους και καταχώρηση του αριθμού

Βήμα 5°: Επιλογή του είδους των σημείων (σημεία ελέγχου ή σημεία της καμπύλης)

- ☒ Control Points
☐ Points on the curve

Βήμα 6°: Είσοδος του βαθμού των καμπυλών της πλήμνης και του κελύφους

Βήμα 7°: Είσοδος των συντεταγμένων των σημείων που καθορίζουν τις καμπύλες της πλήμνης και του κελύφους

Πλήμνη
(Red)

Z	R	W
0	105	1
50	100	1
100	90	1
150	75	1
200	50	1

Z	R	W
0	300	1
50	300	1
100	300	1
150	300	1
200	300	1

Κέλυφος
(Black)

Βήμα 8°: Σχεδιασμός των μεσημβρινών καμπυλών .

Βήμα 9°: Είσοδος της θέσης της ακτίνας του κέντρου βάρους και το βαθμό της επιφάνειας στην περιφερειακή και αξονική διεύθυνση

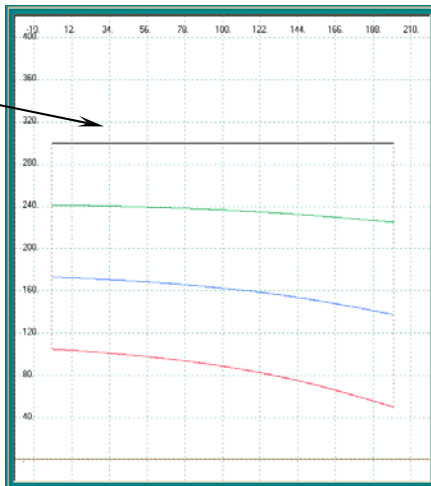
Degree in peripheral direction , Degree in axial direction

Βήμα 10°: Επιλογή της φοράς της πτερωτής (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη)

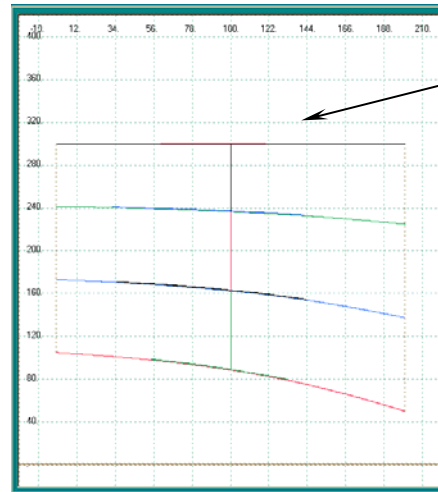
- ☒ Clockwise
☐ Counter-clockwise

Βήμα 11°: Skinning

Σχεδιασμός
Πλήμνης/
Κελύφους
(Βήμα 8°)



Skinning
(Βήμα 11°)

