



# Πολυτεχνείο Κρήτης

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

## Διπλωματική εργασία

*Αντίστροφος καθορισμός πηγής από  
ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα για εντοπισμό δίπολων σε  
μοντέλα ανθρώπινου εγκεφάλου*

Ξανθόπουλος Πέτρος

Επιβλέπων καθηγητής:  
Καθηγητής Ζερβάκης Μιχάλης

Εξεταστική επιτροπή  
Καθηγητής Ζερβάκης Μιχάλης  
Καθηγητής Σιδηρόπουλος Νικόλαος  
Αναπληρωτής καθηγητής Λιάβας Αθανάσιος

## Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	- 2 -
Περιεχόμενα εικόνων .....	- 5 -
Περιεχόμενα Πινάκων .....	- 10 -
Ευχαριστίες.....	12
1 Πρόλογος.....	15
2 Διάρθρωση της εργασίας.....	17
3 Ανατομία του εγκεφάλου.....	19
3.1 Η κυτταρική μεμβράνη .....	19
3.2 Το νευρικό κύτταρο .....	21
3.3 Οι συνάψεις.....	23
3.4 Ο εγκεφαλος.....	24
4 Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα .....	27
4.1 Υλικό.....	27
4.2 Η αρχιτεκτονική του εγκεφαλογράφου.....	30
4.3 Τοποθέτηση των ηλεκτροδίων –Το σύστημα 10/20 .....	31
4.4 Άλλα συστήματα τοποθέτησης.....	33
4.5 Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε .....	35
5 Αντίστροφος καθορισμός πηγής – Το πρόβλημα .....	37
5.1 Μοντελοποίηση στα πλαίσια του εγκεφαλογραφήματος .....	37
5.2 Άλλες εφαρμογές .....	40
5.2.1 Άλλες βιοιατρικές εφαρμογές.....	40
5.2.2 Εφαρμογή στην επεξεργασία ηχητικού σήματος.....	41
5.2.3 Εφαρμογή στα ασύρματα δίκτυα .....	42
5.2.4 Εφαρμογή στην μηχανική όραση και στην επεξεργασία εικόνας .....	43
6 Τα μοντέλα του εγκεφάλου.....	45
6.1 Σφαιρικά μοντέλα .....	46
6.1.1 Άπειρο άγων μέσο.....	46
6.1.2 Σφαίρα ενός κελύφους .....	47
6.1.3 Ομόκεντρες σφαίρες με Μ κελύφα.....	48
6.2 Ρεαλιστικά μοντέλα .....	49
6.3 Περιγραφή συστήματος απεικόνισης.....	52
7 Αντίστροφος καθορισμός πηγής –Οι αλγόριθμοι.....	54
7.1 Αξιολόγηση αλγορίθμων .....	55
7.1.1 Αξιολόγηση σε περιβάλλον εξομοίωσης .....	55
7.1.2 Αξιολόγηση με πραγματικά δεδομένα.....	56

7.2	Αλγόριθμοι άμεσης επίλυσης αντιστρόφου προβλήματος .....	58
7.2.1	Αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας (Minimum norm algorithm) .....	58
7.2.1.1	Εξομοίωση .....	59
7.2.2	Αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας με βάρη (Weighted minimum norm algorithm) .....	63
7.2.2.1	Εξομοίωση .....	64
7.2.3	Επαναληπτικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του πίνακα των βαρών (αλγόριθμος FOCUSS) .....	68
7.2.4	Αλγόριθμος LORETA .....	70
7.2.4.1	Εξομοίωση .....	71
7.2.4.2	Εφαρμογή σε πραγματικά δεδομένα .....	73
7.3	Μέθοδοι για διαχωρισμό σήματος .....	76
7.3.1	Μετασχηματισμός PCA (Principal Component Analysis) .....	77
7.3.1.1	Περιγραφή του αλγορίθμου .....	77
7.3.1.2	Σχέση PCA με συχνότητα- αριθμό πηγών .....	80
7.3.1.2.1	Διαδικασία εξομοίωσης .....	80
7.3.1.2.2	Μια πηγή ημιτονοειδούς μορφής .....	81
7.3.1.2.3	Δυο ημιτονοειδείς πηγές ασύγχρονες .....	83
7.3.1.2.4	Δυο ημιτονοειδείς πηγές - σύγχρονες .....	86
7.3.1.3	Σε περιβάλλον θορύβου .....	89
7.3.2	Αλγόριθμοι υποχώρου σήματος .....	93
7.3.2.1	Ο αλγόριθμος MUSIC .....	93
7.3.3	Μετασχηματισμός ICA (Independent Component Analysis) .....	95
7.3.3.1	Περιγραφή του προβλήματος .....	95
7.3.3.2	Προσεγγίσεις για επίτευξη ανεξαρτησίας .....	97
7.3.3.3	Ο αλγόριθμος FASTICA .....	98
7.3.3.4	Αξιολόγηση ανεξάρτητων συνιστωσών .....	99
7.3.3.5	ICA σε περιβάλλον θορύβου .....	103
7.3.3.6	Παραλληλισμός ICA-PCA .....	105
7.3.3.6.1	Μηδενική συσχέτιση-ανεξαρτησία .....	105
7.3.3.6.2	Ιδιότητες πινάκων μίξης -απομίξης .....	105
7.3.4	Συνδυασμένη χρήση ICA - PCA .....	106
7.3.4.1	Περιβάλλον χωρίς θόρυβο .....	106
7.3.4.2	Βελτίωση σε περιβάλλον θορύβου .....	109
7.4	Λύση του αντίστροφου προβλήματος με χρήση PCA-ICA και Correlation coefficients .....	112
7.4.1	Βαθμίδα PCA .....	113
7.4.2	Βαθμίδα ICA .....	114
7.4.3	Βαθμίδα τοποθέτησης διπόλων .....	114
7.4.4	Αποτελέσματα εξομοίωσης .....	116
7.4.5	Αποτελέσματα σε πραγματικά δεδομένα .....	119
8	<b>Συμπεράσματα – μελλοντική δουλειά .....</b>	<b>123</b>
8.1	Σχετικά με τους αλγόριθμους .....	123
8.2	Σχετικά με την μοντελοποίηση του εγκεφάλου .....	124
9	<b>Παράρτημα .....</b>	<b>125</b>
9.1	Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας και μαθηματικοί ορισμοί .....	125
9.1.1	Γινόμενο Kronecker .....	125
9.1.2	Ψευδοαντίστροφος πίνακας Moore-Penrose .....	126

9.1.3	Singular value decomposition (SVD) .....	127
9.1.4	Eigenvalue decomposition .....	128
9.1.5	Υπολογισμός συσχέτισης υποχώρου (subspace correlation) .....	128
9.1.5.1	Γεωμετρικό παράδειγμα .....	129
9.1.6	Έννοια της στατιστικής ανεξαρτησίας .....	129
9.1.6.1	Δημιουργία μη γκαουσιανών μεταβλητών .....	130
9.1.6.1.1	Κύρτωση .....	131
9.1.6.1.2	Αρνητική Εντροπία (Negentropy) .....	133
9.1.6.1.3	Ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας .....	135
9.1.6.1.4	Μέγιστη πιθανοφάνεια (Maximum likelihood) .....	136
9.1.6.2	Σχέση ισχύς ιδιοτιμών σήματος .....	136
9.1.6.3	Ανεξαρτησία και συσχέτιση .....	137
9.2	Συντομογραφίες .....	138
9.3	Συντεταγμένες ηλεκτροδίων .....	139
9.4	Πακέτα λογισμικού για source localization .....	141
9.4.1	Εμπορικά πακέτα .....	142
9.4.1.1	BESA .....	142
9.4.1.2	CURRY .....	143
9.4.2	Πακέτα ανοικτού λογισμικού .....	144
9.4.2.1	EEGLAB .....	144
9.4.2.2	Brainstorm .....	145
9.4.2.3	SCIRun-BIOPSE .....	145
9.4.2.4	LORETA key .....	146
<b>Βιβλιογραφία .....</b>		<b>148</b>

## Περιεχόμενα εικόνων

Εικόνα 1 Συνεργασία των επιστημών .....	15
Εικόνα 2 Σχηματισμός κυτταρικής μεμβράνης .....	19
Εικόνα 3 Η κυτταρική μεμβράνη.....	20
Εικόνα 4 Μεταφορά ιόντων μέσω κυτταρική μεμβράνη.....	21
Εικόνα 5 Μέρη του νευρικού κυττάρου .....	22
Εικόνα 6 λειτουργία σώματος , δένδριτών , αξονα .....	23
Εικόνα 7 Τρόπος λειτουργίας της σύναψης.....	24
Εικόνα 8 Η ανατομία του εγκεφάλου .....	25
Εικόνα 9 Οι δυο φλοιοι του εγκεφάλου.....	26
Εικόνα 10 Ειδικό κασκέτο με ηλεκτρόδια.....	27
Εικόνα 11 Μερικά είδη ηλεκτροδίων .....	28
Εικόνα 12Υποδοχείς ηλεκτροδίων .....	28
Εικόνα 13 συστήματα διασύνδεσης με υπολογιστή .....	29
Εικόνα 14 Αγωγήμα ζελέ για μείωση θορύβου .....	29
Εικόνα 15 Αρχιτεκτονική ηλεκτροεγκεφαλογράφου .....	30
Εικόνα 16 Το σύστημα τοποθέτησης των ηλεκτροδίων 10/20.....	32
Εικόνα 17 Ονοματολογία ηλεκτροδίων σύμφωνα με AES .....	33
Εικόνα 18 τοποθέτηση WL/WR .....	34
Εικόνα 19Τοποθέτηση Kombi montage .....	34
Εικόνα 20 Διαταξη ηλεκτροδίων που χρησιμοποιήθηκε.....	35
Εικόνα 21 Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος του αντίστροφου καθορισμού πηγής.....	37
Εικόνα 22 Άλλες βιοιατρικές εφαρμογές του "τυφλού διαχωρισμού σημάτων".....	40
Εικόνα 23 Σχηματική αναπαράσταση του cocktail party προβλήματος.....	41

Εικόνα 24 Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος εξασθένησης πολλαπλών δρόμων .....	42
Εικόνα 25 Διαχωρισμός εικόνων .....	43
Εικόνα 26 Εξάλειψη θορύβου με τεχνικές διαχωρισμού σήματος .....	44
Εικόνα 27 Απεικόνιση σημείων μοντέλου που χρησιμοποιήθηκαν .....	52
Εικόνα 28 απεικόνιση τομών μοντέλου .....	53
Εικόνα 29 περιοχές ενεργοποίησης .....	57
Εικόνα 30 γραφική παράσταση σήματος εξομοίωσης .....	59
Εικόνα 31 Πραγματική θέση σήματος εξομοίωσης .....	60
Εικόνα 32 ψευδοχρωματισμός μετρικού m .....	60
Εικόνα 33 Ολικό μέγιστο m .....	61
Εικόνα 34 σημά εξομοίωσης στο εσωτερικό του εγκεφάλου .....	62
Εικόνα 35 Εκτίμηση μεγίστου .....	62
Εικόνα 36 Σήμα εξομοίωσης στο εσωτερικό του εγκεφάλου .....	65
Εικόνα 37 Ολικό μέγιστο με αλγόριθμο WMN .....	65
Εικόνα 38 Εξομοίωση με δυο σήματα .....	66
Εικόνα 39 Αρχικές θέσεις σημάτων .....	67
Εικόνα 40 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού με αλγόριθμο WMN .....	67
Εικόνα 41 εκτίμηση αριθμού διπόλων με την βοήθεια τοπικών ακρότατων .....	68
Εικόνα 42 Ψευδοχρωματισμός μετρικού m .....	72
Εικόνα 43 Εκτίμηση μορφής σημάτων .....	73
Εικόνα 44 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού m ενός εγκεφαλογραφήματος μπάντα θήτα .....	74
Εικόνα 45 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού m -μπάντα άλφα 2 .....	74
Εικόνα 46 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού m - μπάντα γάμμα 1 .....	74
Εικόνα 47 Αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα θήτα .....	75

Εικόνα 48 Αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα άλφα 2 .....	75
Εικόνα 49 αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα γάμμα 1 .....	76
Εικόνα 50 Σχηματική αναπαράσταση διαχωρισμού ιδιοτιμών .....	78
Εικόνα 51 διάγραμμα αλγορίθμου PCA .....	80
Εικόνα 52 Μια ημιτονοειδής κυματομορφή.....	81
Εικόνα 53 Διάγραμμα ιδιοτιμών για μια κυματομορφή .....	82
Εικόνα 54 ανακατασκευασμένη κυματομορφή.....	83
Εικόνα 55 Σύγκριση με το αρχικό σήμα.....	83
Εικόνα 56 Δυο ημιτονοειδείς πηγές διαφορετικών συχνοτήτων .....	84
Εικόνα 57 Διάγραμμα ιδιοτιμών.....	84
Εικόνα 58 Σύγκριση με τα αρχικά σήματα.....	86
Εικόνα 59 Δυο ημιτονοειδείς πηγές ίδιων συχνοτήτων.....	87
Εικόνα 60 Διάγραμμα ιδιοτιμών.....	87
Εικόνα 61 Ανακατασκευασμένο σήμα .....	88
Εικόνα 62 Σύγκριση με αρχικό σήμα .....	89
Εικόνα 63 Αρχικό σήμα.....	89
Εικόνα 64 Διάγραμμα ιδιοτιμών.....	90
Εικόνα 65 Ανακατασκευασμένο σήμα .....	91
Εικόνα 66 Σύγκριση με το αρχικό σήμα.....	92
Εικόνα 67 Μια κυματομορφή που αντιστοιχεί σε θόρυβο .....	92
Εικόνα 68 απόκριση ιδιοτιμών σε διάφορα επίπεδα θορύβου.....	93
Εικόνα 69 διάγραμμα αλγορίθμου ICA .....	96
Εικόνα 70 Αρχικές κυματομορφές .....	100
Εικόνα 71 τιμες νόρμας στηλών πίνακα μίξης .....	101
Εικόνα 72 πρώτο ανακατασκευασμένο σήμα.....	101



Εικόνα 73 Δεύτερο ανακατασκευασμένο σήμα.....	102
Εικόνα 74 Ανακατεσκευασμένο σήμα από δωδέκατη συνιστώσα .....	102
Εικόνα 75 ανακατασκευασμένο σήμα από την όγδοη συνιστώσα .....	103
Εικόνα 76 Νόρμα στηλών πίνακα μίξης σε περιβάλλον θορύβου.....	103
Εικόνα 77 Πρώτο ανακατασκευασμένο σήμα .....	104
Εικόνα 78 Δεύτερο ανακατασκευασμένο σήμα.....	104
Εικόνα 79 Δυο αρχικά σήματα .....	107
Εικόνα 80 Διάγραμμα ιδιοτιμών .....	107
Εικόνα 81 ανακατασκευασμένο σήμα από PCA .....	108
Εικόνα 82 Σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου σήματος .....	109
Εικόνα 83 Αρχικά σήματα .....	109
Εικόνα 84 Διάγραμμα ιδιοτιμών .....	110
Εικόνα 85 σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου (PCA) σήματος.....	111
Εικόνα 86 Σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου(ICA) σήματος.....	112
Εικόνα 87 Αρχιτεκτονική συστήματος τοποθέτησης διπόλων βασισμένο σε PCA-ICA .....	113
Εικόνα 88 Σχηματιστική αναπαράσταση της βαθμίδας PCA.....	113
Εικόνα 89 Σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδα ICA.....	114
Εικόνα 90 σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδας τοποθέτησης διπόλων .....	116
Εικόνα 91 αρχική θέση πηγών στον εγκεφαλο.....	116
Εικόνα 92 Διάγραμμα ιδιοτιμών και ανακατασκευασμένα σήματα.....	117
Εικόνα 93 Διαγράμματα ψευδοχρωματισμού ποσότητας 1/RMS .....	118
Εικόνα 94 Αντιπαράθεση αρχικών δεδομένων-αποτελεσμάτων .....	118
Εικόνα 95 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης 1/RMS για μπάντα θήτα... 120	
Εικόνα 96 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης 1/RMS για μπάντα άλφα 2120	
Εικόνα 97 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης 1/RMS για μπάντα γάμα 1 120	



Εικόνα 98 θέσεις διπόλων για μπάντα θήτα .....	121
Εικόνα 99 Θέσεις διπόλων για μπάντα άλφα 2.....	121
Εικόνα 100 Θέσεις διπόλων για μπάντα γάμα 1 .....	122
Εικόνα 101 Γεωμετρικό παράδειγμα .....	129
Εικόνα 102 Γκαουσιανή κατανομή (διακεκομμένη γραμμή) και υπεργκαουσιανή κατανομή.....	132
Εικόνα 103 Τα ηλεκτρόδια στο σύστημα 10%.....	139
Εικόνα 104 snapshots από το πακέτο BESA .....	142
Εικόνα 105 Snapshot από το πακέτο CURRY .....	143
Εικόνα 106 snapshot από το πακέτο EEGLAB .....	144
Εικόνα 107 Snapshot από το πακέτο Brainstorm .....	145
Εικόνα 108 Snapshot από το πακέτο SCIRUN/BIOPSE.....	146
Εικόνα 109 snapshot από το πακέτο LORETA key .....	147

## Περιεχόμενα Πινάκων

Πίνακας 1 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά σφαιρών .....	49
Πίνακας 2 Παραμετροί Berg.....	49
Πίνακας 3 Συντομογραφίες.....	138
Πίνακας 4 Καρτσιανές συντεταγμένες ηλεκτροδίων.....	140
Πίνακας 5 Πολικές συντεταγμένες ηλεκτροδίων .....	141

*Η φωτογραφία του εξοφύλου είναι από το Blue Brain Project και αναπαριστά πλέγμα  
διαδυνδεδεμένων νευρώνων*

## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς που με βοήθησαν στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Πρώτα από όλα ευχαριστώ τον μέντορα και δάσκαλό μου καθηγητή Μιχάλη Ζερβάκη για την συνολική του καθοδήγηση και στήριξη κατά διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών .

Τον υποψήφιο διδάκτορα του τμήματος HMMY Βαγγέλη Σακκαλή για τις συμβουλές που μου έδωσε σε όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής τόσο σε θέματα επεξεργασίας βιοιατρικού σήματος όσο και στην καθοδήγηση της ερευνητικής αυτής προσπάθειας.

Τον συνεργάτη του εργαστηρίου μας και καθηγητή του τμήματος ιατρικής του Πανεπιστημίου Κρήτης κύριο Σήφη Μιχελογιάννη που μοιράστηκε μαζί μας τα βιοιατρικά δεδομένα των πειραμάτων που διεξήγαγε στο Πανεπιστημιακό Γενικό Νοσοκομείο του Ηρακλείου.

Τον καθηγητή Cristin Bigan από το Ecological University of Bucharest για την συνεργασία που είχαμε και για τις συμβουλές που μου παρείχε σε θέματα της φύσης του βιοιατρικού σήματος καθώς και αξιολόγησης των αποτελεσμάτων.

Τον καθηγητή Kenneth P. Camilleri και την T.Cassar από το πανεπιστήμιο της Μάλτας για την ανταλλαγή απόψεων που είχαμε πάνω στο θέμα του αντίστροφου καθορισμού πηγής.

Τους καθηγητές του τμήματος HMMY κύριο Νικόλαο Σιδηρόπουλο και Αθανάσιο Λιάβα για τον χρόνο που αφιέρωσαν συμμετέχοντας στην επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας.

Τους γονείς μου ,τους φίλους μου και όσους άλλους μου συμπαραστάθηκαν όλα αυτά τα χρόνια των προπτυχιακών μου σπουδών.

Πέτρος Ξανθόπουλος  
Χανιά Ιούλιος 2005

*Στην θεία μου την Βάσω που  
έφυγε πρόσφατα από καρκίνο*

*«Je finis par trouver sacre le desorde de mon esprit»*

*Arthur Rimbaud*

*Une saison en Enfer*

*«Στο τέλος θεώρησα ιερή την αταξία του μυαλού μου»*

*Αρθούρος Ρεμπώ*

*Μια εποχή στην κόλαση*

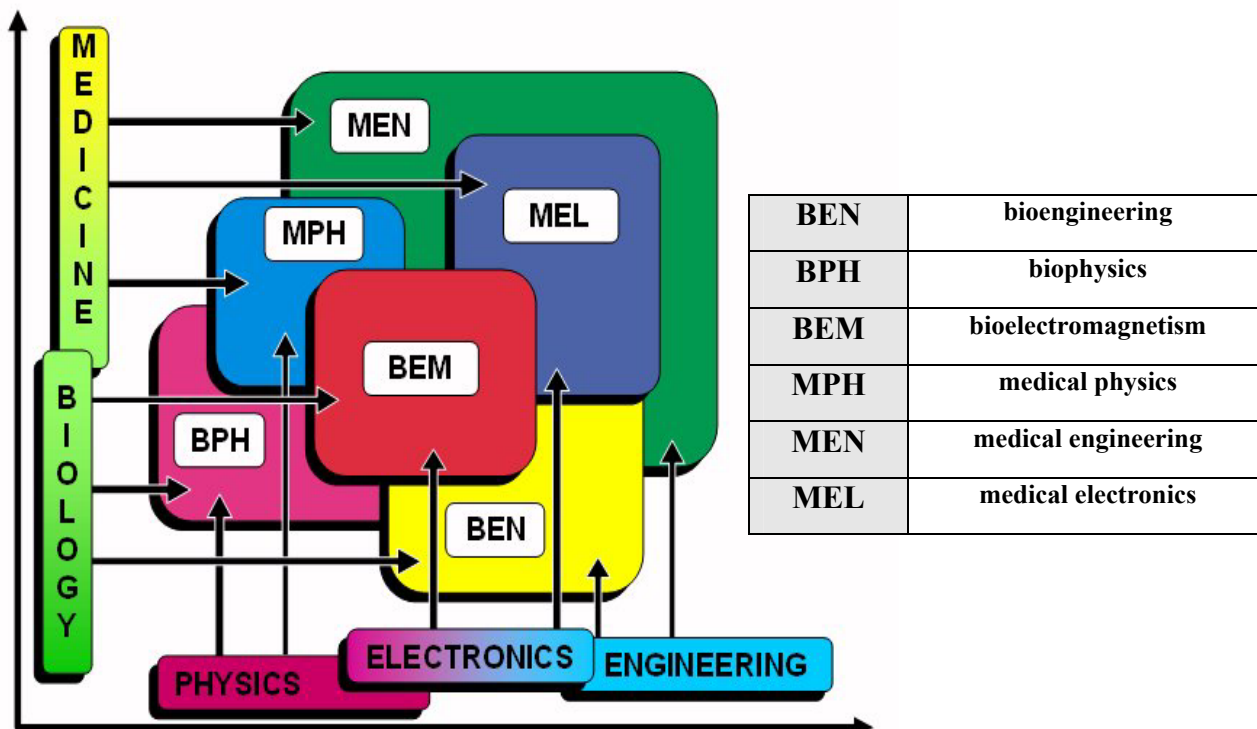
# 1 Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια η εφαρμογή της θεωρίας επεξεργασίας σήματος στην επιστήμη της ιατρικής κρίνεται απαραίτητη προκειμένου να καταφέρουμε να αναπτύξουμε νέες υπολογιστικές και απεικονιστικές τεχνολογίες στην υπηρεσία του ιατρού.

Τα προβλήματα για τις ανάγκες της ιατρικής τίθενται κατ' αρχήν από την επιστήμη της ιατρικής και ο μηχανικός καλείται με βάση τις γνώσεις του να παράγει αλγορίθμους και μεθοδολογίες προκειμένου να λύσει αποτελεσματικά το πρόβλημα.

Κάθε μέθοδος που προτείνεται αρχικά αξιολογείται από τον μηχανικό μέσα από μια διαδικασία εξομοίωσης και αν τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά ακολουθείται μια διαδικασία κλινικής αξιολόγησης από ιατρούς προκειμένου να εξεταστούν τα τυχόν προβλήματα και βαθμός απόδοσης των εν λόγω μεθόδων.

Η ανάγκη για συνεργασία των επιστημών υγείας με τις λεγόμενες θετικές επιστήμες είχε σαν αποτέλεσμα την δημιουργία κλάδων της επιστήμης που συνδυάζουν γνώσεις διάφορων ετερόκλητων πεδίων.



Εικόνα 1 Συνεργασία των επιστημών



Στην εικόνα 1 μπορούμε να δούμε ένα σχηματικό διάγραμμα που απεικονίζει αυτή τη σύζευξη των επιστημών και τους νέους κλάδους που σχηματίζονται προκειμένου να αντιμετωπίσουν σύγχρονα προβλήματα και προκλήσεις που παρουσιάζονται.

Ένα τέτοιο πρόβλημα εξετάζουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία . Προσπαθούμε από την σκοπιά του μηχανικού να προσεγγίσουμε ένα πρόβλημα νευροφυσιολογίας . Κατά την εκπόνηση της εργασίας συνεργαστήκαμε με το Περιφερειακό Πανεπιστημιακό Γενικό Νοσοκομείο Κρήτης και τον καθηγητή του τμήματος ιατρικής κύριο Σήφη Μιχελογιάννη προκειμένου να εξασφαλίσουμε αξιόπιστα βιοιατρικά δεδομένα . Πάνω σε αυτά τα δεδομένα εφαρμόσαμε τα ποιο σύγχρονα «εργαλεία» της μοντέρνας ψηφιακής επεξεργασίας σήματος σε ηλεκτρικά σήματα του εγκεφάλου .

Στην πορεία θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα του κλάδου των τηλεπικοινωνιών σε υπό το πρίσμα μιας βιοιατρικής εφαρμογής καθώς και σε ποιο βαθμό θα πρέπει να τροποποιήσουμε τους ήδη υπάρχοντες αλγορίθμους προκειμένου να προσεγγίσουμε το πρόβλημα με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

## 2 Διάρθρωση της εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται το πρόβλημα του εντοπισμού των ηλεκτρικών δίπολων που εμφανίζονται στον ανθρώπινο εγκέφαλο έχοντας σαν δεδομένο το σήμα του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος.

Αρχικά (κεφάλαιο 3) γίνεται μια μελέτη για τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τα δυναμικά του ανθρώπινου εγκεφάλου ξεκινώντας από τις θεμελιώδεις δομικές-βιολογικές μονάδες και καταλήγοντας στα ηλεκτρικά σήματα και στην ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση που λαμβάνουμε σαν σήμα (εγκεφαλογράφημα).

Στο κεφάλαιο 4 γίνεται μια μελέτη στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η καταγραφή του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος και στα πρότυπα που υπάρχουν σχετικά με την τοποθέτηση των ηλεκτροδίων και τα είδη των εγκεφαλογραφημάτων

Στην συνέχεια (κεφάλαιο 5) γίνεται μια παρουσίαση του προβλήματος του αντίστροφου καθορισμού πηγής (inverse source localization όπως είναι γνωστό στην αγγλική βιβλιογραφία) καθώς και μια αναφορά άλλους τομείς που συναντάμε το εν λόγω πρόβλημα.

Ακολούθως στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται διάφορα μοντέλα που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τον ανθρώπινο εγκέφαλο στα πλαίσια της μελέτης του εν λόγω προβλήματος.