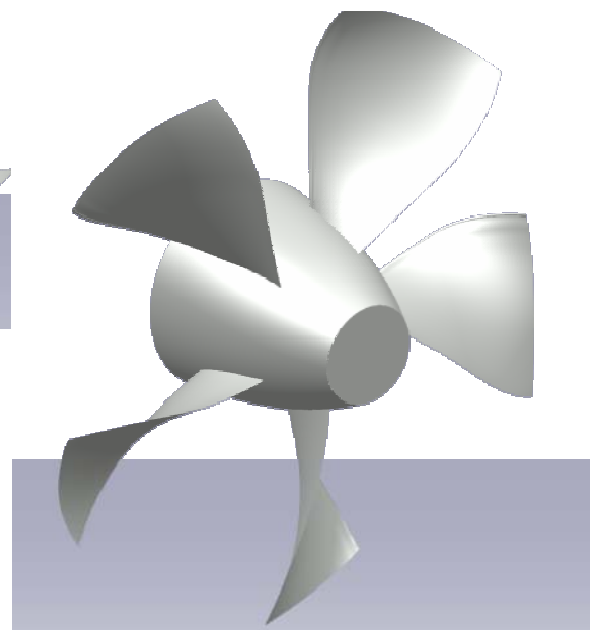
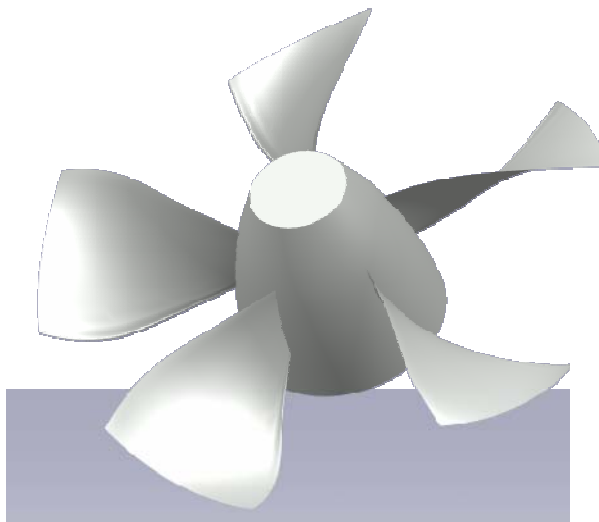
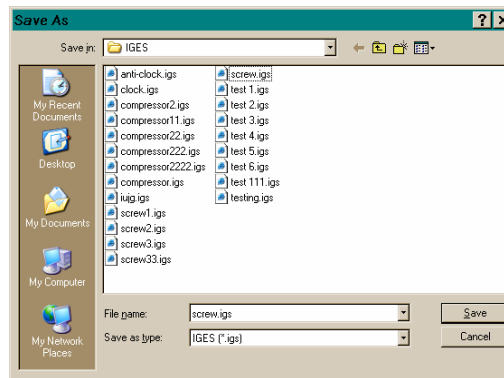