Στο κύριο μέρος της εργασίας (κεφάλαιο 7) παρατίθενται οι κυριότεροι αλγόριθμοι που έχουν χρησιμοποιηθεί από την αρχή της δεκαετίας του '90 έως και σήμερα για εντοπισμό πηγής καθώς και τρόποι για να αντιμετωπίσουμε τον θόρυβο.

Στην παρουσίαση των αλγορίθμων αυτών δίνεται έμφαση στην φιλοσοφία τους δηλαδή στον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος και στην απόδοσή τους (τόσο σε πραγματικά ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα όσο και σε περιβάλλοντα εξομοίωσης) .

Επίσης έχουν περιληφθεί και προτάσεις για την βελτιστοποίηση και μερικές φορές την συνδυασμένη χρήση μερικών από αυτούς .

Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται κάποια συμπεράσματα που προέκυψαν από την συνολική ανάλυση του προβλήματος και προτείνονται προσεγγίσεις για περαιτέρω ανάλυση και μελλοντική δουλειά.

Στο παράρτημα της εργασίας (κεφάλαιο 9) παρατίθενται στοιχεία γραμμικής άλγεβρας που έχουν να κάνουν με τους αλγορίθμους που χρησιμοποιήθηκαν μέσα στην εργασία ουτως ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να κατανοήσει το περιεχόμενο των αλγορίθμων χωρίς την ανάγκη κάποιου συμπληρωματικού εγχειριδίου γραμμικής άλγεβρας . Επίσης υπάρχει ένας πίνακας αναφοράς με τις συντομογραφίες που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία για δυνατότητα καλύτερης συγκεντρωτικής μελέτης.

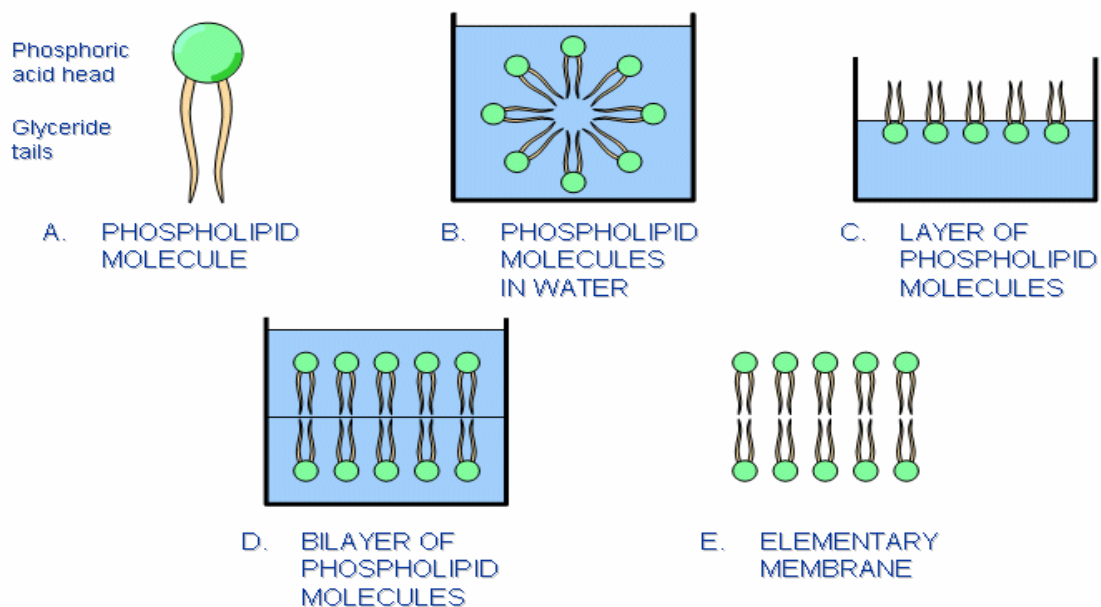
### 3 Ανατομία του εγκεφάλου

#### 3.1 Η κυτταρική μεμβράνη

Η δομή της κυτταρικής μεμβράνης είναι αρκετά σημαντική μια και είναι υπεύθυνη για την δημιουργία διαφορών δυναμικού ανάμεσα στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του κυττάρου που με τη σειρά τους είναι υπεύθυνες για την δημιουργία ηλεκτρικών σημάτων και κατ επέκταση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

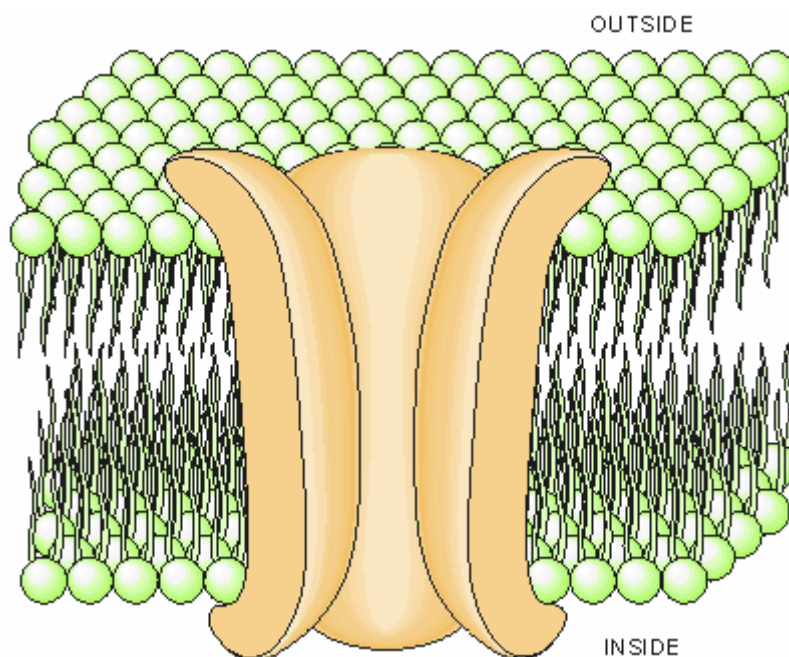
Ο βασικός λοιπόν δομικός λίθος της κυτταρικής μεμβράνης είναι τα φωσφολιπίδια . Τα φωσφολιπίδια είναι βιολογικά μακρομόρια που αποτελούνται από μια υδρόφιλη κεφαλή (προσελκύεται από το νερό) και μια υδρόφοβη ουρά (απωθείται από το νερό) [8] .

Έτσι αν βρεθούν σε υδατώδες περιβάλλον τείνουν να δημιουργούν σχηματισμούς προκειμένου η κεφαλή να βρίσκεται στο νερό ενώ παράλληλα να προστατεύεται η υδρόφοβη ουρά.



Εικόνα 2 Σχηματισμός κυτταρικής μεμβράνης

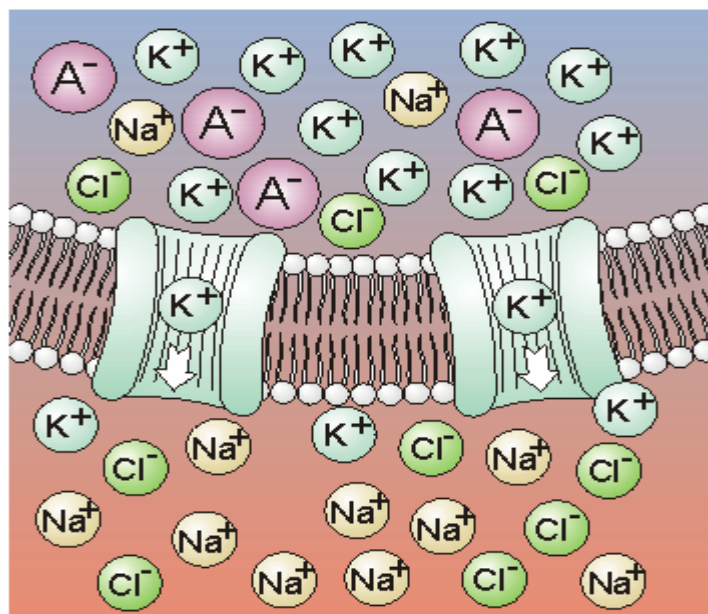
Έτσι όπως μπορούμε να δούμε και στην εικόνα 4 λόγο αυτής της ιδιότητας των φωσφολιπιδίων δημιουργούνται φωσφολιπιδικές στοιβάδες που στην ουσία συνιστούν στοιχειώδεις κυτταρικές μεμβράνες.



Εικόνα 3 Η κυτταρική μεμβράνη

Στην Εικόνα 3 βλέπουμε τις στοιβάδες των φωσφολιπιδίων με την υδρόφιλη κεφαλή να στρέφεται προς το εξωτερικό (υδατικό) περιβάλλον και την υδρόφοβη ουρά να προστατεύεται στο εσωτερικό της μεμβράνης. Με πορτοκάλι χρώμα απεικονίζονται πρωτεΐνες που αποτελούν μέρος της κυτταρικής μεμβράνης. Τα μακρομόρια αυτά δημιουργούν «αντλίες» ιόντων μέσα από τις οποίες μπορούν να μεταφερθούν ιόντα διαφόρων στοιχείων όπως καλίου ( $K^+$ ), νατρίου ( $Na^+$ ) και χλωρίου ( $Cl^-$ ). Τέτοιου είδους «αντλίες» ιόντων είναι υπεύθυνες για τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα που εξετάζουμε.

Η σημαντική ιδιότητα των «αντλιών» ιόντων είναι ότι δεν επιτρέπουν την ελεύθερη μεταφορά ιόντων από το ένα άκρο τους στο άλλο άλλα διατηρούν μια σταθερή διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο εσωτερικό και το εξωτερικό του κυττάρου. Η λειτουργία τους ρυθμίζεται από χημικές ουσίες που εκκρίνει το κύτταρο.



Εικόνα 4 Μεταφορά ιόντων μέσω κυτταρική μεμβράνη

Σχηματικά η μεταφορά ιόντων έχει όπως φαίνεται στη Εικόνα 4 .Η δομή της μεμβράνης και το σύστημα των αντλιών είναι υπεύθυνα για την δυνατότητα δημιουργίας διαφοράς δυναμικού και την δημιουργία ηλεκτρικού σήματος στα κύτταρα.

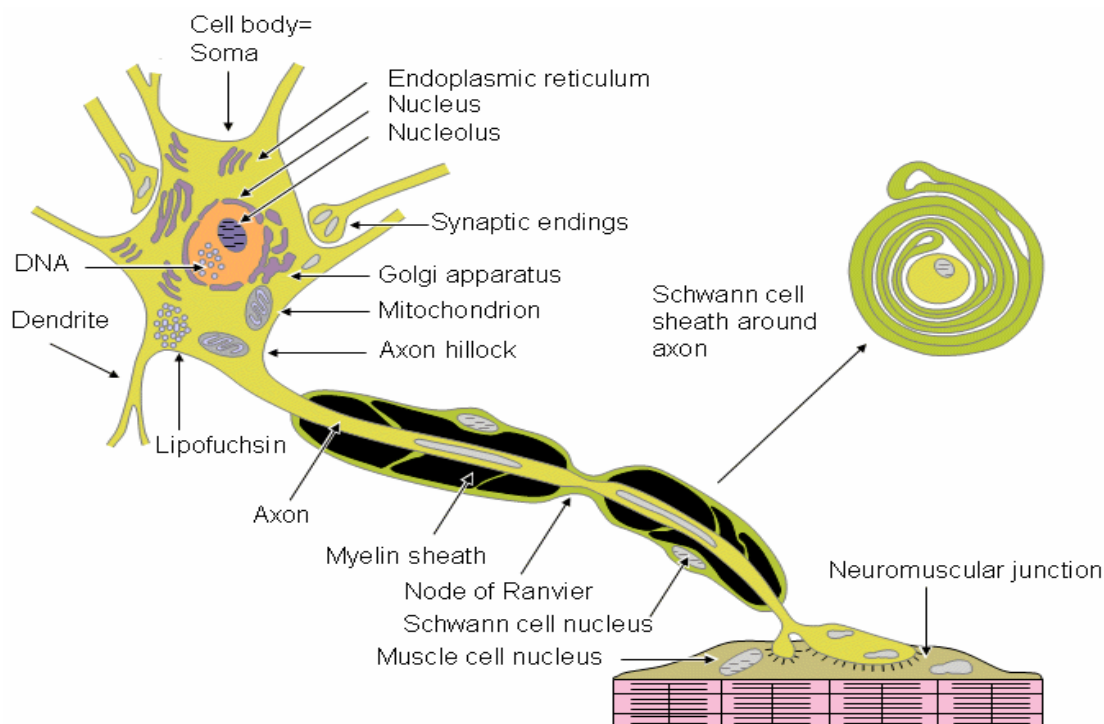
### 3.2 Το νευρικό κύτταρο

Αφού εξετάσαμε την λειτουργία της κυτταρικής μεμβράνης και τον τρόπο με τον οποίο επιτρέπει την δημιουργία διαφορών δυναμικού ήρθε η ώρα να μελετήσουμε την στοιχειώδη δομική μονάδα του εγκεφάλου , το νευρικό κύτταρο. Θα πρέπει να εξετάσουμε την δομή του , και κυρίως τους σχηματισμούς εκείνους που του επιτρέπουν να συνδέεται με άλλα νευρικά κύτταρα . Η μελέτη του τρόπου διασύνδεσης των νευρικών κυττάρων είναι αρκετά σημαντική προκειμένου να αντιληφθούμε τον τρόπο διασύνδεσης του φυσικού νευρωνικού δικτύου του εγκεφάλου.

Το νευρικό κύτταρο λοιπόν [8] αποτελείται από τρεις βασικές περιοχές:

1. Το σώμα (body ή soma)
2. Τους δενδρίτες (dendrites) και
3. Μια λεπτή νευρική ίνα τον άξονα (axon)

Το που αντιστοιχεί η κάθε μια από αυτές τις περιοχές μπορούμε να το δούμε στην εικόνα 2.



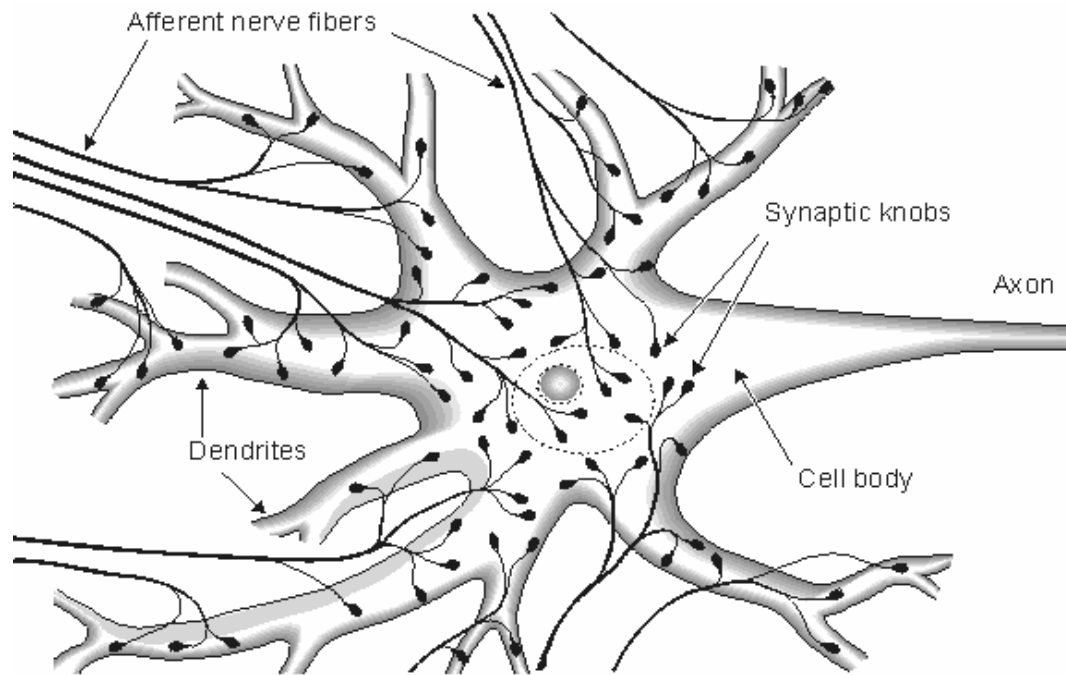
Εικόνα 5 Μέρη του νευρικού κυττάρου

Στο σώμα του νευρικού κυττάρου μπορούμε να βρούμε σχηματισμούς και βιολογικές δομικές μονάδες που είναι κοινές και σε οποιοδήποτε κύτταρο. Το σώμα συμπεριλαμβάνει τον πυρήνα, τα μιτοχόνδρια, ριβοσώματα και άλλα κυτταρικά οργάνδια. Η δομή τους είναι απολύτως όμοια με τα κυτταρικά οργάνδια που συναντάμε και στα άλλα κύτταρα του ανθρώπινου σώματος. Τα νευρικά κύτταρα αποτελούνται περίπου από 70-80% νερό. Όσον αφορά το μέρος που δεν αποτελείται από νερό αποτελείται από 80% πρωτεΐνες και 20% λιπίδια.

Οι δενδρίτες που όπως είδαμε στην Εικόνα 5 αποτελούν λεπτές διακλαδώσεις του σώματος έχουν σαν ρόλο να λαμβάνουν ηλεκτρικά σήματα από άλλα νευρικά κύτταρα και να τα μεταφέρουν στο σώμα. Ένα νευρικό κύτταρο (νευρώνας) μπορεί να λαμβάνει σήματα από εκατοντάδες χιλιάδες άλλους νευρώνες.

Η μακριά λεπτή ίνα που ονομάζεται άξονας έχει τον ρόλο να μεταφέρει το ηλεκτρικό σήμα από το σώμα σε άλλο νευρικό ή μυϊκό κύτταρο. Όλες οι λειτουργίες που προαναφέρθηκαν μπορούν να γίνουν καλύτερα αντιληπτές από την Εικόνα 6





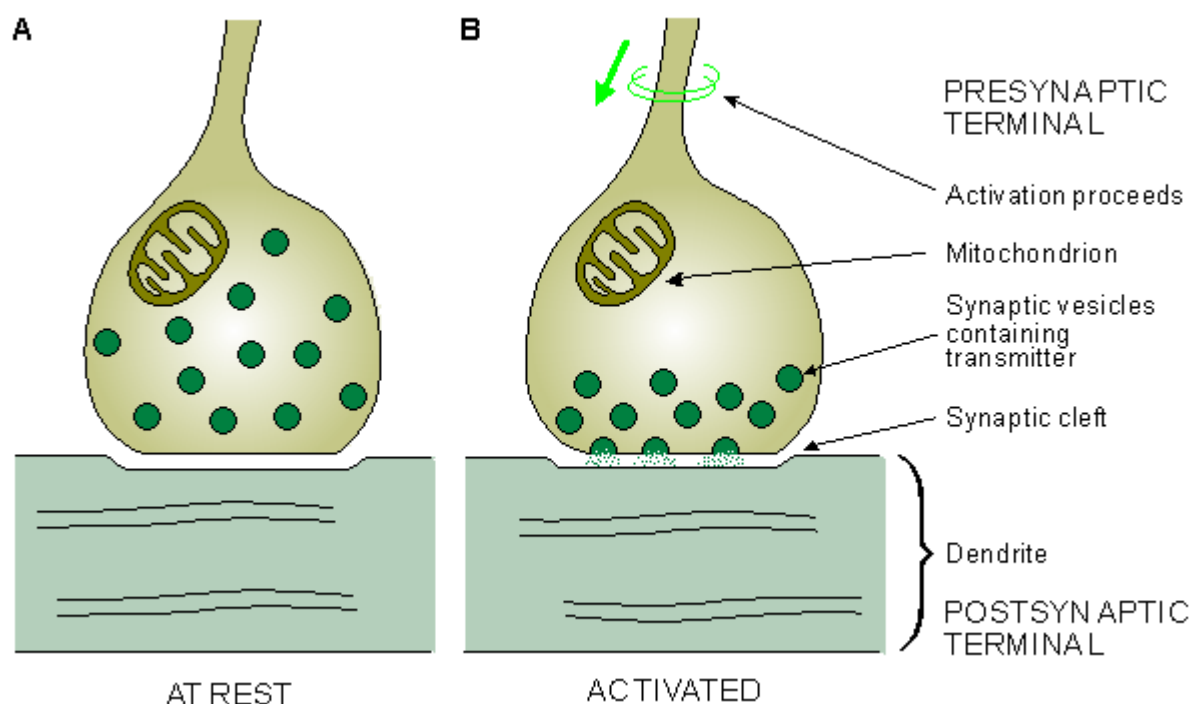
Εικόνα 6 λειτουργία σώματος , δενδριτών , αξονα

Αντιλαμβανόμαστε την ομοιότητα που φέρει ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται οι νευρώνες και συνιστούν το φυσικό νευρωνικό δίκτυο του εγκεφάλου με την δομή που έχουμε επινοήσει προκειμένου να λύνουμε προβλήματα βελτιστοποίησης (τεχνητά νευρωνικά δίκτυα).

### 3.3 Οι συνάψεις

Με ποιον τρόπο γίνεται όμως η σύνδεση ανάμεσα στους νευροάξονες του ενός κυττάρου με το σώμα του επόμενου ; Ο μηχανισμός μεταφοράς του ηλεκτρικού σήματος από το ένα κύτταρο στο άλλο χρίζει ιδιαίτερης μνείας μια και ολοκληρώνει την εικόνα που έχουμε για την διασύνδεση των νευρικών κυττάρων μεταξύ τους.

Η σύνδεση λοιπόν των δυο κυττάρων γίνεται με τον μηχανισμό της σύναψη [8] .Την δομή της σύναψης μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 7 Τρόπος λειτουργίας της σύναψης.



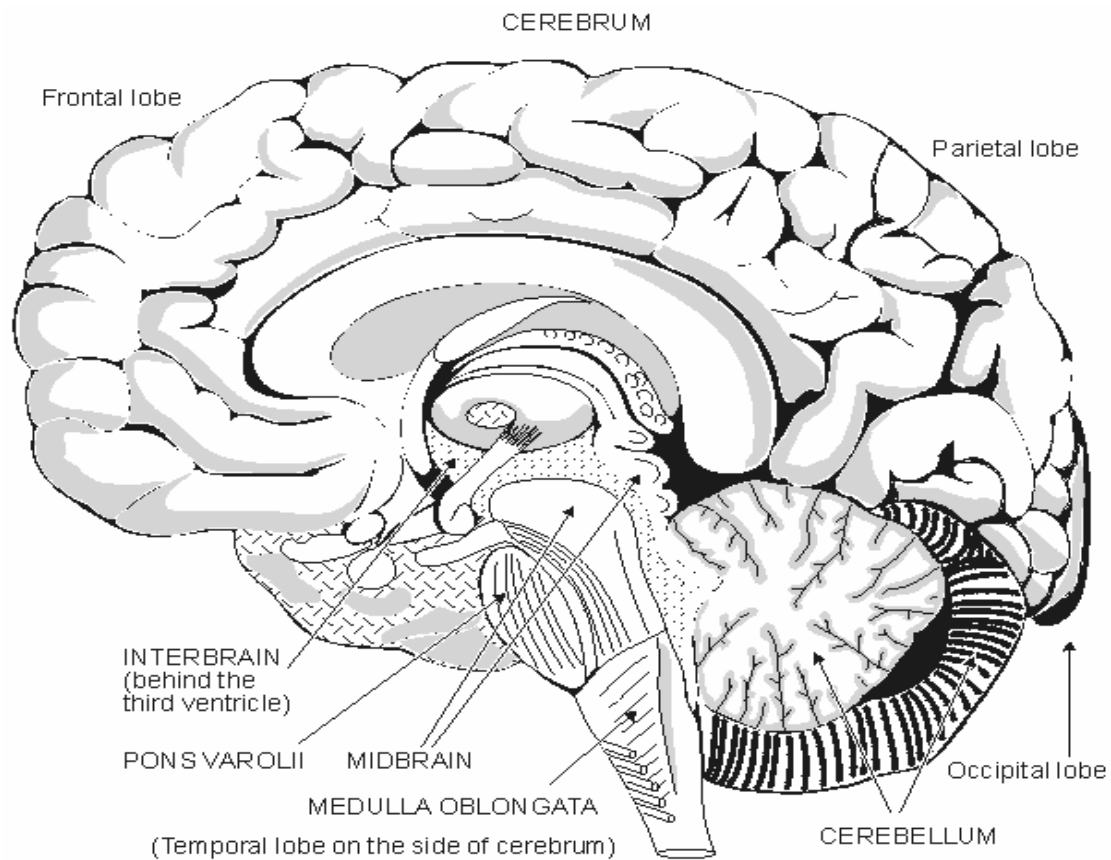
Εικόνα 7 Τρόπος λειτουργίας της σύναψης

Η μεταφερόμενη πληροφορία μεταφέρεται από το άνω μέρος της σύναψης δηλαδή τον άξονα του ενός κυττάρου προς το κάτω μέρος της σύναψης που είναι το επόμενο κύτταρο (το οποίο σημειώνεται ότι μπορεί να είναι νευρικό ή μυϊκό). Το μέρος που βρίσκεται από την πλευρά του άξονα ονομάζεται προσυναπτικό τερματικό (presynaptic terminal) ενώ το άλλο κομμάτι ονομάζεται μετασυναπτικό τερματικό (postsynaptic terminal). Ανάμεσά τους υπάρχει ένα κενό η συναπτική χαραμάδα (synaptic cleft) μήκους 10-50 nm. Το γεγονός ότι το ηλεκτρικό σήμα μεταφέρεται μόνο προς την μια κατεύθυνση οφείλεται σε μια ουσία, τον χημικό μεταφορέα, που παράγει το προσυναπτικό κύτταρο και έτσι ανοίγει τον δρόμο για την διέλευση ιόντων μέσω των ιοντικών αντλιών του μετασυναπτικού κυττάρου. Όταν η σύναψη υπάρχει ανάμεσα σε ένα νευρικό κύτταρο και ένα μυϊκό τότε ονομάζεται νευρομυϊκή σύναψη.

### 3.4 Ο εγκέφαλος

Αφού περιγράψαμε τον μικρόκοσμο των στοιχειωδών βιολογικών λειτουργικών μονάδων μπορούμε να εξετάσουμε την ανατομία του εγκεφάλου. Ο ανθρώπινος λοιπόν εγκέφαλος αποτελείται από  $10^{10}$ - $10^{11}$  νευρώνες συνδεδεμένους μεταξύ τους με δενδρίτες και νευροάξονες. Ένας νευρώνας μπορεί να λαμβάνει ερέθισμα από  $10^3$  έως και  $10^5$  άλλους νευρώνες. Μια άποψη του εγκεφάλου με τις βασικές περιοχές

από έναν εγκέφαλο ενηλίκου στις οποίες χωρίζεται μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 8:



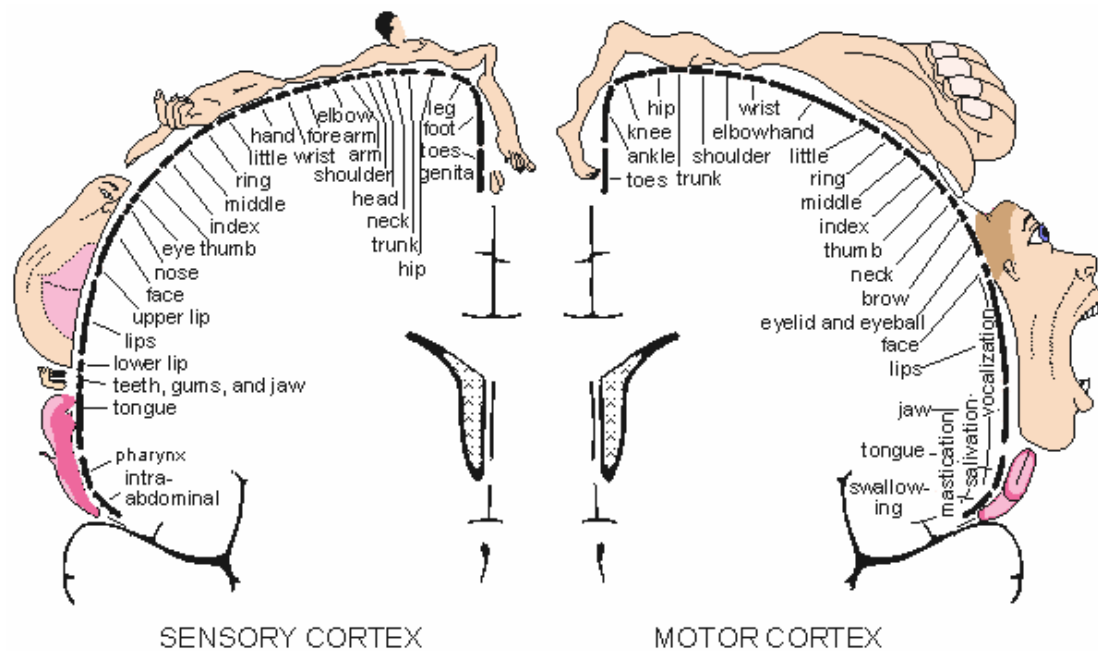
**Εικόνα 8 Η ανατομία του εγκεφάλου**

Οι βασικές περιοχές που μπορούμε να διακρίνουμε είναι οι εξής:

1. Μετωπιαίος λοβός (frontal lobe)
2. Βρεγματικός λοβός (Parietal lobe)
3. Ινιακός λοβός (Occipital lobe)
4. Παρεγκεφαλιτιδα (Cerebellum)
5. Μέσος εγκεφαλος (mid brain)
6. Γέφυρα (pons varoli)
7. Προμήκης μυελός (medulla oblongata)

Ο εγκέφαλος ζυγίζει γύρω στα 1500 γραμμάρια . ο εγκέφαλος χωρίζεται σε δυο φλοιούς. Τον αισθητικό φλοιό (sensory cortex) που βρίσκεται στην αριστερή μεριά και στον κινητικό φλοιό (motor cortex) που βρίσκεται στην δεξιά μεριά. Ο αισθητικός

φλοιός ενεργοποιείται όταν έχουμε ερεθίσματα που προέρχονται από τις αισθήσεις (αφή όραση κτλ) ενώ ο κινητικός έχει να κάνει με νυκική κίνηση.



Εικόνα 9 Οι δυο φλοιοι του εγκεφάλου

Στην Εικόνα 9 μπορούμε να δούμε πως σχετίζονται οι δυο φλοιοι σε διαφορετικές λειτουργίες-ερεθίσματα. Αυτή η ιατρική γνώση για τις περιοχές που ενεργοποιούνται ανάλογα με κάποιο ερέθισμα θα μας βοηθήσει να αξιολογήσουμε τους αλγορίθμους μας στην επίλυση του αντιστροφου προβλήματος.

## 4 Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα

Αφού εξηγήσαμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τα ηλεκτρικά πεδία του εγκεφάλου από επίπεδο κυττάρου έως το επίπεδο του ηλεκτρικού σήματος θα περάσουμε ,σε αυτήν την ενότητα, στην παρουσίαση του τρόπου που γίνεται η μέτρηση αυτών των ηλεκτρικών πεδίων , την εξέταση του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος . Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ ή EEG στην διεθνή βιβλιογραφία) καλούμε την καταγραφή δυναμικών από το τριχωτό της κεφαλής το οποίο προκαλείται από τις αδιάκοπες ταλαντώσεις των εξωκυττάρων δυναμικών που με τη σειρά τους οφείλονται σε ταλαντώσεις των δυναμικών των μεμβρανών μεγάλου αριθμού νευρωνικών κυττάρων [10].Το γεγονός ότι η όλη εξέταση συνίσταται στην μέτρηση και μόνο τιμές δυναμικών καθιστά το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα μια φτηνή εύκολη και ακίνδυνη (μια και δεν έχουμε έκθεση σε ακτινοβολία) εξέταση . Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε την πρακτική διαδικασία του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος καθώς και τα πρότυπα όσον αφορά την τοποθέτηση και την ονοματολογία των ηλεκτροδίων .

### 4.1 Υλικό

Έτσι λοιπόν για να πραγματοποιήσουμε την εξέταση του εγκεφαλογραφήματος προσαρμόζουμε στον ασθενή ειδικό κασκέτο πάνω στο οποίο προσαρμόζονται τα ηλεκτρόδια.



Εικόνα 10 Ειδικό κασκέτο με ηλεκτρόδια

Στην Εικόνα 10 μπορούμε να δούμε ένα τέτοιο κασκέτο που πωλείται στο εμπόριο [38]. Τέτοιου είδους κασκέτα έχουν αρκετές υποδοχές όπως προαναφέραμε για την στερέωση των ηλεκτροδίων .Στην επόμενη εικόνα μπορούμε να δούμε μερικά είδη ηλεκτροδίων



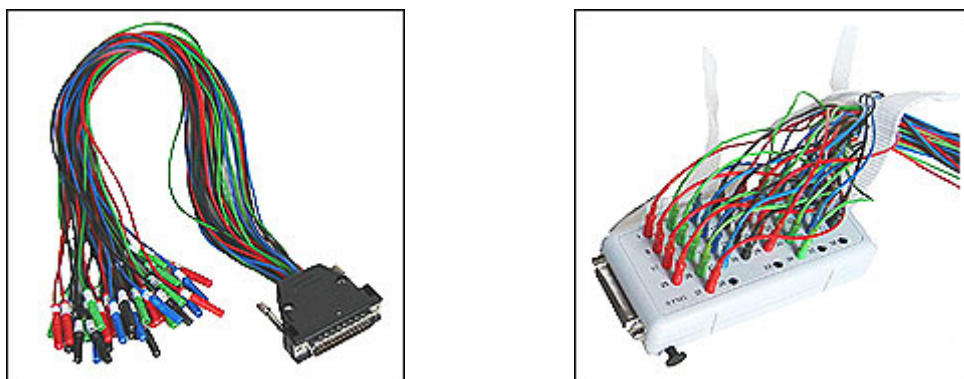
**Εικόνα 11** Μερικά είδη ηλεκτροδίων

Αρχικά τοποθετούμε το ηλεκτρόδιο σε ειδική υποδοχή και στην συνέχεια το προσαρμόζουμε στο κασκέτο .Η διαδικασία φαίνεται στην Εικόνα 12.



**Εικόνα 12**Υποδοχές ηλεκτροδίων

Στην συνέχεια τα καλώδια από όλα τα ηλεκτρόδια καταλήγουν σε κατάλληλη διασύνδεση (interface) προκειμένου να καταλήξουν στον υπολογιστή και να πραγματοποιηθεί η δειγματοληψία του σήματος .



Εικόνα 13 συστήματα διασύνδεσης με υπολογιστή

Στην Εικόνα 13 μπορούμε να δούμε ενδεικτικά δυο τέτοια συστήματα που χρησιμοποιούν διασύνδεση με το γνωστό πρωτόκολλο της θύρας παράλληλης επικοινωνίας του υπολογιστή. Στην πρώτη εικόνα βλέπουμε την πιο απλή εκδοχή όπου όλα τα ηλεκτρόδια καταλήγουν απ' ευθείας στην θύρα επικοινωνίας με τον υπολογιστή. Στην δεύτερη παρεμβάλλεται μια συσκευή εισόδου για να ρυθμίσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο τα δεδομένα θα εισέρχονται προς επεξεργασία.

Προκειμένου να βελτιώσουμε την σηματοθορυβική σχέση και να εξαλείψουμε τυχόν θόρυβο που οφείλεται σε απώλειες στην επαφή του ηλεκτροδίου με το τριχωτό της κεφαλής του ασθενή χρησιμοποιούμε ειδικά ηλεκτρολυτικά ζελέ που σκοπό έχουν την αύξηση της αγωγιμότητας. Τέτοιου είδους ζελέ μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 14



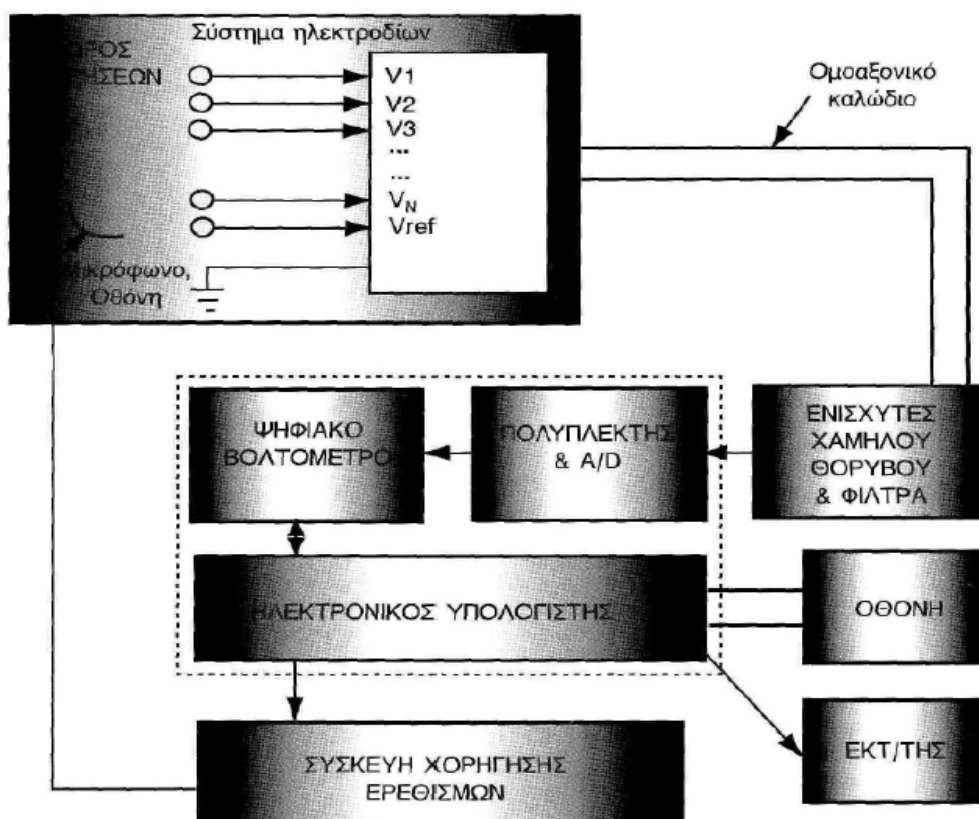
Εικόνα 14 Αγωγή ζελέ για μείωση θορύβου

Οι ιδιότητες που πρέπει να φέρουν τέτοιου είδους σκευάσματα εκτός της προφανούς (να αυξάνουν δηλαδή την αγωγιμότητα), είναι να μην επηρεάζονται από ιδρώτα ή θερμοκρασία σώματος, να είναι υποαλλεργικά και γενικά να μην είναι επικίνδυνα για το τριχωτό της κεφαλής.



## 4.2 Η αρχιτεκτονική του εγκεφαλογράφου

Αφού περιγράψαμε το υλικό που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε τις μετρήσεις ηλεκτρικού πεδίου από το τριχωτό της κεφαλής θα περάσουμε στην παρουσίαση της αρχιτεκτονικής της συσκευής που είναι υπεύθυνη για την καταγραφή των ηλεκτρικών σημάτων ,του ηλεκτροεγκεφαλογράφου.



Εικόνα 15 Αρχιτεκτονική ηλεκτροεγκεφαλογράφου

Στην Εικόνα 15 μπορούμε να δούμε έναν ηλεκτροεγκεφαλογράφο σε επίπεδο διαγράμματος block (εικόνα από [11])

Κατ αρχάς θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι τρόποι που λαμβάνουμε τις μετρήσεις από τα ηλεκτρόδια είναι δυο :

1. Η καταγραφή διαφορών δυναμικού από δυο ηλεκτρόδια που παρουσιάζουν δραστηριότητα . Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τα διπολικά εγκεφαλογραφήματα. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι απορρίπτει κοινά παράσιτα που μπορεί να εμφανίζονται και στα δυο ηλεκτρόδια

2. Η καταγραφή διαφορών δυναμικού ανάμεσα σε ένα ηλεκτρόδιο και ένα σταθερό σημείο γείωσης . Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τα μονοπολικά εγκεφαλογραφήματα . Τα μονοπολικά εγκεφαλογραφήματα χρησιμοποιούνται περισσότερο σε εφαρμογές ψυχοφυσιολογικής έρευνας . Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με μονοπολικά εγκεφαλογραφήματα.

Έτσι λοιπόν όπως μπορούμε να δούμε το σήμα (διπολικό ή μονοπολικό) που ανιχνεύεται στα αισθητήριά (ηλεκτρόδια) αρχικά εισάγεται σε μια ενισχυτική διάταξη μια και είναι πολύ ασθενές .Οι συντελεστές ενίσχυσης τέτοιων διατάξεων είναι της τάξης του  $10^5$ .Χρησιμοποιούνται προενισχυτές χαμηλού θορύβου και διαφορικοί ενισχυτές .Ο λόγος απόρριψης κοινού σήματος (CMRR) θα πρέπει να είναι 120db.

Το επόμενο στάδιο περιλαμβάνει την καταγραφή του εγκεφαλογραφήματος . Παλιότερα η καταγραφή του γινόταν πάνω σε ειδικό χαρτί . Σε ποιο εξελιγμένα συστήματα γίνεται χρήση πολυπλεκτών και μετατροπών αναλογικών σε ψηφιακό σήμα προκειμένου να είναι δυνατή η επεξεργασία του από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Το ψηφιακό σήμα εισάγεται στον υπολογιστή μέσω ειδικής κάρτας ανάκτησης σήματος (Data acquisition).Για καλύτερη οργάνωση ψυχοφυσιολογικών πειραμάτων ο υπολογιστής μπορεί να είναι εξοπλισμένος με λογισμικό που θα είναι σε θέση να χορηγεί ερεθισμούς στον ασθενή. Έτσι θα είναι δυνατή η καταγραφή των αντιδράσεων στην χορήγηση ερεθισμών.

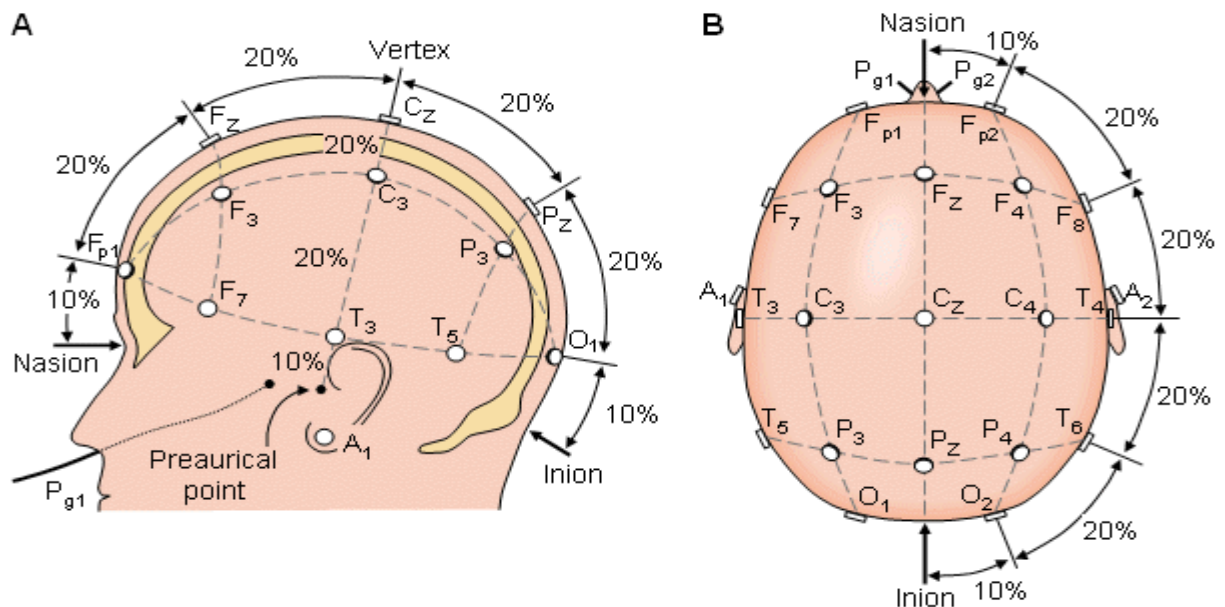
Μια τελευταία παρατήρηση που πρέπει να κάνουμε για να κλείσουμε με την παρουσίαση του εγκεφαλογράφου είναι ότι η γείωση όλων των τμημάτων της συσκευής θα πρέπει να είναι κοινή προκειμένου να αποφεύγονται βρόχοι μεταξύ διαφορετικών γειώσεων και να έχουμε θόρυβο.

### **4.3 Τοποθέτηση των ηλεκτροδίων –Το σύστημα 10/20**

Αφού περιγράψαμε το υλικό που έχει να κάνει με την συλλογή του σήματος του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος θα συνεχίσουμε με την περιγραφή του τρόπου

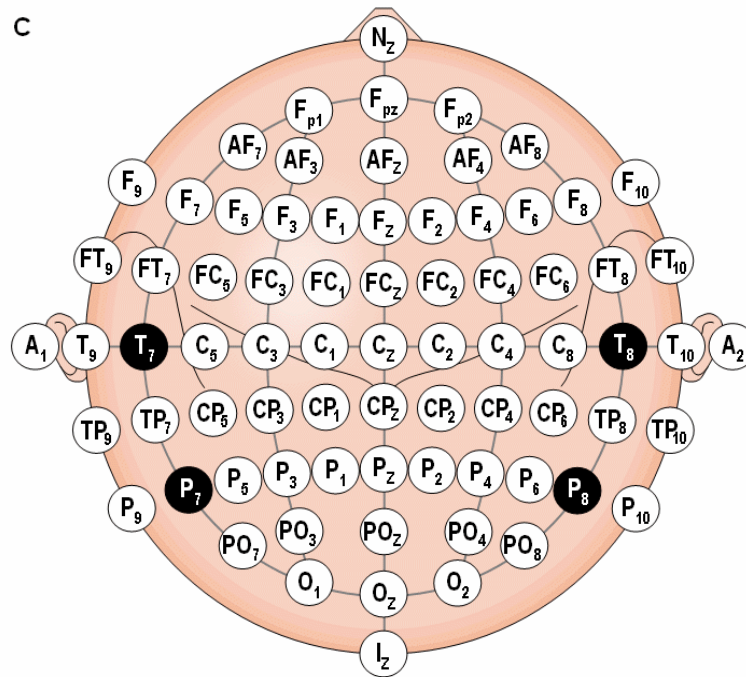
τοποθέτησης των ηλεκτροδίων στο κεφάλι του ασθενή . Παρότι δεν υπάρχει κάποιος δεσμευτικός τρόπος για το πως θα τοποθετήσουμε τα ηλεκτρόδια υπάρχουν εντούτοις κάποια πρότυπα που οι κλινικοί επιστήμονες έχουν σαν αναφορά.

Το πιο γνωστό σύστημα για την τοποθέτηση των ηλεκτροδίων είναι το σύστημα 10/20. Το σύστημα αυτό αποτελεί διεθνές στάνταρτ που έχει καθιερώσει η American Electroencephalographic Society . Σε αυτό το σύστημα παίρνουμε σαν σημεία αναφοράς την μύτη και το αντιδιαμετρικό σημείο στο πίσω μέρος του κρανίου . Στην συνέχεια χωρίζουμε την απόσταση αυτήν των δυο σημείων σε αποστάσεις που απέχουν μεταξύ τους 10% και 20% της συνολικής απόστασης με τον τρόπο που φαίνεται στην Εικόνα 16 [8].



Εικόνα 16 Το σύστημα τοποθέτησης των ηλεκτροδίων 10/20

Όσον αφορά τα ονόματα των ηλεκτροδίων έχει θεσπιστεί μια κοινή ονοματολογία από την American Electroencephalographic Society για να υπάρχει ένα κοινό σημείο αναφοράς . Στην Εικόνα 17 μπορούμε να δούμε την κοινή αυτή ονοματολογία των ηλεκτροδίων ( πληροφορίες σχετικά με τις ακριβείς συντεταγμένες των ηλεκτροδίων υπάρχουν στο παράρτημα ).

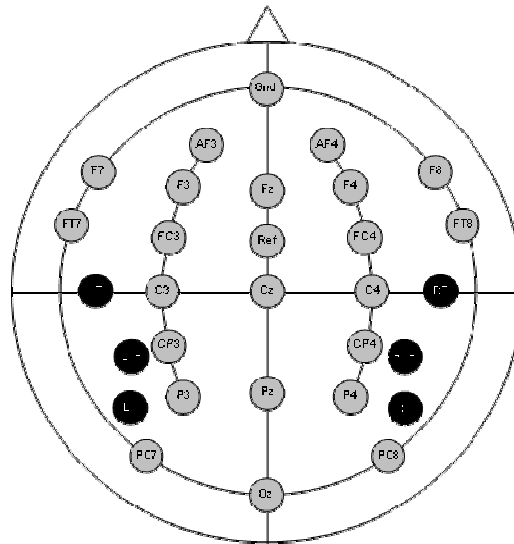


Εικόνα 17 Ονοματολογία ηλεκτροδίων συμφωνα με AES

#### 4.4 Άλλα συστήματα τοποθέτησης

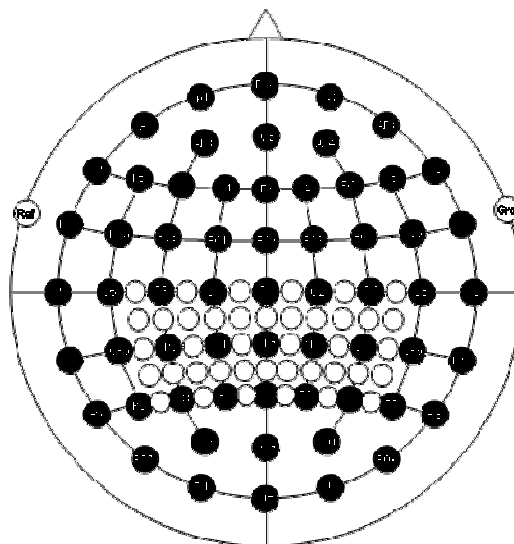
Εκτός από το σύστημα 10/20 που αναλύσαμε υπάρχουν και άλλα συστήματα που χρησιμοποιούνται και προορίζονται κυρίως για εξειδικευμένες εφαρμογές. Χαρακτηριστικά μπορούμε να παραθέσουμε μερικές εναλλακτικές τοποθετήσεις ηλεκτροδίων όπως παρουσιάζονται στο [38].

Στο πρώτο παράδειγμα έχουμε την τοποθέτηση Wernicke-Left/Wernicke-Right (WL/WR) με 29 κανάλια για εφαρμογές που έχουν να κάνουν με την μελέτη της γλώσσας



**Εικόνα 18 τοποθέτηση WL/WR**

Ένα άλλο σύστημα τοποθέτησης είναι το Kombi-Montage και παρατίθεται παρακάτω:



### Εικόνα 19 Τοποθέτηση Kombi montage

Τα διάφορα συστήματα για τοποθέτηση ηλεκτροδίων δεν σταματάνε εδώ . Άλλα τέτοια συστήματα είναι το σύστημα Queen square ,το σύστημα BESA για μελέτη της επιληψίας κτλ .Η πληθώρα συστημάτων τοποθέτησης ηλεκτροδίων έγκειται στην πληθώρα εφαρμογών που έχει το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Η εκτεταμένη παρουσίαση τους υπερβαίνει τους στόχους της παρούσας διπλωματικής εργασίας γι' αυτό η παράθεση τους θα σταματήσει σε αυτό το σημείο.

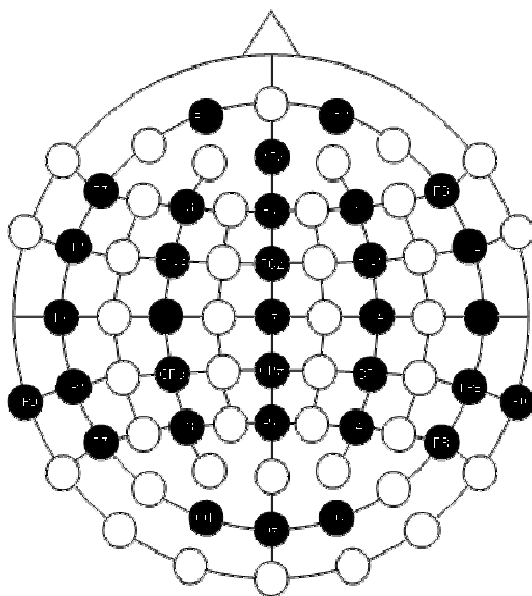
#### 4.5 Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε

Το δείγμα των εγκεφαλογραφημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία προέρχεται από το περιφεριακό πανεπιστημιακό γενικό νοσοκομείο Ηρακλείου (ΠΕ.ΠΑ.Γ.Ν.Η).

Χρησιμοποιήθηκαν δυο ομάδες εγκεφαλογραφημάτων .

1. Στην πρώτη ομάδα εγκεφαλογραφημάτων (κατάσταση «Ε») οι συμμετέχοντες έβλεπαν μια αριθμητική πράξη πολλαπλασιασμού δυο ψηφίων στην οθόνη (πχ 34x23 , 49x32) μετά μεσολαβούσε ένα χρονικό διάστημα 10 δευτερολέπτων στο τέλος του οποίου εμφανιζόταν στιγμιαία ένας αριθμός.Οι συμμετέχοντες ερωτούνταν αν ο αριθμός αυτός ήταν το σωστό αποτέλεσμα της πράξης που είχαν δει στην αρχή
2. Στην κατηγορία του εγκεφαλογραφήματος ελέγχου (κατάσταση «0») οι συμμετέχοντες απλά εστίαζαν την προσοχή τους στο κέντρο της οθόνης του υπολογιστή όπου εμφανιζόταν ένας μικρός αστερίσκος.

Τα ηλεκτρικά σήματα καταγράφονταν από ένα συστημα 30 ηλεκτροδίων τοποθετημένο σε διάταξη 10/20 έτσι όπως φαίνεται στην Εικόνα 20.



Στην συνέχεια το σήμα περνούσε από διάταξη ενίσχυσης και βαθυπερατό φίλτρο συχνοτήτων με άνω συχνότητα 200Hz. Στην συνέχεια το σήμα περνούσε από δειγματοληψία με συχνότητα 512Hz.

Δεδομένης της διάρκειας κάθε πειράματος (περίπου 40 δευτερόλεπτα για κάθε συμμετέχοντα) η χρήση περίπου 8 τυχαίων δευτερολέπτων (4096 διαδοχικών δειγμάτων ) κρίθηκε αντιπροσωπευτική . Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν 15 εγκεφαλογραφήματα της κατηγορίας «Ε» και 15 της κατηγορίας «0».