Βήμα 12°: Είσοδος του αριθμού των πτερυγίων

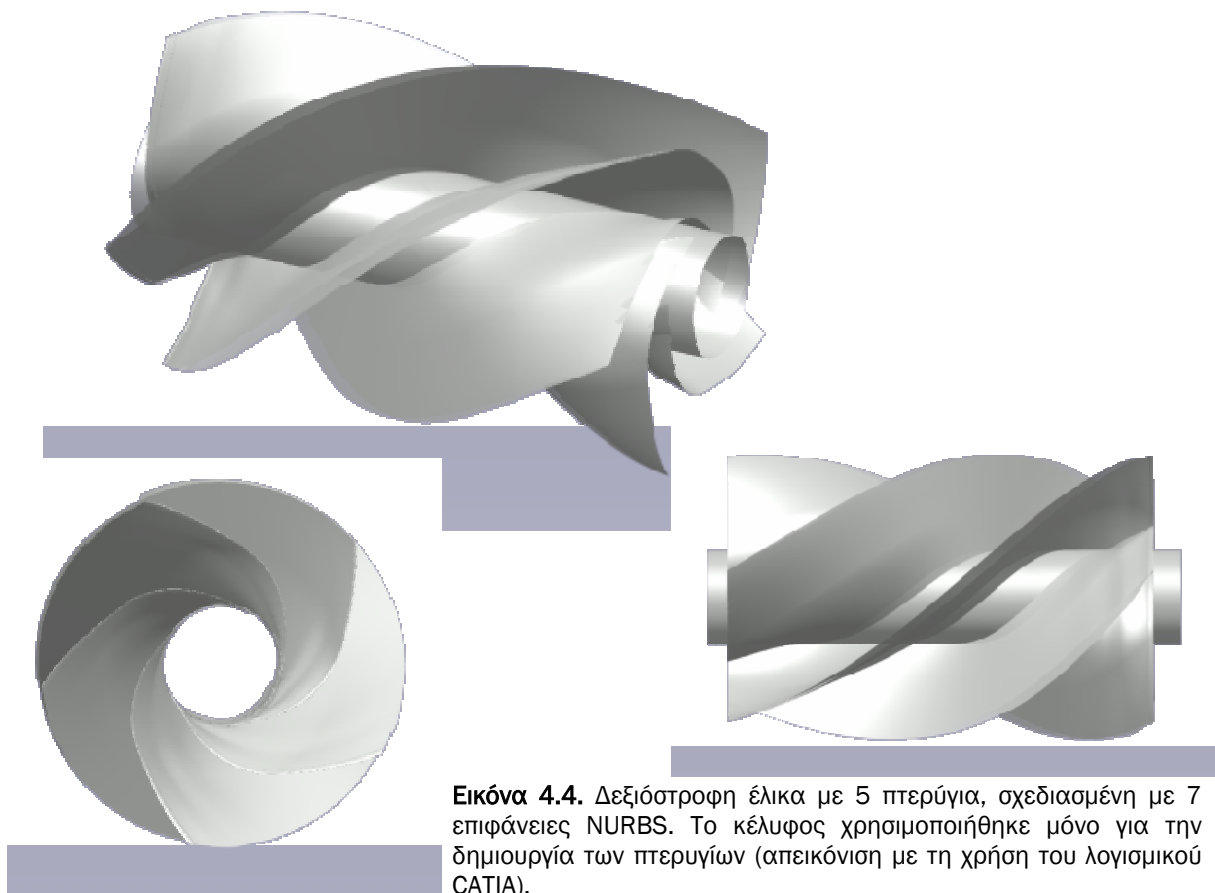
Number of blades 5

Βήμα 13°: Έξοδος Αρχείου IGES

Screw.igs



Εικόνα 4.3. Δεξιόστροφη έλικα με 5 πτερύγια, σχεδιασμένη με 7 επιφάνειες NURBS. Το κέλυφος χρησιμοποιήθηκε μόνο για την δημιουργία των πτερυγίων – η απεικόνιση του είναι περιττή (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού CATIA).



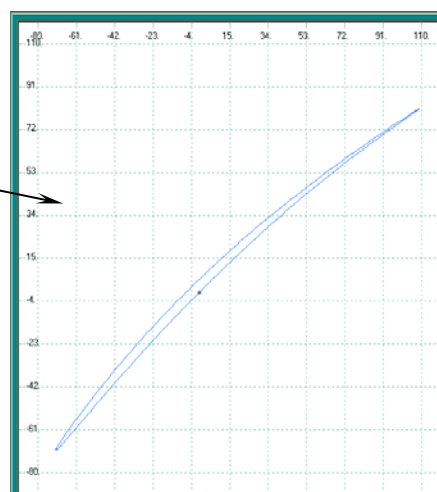
Στην Εικόνα 4.4 παρουσιάζεται μία έλικα, η γεωμετρία της οποίας επίσης παράχθηκε στο T4T. Οι διαφορές με την προηγούμενη έλικα της Εικόνας 4.3, όσον αφορά τις παραμέτρους σχεδίασης είναι οι εξής:

- ◆ Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες παράμετροι σχεδίασης και στις τέσσερις διατομές:

Sections 1-4
(Βήμα 1°)

Data			
Lref	180	γ	40
β_{1m}	50	β_{2m}	30

Σχεδιασμός
(Βήμα 3°)



❖ Οι γεννήτριες καμπύλες του Hub και του Shroud ορίζονται από τα σημεία:

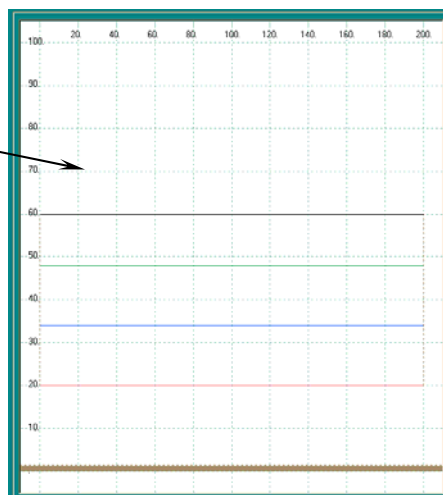
Πλήμνη (Red)
(Βήμα 7°)

Z	R	W
0	20	1
50	20	1
100	20	1
150	20	1
200	20	1

Z	R	W
0	60	1
50	60	1
100	60	1
150	60	1
200	60	1

Κέλυφος Black)
(Βήμα 7°)

Σχεδιασμός
Πλήμνης/
Κελύφους
(Βήμα 8°)



❖ Η θέση της ακτίνας του κέντρου βάρους βρίσκεται στη θέση 120.