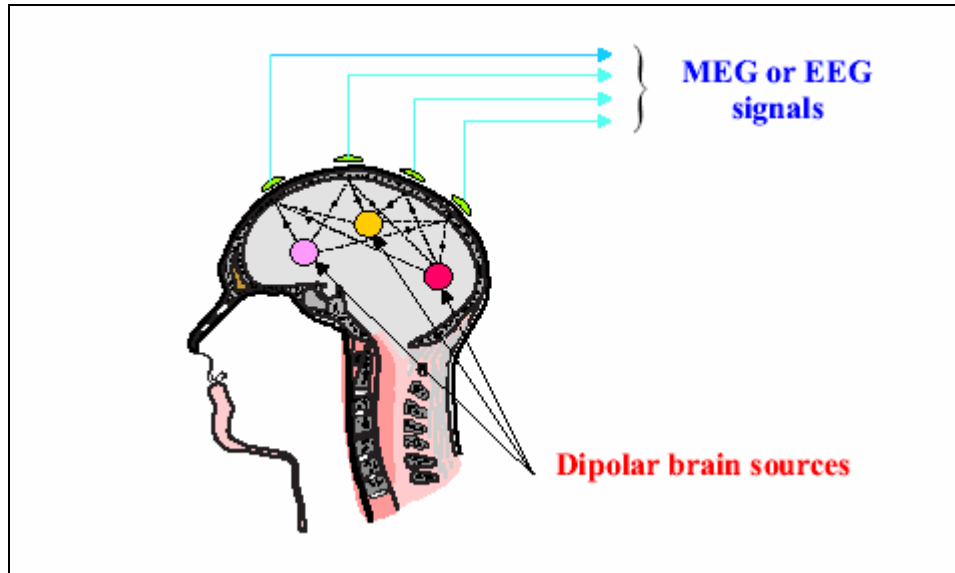
Η χρήση τέτοιου τύπου εγκεφαλογραφημάτων κρίνεται αναγκαία για την μελέτη του αντιστρόφου προβλήματος . Κατά την κανονική εγκεφαλική λειτουργία υπάρχουν πολλές πηγές συνήθως πιο ανίσχυρες και διάσπαρτες . Σε πειράματα όπου χρησιμοποιούμε προκλητά δυναμικά (όπως εδώ όπου το ερέθισμα είναι η μαθηματική σκέψη) δημιουργούμε λίγες και πιο ισχυρές πηγές .Έτσι μπορούμε να μελετήσουμε καλύτερα το αντίστροφο πρόβλημα.



## 5 Αντίστροφος καθορισμός πηγής – Το πρόβλημα

### 5.1 Μοντελοποίηση στα πλαίσια του εγκεφαλογραφήματος

Το πρόβλημα που προσπαθούμε να προσεγγίσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι ο αντίστροφος καθορισμός πηγής ή όπως είναι γνωστό στην διεθνή βιβλιογραφία *inverse source localization problem*. Έχοντας σαν δεδομένο το σήμα του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος προσπαθούμε μέσω κατάλληλης μοντελοποίησης και αλγορίθμων να προσδιορίσουμε το ρεύμα (ή την πυκνότητα ρεύματος) στο εσωτερικό του εγκεφάλου με απώτερο σκοπό να προσδιορίσουμε τις περιοχές που ενεργοποιούνται αναλόγως την εγκεφαλική δραστηριότητα (προσδιορισμός ηλεκτρικών δίπολων). Μια σχηματική αναπαράσταση του προβλήματός αυτού μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 21.



Εικόνα 21 Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος του αντίστροφου καθορισμού πηγής

Η μετρούμενη τάση στο εξωτερικό του εγκεφάλου είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσης μιας δεδομένης κατανομής ρεύματος στο εσωτερικό του εγκεφάλου επί

την συνάρτηση μεταφοράς του μέσου . Με μαθηματικό συμβολισμό και υποθέτοντας συνεχή μεγέθη μπορούμε να πούμε ότι:

$$F(\underline{r}, t) = \int_V k(\underline{r}, \underline{r}') \cdot j(\underline{r}, t) d\underline{r}' \quad (5.1)$$

Όπου  $F(\underline{r}, t)$  είναι το μετρούμενο δυναμικό στο σημείο με συντεταγμένες  $\underline{r}$ . Το ολοκλήρωμα είναι πάνω σε ολόκληρο το κεφάλι (όγκος  $V$  ). Με  $t$  συμβολίζουμε την χρονική παράμετρο . Με  $k(\underline{r}, \underline{r}')$  συμβολίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς του εγκεφάλου που έχει να κάνει με το μοντέλο του εγκεφάλου που υποθέτουμε και προσδιορίζεται με βάση την νευροφυσιολογία , την θεωρία πεδίων και την γεωμετρία του προβλήματος. Στο κεφάλαιο 6 θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με το πως κατασκευάζουμε τέτοιου είδους πίνακες.

Η τελευταία εξίσωση υποθέτει ότι έχουμε συνεχή κατανομή σημείων στο εσωτερικό του εγκεφάλου . Για να γίνει όμως δυνατή η μοντελοποίηση και η μελέτη του προβλήματος αναγκαζόμαστε να δειγματοληπτήσουμε το εσωτερικό του εγκεφάλου συνεπώς έχουμε ένα σφάλμα που οφείλεται στην δειγματοληψία . Επίσης δεν διαθέτουμε άπειρα σημεία μετρήσεων (ηλεκτρόδια του εγκεφαλογράφου). Προς το παρόν μας ενδιαφέρει ότι είναι πεπερασμένα και έχουν συγκεκριμένη θέση . Σε επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον αριθμό και τις ακριβείς συντεταγμένες τους.

Έτσι με αυτά τα δεδομένα η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στις εξής γραμμικές εξισώσεις :

$$F(\underline{r}, t) = \sum_M k(\underline{r}, \underline{r}') \cdot j(\underline{r}', t) \quad (5.2)$$

Με την βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$F(t) = K \cdot J(t) \quad (5.3)$$

Όπου

$$F = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \cdots & f_1(t_k) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \cdots & f_2(t_k) \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots \\ f_N(t_1) & \cdots & \cdots & f_N(t_k) \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{11x} & k_{11y} & k_{11z} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1Mx} & k_{1My} & k_{1Mz} \\ k_{21x} & k_{21y} & k_{21z} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2Mx} & k_{2My} & k_{2Mz} \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ k_{N1x} & k_{N1y} & k_{N1z} & & & & k_{NMx} & k_{NMy} & k_{NMz} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{1x}(t_1) & j_{1x}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1x}(t_k) \\ j_{1y}(t_1) & j_{1y}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1y}(t_k) \\ j_{1z}(t_1) & j_{1z}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1z}(t_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ j_{Mx}(t_1) & j_{Mx}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{Mx}(t_k) \\ j_{My}(t_1) & j_{My}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{My}(t_k) \\ j_{Mz}(t_1) & j_{Mz}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{Mz}(t_k) \end{bmatrix}$$

Επειδή ισχύει  $M \gg N$  (δηλαδή τα σημεία των οποίων το ρεύμα θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι πολύ περισσότερα από τις μετρήσεις που έχουμε) το πρόβλημα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση αλλά πολλές μια και διαφορετικός συνδυασμός πηγών στο εσωτερικό του εγκεφάλου θα μπορούσε να παράγει τις ίδιες μετρήσεις στο τριχωτό της κεφαλής. Αν συνυπολογίσουμε το γεγονός ότι στο σήμα μας έχουμε και θόρυβο (πράγμα σχεδόν βέβαιο για πραγματικά σήματα) τότε η εξίσωση (5.3) γίνεται

$$F(t) = K \cdot J(t) + n \quad (5.4)$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να βρούμε έναν γενικευμένο αντίστροφο του πίνακα  $K$ , που από δω και στο εξής θα ονομάζουμε  $T$ , τέτοιον ώστε:

$$J(t) = T \cdot F(t) \quad (5.5)$$

Η δυσκολία στην επίλυση του προβλήματος συνίσταται τόσο στην προαναφερθείσα αοριστία του προβλήματος όσο και στην δυσκολία μοντελοποίησης του ανθρώπινου εγκεφάλου (κατασκευή του πίνακα  $K$ ). Παρά τον μεγάλο αριθμό αλγορίθμων που έχουν αναπτυχθεί από την αρχή της δεκαετίας του '90, που τέθηκε το πρόβλημα,

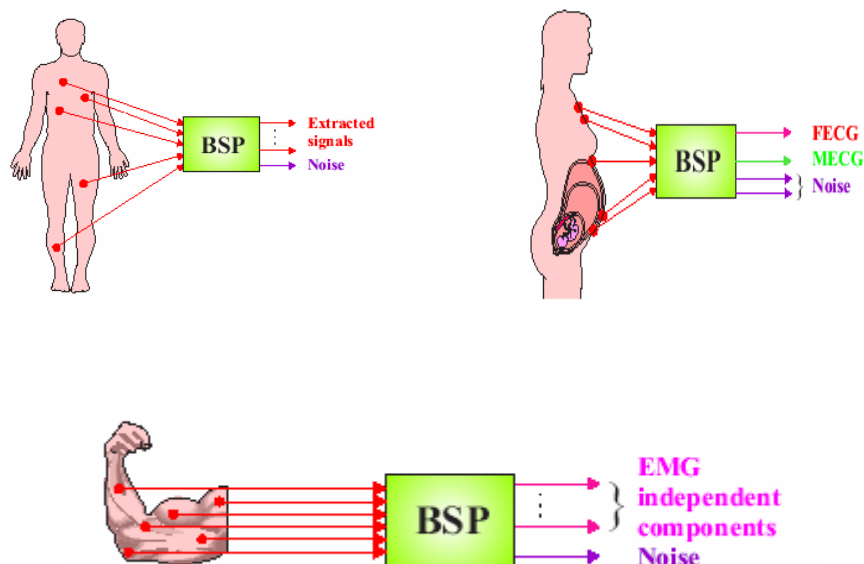
συνεχίζει να παραμένει ένα άλυτο πρόβλημα επιστημονική έρευνα του ανθρώπινου εγκεφάλου [5].

## 5.2 Άλλες εφαρμογές

Το πρόβλημα του διαχωρισμού των ηλεκτρικών σημάτων του ανθρώπινου εγκεφάλου και ο αντίστροφος διαχωρισμός πηγής είναι μια από τις εφαρμογές τέτοιων αντίστροφων προβλημάτων. Το πρόβλημα του τυφλού διαχωρισμού σήματος (Blind Signal Separation-BSS όπως είναι γνωστό στην διεθνή βιβλιογραφία έχει πληθώρα άλλες εφαρμογές ). [9] Οι εφαρμογές αυτές ανήκουν τόσο στον χώρο της επεξεργασίας βιοιατρικού σήματος όσο και στον χώρο των ασύρματων τηλεπικοινωνιών , μηχανικής όρασης κτλ.

### 5.2.1 Άλλες βιοιατρικές εφαρμογές

Οι μηχανικές συσπάσεις των μυών του ανθρώπινου σώματος προέρχονται από ηλεκτρικά σήματα. Η καταγραφή και ο εντοπισμός αυτών των σημάτων μας δίνει πληροφορία για τις συσπάσεις αυτών των μυών.

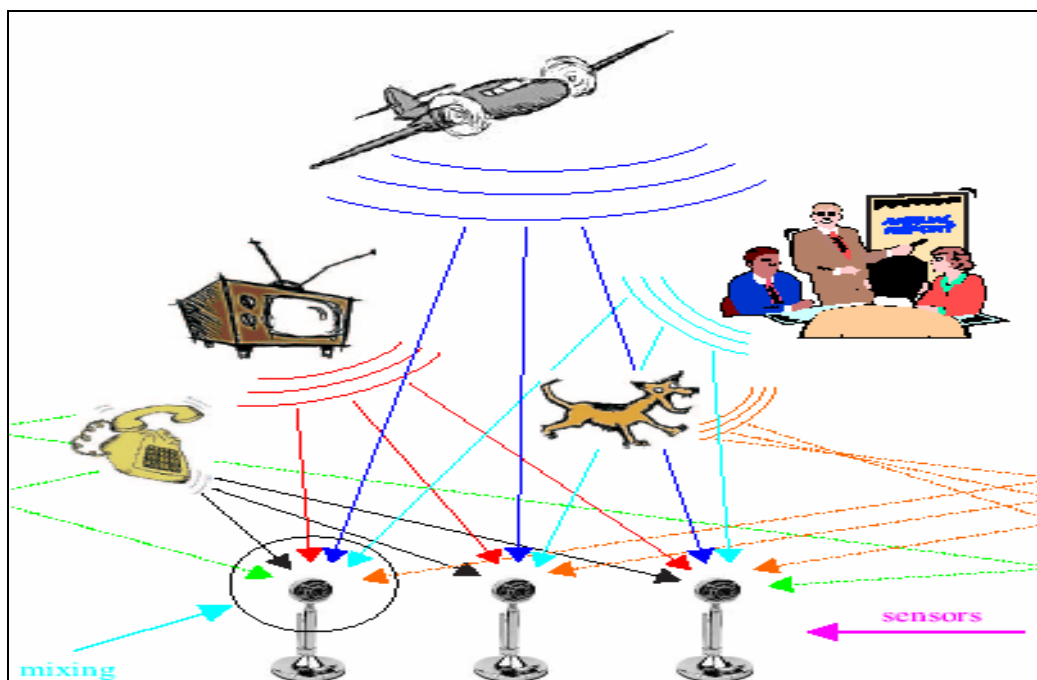


Εικόνα 22 Άλλες βιοιατρικές εφαρμογές του "τυφλού διαχωρισμού σημάτων"

Στην εικόνα 2 μπορούμε να δούμε διάφορες εφαρμογές που έχουν να κάνουν με τον προσδιορισμό των συσπάσεων της καρδιάς (εξέταση ηλεκτροκαρδιογραφήματος ECG) ,μελέτη της υγείας της καρδιάς ενός εμβρύου (εξέταση εμβρυακού ηλεκτροκαρδιογραφήματος FECG ) η ακόμα και εξέταση των μυϊκών σπασμών (ηλεκτρομυογράφημα EMG).Η ανάπτυξη αλγορίθμων για τον προσδιορισμό τέτοιων σημάτων κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική καθώς θα αναβαθμίσουν τον ρόλο των μη επεμβατικών (non invasive) ιατρικών εξετάσεων.(EEG , MEG , ECG κτλ)

### 5.2.2 Εφαρμογή στην επεξεργασία ηχητικού σήματος

Μια άλλη εφαρμογή του προβλήματος μας βρίσκεται στον τομέα της ψηφιακής επεξεργασίας ηχητικού σήματος (αναγνώριση φωνής) . Το πρόβλημα έχει ως εξής : Σε μια αίθουσα έχουμε N κασετόφωνα που καταγράφουν ηχητικά σήματα που προέρχονται από διάφορες πηγές ήχου .Καλούμαστε να ξεχωρίσουμε αυτές τις διαφορετικές πηγές και να ανακατασκευάσουμε τα ηχητικά σήματα χωρίς να έχουμε αλληλοκάλυψη



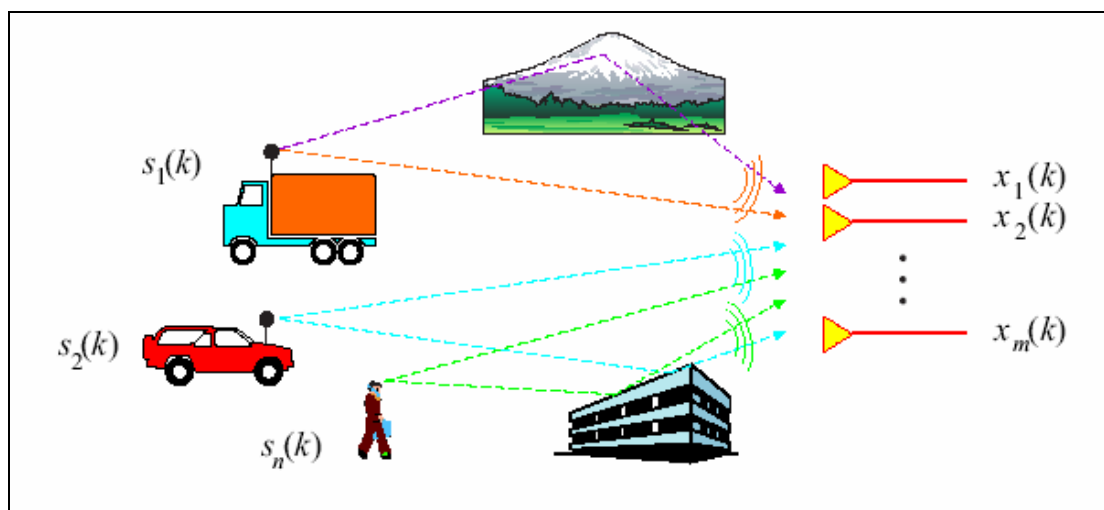
Εικόνα 23 Σχηματική αναπαράσταση του cocktail party προβλήματος

Το πρόβλημα είναι γνωστό και σαν “Cocktail party” πρόβλημα . Στην εικόνα 3 μπορούμε να δούμε μια σχηματική του αναπαράσταση .Έχει παρατηρηθεί ότι το ανθρώπινο αυτί μπορεί να εστιάσει σε μια μεμονωμένη ηχητική πηγή σε περιβάλλον

που υπάρχουν διάφορες ηχητικές παρεμβολές. Όμως ακόμα δεν έχει γίνει κατανοητός ο ακριβής μηχανισμός μέσω του οποίου το καταφέρνει αυτό. Αλγόριθμους και προσεγγίσεις που έχουν να κάνουν με το αντίστροφο πρόβλημα στα πλαίσια του διαχωρισμού ηχητικού σήματος μπορούμε να βρούμε στο[9]

### 5.2.3 Εφαρμογή στα ασύρματα δίκτυα

Ένα σενάριο παρόμοιο με το προηγούμενο με τη διαφορά ότι ανήκει στην περιοχή των ασύρματων τηλεπικοινωνιών είναι το παρακάτω. Έστω ότι έχουμε  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  δειγματολήπτες που λαμβάνουν σήματα από  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  πομπούς (ας πούμε χρήστες κινητής τηλεφωνίας) που στέλνουν ψηφιακά διαμορφωμένο σήμα. Τα σήματα ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές προκειμένου να φτάσουν τους δέκτες (multi path propagation environment). Τελικά στους δέκτες θα λαβουμε μια υπέρθεση καθυστερημένων σημάτων λόγω της φύσης του μέσου διάδοσης. (ατμοσφαιρικός αέρας)



Εικόνα 24 Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος εξασθένησης πολλαπλών δρόμων

Η εφαρμογή των τεχνικών διαχωρισμού σήματος κρίνεται αναγκαία προκειμένου να ανακατασκευάσουμε και να εκτιμήσουμε τα αρχικά σήματα. Στην εικόνα 4 μπορούμε να δούμε μια σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος. Το πρόβλημα είναι γνωστό και σαν πρόβλημα εξασθένησης σήματος πολλαπλών δρόμων (multi path fading).

Εκτός από τα ασύρματα δίκτυα κινητής τηλεφωνίας το πρόβλημα συναντάται σε εφαρμογές ψηφιακού ραδιοφώνου , μισθωμένες γραμμές υψηλών ταχυτήτων καθώς και σε συστήματα radar/sonar με πολλαπλούς δέκτες .

#### 5.2.4 Εφαρμογή στην μηχανική όραση και στην επεξεργασία εικόνας

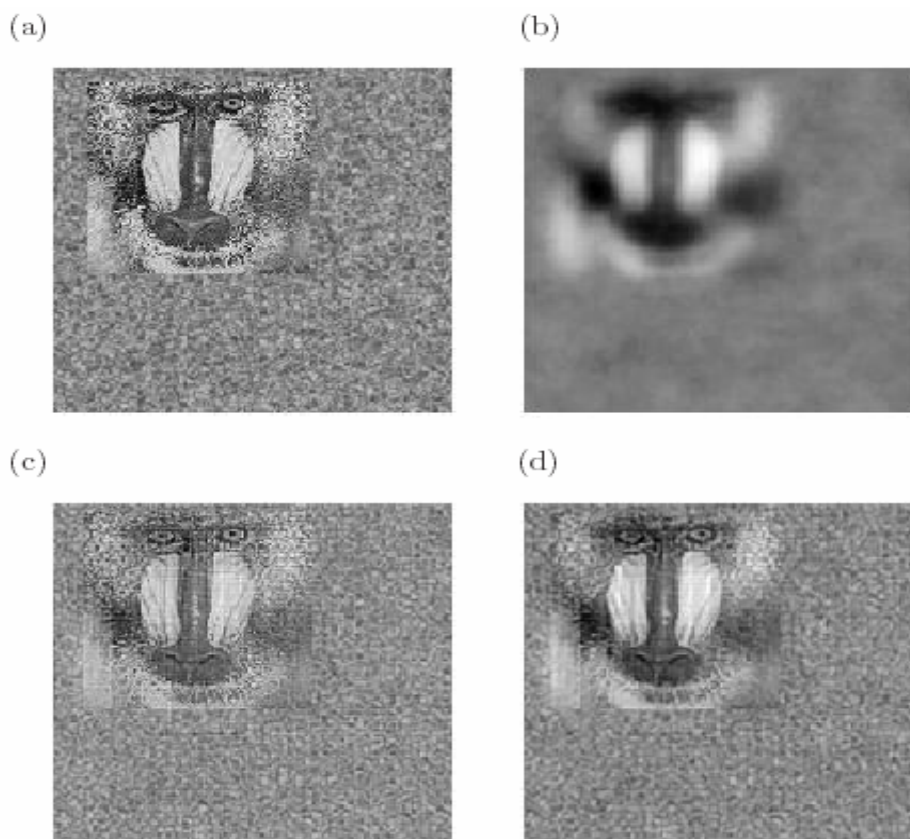
Ένας άλλος πολύ σημαντικός τομέας που συναντάμε το πρόβλημα του «τυφλού διαχωρισμού σήματος » είναι αυτός της μηχανικής όρασης .Έτσι σε μια πιθανή εφαρμογή μπορεί να έχουμε μια εικόνα που να αποτελεί υπέρθεση δυο επιμέρους εικόνων .



Εικόνα 25 Διαχωρισμός εικόνων

Έτσι στην εικόνα 5 έχουμε ένα τέτοιο παράδειγμα . Η πάνω εικόνα αποτελεί την υπέρθεση των  $3^{ov}$  που φαίνονται στην δεύτερη γραμμή .Ο διαχωρισμός τους γίνεται με τεχνικές «τυφλού διαχωρισμού πηγής».

Σε ένα άλλο παράδειγμα από την ψηφιακή επεξεργασία εικόνας μπορεί να έχουμε μια εικόνα που έχει αναμειχθεί με θόρυβο .Οι τεχνικές διαχωρισμού έχουν σαν στόχο να διαχωρίσουν το χρήσιμο σήμα (εικόνα) από το άχρηστο (θόρυβος).Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να δούμε στην εικόνα 6.



Εικόνα 26 Εξάλειψη θορύβου με τεχνικές διαχωρισμού σήματος

Στην εικόνα 6(a) βλέπουμε την αρχική εικόνα πριν δηλαδή αναμιχθεί με θόρυβο. Στην εικόνα 6(b) βλέπουμε την εικόνα με τον θόρυβο (αυτή δηλαδή που πρέπει να ανακατασκευάσουμε). Στην 6(c) βλέπουμε την ανακατασκευασμένη εικόνα μετά από τον διαχωρισμό των σημάτων ενώ στην 6(d) βλέπουμε την ανακατασκευασμένη εικόνα μετά από μια μετεπεξεργασία (χρήση smooth φίλτρου).

Βλέπουμε λοιπόν ότι το εξεταζόμενο πρόβλημα είναι γενικότερο και η χρήση αλγορίθμων διαχωρισμού σημάτων και εντοπισμού πηγής έχουν ευρύτατες εφαρμογές στον χώρο της επεξεργασίας σήματος. Η μοναδική διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στις εφαρμογές που αναφέραμε έχει να κάνει με την μοντελοποίηση του «μέσου». π.χ στο cocktail πρόβλημα πρέπει να βρούμε τις εξισώσεις μεταφοράς του ηχητικού κύματος στον αέρα ενώ στο πρόβλημα μας τις εξισώσεις μεταφοράς του ηλεκτρικού πεδίου στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Ο τρόπος μοντελοποίησης του ανθρώπινου εγκεφάλου αναλύεται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.



## 6 Τα μοντέλα του εγκεφάλου

Η σωστή μοντελοποίηση του εγκεφάλου είναι ένα θέμα πολύ σημαντικό για την επίλυση του προβλήματος του αντίστροφου καθορισμού πηγής. Υιοθετώντας ένα καλό μοντέλο μειώνουμε αρκετά το σφάλμα του μοντέλου (model error) δηλαδή την απόκλιση ανάμεσα στο πως πραγματικά μεταφέρεται το πεδίο εντός του εγκεφάλου και στο πώς έχουμε υποθέσει εμείς ότι μεταφέρεται . Από την μια πλευρά είναι αρκετά δύσκολο να μοντελοποιήσουμε μια τόσο πολύπλοκη λειτουργική μονάδα όπως ο ανθρώπινος εγκέφαλος με την βοήθεια μόνο ντετερμινιστικών μαθηματικών εξισώσεων .Από την άλλη η υιοθέτηση πολύπλοκων μοντέλων αυξάνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα και παράγει μη εφαρμόσιμες λύσεις.

Παρότι έχουν γίνει αρκετές ερευνητικές εργασίες πάνω στο θέμα της μοντελοποίησης του εγκεφάλου υπάρχει ακόμα αρκετή σύγχυση σχετικά με το ποιο είναι το ο καλύτερος τρόπος μοντελοποίησης ενώ δεν έχουν διαμορφωθεί κάποια πρότυπα κοινά αποδεκτά .Αυτό συμβαίνει γιατί αφ ενός το πρόβλημα του αντίστροφου καθορισμού πηγής είναι ένα σχετικά νέο πρόβλημα στον χώρο της επεξεργασίας βιοιατρικού σήματος και αφ ετέρου κάθε άτομο έχει το δικό του εγκέφαλο που μπορεί να παρουσιάζει διαφορές και τελικά να μην είναι σωστή η θέσπιση ενός ενιαίου μοντέλου.

Οι κυριότερες προσεγγίσεις σε επίπεδο μοντελοποίησης του εγκεφάλου είναι δυο: η προσέγγιση με σφαιρικό μοντέλο και η προσέγγιση με ρεαλιστικό μοντέλο .Οι μεν πρώτη είναι υπολογιστικά πιο προσιτή ενώ οι δεύτερη είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα .Μάλιστα έχουν γίνει μελέτες για το πόσο (σε ποσοστό) πιο ακριβή είναι τα ρεαλιστικά έναντι των σφαιρικών μοντέλων.[31]

Πριν περάσουμε στην παρουσίαση των σπουδαιότερων μοντέλων θα περιγράψουμε την έννοια της μοντελοποίησης του εγκεφάλου με μαθηματικούς όρους . Όπως είδαμε

και στο κεφάλαιο 6 μοντέλο αποκαλούμε τον πίνακα  $K$  ή αλλιώς πίνακα μεταφοράς πεδίου (lead field matrix) . Ο εν λόγω πίνακας έχει την εξής μορφή:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11x} & k_{11y} & k_{11z} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1Mx} & k_{1My} & k_{1Mz} \\ k_{21x} & k_{21y} & k_{21z} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2Mx} & k_{2My} & k_{2Mz} \\ \cdot & & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ k_{N1x} & k_{N1y} & k_{N1z} & & & & k_{NMx} & k_{NMy} & k_{NMz} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Δηλαδή είναι διαστάσεων  $N \times 3M$  όπου  $N$  ο αριθμός των ηλεκτροδίων και  $M$  ο αριθμός των σημείων του εγκεφάλου. Έχουμε  $3M$  σημεία επειδή για κάθε σημεία έχουμε μια τιμή για κάθε μια από τις 3 ορθοκανονικές συντεταγμένες  $(x,y,z)$ . Οπότε μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα:

$$K(r, r') \quad \forall r, r' \quad (6.2)$$

Όπου  $r$  είναι ένα διάνυσμα με καρτεσιανές συντεταγμένες ενός ηλεκτροδίου ενώ  $r_q$  ένα διάνυσμα με τις συντεταγμένες ενός σημείου του εγκεφάλου.

## 6.1 Σφαιρικά μοντέλα

### 6.1.1 Άπειρο άγων μέσο

Η παρούσα προσέγγιση είναι η πιο απλή προσέγγιση στο πρόβλημα . Υποθέτουμε ότι ο εγκέφαλος είναι ομογενής σταθερής διαγωγιμότητας . Η μοντελοποίηση παρουσιάζεται όπως έχει περιγραφεί στα [30][32].

$$k_{\infty}(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\underline{d}}{\|\underline{d}\|^3} \quad \underline{d} = \underline{r} - \underline{r}' \quad (6.1)$$

Με  $\sigma$  συμβολίζουμε την σταθερά διαγωγιμότητας που υποθέτουμε για το μέσον του εγκεφάλου.

### 6.1.2 Σφαίρα ενός κελύφους

Μια ποιο σύνθετη προσέγγιση στο θέμα της μοντελοποίησης του εγκεφάλου είναι το να υποθέσουμε ότι το κεφάλι είναι μια σφαίρα ενός κελύφους (single sphere sphere). υπάρχουν αρκετές προσεγγίσεις στην βιβλιογραφία για τις εξισώσεις ενός τέτοιου μοντέλου. Από τις πρώτες προσπάθειες περιγράφονται στο [36]. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια ποιο μοντέρνα προσέγγιση που παρουσιάζεται στα [30][32][35].

Ετσι με βάση την γεωμετρία του προβλήματος και στηριζόμενοι στις εξισώσεις της θεωρίας πεδίων προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις :

$$k_1(\underline{r}, \underline{r}') = (c_1 - c_2(\underline{r}' \cdot \underline{r}))\underline{r} + c_2\|\underline{r}\|^2 \cdot \underline{r}' \quad (6.2)$$

Όπου οι βαθμωτές μεταβλητές  $c_1, c_2$  δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$c_1 \equiv \frac{1}{4\pi\sigma\|\underline{r}\|^2} \left( 2\frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{\|\underline{d}\|^3} + \frac{1}{\|\underline{d}\|} - \frac{1}{\|\underline{r}'\|} \right) \quad (6.3)$$

και

$$c_2 \equiv \frac{1}{4\pi\sigma\|\underline{r}\|^2} \left( \frac{2}{\|\underline{d}\|^3} + \frac{\|\underline{d}\| + \|\underline{r}'\|}{\|\underline{r}\| \cdot F(\underline{r}, \underline{r}')} \right) \quad (6.4)$$

Με  $\sigma$  συμβολίζουμε την διαγωγιμότητα που έχουμε υποθέσει για την σφαίρα μας .Η βοηθητική συνάρτηση  $F$  ορίζεται ως εξής:

$$F(\underline{r}, \underline{r}') = \|\underline{d}\| \left( \|\underline{r}'\| \cdot \|\underline{d}\| + \|\underline{r}'\|^2 - \underline{r} \cdot \underline{r}' \right) \quad (6.5)$$

Η ποσότητα  $d$  ορίζεται σαν:

$$\underline{d} = \underline{r} - \underline{r}' \quad (6.6)$$

Τα θετικά αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν απαιτεί τον υπολογισμό τριγωνομετρικών συναρτήσεων ( $\cos(\ )$ ,  $\sin(\ )$ ) που θεωρούνται υπολογιστικά

ασύμφορες. (Για παράδειγμα χρησιμοποιούνται ιδιότητες του τύπου

$$q \cos a = \frac{\|q\|(\|r_q - q\|)}{(\|r_q\| \cdot \|q\|)} \text{ όπου } a \text{ η γωνία ανάμεσα σε } q, r_q \text{ . Αντί αυτού ενσωματώνουν}$$

τέτοιου είδους πράξεις στην πράξη του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων .Ένα επιπλέον πλεονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι έχει φτιαχτεί έτσι προκειμένου να μπορεί να αποτελέσει την βάση για την κατασκευή ποιο πολύπλοκων μοντέλων.(όπως το σφαιρικό μοντέλο των M σφαιρών που θα δούμε παρακάτω).

### 6.1.3 Ομόκεντρες σφαίρες με M κέλυφα

Το ποιο συνθετο μοντέλο που χρησιμοποιεί σφαιρική γεωμετρία είναι το μοντέλο των M ομόκεντρων σφαιρών.Είναι ένα μοντέλο που υποστηρίζεται και από κάποια πακέτα λογισμικού (Ενδεικτικά [45][43]).Η μοντελοποίηση του εγκεφάλου σε M ομόκεντρες σφαίρες είναι πολύ συνηθισμένη σε μελέτες που χρησιμοποιούν σφαιρικά μοντέλα. Σε αυτήν τη προσέγγιση θεωρούμε ότι το κεφάλι αποτελείται από M ομόκεντρες σφαίρες που η κάθε μια έχει αγωγιμότητα  $\sigma_i \quad i=1, \dots, N$  .Αν με  $k_1(r, r_q)$  συμβολίζουμε το μοντέλο της μιας σφαίρας τότε το μοντέλο των M σφαιρών θα δίνεται από την σχέση:

$$k_M(r, r') = \lambda_1 k_1(r', \mu_1 r) + \lambda_2 k_1(r', \mu_2 r) + \lambda_3 k_1(r', \mu_3 r) \quad (6.7)$$

Οι παράμετροι  $\{\lambda_i, \mu_i\} \quad i=1,2,3$  ονομάζονται παράμετροι Berg και περιγράφονται στα [34][35].Ο υπολογισμός τους αποτελεί πολύπλοκη διαδικασία ενώ εξαρτώνται αποκλειστικά από την ακτίνα και τις αγωγιμότητες που έχουμε υποθέσει .Παρακάτω παραθέτουμε έναν πίνακα με μερικά σφαιρικά μοντέλα (M=3 , M=4 και M=5)

Οι ακτίνες και οι αγωγιμότητες δίδονται από την εσωτερική σφαίρα προς την εξωτερική .Η εξωτερική ακτίνα παίρνει πάντα την τιμή 1.Οι σφαίρες 1,3 είναι ισοτροπικές δηλαδή το οι συνιστώσες του πεδίου είναι ίδιες και για την ακτινική αλλά και για την εφαπτόμενη συνιστώσα .Οι υπόλοιπες σφαίρες είναι ανισοτροπικές δηλαδή έχουν άλλες τιμές αγωγιμότητας για κάθε συνιστώσα.

Πίνακας 1 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά σφαιρών

	Αριθμός σφαιρών	Ακτίνες	Ακτινική αγωγιμότητα	Εφαπτόμενη αγωγιμότητα
<b>Σφαιρα 1</b>	3	0.87;0.92;1	1;0.0125;1	1;0.0125;1
<b>Σφαιρα 2</b>	3	0.87;0.92;1	1;0.0125;1	1;0.125;1
<b>Σφαιρα 3</b>	4	0.84;0.8667;0.9467;1	1;3;0.0125;1	1;3;0.0125;1
<b>Σφαιρα 4</b>	4	0.84;0.8667;0.9467;1	1;3;0.0125;1	1;3;0.125;1
<b>Σφαιρα 5</b>	5	0.63;0.88;0.91;0.95;1	5;2;3;0.004;1	5;3;0.0125;1

Παρακάτω παραθέτουμε τις μαζί με τις παραμέτρους Berg για αυτές τις σφαίρες (όπως έχουν υπολογιστεί στο [35])

Πίνακας 2 Παραμετροι Berg

	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$	$\lambda_3$	$\mu_3$
<b>Σφαιρα 1</b>	0.9901	0.0659	0.7687	0.2389	0.4421	0.3561
<b>Σφαιρα 2</b>	0.8898	0.1152	0.7141	0.2008	0.4266	0.3273
<b>Σφαιρα 3</b>	0.9767	0.0495	0.7411	0.2240	0.4127	0.3343
<b>Σφαιρα 4</b>	0.8397	0.8397	0.6940	0.2202	0.3882	0.3015
<b>Σφαιρα 5</b>	0.9722	0.9722	0.7019	0.0749	0.3727	0.0726

## 6.2 Ρεαλιστικά μοντέλα

Είναι προφανές ότι το ανθρώπινο κρανίο δεν είναι ούτε ομογενές ούτε σφαιρικό. Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που να μειώνει το σφάλμα μοντέλου (model error) θα πρέπει να προσεγγίσουμε την γεωμετρία και την ανατομία του πραγματικού εγκεφάλου. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να υποθέσουμε αφ ενός μια γεωμετρία και αφετέρου να υποθέσουμε μια τιμή αγωγιμότητας για κάθε σημείο (η περιοχή σημείων του εγκεφάλου).

Τέτοια μοντέλα φτιάχνονται με την βοήθεια εικόνων MRI. Σε περίπτωση που μπορούμε να κάνουμε μια τέτοιου είδους απεικόνιση ο τρόπος για να κατασκευάσουμε τον πίνακα  $K$  είναι η μέθοδος των οριακών στοιχείων (Boundary Element Methods -BEM). Όπως περιγράφεται στο [32].

Κατά την προσέγγιση BEM θεωρούμε ότι το δυναμικό στο εξωτερικό του κεφαλιού είναι ένας γραμμικός συνδυασμός  $N$  γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων βάσης  $\phi_n(r)$   $n=1, \dots, N$  με τους άγνωστους συντελεστές  $v \equiv [v_1, \dots, v_N]^T$  για κάθε κόμβο του μοντέλου έτσι ώστε να ισχύει:

$$v(r') = \sum_{n=1}^N v_n \phi_n(r')$$

Οι ποιο συνηθισμένες συναρτήσεις βάσης είναι πλευρές τριγώνων στο επίπεδο με σταθερή η γραμμικά μεταβαλλόμενο δυναμικό κατά μήκος των πλευρών του τριγώνου [32]

Σε όλες τις περιπτώσεις οδηγούμαστε στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής:

$$g = H \cdot v$$

Όπου  $g$  είναι διάνυσμα  $N \times 1$  και ο πίνακας  $H$  είναι τετραγωνικός  $N \times N$  και  $v$  είναι  $N \times 1$  (το διάνυσμα των άγνωστων συντελεστών). Η λύση θα είναι:

$$v = H^{-1} g$$

Όπου

$$g = G_{\infty} q$$

με

$$G_{\infty} = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \cdot k_{\infty}(r, r')^T \\ \dots \\ \psi_N(r) \cdot k_{\infty}(r, r')^T \end{bmatrix}, \quad k_{\infty}(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{d}{\|\underline{d}\|^3}, \quad \underline{d} = \underline{r} - \underline{r}'$$

Οι συναρτήσεις  $\{\psi_i\}$   $i=1, \dots, N$  είναι οι συναρτήσεις βάσης με βάρη. Ο πίνακας  $H$  προκύπτει από την γεωμετρία που έχουμε υποθέσει για το κεφάλι. Δεδομένου ότι δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αντιστρέφεται πάντα θα πρέπει να τον μετασχηματίσουμε κατάλληλα έτσι ώστε να υπάρχει πάντα ο αντίστροφός του [61][62]. Θα συμβολίσουμε τον μετασχηματισμένο  $H$  με  $\tilde{H}$  όποτε η λύση για τα δυναμικά θα είναι:

$$v = \tilde{H}^{-1} g$$

Το δυναμικό για ένα συγκεκριμένο σημείο της επιφάνειας του κεφαλιού θα είναι:

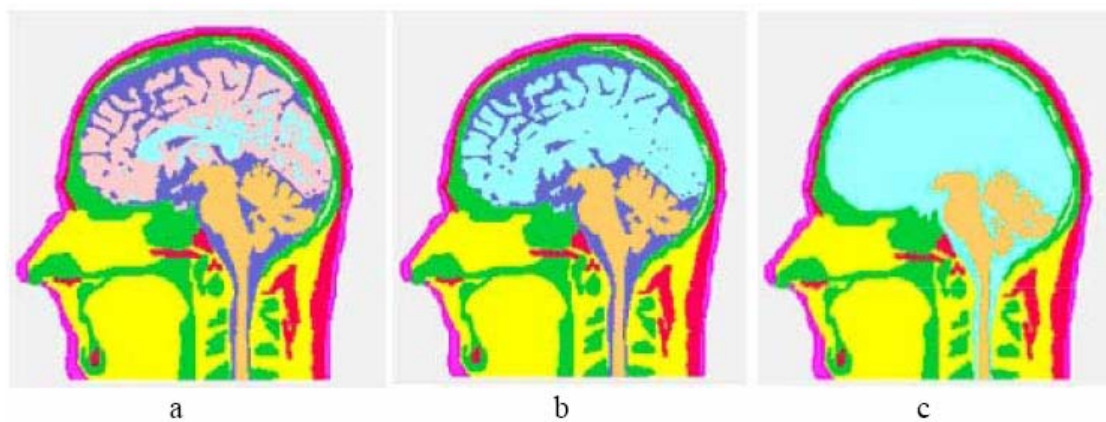
$$v(r') = \left[ \phi_1(r'), \dots, \phi_N(r') \right] \cdot \tilde{H}^{-1} G_\infty q$$

Έτσι ο υποπίνακας μεταφοράς πεδίου για το σημείο με συντεταγμένες  $r$  θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$k_{bem}(r, r') = \left[ \phi_1(r'), \dots, \phi_N(r') \right] \cdot \tilde{H}^{-1} G_\infty \quad (6.8)$$

Αυτή η μέθοδος παρότι είναι πιο ακριβής σε σχέση με τα σφαιρικά μοντέλα είναι πολύ πιο ακριβή υπολογιστικά. Επιπλέον προκειμένου να εφαρμοστεί θα πρέπει να υποθέσουμε ένα γεωμετρικό μοντέλο κεφαλιού (κατασκευή πίνακα  $H$ ) το οποίο θα προέρχεται από πραγματικά δεδομένα (χρήση εικόνων MRI).

Παρακάτω μπορούμε να δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο ανθρώπινου εγκεφάλου με την βοήθεια μιας εικόνας MRI [37]. Στις τρεις εικόνες  $a$ ,  $b$ ,  $c$  μπορούμε να δούμε τρία μοντέλα διαφορετικής πολυπλοκότητας που βασίζονται στην ίδια εικόνα MRI.

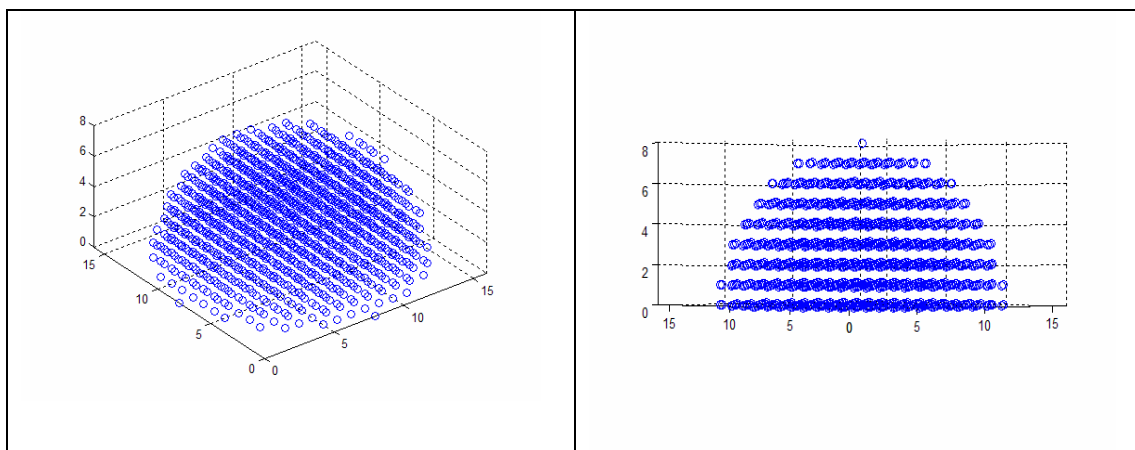


Στην  $a$  βλέπουμε ένα ρεαλιστικό μοντέλο με 11 διαφορετικούς ιστούς. Οι διαφορετικοί ιστοί παρουσιάζονται με διαφορετικό χρώμα με απεικόνιση ψευδοχρωματισμού. Στην εικόνα  $b$  έχουμε ένα πιο απλό μοντέλο με 10 είδη ιστών και στην εικόνα  $c$  το απλούστερο μοντέλο με 9 είδη ιστών. Σε κάθε είδος ιστού αντιστοιχίζεται και μια τιμή αγωγιμότητας.

Με βάση την θεώρηση των διαφόρων ιστών κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\tilde{H}$  και στην συνέχεια με την μέθοδο που περιγράψαμε κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταφοράς πεδίου  $K$ .

### 6.3 Περιγραφή συστήματος απεικόνισης

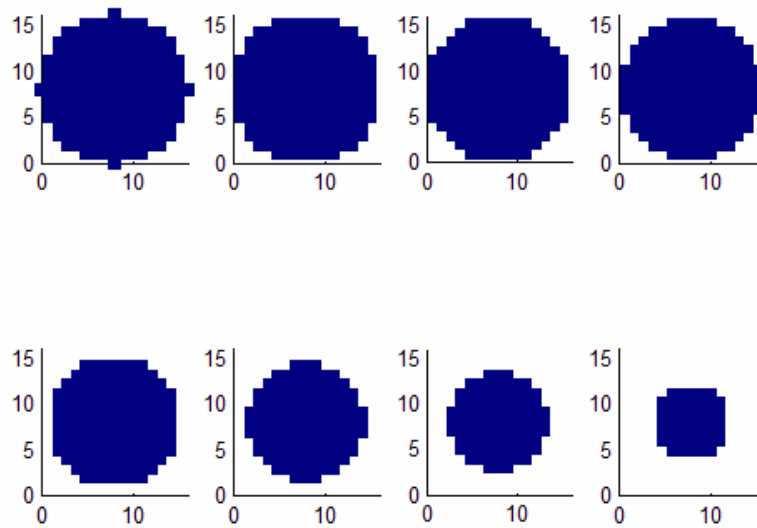
Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήσαμε ένα ενιαίο σύστημα απεικόνισης των μετρικών του κάθε αλγορίθμου. Σαν κεφάλι χρησιμοποιήσαμε ένα απλό σφαιρικό μοντέλο (άπειρου άγοντος μέσου). Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε μόνο το άνω ημισφαίριο (θεωρήσαμε ότι στο κάτω ημισφαίριο δεν υπάρχει εγκέφαλος). Έτσι κατασκευάσαμε ένα κυβικό πλέγμα μέσα σε αυτό το ημισφαίριο όπου η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δυο σημείων είναι 1cm. Τοποθετήσαμε το κέντρο του ημισφαίριου στο σημείο (8,8,0). Η θέση των σημείων στον χώρο φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 27 Απεικόνιση σημείων μοντέλου που χρησιμοποιήθηκαν

Προκειμένου να δείξουμε τα διαγράμματα του ψευδοχρωματισμού του κάθε μετρικού των αλγορίθμων που χρησιμοποιήσαμε 8 τομές του άξονα  $z$  (για  $z=0, \dots, 7$ ).





Εικόνα 28 απεικόνιση τομών μοντέλου

Η τομή για  $z=0$  παρουσιάζεται πάνω δεξιά ενώ για  $z=7$  κάτω αριστερά.

## 7 Αντίστροφος καθορισμός πηγής –Οι αλγόριθμοι

Όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα το πρόβλημα του αντίστροφου καθορισμού πηγής συνίσταται στον προσδιορισμό του πίνακα  $J$  των ρευμάτων του εγκεφάλου για τον οποίο θα ισχύει:

$$J(t) = T \cdot F(t) \quad (7.1)$$

Ο πίνακας  $J$  σε όπως περιγράψαμε και στην ενότητα περιγραφής του προβλήματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$J = \begin{bmatrix} j_{1x}(t_1) & j_{1x}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1x}(t_k) \\ j_{1y}(t_1) & j_{1y}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1y}(t_k) \\ j_{1z}(t_1) & j_{1z}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{1z}(t_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ j_{Mx}(t_1) & j_{Mx}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{Mx}(t_k) \\ j_{My}(t_1) & j_{My}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{My}(t_k) \\ j_{Mz}(t_1) & j_{Mz}(t_2) & \cdot & \cdot & \cdot & j_{Mz}(t_k) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Παρατηρούμε ότι η μια του διάσταση είναι  $3M$  και έχει να κάνει με τον χώρο ενώ η άλλη διάσταση έχει διάσταση  $k$  και είναι η χρονική διάσταση. Ζητούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε τα ρεύματα του εγκεφάλου σε  $M$  σημεία για  $k$  χρονικές στιγμές. Η προσέγγιση της λύσης αυτής μπορεί να γίνει με δυο τρόπους. Η πρώτη προσέγγιση προσπαθεί να προσδιορίσει τον πίνακα  $J$  απ ευθείας. Έτσι έχουμε την ομάδα των άμεσων λύσεων (direct solutions) τέτοιου είδους αλγόριθμοι προσπαθούν να προσδιορίσουν την βέλτιστη λύση ελαχιστοποιώντας ένα κριτήριο ευκλείδειας νόρμας.

Μια εναλλακτική προσέγγιση που μπορούμε να έχουμε είναι ο διαχωρισμός του προβλήματός μας σε δυο επί μέρους προβλήματα:

1. Προσδιορισμός των σημάτων του εγκεφάλου (επίλυση στην χρονική διάσταση)
2. Τοποθέτηση σημάτων από το βήμα 1 σε κάποιο εσωτερικό σημείο του εγκεφάλου (επίλυση στην χωρική διάσταση)

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η σημαντική υπόθεση που κάνουμε προκειμένου να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα είναι η στατιστική ανεξαρτησία των πηγών . Έτσι κάθε ένα στατιστικά ανεξάρτητο σήμα αντιστοιχίζεται σε μια και μόνο πηγή εντός του εγκεφάλου. Αυτή η υπόθεση είναι αρκετά ισχυρή όταν οι πηγές του εγκεφάλου είναι λίγες (όπως στα δεδομένα μας ) ή όταν συντρέχουν ειδικές συνθήκες (πχ μελέτη φαινομένων επιληψίας) .Γενικότερα δεν είναι πάντα μια ισχυρή υπόθεση και πάντα χρειάζεται να ελέγχουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται. Σε εργασίες που ασχολούνται με προκλητά δυναμικά [22][28] η υπόθεση αυτή γίνεται και είναι θεμελιώδους σημασίας

Πρώτου παρουσιάσουμε τους κυριότερους αλγορίθμους επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος θα περιγράψουμε την διαδικασία αξιολόγησης τους τόσο σε επίπεδο εξομοίωσης όσο και σε επίπεδο πραγματικού σήματος.

## **7.1 Αξιολόγηση αλγορίθμων**

Προκειμένου να αξιολογήσουμε τους αλγορίθμους επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος χρησιμοποιήσαμε δυο μεθόδους . Αρχικά δοκιμάσαμε κάποια σήματα εξομοίωσης και για τους ποιο αξιόλογους αλγόριθμους από κάθε ομάδα δοκιμάσαμε πραγματικά δεδομένα προσπαθώντας να επιβεβαιώσουμε μια δεδομένη υπόθεση.

### **7.1.1 Αξιολόγηση σε περιβάλλον εξομοίωσης**

Σε αυτήν την περίπτωση αρχικά θεωρούμε κάποιες πηγές εντός του εγκεφάλου (μια αρχική κατανομή ρεύματος) και στην συνέχεια με την εξίσωση  $F=KJ$  βρίσκουμε το εγκεφαλογράφημα της εξομοίωσης .Στην συνέχεια λύνουμε το αντίστροφο πρόβλημα με τον προς αξιολόγηση αλγόριθμο και συγκρίνουμε την αρχική κατανομή ρεύματος που υποθέσαμε με το αποτέλεσμα του αλγορίθμου.

Τα δυο σημεία που εξετάζουμε είναι τα εξής:

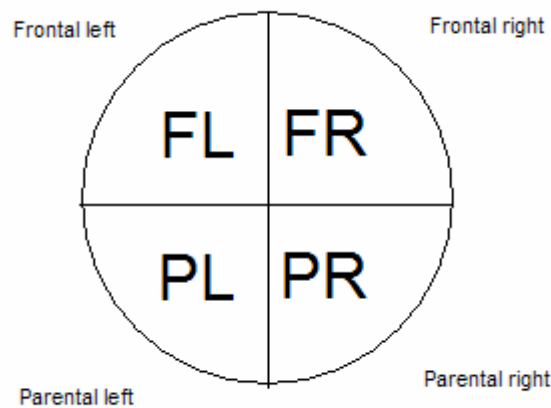
1. Σε ποια απόσταση σε σημεία του χώρου τοποθετήθηκε ένα δίπολο σε σχέση με την πραγματική του θέση
2. Κατα πόσο το σήμα του εγκεφάλου εκτιμήθηκε σωστά σε σχέση με αυτό που υποθέσαμε αρχικά.

### 7.1.2 Αξιολόγηση με πραγματικά δεδομένα

Η αξιολόγηση αποτελεσμάτων που έχουν προέλθει από πραγματικά δεδομένα παρουσιάζει μεγάλο βαθμό δυσκολίας . Αυτό είναι αναμενόμενο μια και δεν έχουμε ένα ακριβές μέτρο σύγκρισης (όπως η αρχική κατανομή ρεύματος στο περιβάλλον εξομοίωσης) . Η αξιολόγηση σε αυτές τις περιπτώσεις περιορίζεται στην επαλήθευση κάποιων υποθέσεων . Οι υποθέσεις αυτές μπορεί να προέρχονται από τον χώρο της ιατρικής – νευροφυσιολογίας Για παράδειγμα η νευροφυσιολογία μπορεί να μας υποδείξει κάποιες περιοχές του εγκεφάλου όπου παρουσιάζεται δραστηριότητα για συγκεκριμένες λειτουργίες-ερεθίσματα.

Μια άλλη πηγή υποθέσεων είναι η συγκριτική ανάλυση των δεδομένων με διαφορετικές προσεγγίσεις που έχουν γίνει πάνω στα ίδια δεδομένα .Σε αυτήν την περίπτωση λύνουμε το πρόβλημα με κάποια προσέγγιση και στην συνέχεια θεωρούμε τα αποτελέσματα της προσέγγισης αυτής σαν υπόθεση και προσπαθούμε να τα επιβεβαιώσουμε με κάποια άλλη μεθοδολογία .