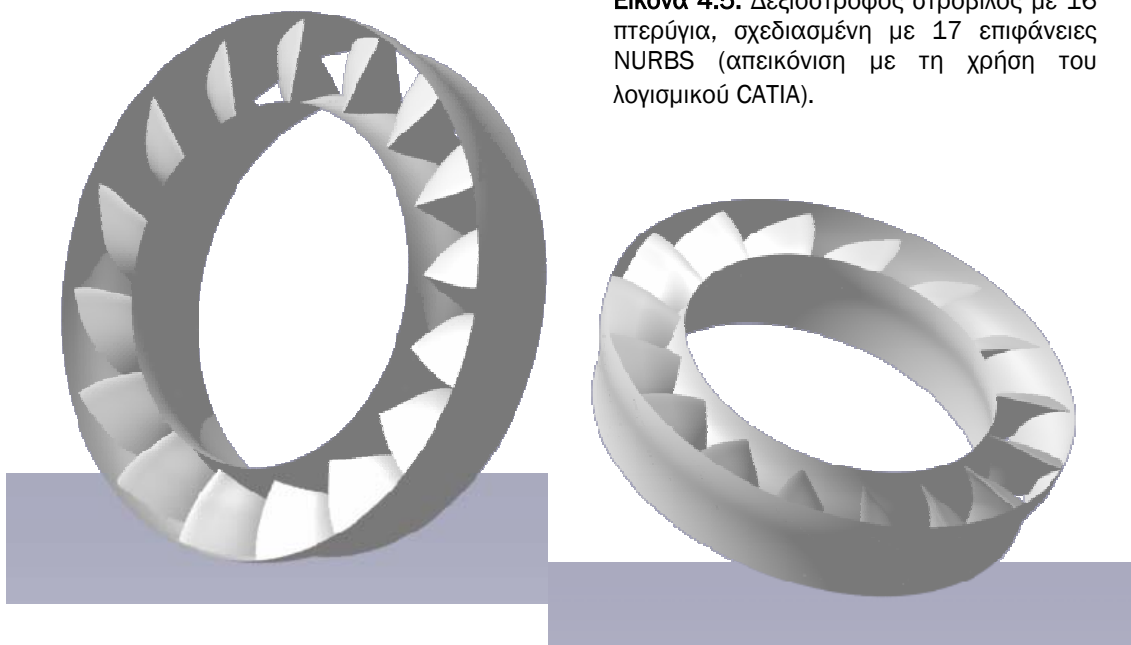
Position of the
gravity curve 120

4.4. Στρόβιλοι (Turbines)

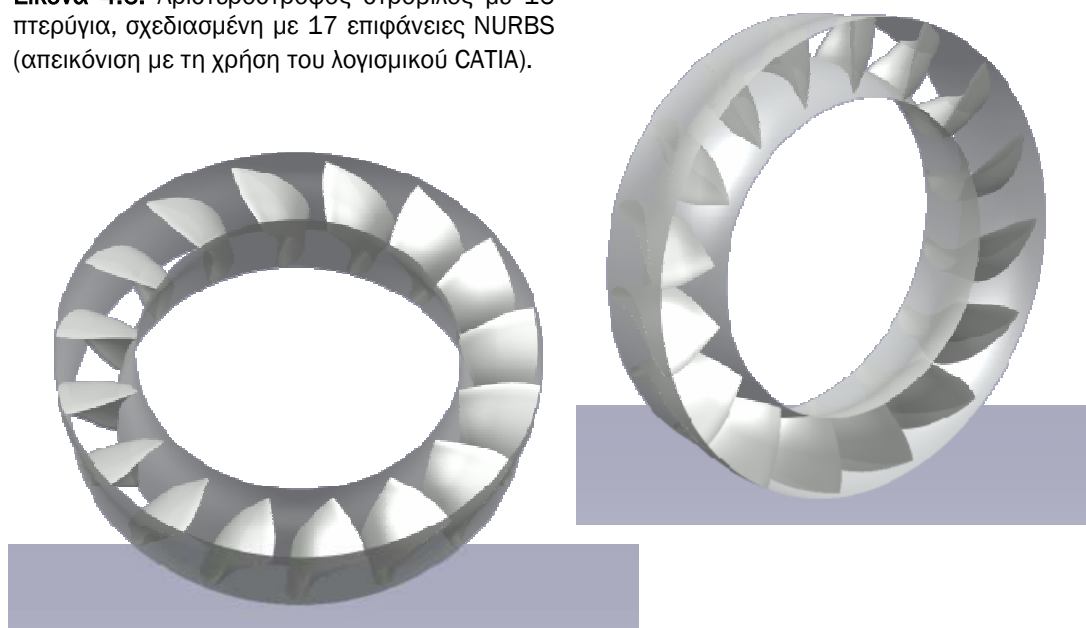
Στο Κεφάλαιο 3, για την καλύτερη κατανόηση της δομής του λογισμικού χρησιμοποιήθηκε μία απλή εφαρμογή στην οποία εφαρμόστηκε σταδιακά η εξέλιξή του. Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι προεπιλεγμένες τιμές του λογισμικού (defaults settings) που οδηγούν στη κατασκευή ενός στρόβιλου.