Στην συγκεκριμένη εργασία προσπαθήσαμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα μιας άλλης ερευνητικής εργασίας που έγινε πάνω στα ίδια δεδομένα [54] . Η υπόθεση που προσπαθήσαμε να επιβεβαιώσουμε είναι η εξής. Αρχικά χωρίζουμε το κεφάλι σε 4 περιοχές όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 29 περιοχές ενεργοποίησης

Στην συνέχεια διαμερίσαμε το κάθε εγκεφαλογράφημα σε μπάντες συχνοτήτων με μετασχηματισμό Fourier και κατάλληλο φιλτράρισμα. Οι μπάντες του εγκεφαλογραφήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

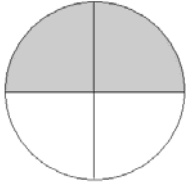
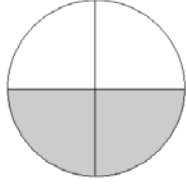
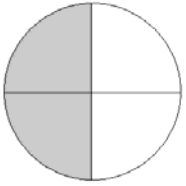
Πίνακας 3 Μπάντες εγκεφαλικών συχνοτήτων

Όνομασία μπάντας	Συχνότητες (Hz)
Delta	0.1-3 Hz
Theta	4-8 Hz
Alpha 1	8-10 Hz
Alpha 2	10-13 Hz
Beta	12-30 Hz
Gamma 1	30-45 Hz
Gamma 2	45-90 Hz

Για τρεις μπαντες συχνοτήτων (θητα,αλφα 2 και γάμμα 1) οι περιοχές ενεργοποίησης σύμφωνα με την εργασία που προσπαθούμε να επιβεβαιώσουμε [54] φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.(συμβολίζονται με γκρι χρώμα)

Πίνακας 4 Υπόθεση προς επιβεβαίωση

Μπάντες συχνοτήτων	Περιοχές ενεργοποίησης
--------------------	------------------------

Theta 4-8 Hz	
Alpha 2 10-13 Hz	
Gamma 1 30-45 Hz	

## 7.2 Αλγόριθμοι άμεσης επίλυσης αντιστρόφου προβλήματος

### 7.2.1 Αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας (Minimum norm algorithm)

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο το πρόβλημα του προσδιορισμού των ρευμάτων του εγκεφάλου είναι αόριστο μια και στην ουσία καλούμαστε να λύσουμε ένα σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $M$  αγνώστους όπου  $N \ll M$ . Μια πρώτη προσέγγιση στο πρόβλημα είναι από τις πολλές λύσεις που επιδέχεται το πρόβλημα να διαλέξουμε εκείνη που ελαχιστοποιεί την ευκλείδεια νόρμα της διαφοράς των δυο μελών της εξίσωσης. Δηλαδή ζητούμε να βρούμε ένα διάνυσμα κατανομής πυκνότητας ρεύματος  $\hat{J}$  τέτοιο ώστε:

$$\min \|F - K \cdot \hat{J}\|_2^2 \quad (7.3)$$

Ας θεωρήσουμε ότι το κριτήριο κόστους είναι η συνάρτηση

$$G(\hat{J}) = \|F - K \cdot \hat{J}\|_2^2 \quad (7.4)$$

Το ελάχιστο της συνάρτησης θα βρίσκεται στο σημείο που μηδενίζεται η παράγωγος της δηλαδή:

$$\nabla G(\hat{J}) = K^T (F - K \cdot \hat{J}) = 0 \quad (7.5)$$

Οπότε έχουμε:

$$\hat{J} = (K^T K)^{-1} K^T F \Rightarrow \hat{J} = K^\dagger F \quad (7.6)$$

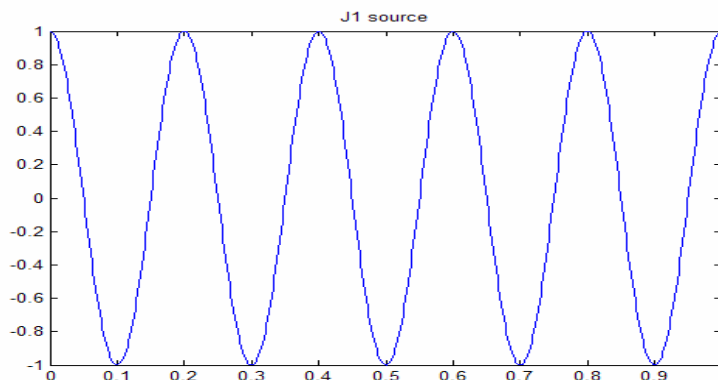
Ο πίνακας  $K^\dagger = (K^T K)^{-1} K^T$  ονομάζεται ψευδοαντίστροφος πίνακας ή πίνακας Moore-Penrose του πίνακα  $K$ . (Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με ιδιότητες και τρόπους υπολογισμού του υπάρχουν στο παράρτημα 9.1.2)

Ο αλγόριθμος είναι γνωστός σαν αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας ή αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων. Η προσέγγιση αυτή είναι ευρέως γνωστή στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Η εφαρμογή του στο πρόβλημα του αντίστροφου εντοπισμού πηγής προτάθηκε για πρώτη φορά το 1994 από τους Hamalainen και Ilmoniemi [10] ενώ αναφέρεται συχνά σε διάφορες εργασίες [7],[8]. Θεωρείται από τους πιο παλιούς αλγορίθμους για την αντιμετώπιση του προβλήματος ενώ αποτελεί την βάση για άλλους πιο σύνθετους αλγορίθμους.

### 7.2.1.1 Εξομοίωση

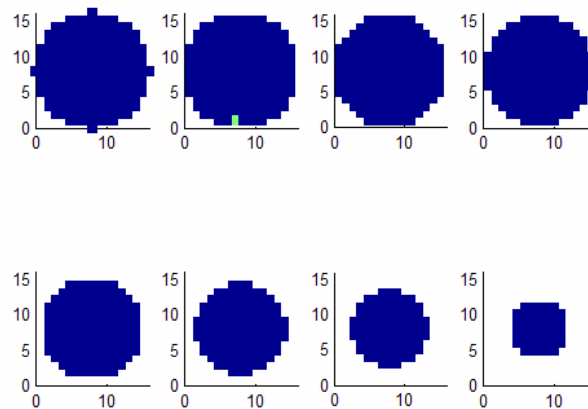
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια πηγή ημιτονοειδούς μορφής της οποίας η μεταβολή στον χρόνο δίνεται από την εξίσωση:

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5\text{Hz} \quad 0\text{sec} \leq t \leq 8\text{sec} \quad (7.7)$$



Εικόνα 30 γραφική παράσταση σήματος εξομοίωσης

Και ας την τοποθετήσουμε στο σημείο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

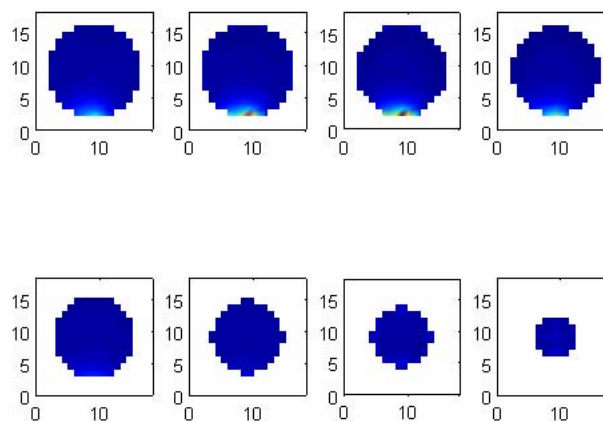


**Εικόνα 31 Πραγματική θέση σήματος εξομοίωσης**

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το εγκεφαλογράφημα της εξομοίωσης από την εξίσωση  $F=KJ$  και ακολούθως με δεδομένο το  $F$  λύνουμε το αντίστροφο πρόβλημα. Από τον πίνακα ρευμάτων που υπολογίζει ο αλγόριθμος υπολογίζουμε την ποσότητα (με  $\hat{j}$  συμβολίζουμε το εκτιμώμενο από τον αλγόριθμο σήμα ρεύματος) :

$$m = \left[ \|\hat{j}_1(t)\|_2 \quad \|\hat{j}_2(t)\|_2 \quad \dots \quad \|\hat{j}_M(t)\|_2 \right]^T \quad (7.8)$$

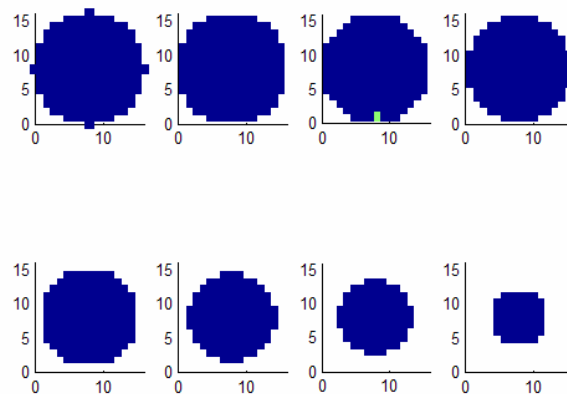
Και αξιολογούμε τα ακρότατα του διανύσματος. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το διάγραμμα ψευδοχρωματισμού του μετρικού  $m$  φαίνεται παρακάτω:



**Εικόνα 32 ψευδοχρωματισμός μετρικού  $m$**

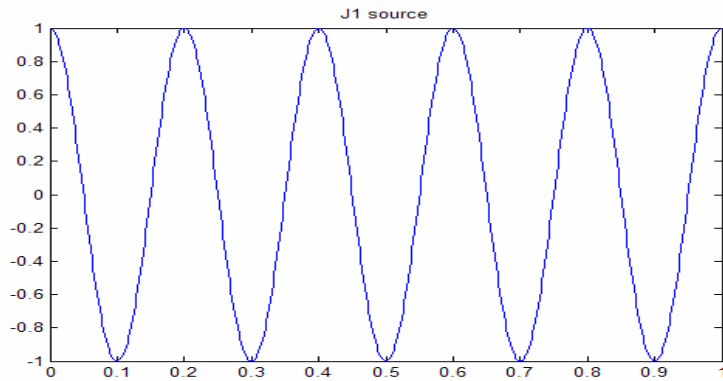
Το ολικό μέγιστο της λύσης (που είναι στην ουσία η εκτιμώμενη θέση του διπόλου) φαίνεται παρακάτω:



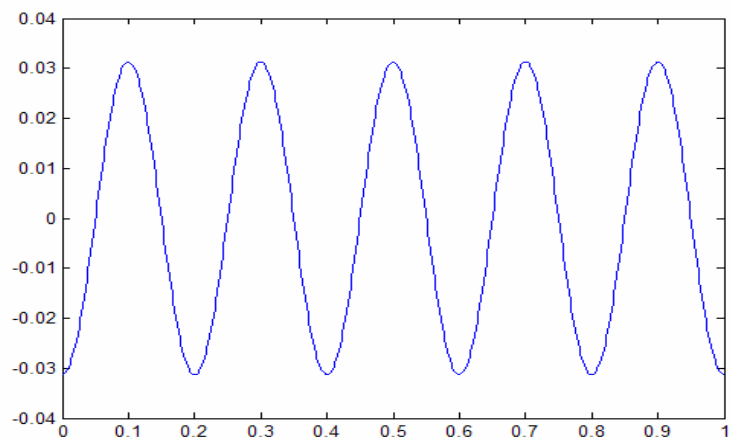


Εικόνα 33 Ολικό μέγιστο m

Η μορφή του διπόλου που βρίσκεται στο εκτιμώμενο σημείο έχει ως εξής:

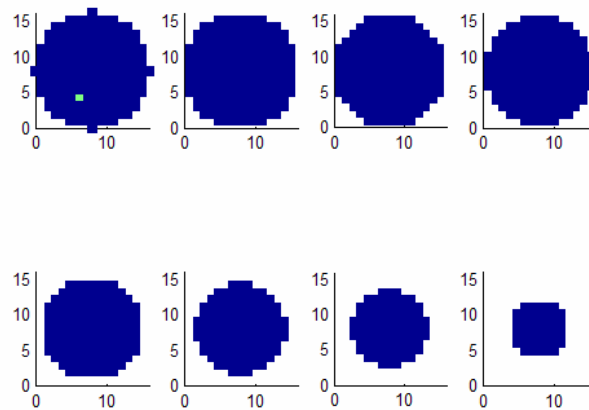


Αρχικό σήμα



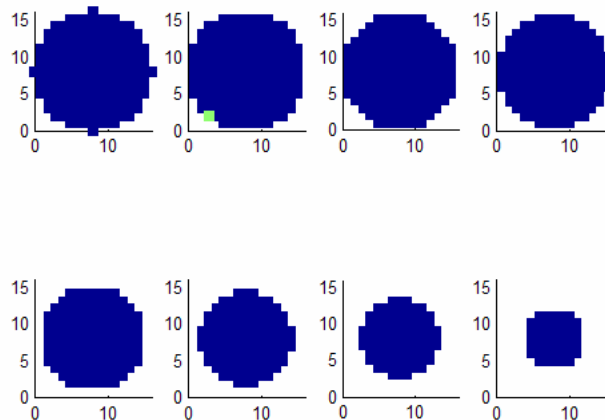
Εκτιμώμενο σήμα με MN

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος τοποθέτησε το μέγιστο με σφάλμα ένα pixel και ανακατασκεύασε το σήμα με σφάλμα μιας πολλαπλασιαστικής σταθερας<sup>1</sup>. Στο δεύτερο παράδειγμα τοποθετούμε την ίδια πηγή σε ένα εσωτερικό σημείο του εγκεφάλου όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Εικόνα 34 σήμα εξομοίωσης στο εσωτερικό του εγκεφάλου

Η εκτιμώμενη θέση σύμφωνα με τον αλγόριθμο έχει ως εξής :



Εικόνα 35 Εκτίμηση μεγίστου

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος της ελάχιστης νόρμας αποτυγχάνει να εκτιμήσει σωστά την θέση του διπόλου όταν αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό και το τοποθετεί πάντα κοντά στα ηλεκτρόδια .Η πρόβλημα αυτό είναι ένα γνωστό θέμα και έχει επισημανθεί

<sup>1</sup> Στον αντίστροφο καθορισμό πηγής δεν μας ενδιαφέρει να ανακατασκευάσουμε με ακρίβεια την ενέργεια του σήματος. Κατά κύριο λόγο μας ενδιαφέρει η μορφή του η θέση του και η ενέργεια σε σχέση με τα άλλα δίπολα (σχετική ενέργεια)

στα [13][7] . Η αδυναμία αυτή οδήγησε τους ερευνητές στο να προτείνουν του αλγορίθμους που έχουν σαν βάση τον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας χωρίς να έχουν τα ελαττώματα του.

### 7.2.2 Αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας με βάρη (Weighted minimum norm algorithm)

Όπως είδαμε και παραπάνω ο αλγόριθμος της ελάχιστης νόρμας τείνει να τοποθετεί τις λύσεις του προβλήματος πολύ κοντά στα ηλεκτρόδια και απορρίπτει λύσεις που βρίσκονται στο εσωτερικό του μοντέλου . Για τον λόγο αυτό προτάθηκε ο αλγόριθμος της ελάχιστης νόρμας με βάρη.

Η διαφορά του είναι ότι εκτός τον ψευδοαντίστροφο πίνακα Moore-Penrose χρησιμοποιεί και έναν πίνακα «κανονικοποίησης»  $W$  . Για τον τρόπο κατασκευής του πίνακα  $W$  έχουν προταθεί πολλές απόψεις. Μια από τις επικρατούσες είναι ο σχηματισμός του πίνακα με την δεύτερη νόρμα του αθροίσματος των στηλών του πίνακα μεταφοράς πεδίου  $K$  (lead field matrix). [7] Έχει βέβαια διατυπωθεί [18] κατά καιρούς η άποψη ότι ο πίνακας  $W$  θα πρέπει να ενσωματώνει οποιαδήποτε “a priori” πληροφορία διαθέτουμε ,που έχει να κάνει με την νευροφυσιολογία ,προκειμένου να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας με βάρη όπως παρουσιάζεται στο [13].

Προκειμένου να επιτύχουμε το βέλτιστο κατά τον αλγόριθμο διάνυσμα κατανομής ρευμάτων  $\hat{J}$  κατασκευάζουμε τον πίνακα  $T$  τέτοιο ώστε:

$$\Phi = K \cdot J \Rightarrow \hat{J} = T \cdot \Phi \quad (7.9)$$

Ο πίνακας  $T$  του αλγορίθμου ορίζεται σαν:

$$T = W^{-1} K^T \left[ K W^{-1} K^T \right]^\dagger \quad (7.10)$$

Όπου  $\left[ K W^{-1} K^T \right]^\dagger$  ο πίνακας Moore Penrose του  $K W^{-1} K^T$ . Ο πίνακας  $W$  ορίζεται ως εξής:

$$W = \Omega^2 \otimes I_3 \quad (7.11)$$

(Με  $\otimes$  συμβολίζουμε το γινόμενο Kronecker – παράρτημα 9.1.1).

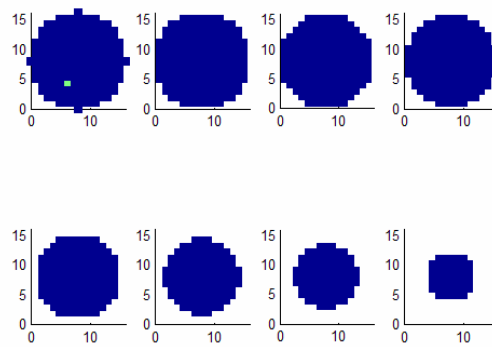
Και  $\Omega$  είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου

$$\Omega_{\beta\beta} = \sqrt{\sum_{a=1}^N k_{a\beta}^T k_{a\beta}} \quad \beta = 1 \dots M \quad (7.12)$$

Δηλαδή το άθροισμα των νορμών των στηλών του πίνακα μεταφοράς πεδίου  $K$ . Βλέπουμε ότι σε σχέση με τον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας στον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας με βάρη έχουμε μια κανονικοποίηση που έχει σαν στόχο να μην πλεονεκτούν τα εξωτερικά σημεία έναντι των εσωτερικών κατά τον εντοπισμό των διπόλων.

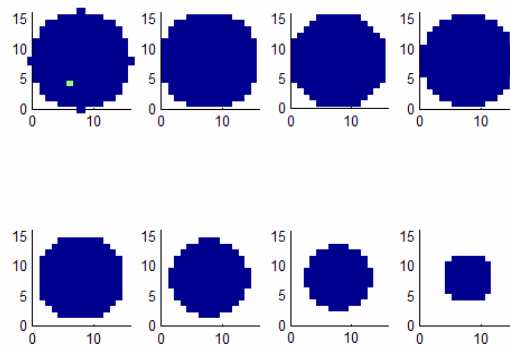
### 7.2.2.1 Εξομοίωση

Ας δούμε την απόδοση του εν λόγω αλγόριθμου στο πρόβλημα του αντίστροφου καθορισμού πηγής όταν αυτή βρίσκεται στο εσωτερικό του εγκεφάλου. Θεωρούμε ακριβώς το ίδιο παράδειγμα με την δευτερή εξομοίωση της παραγράφου 7.2.2.1 δηλαδή τοποθετούμε μια ημιτονοειδή πηγή στην θέση που φαίνεται παρακάτω:



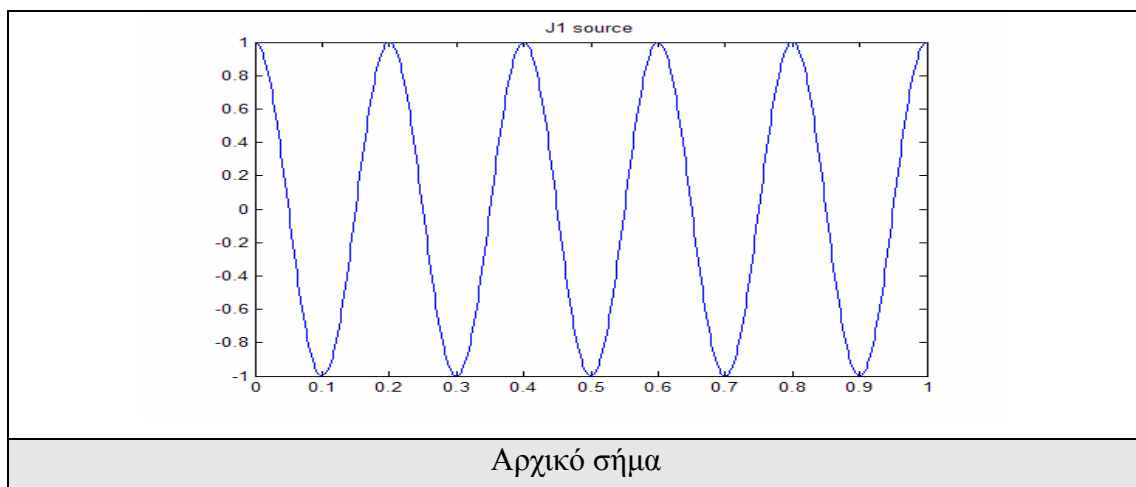
Εικόνα 36 Σήμα εξομοίωσης στο εσωτερικό του εγκεφάλου

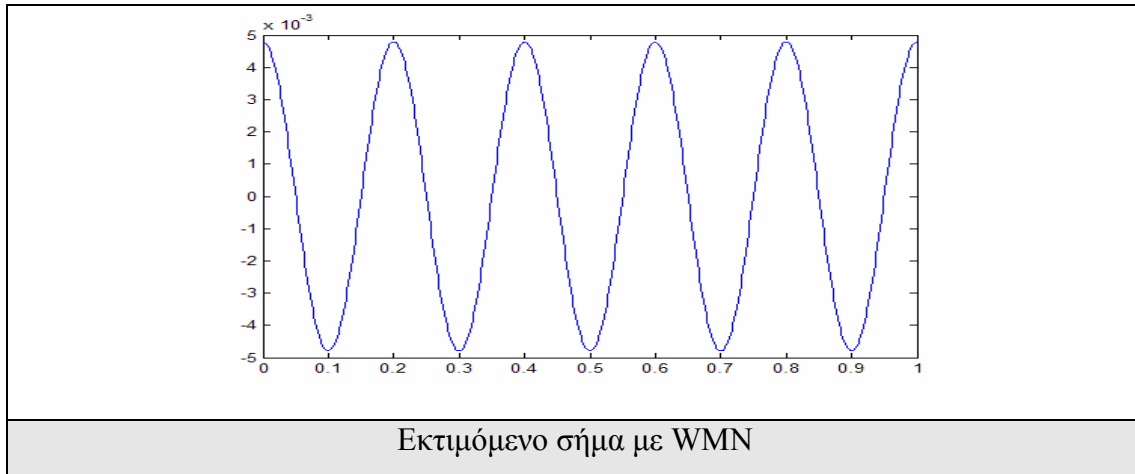
Το εκτιμώμενο μέγιστο που δίνει ο αλγόριθμος της ελάχιστης νόρμας με βάρη είναι το εξής:



Εικόνα 37 Ολικό μέγιστο με αλγόριθμο WMN

Το οποίο αποτελεί την ακριβώς την σωστή θέση.



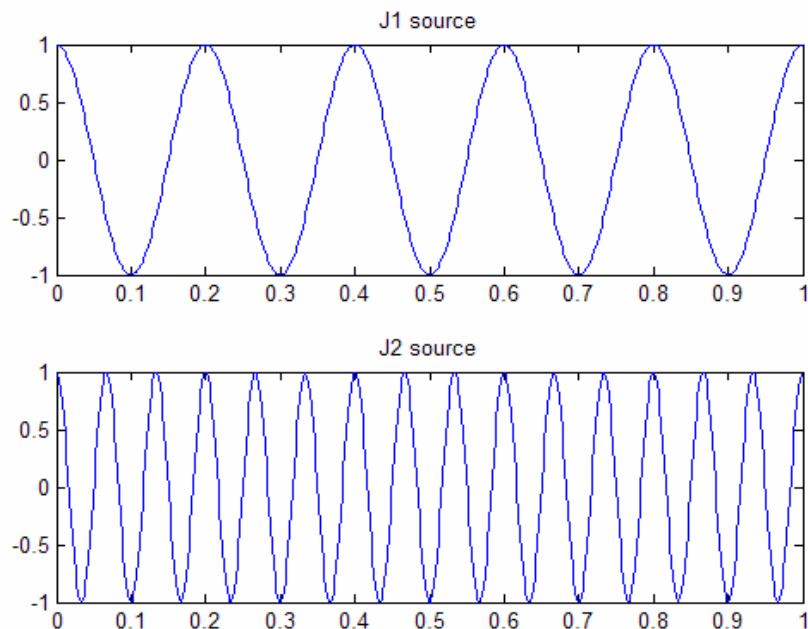


Παρατηρούμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα απέχει από το πραγματικό μια πολλαπλασιαστική σταθερά.

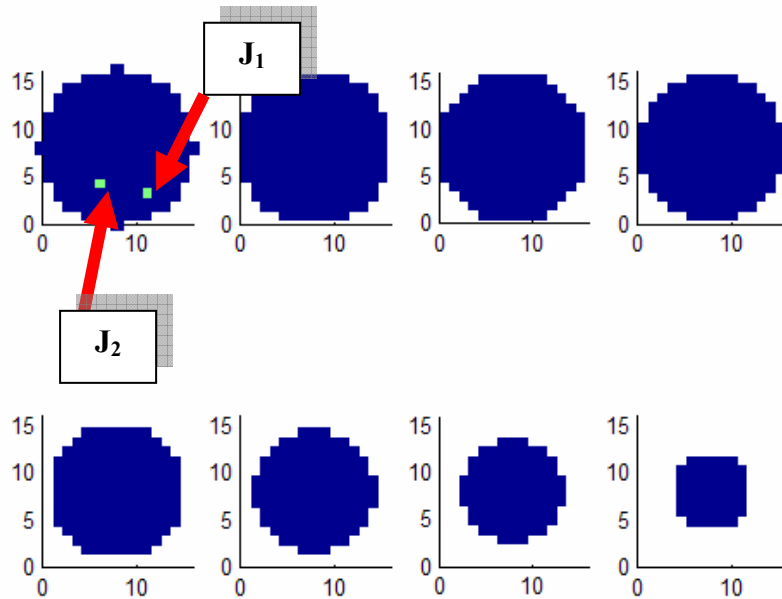
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα δεύτερο παράδειγμα σύμφωνα με το οποίο έχουμε δυο ημιτονοειδής πηγές διαφορετικών συχνοτήτων. Οι μεταβολή τους στον χρόνο δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5\text{Hz} \quad 0\text{sec} \leq t \leq 8\text{sec} \quad (7.13)$$

$$J_2 = \cos(2\pi f_2 t) \quad f_2 = 15\text{Hz} \quad 0\text{sec} \leq t \leq 8\text{sec} \quad (7.14)$$



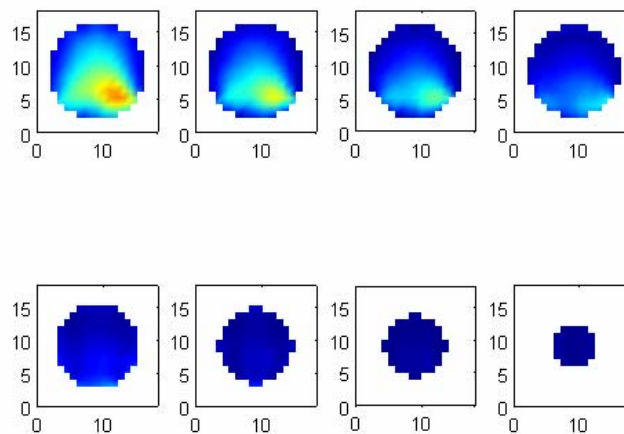
Εικόνα 38 Εξομοίωση με δυο σήματα



Εικόνα 39 Αρχικές θέσεις σημάτων

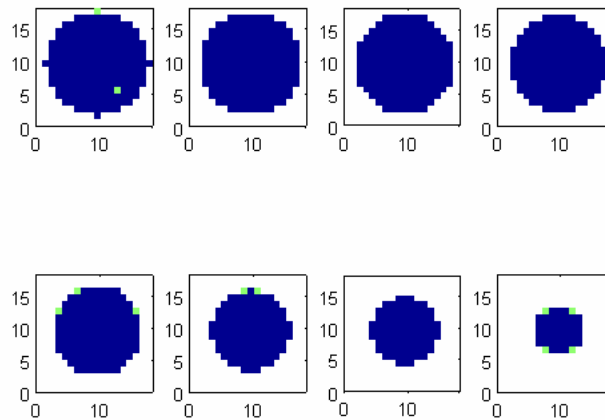
Σε αυτήν την περίπτωση θα απαιτούμε από τον αλγόριθμό μας να μας δώσει πληροφορία και για τον αριθμό των διπόλων που ανίχνευσε. Το ολικό μέγιστο μας δίνει ένα σημείο. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε τα τοπικά ακρότατα ψάχνοντας στον τρισδιάστατο χώρο. Ένας τέτοιος αριθμός τοπικών ακρότατων αποτελεί την εκτίμηση του αλγορίθμου για τον αριθμό των διπόλων.

Αρχικά παραθέτουμε το διάγραμμα ψευδοχρωματισμού του μετρικού μας  $m$



Εικόνα 40 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού με αλγόριθμο WMN

Στην συνέχεια παραθέτουμε το διάγραμμα με τα τοπικά ακρότατα του μετρικού  $m$  σε τρεις διαστάσεις.



Εικόνα 41 εκτίμηση αριθμού διπόλων με την βοήθεια τοπικών ακρότατων

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος αδυνατεί να εκτιμήσει τον σωστό αριθμό διπόλων . Επιστρέφει πολλά τοπικά ακρότατα και επιπλέον δεν ανιχνεύει την πηγή  $J_2$ .

### 7.2.3 Επαναληπτικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του πίνακα των βαρών (αλγόριθμος FOCUSS)

Μέχρι τώρα έχουμε προτείνει την χρήση πίνακα  $W$  ο οποίος σχετίζεται με το μέτρο του πίνακα μεταφοράς πεδίου (lead field matrix). Μια εναλλακτική προσέγγιση στην κατασκευή αυτού του πίνακα είναι η υιοθέτηση ενός επαναληπτικού σχήματος για τον προσδιορισμό του. Ένας από τους σημαντικότερους αλγορίθμους που έχει προταθεί για τον λόγο αυτό είναι ο αλγόριθμος FOCUSS (Focal Underdetermined System Solution).

Ο αλγόριθμος FOCUSS προτάθηκε από τους Gorodnitsky και Rao στο [18] και αποτελεί μια προσέγγιση που προσπαθεί απαλλάξει τον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας από το σφάλμα της αυθαίρετης αρχικοποίησης του πίνακα  $W$ .

Έτσι λοιπόν στο γνωστό πλέον πρόβλημα:

$$F = K \cdot J \quad (7.15)$$

Διαλέγουμε σαν λύση τον πίνακα:



$$F = K \cdot J \Rightarrow \hat{J} = W (K \cdot W)^\dagger F \quad (7.16)$$

Όπου  $W$  είναι ο πίνακας που προσδιορίζεται επαναληπτικά σύμφωνα με τον εξής αλγόριθμο:

1. Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα  $W$  κατευθείαν από τα μέτρα του πίνακα  $K$ . Σε περίπτωση που είναι δυνατό συνίσταται ο αρχικός πίνακας  $W$  να ενσωματώνει οποιαδήποτε άλλη πληροφορία διαθέτουμε από την νευροφυσιολογία και την ανατομία του εγκεφάλου.
2. Υπολογίζουμε την λύση της ελάχιστης νόρμας με βάρη από την εξίσωση (7.16)
3. Κατασκευάζουμε τον πίνακα  $W_k$  χρησιμοποιώντας μια από τις παρακάτω εξισώσεις

$$W_k = \begin{bmatrix} K_{1_{k-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{2_{k-1}} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & K_{M_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$W_k = W_{k-1} \begin{bmatrix} K_{1_{k-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{2_{k-1}} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & K_{M_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

(Κεφαλαίο  $K$  συμβολίζουμε το αρθροισμα των νορμών της στήλης του πίνακα μεταφοράς πεδίου και με  $W_{k-1}$  τον πίνακα του προηγούμενου βήματος).

4. Αν  $\|W_k - W_{k-1}\| \leq threshold$  τότε ο αλγόριθμος τερματίζει αλλιώς εφαρμόζουμε ξανά το βήμα 2.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η εφαρμογή της εξίσωσης (7.17) οδηγεί στην απλή παραλλαγή του αλγόριθμου ενώ η εφαρμογή της εξίσωσης (7.18) οδηγεί στην συνθετη (compound) εκδοχή του αλγορίθμου. Σύμφωνα με το [18] η συνθετη εκδοχή είναι αυτή που προτιμάμε στην πράξη γιατί έχει σαν χαρακτηριστικό την γρηγορότερη σύγκλιση.

#### 7.2.4 Αλγόριθμος LORETA

Ο αλγόριθμος LORETA (Low Resolution Electromagnetic Tomography) προτάθηκε από τον R.D.Pascual-Marqui για πρώτη φορά στο [14]. Η λογική του ακολουθεί την λογική του αλγορίθμου της ελάχιστης νόρμας με βάρη. Η διαφορά του είναι εκτός από τον πίνακα  $\Omega$  που περιλαμβάνει την κανονικοποίηση με τον μέτρο του πίνακα μεταφοράς πεδίου  $K$  ο αλγόριθμος ενσωματώνει και έναν Laplacian τελεστή που παίρνει την μορφή ενός πίνακα  $B$  και έχει σαν στόχο την παραγωγή μιας ποιο εξομαλυσμένης (smooth) λύσης.

Σε αυτήν την εργασία θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο όπως αυτός προτάθηκε από τον R.D.Pascual-Marqui στα [13][14][15][16]. Έτσι αρχικά έχουμε (όπως και στον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας με βάρη)

$$\Phi = K \cdot J \Rightarrow \hat{J} = T \cdot \Phi \quad \text{όπου} \quad T = W^{-1} K^T [K W^{-1} K^T]^\dagger \quad (7.19)$$

Ο αλγόριθμος διαφοροποιείται στο σημείο που ορίζουμε τον πίνακα  $W$ . Συγκεκριμένα ο  $W$  ορίζεται ως εξής:

$$W = (\Omega \otimes I_3) B^T B (\Omega \otimes I_3) \quad (7.20)$$

Όσον αφορά τον  $\Omega$  αυτός υλοποιείται όπως και στον αλγόριθμο της ελάχιστης νόρμας με βάρη δηλαδή είναι διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου του τα στοιχεία:

$$\Omega_{\beta\beta} = \sqrt{\sum_{a=1}^N k_{\alpha\beta}^T k_{ab}} \quad \beta = 1 \dots M \quad (7.21)$$

Ο πίνακας  $B$  είναι ο τελεστής Laplace και ορίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις :

$$B = \frac{6}{d^2} (A - I_{3M}) \quad (7.22)$$

$$A = A_0 \otimes I_3 \quad (7.23)$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \left( I_M + [diag(A_1 1_M)]^{-1} \right) A_1 \quad (7.24)$$

$$[A_1]_{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta = 1 \dots M \quad (7.25)$$

$I_{3M}$  :είναι ο μοναδιαίος διάστασης  $3M$

$diag[A]$  : είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τα στοιχεία του διανύσματος  $A$ .

$d$  :είναι η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία του μοντέλου του εγκεφάλου

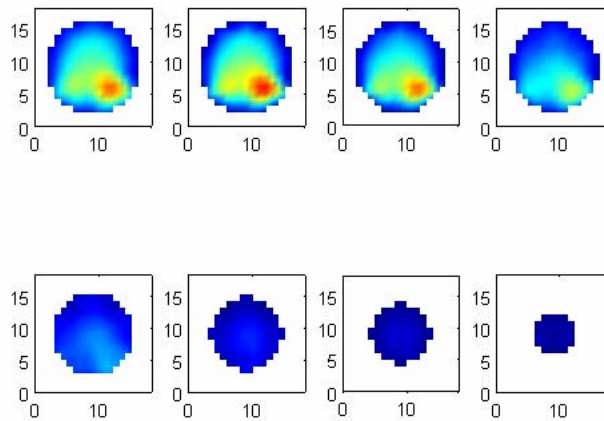
$1_M$  :είναι το διάνυσμα διάστασης  $M$  που έχει σε όλες τις θέσεις στοιχείο την μονάδα

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να οδηγηθούμε σε διαφορετικά συμπεράσματα αναλόγως με το πως αντιλαμβανόμαστε την έννοια της εξομάλυνσης . Έτσι διαφορετική αντίληψη της εξομάλυνσης θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε κατασκευή διαφορετικών πινάκων  $B$  και κατ επέκταση σε διαφορετική εκτίμηση του βέλτιστου διανύσματος  $\hat{J}$  όπως αναφέρεται και στο [7]. Το πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε ποιος τρόπος για την κατασκευή του πίνακα  $B$  είναι ο καλύτερος και έτσι κατ επέκταση ποια λύση κατανομής ρευμάτων θα ήταν η ιδανική.

#### 7.2.4.1 Εξομοίωση

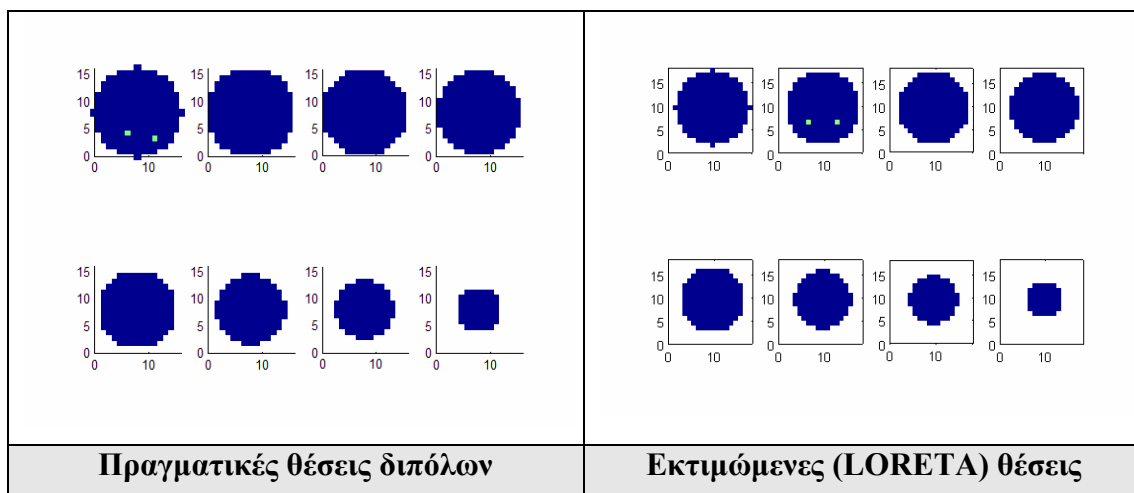
Σε αυτό το σημείο θα δοκιμάσουμε τον αλγόριθμο LORETA σε περιβάλλον εξομοίωσης και μάλιστα στο πρόβλημα που απέτυχε να επιλύσει ο αλγόριθμος ελάχιστης νόρμας με βάρη .Ας θεωρήσουμε πάλι δυο ημιτονοειδείς πηγές και ας τις

τοποθετήσουμε εντός του εγκεφάλου όπως στην παράγραφο 7.2.2.1. Αυτήν τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο LORETA. Αρχικά θα παραθέσουμε το διάγραμμα ψευδοχρωματισμού του μετρικού  $m$ .

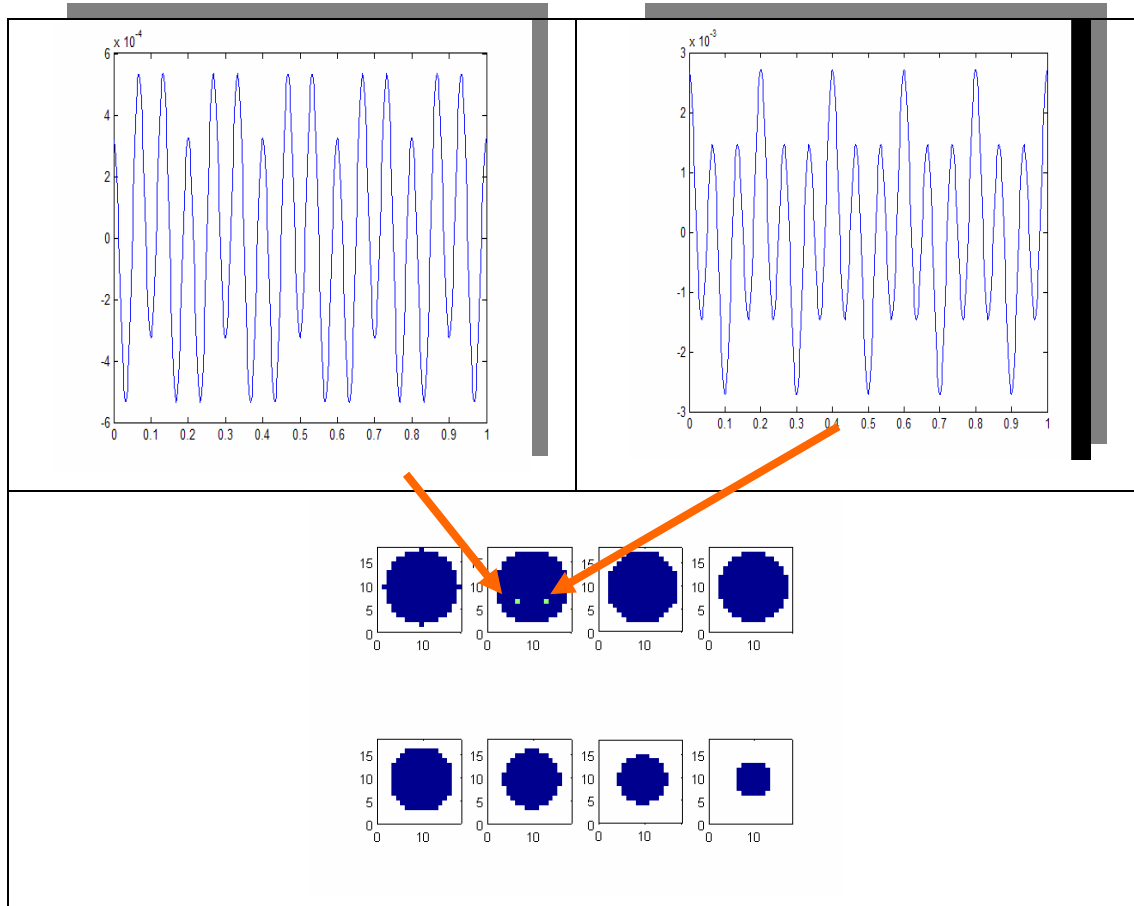


Εικόνα 42 Ψευδοχρωματισμός μετρικού  $m$

Ακολουθεί το διάγραμμα με τα τοπικά μέγιστα του μετρικού  $m$  μέσω του οποίου θα εκτιμήσουμε τον αριθμό των διπόλων.



Στα σημεία των τοπικών ακροτάτων συναντάμε τις εξής κυματομορφές:

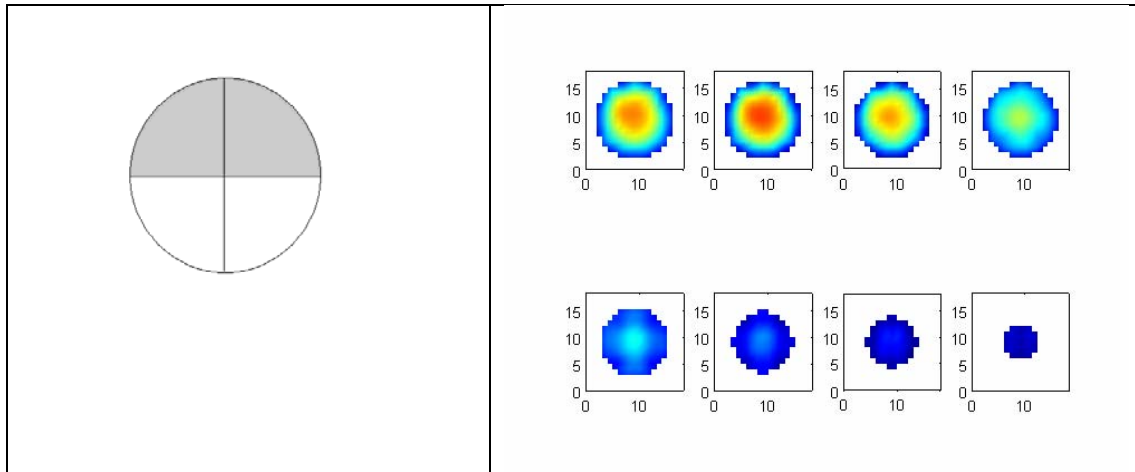


Εικόνα 43 Εκτίμηση μορφής σημάτων

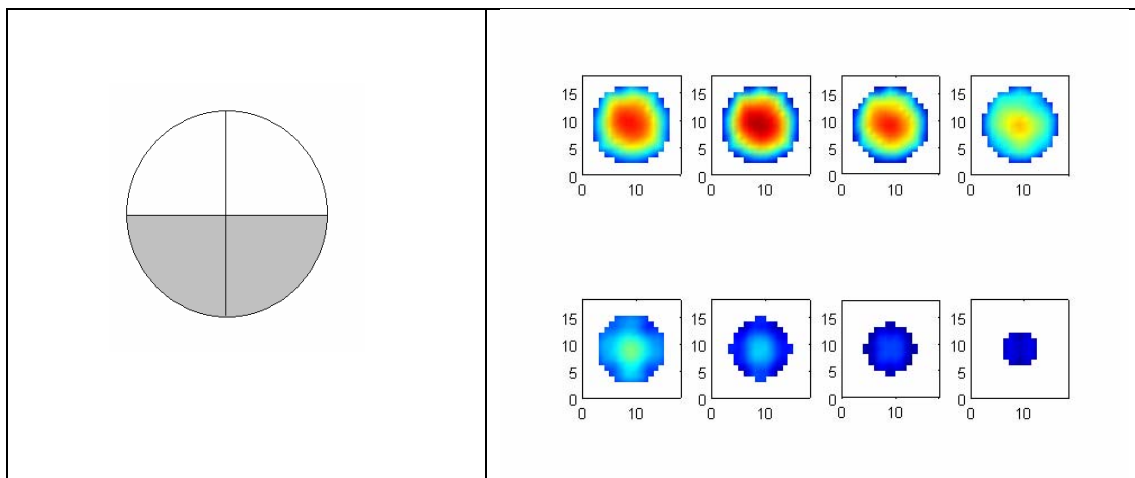
Βλέπουμε ότι έχει γίνει σωστή εκτίμηση του αριθμού των διπόλων . Παρόλα αυτά τα μέγιστα έχουν τοποθετηθεί σε θέσεις που απέχουν μερικά pixels από τις πραγματικές τους . Επίσης έχουμε κακή εκτίμηση της μορφής του σήματος .Αυτά τα σημεία έχουν διαπιστωθεί και σε άλλες ερευνητικές εργασίες [20] . Προφανώς τα αποτελέσματα είναι καλύτερα από τους προηγούμενους αλγόριθμους που παρουσιάσαμε εντούτοις δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ιδανικά .

#### 7.2.4.2 Εφαρμογή σε πραγματικά δεδομένα

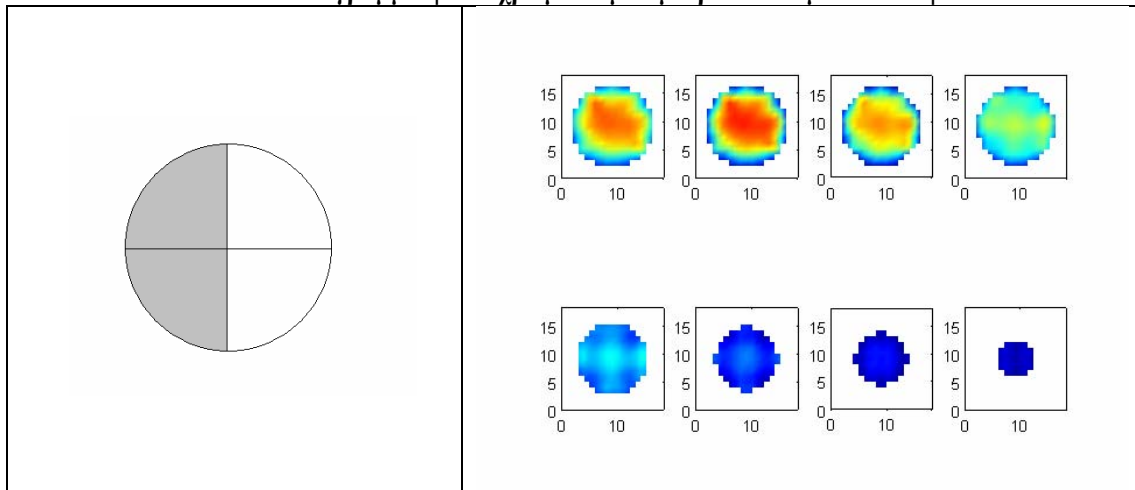
Μετά τα παραδείγματα της εξομίωσης δοκιμάσαμε τον αλγόριθμο LORETA στα πραγματικά δεδομένα προκειμένου να επιβεβαιώσουμε την υπόθεση της παραγράφου 7.2.1 . Αρχικά παραθέτουμε διαγράμματα ψευδοχρωματισμού ενός εγκεφαλογραφήματος προκειμένου να παρατηρήσουμε την κατανομή της ενέργειας στην λύση που παίρνουμε και την μορφή των τοπικών ακρότατων που θα εξάγουμε στην συνέχεια.



Εικόνα 44 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού  $m$  ενός εγκεφαλογραφήματος μπάντα θήτα



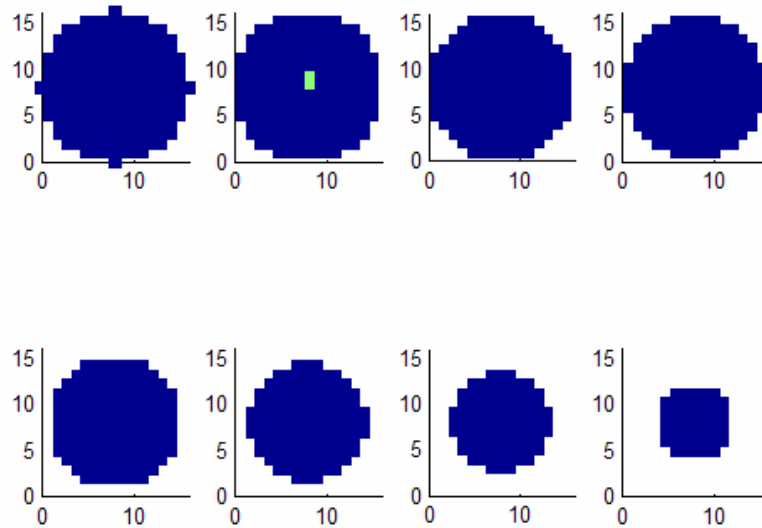
Εικόνα 45 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού  $m$  -μπάντα άλφα 2



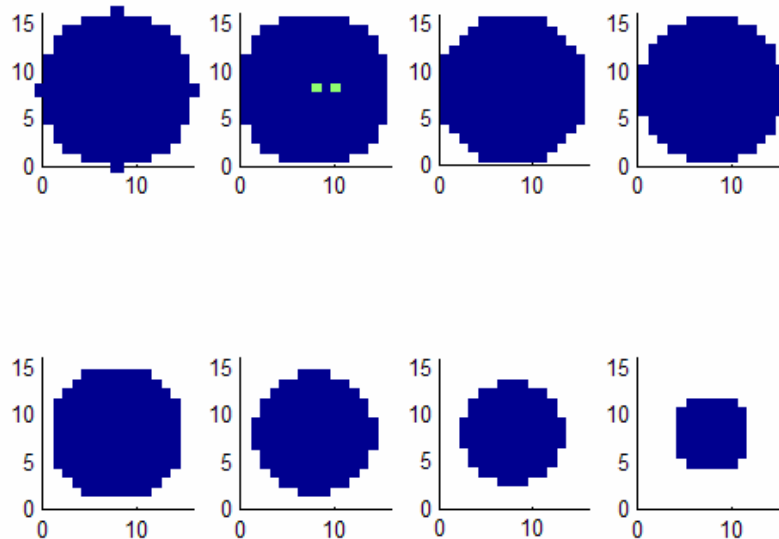
Εικόνα 46 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού μετρικού  $m$  - μπάντα γάμμα 1

Αυτό που μπορούμε να σημειώσουμε εδώ είναι ότι ο αλγόριθμός δεν δίνει ευκρινή μέγιστα μια και υπάρχει αρκετή ποσότητα ενέργειας που αντιστοιχίζεται και στις υπόλοιπες περιοχές του κεφαλιού.