Στις εικόνες 4.5 και 4.6 απεικονίζονται ο δεξιόστροφος και αριστερόστροφος στρόβιλος αντίστοιχα.

Εικόνα 4.5. Δεξιόστροφος στρόβιλος με 16 πτερύγια, σχεδιασμένη με 17 επιφάνειες NURBS (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού CATIA).



Εικόνα 4.6. Αριστερόστροφος στρόβιλος με 16 πτερύγια, σχεδιασμένη με 17 επιφάνειες NURBS (απεικόνιση με τη χρήση του λογισμικού CATIA).



5

Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στη παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε ένα λογισμικό, το T4T, ικανό να σχεδιάζει τρισδιάστατες πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Το λογισμικό αυτό είναι μία συλλογή από γεωμετρικά εργαλεία που συνδυάζονται για την παραγωγή πτερυγώσεων. Όπως περιγράψαμε παραπάνω (Κεφάλαιο 3), οι προκύπτουσες γεωμετρίες παράγονται υπό μορφή συνόλου επιφανειών NURBS (Κεφάλαιο 2).

Οι NURBS επιφάνειες αποτελούν πολύ ισχυρά εργαλεία για την απεικόνιση όχι μόνο πτερυγώσεων αλλά και πιο πολύπλοκων σχημάτων. Το μεγάλο τους πλεονέκτημα είναι ότι ο χρήστης με μικρό αριθμό παραμέτρων μπορεί να περιγράψει πολύ πολύπλοκες γεωμετρίες. Η ίδια λογική χρησιμοποιείται και στα περισσότερα, αν όχι σε όλα τα συστήματα CAD.

Με βάση λοιπόν αυτό το πλεονέκτημα, το T4T έχει τη δυνατότητα παραμετρικής σχεδίασης πτερυγώσεων, με εύκολο τρόπο, χρησιμοποιώντας σχεδιαστικές παραμέτρους (L_{ref} , β_{1m} , β_{2m} , γ και **κατανομή πάχους** του πτερυγίου) που αντιστοιχούν στις διδιάστατες διατομές του πτερυγίου (blade sections). Η παραγόμενη γεωμετρία μπορεί να εξαχθεί σε άλλο λογισμικό CAD ή παραγωγής πλέγματος, χρησιμοποιώντας IGES αρχεία. Το γραφικό περιβάλλον του, το καθιστά εύκολο στη χρήση, είτε για σχεδιασμό είτε για εκπαιδευτικούς λόγους.

Στο μέλλον, το λογισμικό T4T μπορεί να επεκταθεί ώστε να κατασκευάζει πολυβάθμιες γεωμετρίες, ακτινωτής και μεικτής ροής, με ή χωρίς ακτινικό διάκενο. Επίσης, μπορεί να προστεθεί ένα εργαλείο αυτόματης παραγωγής πλέγματος, με το οποίο ο χρήστης θα κατασκευάζει το δομημένο πλέγμα για να εκτελεί τους αντίστοιχους υπολογισμούς επίλυσης της ροής.

Τέλος, όσον αφορά στο γραφικό περιβάλλον του λογισμικού, θα ήταν χρήσιμο να προστεθεί και τρισδιάστατη απεικόνιση της γεωμετρίας για την άμεση προεπισκόπηση της. Επίσης, η προσθήκη επιλογής άμεσης τροποποίησης του σχήματος των πτερυγίων, μετακινώντας τα σημεία ελέγχου, κατευθείαν από τη περιοχή σχεδίασης με τη χρήση του ποντικιού, θα διευκόλυνε τον χρήστη στη σχεδίαση των επιθυμητών γεωμετριών.

Βιβλιογραφία

- [1] Sobieczky, H., Dulikravich, G. S., and Dennis, B. H., "Parameterized geometry formulation for inverse design and optimization," 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Angra dos Reis, Brazil, May 26-31, 2002
- [2] Cofer J.L., IV, Reinker J.K. and Summer W.J., "Advances in steam path technology," General Electric Power Generation Paper, GER-3713D, 1996.
- [3] Perry L. Miller IV, James H. Oliver, David P. Miller and Daniel L. Tweedt, "BladeCAD: An Interactive Geometric DesignTool for Turbomachinery Blades," NASA Technical Memorandum 107262, 41st Gas Turbine and Aeroengine Congress, Birmingham, United Kingdom, June 10-13, 1996
- [4] Μπιλάλης, Ν., *Μελέτη Σχεδίαση με τη χρήση Η/Υ*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2003.
- [5] Dynamic Flight. "Airfoils in General", Welcome to dynamic Flight, 1999, 14-September 2005.
<http://www.dynamicflight.com/aerodynamics/airfoils/>
- [6] Crouse, J.E., and Gorrell, W.T., 1981, "Computer Program for Aerodynamic and Blading Design of Multistage Axial-Flow Compressors," NASA Technical Paper No. 1946
- [7] ANSYS, Inc. "ANSYS BladeModeler - A Geometry Design Tool for Rotating Machinery", Ansys, 14-September 2005.
<http://www.ansys.com/products/blademodeler.asp>
- [8] NUMECA International, "AutoBlade", NUMECA , 14-September 2005.
<http://www.numeca.be/index.php?id=24>
- [9] NUMECA International, "AutoBlade", NUMECA , 14-September 2005.
<http://www.numeca.be/index.php?id=28>
- [10] Concepts ETI, "Agile Software", Concepts NREC, 2004, 14-September 2005.
http://www.conceptseti.com/products/agile_axcad.htm
- [11] Concepts ETI, "Agile Software", Concepts NREC, 2004, 14-September 2005.
http://www.conceptseti.com/products/agile_ccad.htm
- [12] HydroComp, Inc., "HydroComp: PropCad", HydroComp, 14-September 2005.
<http://www.hydrocompinc.com/propcad/default.htm>

- [13] Advanced Design Techology, “Master the flow”, Advanced Design Techology, 14-September 2005.
<http://www.adtechnology.co.uk/>
- [14] PCA Engineers Limited, “Vista-AT Software for Axial flow turbines”, pcaeng, 14-September 2005.
<http://www.pcaeng.co.uk/cgi-bin/content/showdetails.cgi?1>
- [15] PCA Engineers Limited, “Vista-AC Software for Axial flow compressors”, pcaeng, 14-September 2005.
<http://www.pcaeng.co.uk/cgi-bin/content/showdetails.cgi?3>
- [16] Αμοιραλής, Ε., Ανάπτυξη λογισμικού για διεπιδραστική σχεδίαση και μελέτη αεροτομών, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2004.
- [17] Gordon, W.J. & Riesenfeld, R.F., “B-Spline curves and surfaces”, In Barnhill, R.E. & Riesenfeld, R.F., editors, *Computer aided geometric design*, Academic Press, 1974.
- [18] Riesenfeld, R.F., *Applications of B-Spline approximation to geometric problems of computer-aided design*, Ph.D. dissertation, Syracuse University, 1973.
- [19] Piegl, L. & Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.
- [20] Cox, M.G., “The numerical evaluation of B-Splines”, *Jour. Inst. Math. Applic.*, Vol.10, 1972.
- [21] DeBoor, C., “On calculating with B-Splines”, *Jour, Approx. Theory*, Vol.6, 1972.
- [22] James H. Oliver, March 1997, “NURBS-Based Geometry for Integrated Structural Analysis,” NASA Lewis Research Center, Grant NAG3-1481
- [23] Pierret, S., *Designing Turbomachinery blades by mean of the function approximation concept based on artificial neural network, generic algorithm, and the Navier-Stokes equations*, Ph.D Thesis, Faculte Polytechnique de Mons, 1999.