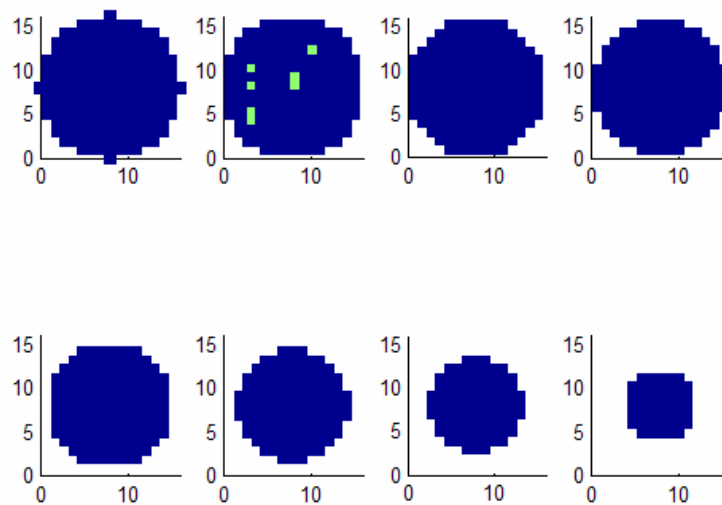
Στην συνέχεια δοκιμάσαμε τον αλγόριθμο σε όλα τα εγκεφαλογραφήματα και για κάθε ένα σημειώσαμε τα τοπικά ακρότατα. Τα αποτελέσματα για τις τρεις εξεταζόμενες μπάντες είναι τα ακόλουθα:



**Εικόνα 47 Αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα θήτα**



**Εικόνα 48 Αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα άλφα 2**



**Εικόνα 49 αποτελέσματα αλγορίθμου LORETA για μπάντα γάμμα 1**

Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε για τις δυο πρώτες μπάντες δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ικανοποιητικά μια και όλα τα σημεία των τοπικών μεγίστων τοποθετούνται στο κέντρο του εγκεφάλου (Χαρακτηριστικό είναι ότι για τις δυο πρώτες μπάντες τα ακρότατα και των 15 εγκεφαλογραφημάτων τοποθετούνται στο κέντρο του εγκεφάλου). Για την τρίτη μπάντα έχουμε καλά αποτελέσματα (υπό την έννοια ότι επιβεβαιώνουν την υπόθεση μας) σε επίπεδο τοπικών ακροτάτων αλλά τα μέγιστα αυτά δεν απέχουν πολύ από τα άλλα σημεία όπως μπορούμε να δούμε και στο διάγραμμα ψευδοχρωματισμού της Εικόνα 46.

### 7.3 Μέθοδοι για διαχωρισμό σήματος

Μέχρι αυτό το σημείο παρουσιάσαμε αλγόριθμους που έχοντας σαν δεδομένο το σήμα του εγκεφαλογραφήματος προσπαθούν να βρουν μια βέλτιστη λύση που αντιπροσωπεύει ένα διάνυσμα κατανομής ρευμάτων. Δηλαδή προσπαθούν να κάνουν ταυτόχρονο διαχωρισμό και τοποθέτηση των σημάτων.

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως μπορούμε να αποσυσχετίσουμε τα δεδομένα μας σε διάφορους βαθμούς προκειμένου να πετύχουμε μεγαλύτερη απόδοση στους αλγόριθμους για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος.

Οι κυριότερες μέθοδοι προεπεξεργασίας δεδομένων που χρησιμοποιείται είναι:



- Η ανάλυση σε πρωτεύουσες συνιστώσες (Principal Component Analysis )
- Η ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες (Independent Component Analysis)

### 7.3.1 Μετασχηματισμός PCA (Principal Component Analysis)

Ο μετασχηματισμός PCA (Principal component analysis) γνωστός μερικές φορές και σαν διακριτός μετασχηματισμός Karhunen-Loeve χρησιμοποιείται σαν μεθοδος στατιστικής προεπεξεργασίας για τον διαχωρισμό του χρήσιμου σήματος από τον θόρυβο. Η σημασία του στην προεπεξεργασία του έχει επισυμανθεί σε διάφορες ερευνητικές εργασίες [22][23][24][26]. Ο αλγόριθμος ξεκινάει με δεδομένο το σήμα του ηλεκτροεγκεφαλογράφηματος (EEG) και προσπαθεί να εντοπίσει συνιστώσες που θα είναι ορθογώνιες μεταξύ τους (δηλαδή θα έχουν μηδενική συσχέτιση). Η εξαγωγή τέτοιων συνιστωσών θα μας οδηγήσει στην μείωση της τάξης του προβλήματος μας και θα μας δώσει μια πρώτη εκτίμηση για τον αριθμό των διπόλων που αναζητούμε. Αρχικά θα εξετάσουμε την δομή του αλγορίθμου και στην συνέχεια θα δούμε στην πράξη πως λειτουργεί πάνω σε σήματα-πηγές που έχουμε υποθέσει.

#### 7.3.1.1 Περιγραφή του αλγορίθμου

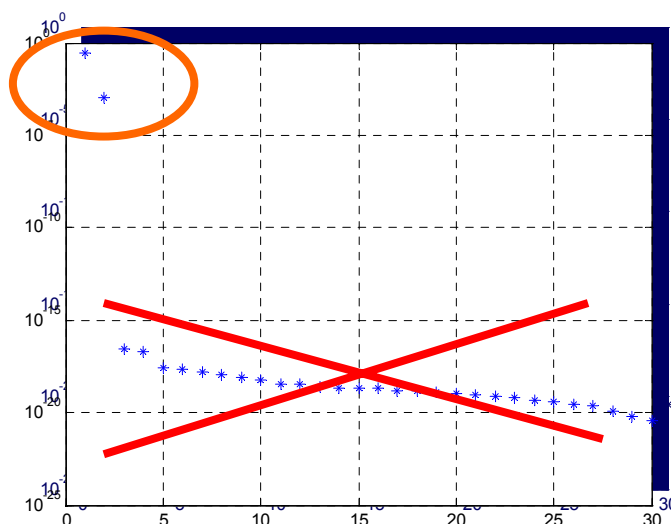
Αρχικά παίρνουμε τον πίνακα με τα δεδομένα  $F$  από τα  $N$  κανάλια σε  $k$  χρονικές στιγμές. Δηλαδή:

$$F(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_1(t_2) & \cdots & \phi_1(t_k) \\ \phi_2(t_1) & . & . & \phi_2(t_k) \\ \vdots & . & . & \vdots \\ \phi_N(t_1) & \phi_N(t_2) & \cdots & \phi_N(t_k) \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης  $R = E\{F \cdot F^T\}$  και τον αναλύουμε σε γινόμενο ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων (eigenvalue decomposition παραρτημα 9.1.4). Επειδή ο πίνακας μας είναι τετραγωνικός και θετικά ορισμένος συμπίπτει με το singular value decomposition παράρτημα 9.1.3). Συνεπώς έχουμε:

$$R = E\{F \cdot F^T\} = U \cdot \Lambda \cdot U^T = U_s \cdot \Lambda_s \cdot U_s^T + U_n \cdot \Lambda_n \cdot U_n^T \quad (7.27)$$

Ο πίνακας  $\Lambda$  είναι διαγώνιος και περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα  $R$ . Ο πίνακας  $U$  έχει σαν στήλες του τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Όπως βλέπουμε διαμερίζουμε τον πίνακα  $R$  σε δυο πίνακες-υποχώρους. Ο υποχώρος με δείκτη  $s$  που συνιστά τον υποχώρο του σήματος και ο υποχώρος με δείκτη  $n$  που συνιστά τον υποχώρο του θορύβου. Οι διαστάσεις τους είναι  $N \times N$ . Ο διαμελισμός αυτός γίνεται με βάση τις ιδιοτιμές. Έτσι σχηματίζουμε τον υποχώρο του σήματος από τις μεγαλύτερες ιδιοτιμές (και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα) ενώ οι υπόλοιπες ιδιοτιμές συνιστούν τον υποχώρο του θορύβου. (Στις υπόλοιπες θέσεις συμπληρώνουμε με μηδενικά για να έχουμε τις ίδιες διαστάσεις). Μια σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας αυτής φαίνεται στην Εικόνα 50



Εικόνα 50 Σχηματική αναπαράσταση διαχωρισμού ιδιοτιμών

Προκειμένου να αξιολογήσουμε τις ιδιοτιμές θεωρούμε το μετρικό  $m$  που ορίζεται ως το πηλίκο του αθροίσματος των ιδιοτιμών που θέλουμε να κρατήσουμε προς το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών. Δηλαδή:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \cdot 100\% \geq threshold \quad (7.28)$$

Οι ιδιοτιμές που υπολογίζουμε σχετίζονται άμεσα με την ισχύ του αρχικού σήματος. (Για λεπτομέρειες παράρτημα 9.1.6.2) Έτσι το ποσοστό του  $m$  που υπολογίζουμε είναι στην ουσία ποσοστό ισχύος. Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος του σήματος

περιλαμβάνει τις  $\mathbf{r}$  μεγαλύτερες ιδιοτιμές και οι υπόλοιπες  $N-r$  συνιστούν τον υποχώρο του θορύβου . Αφού ξεχωρίσουμε τους δυο υποχώρους παίρνουμε στην δεύτερη φάση του μετασχηματισμού όπου θα πρέπει να ανακασκευάσουμε το σήμα μας χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του υποχώρου σήματος . Για κάθε τέτοια ιδιοτιμή  $\lambda_i$  θα έχουμε:

$$s^i(t) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}} \underline{U}_i^T F = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}} \cdot [u_1^i \quad u_2^i \quad \dots \quad u_N^i] \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_1(t_2) & \dots & \phi_1(t_k) \\ \phi_2(t_1) & \cdot & & \phi_2(t_k) \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ \phi_N(t_1) & \phi_N(t_2) & \dots & \phi_N(t_k) \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Το διάνυσμα  $\underline{U}_i^T = [u_1^i \quad u_2^i \quad \dots \quad u_N^i]$  είναι το ιδιοδιάνυσμα από τον πίνακα  $U$  που αντιστοιχεί στην  $\lambda_i$  ιδιοτιμή . Για το  $i$  ισχύει  $1 \leq i \leq r$  . Έτσι από τα αρχικά δεδομένα θα πάρουμε τον πίνακα  $s(t)$  που θα έχει  $\mathbf{r}$  γραμμές και  $\mathbf{k}$  στήλες (για  $k$  χρονικές στιγμές). Αυτή η σχέση σε μορφή πινάκων παίρνει την εξής μορφή:

$$S_{PCA}(t) = \sqrt{\Lambda_s^{(-1)}} \cdot U^T \cdot F(t) \quad (7.30)$$

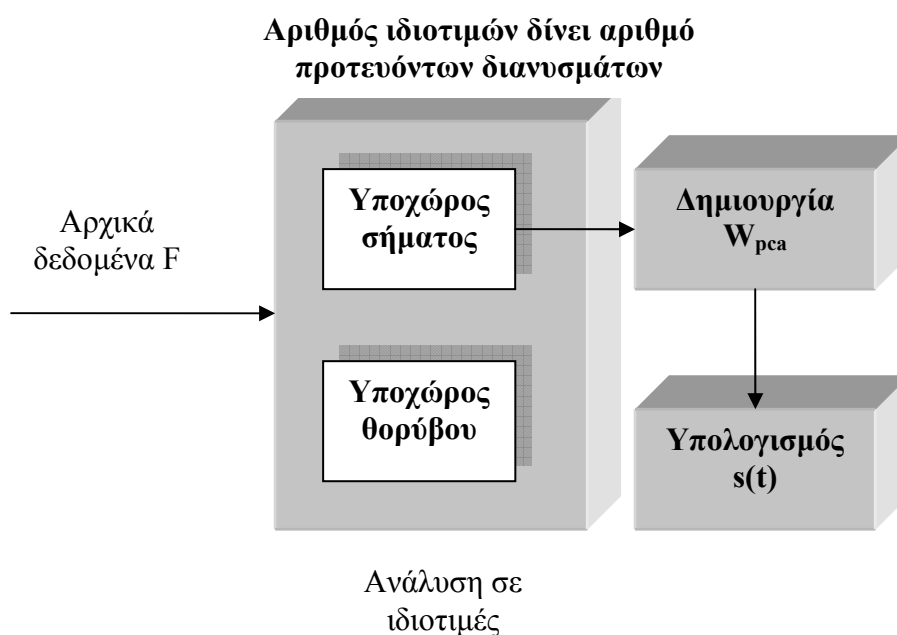
Θα ονομάσουμε

$$W_{PCA} = \sqrt{\Lambda_s^{(-1)}} \cdot U^T \quad (7.31)$$

Έτσι έχουμε:

$$S_{PCA}(t) = W_{PCA} F(t) \quad (7.32)$$

Έτσι με την μέθοδο της ανάλυσης σε ιδιοτιμές καταφέρνουμε να αντικαταστήσουμε τον αρχικό πίνακα  $F(t)$  διάστασης  $N$  στον πίνακα  $s(t)$  με διάσταση όσες και οι σημαντικές ιδιοτιμές . Επιπλέον οι γραμμές του πίνακα  $s(t)$  παρουσιάζουν μηδενική συσχέτιση , δηλαδή είναι ορθογώνειες.



Εικόνα 51 διάγραμμα αλγορίθμου PCA

Στην παραπάνω εικόνα μπορούμε να δούμε μια διαγραμματική αναπαράσταση του αλγορίθμου PCA.

### 7.3.1.2 Σχέση PCA με συχνότητα- αριθμό πηγών

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε την σχέση του αριθμού των ιδιοτιμών με τον αριθμό των πηγών που καλούμαστε να προσδιορίσουμε. Θα χρησιμοποιήσουμε πηγές που έχουν ίδιες αλλά και διαφορετικές συχνότητες προκειμένου να αντιληφθούμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο διαχωρισμός των σημάτων.

#### 7.3.1.2.1 Διαδικασία εξομοίωσης

Για να δούμε την φυσική ερμηνεία αυτής της παρατήρησης κάνουμε την εξής διαδικασία:

Ορίζουμε ένα διάνυσμα  $J(t_k)$  μια αρχική κατανομή ρεύματος σε  $k$  χρονικές στιγμές. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι όλες οι γραμμές του πίνακα  $J(t_k)$  είναι μηδενικές εκτός από  $p$  γραμμές που φέρουν τα σήματα πηγών. Δηλαδή η δομή τού πίνακα  $J(t_k)$  έχει ως εξής:

$$J(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ J_1(t) \\ \vdots \\ J_p(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_1(t_1) & J_1(t_2) & \cdots & J_1(t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_p(t_1) & J_p(t_2) & \cdots & J_p(t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

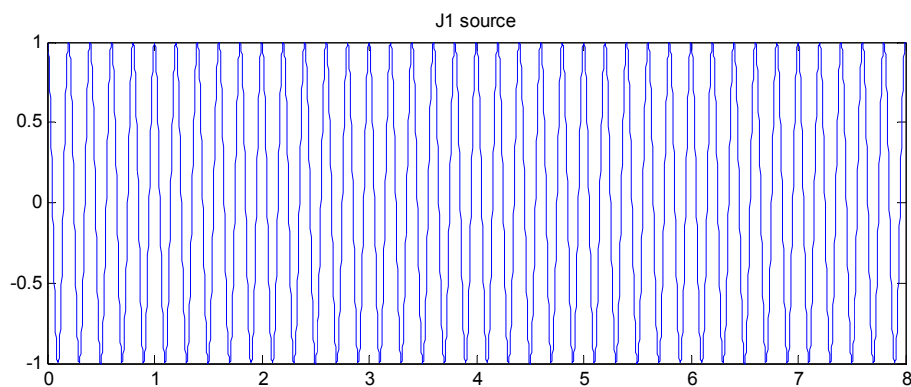
Στην συνέχεια υπολογίζουμε το διάνυσμα  $F$  των μετρήσεων μέσω της εξίσωσης του προβλήματος

$$F(t) = KJ(t) \quad (7.34)$$

Όπου  $K$  ο πίνακας μεταφοράς πεδίου (lead field matrix) που αντιπροσωπεύει το μοντέλο του εγκεφάλου που έχουμε υποθέσει. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό PCA και εξετάζουμε τα αποτελέσματα.

### 7.3.1.2.2 Μια πηγή ημιτονοειδούς μορφής

Θεωρούμε ότι έχουμε μια πηγή έστω  $J_1$ . Η διάρκεια της είναι 8 δευτερόλεπτα και η μορφή της είναι ημιτονοειδής. Συγκεκριμένα έχει ως εξής

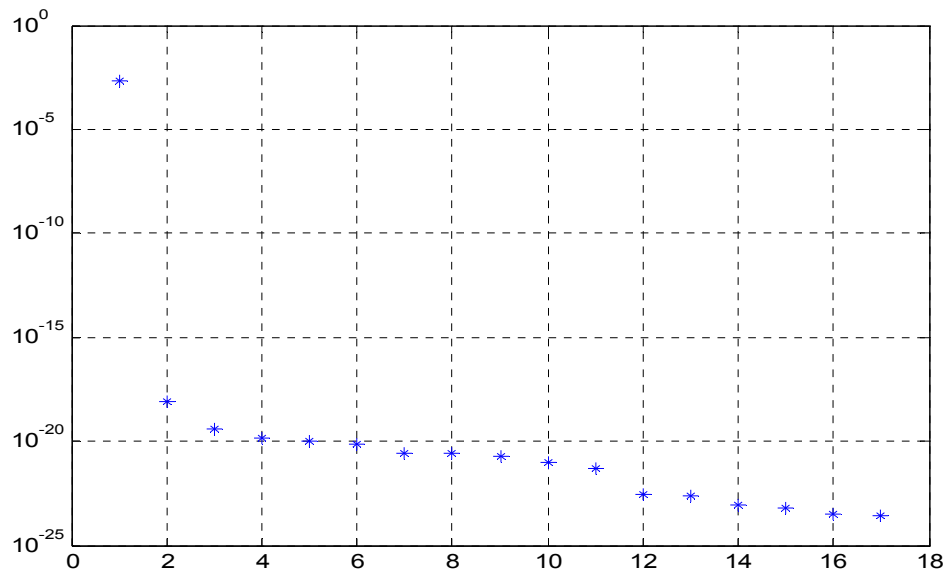


Εικόνα 52 Μια ημιτονοειδής κυματομορφή

Η  $J_1$  δίνεται από την εξίσωση:

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5\text{Hz} \quad (7.35)$$

Η χρονική συνιστώσα  $t$  παίρνει τιμές στο διάστημα 1-8sec με περίοδο δειγματοληψίας 1/512 sec. Αν εφαρμόσουμε την ανάλυση σε πρωτεύουσες συνιστώσες (Principal Component Analysis) θα έχουμε το παρακάτω διάγραμμα ιδιοτιμών:



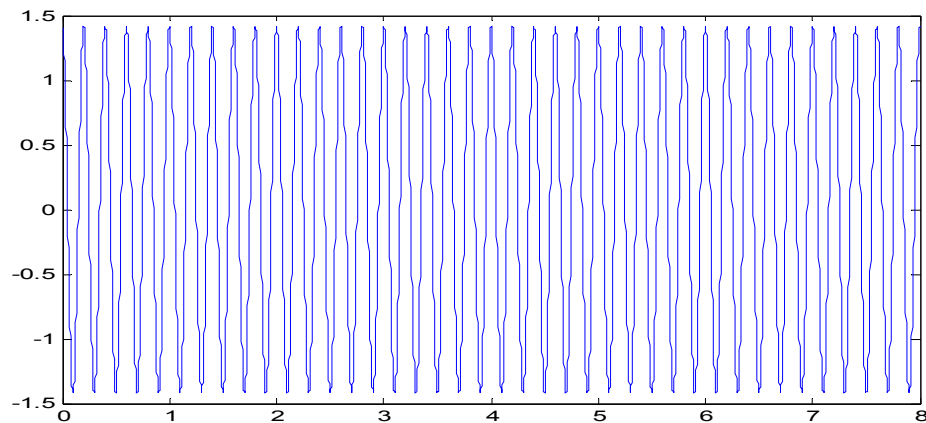
Εικόνα 53 Διάγραμμα ιδιοτιμών για μια κυματομορφή

Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός PCA μας επιστρέφει 1 σημαντική ιδιοτιμή (οι υπόλοιπες είναι κάτω από  $10^{-15}$ )<sup>2</sup>. Η εκτίμηση ότι μια ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε μια πηγή είναι σωστή σε αυτό το παράδειγμα. Στην συνέχεια προβάλουμε την ιδιοτιμή στα δεδομένα μας έτσι ώστε να ανακατασκευάσουμε το σήμα μας.

$$S(t) = s_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \cdot \underline{U}_1 F(t) \quad (7.36)$$

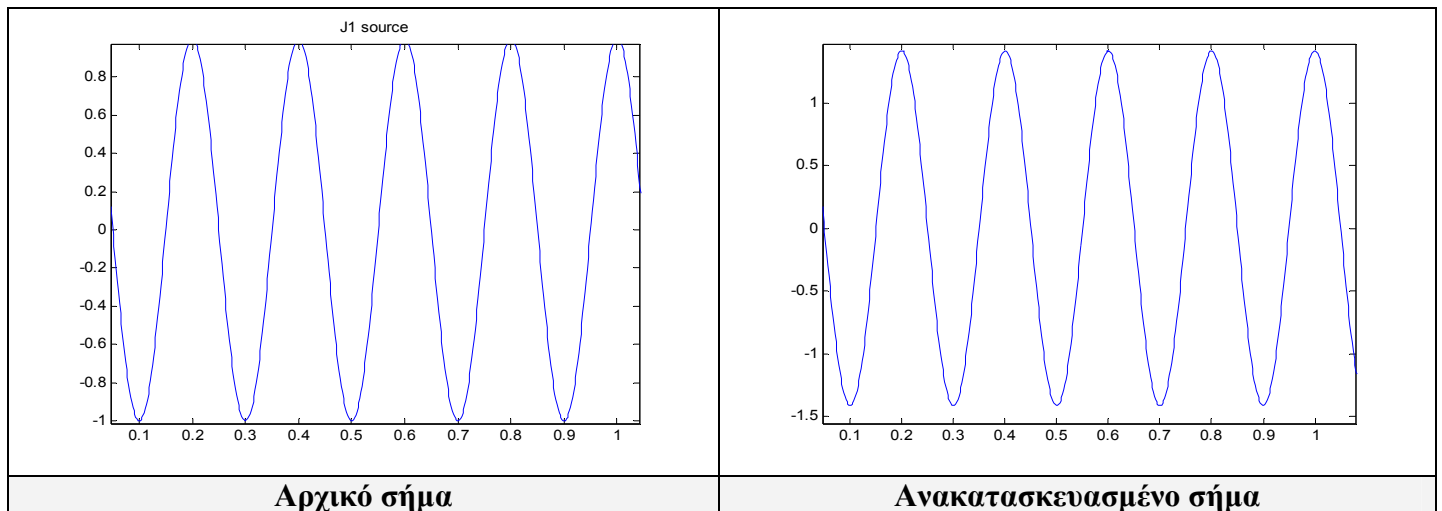
Το ανακατασκευασμένο σήμα έχει ως εξής:

<sup>2</sup> Παρότι θα περιμέναμε να δούμε 30 ιδιοτιμές στο διαγραμμα βλέπουμε μόνο 17. Αυτό οφείλεται αποκλειστικά στην αριθμητική ακρίβεια του MATLAB. Επειδή οι συγκεκριμένες ιδιοτιμές είναι πολύ κοντά στο 0 λόγω αριθμητικού σφάλματος υπολογίζονται σαν αρνητικές με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε στην λογαριθμική κλίμακα



Εικόνα 54 ανακατασκευασμένη κυματομορφή

Για να δούμε καλύτερα το ανακατασκευασμένο και το αρχικό σήμα τα μεγεθύνουμε και έχουμε:

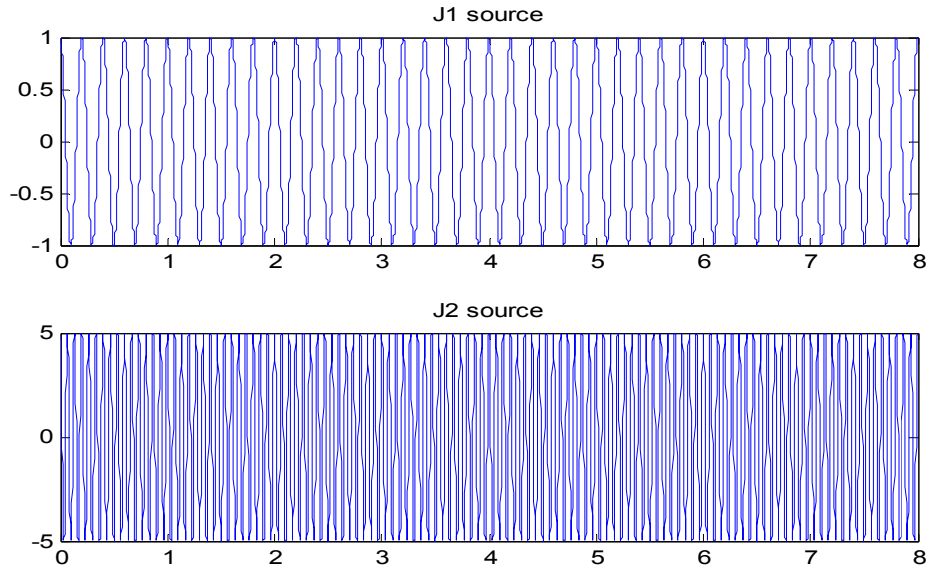


Εικόνα 55 Σύγκριση με το αρχικό σήμα

Είναι προφανές ότι η ποιότητα ανακατασκευής του σήματος είναι πολύ υψηλή. Το σήμα εκτιμήθηκε σωστά με διαφορά μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Το τελευταίο είναι αναμενόμενο μια και δεν μπορούμε να καθορίσουμε επακριβώς την ενέργεια του ανακατασκευασμένου σήματος.

### 7.3.1.2.3 Δυο ημιτονοειδείς πηγές ασύγχρονες

Έστω τώρα ότι έχουμε δυο πηγές  $J_1$  και  $J_2$  που η κάθε μια έχει διαφορετική συχνότητα από την άλλη. Οι τιμές που παίρνουν φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



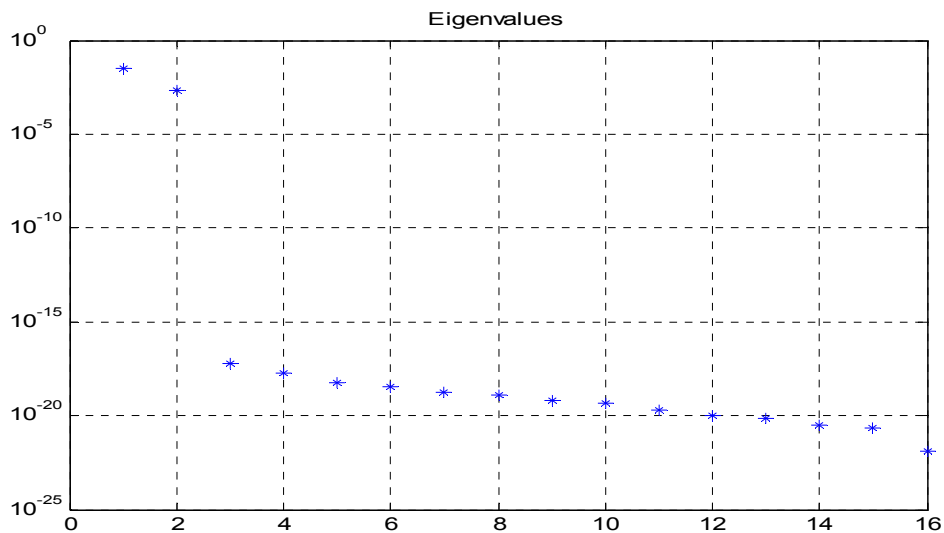
Εικόνα 56 Δυο ημιτονοειδείς πηγές διαφορετικών συχνοτήτων

Συγκεκριμένα οι δυο πηγές παράγονται από τι παρακάτω εξισώσεις:

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5\text{Hz} \quad (7.37)$$

$$J_2 = \cos(2\pi f_2 t) \quad f_2 = 15\text{Hz} \quad (7.38)$$

Ισχύει και εδώ  $0\text{sec} < t < 8\text{sec}$  με περίοδο δειγματοληψίας  $1/512\text{ sec}$



Εικόνα 57 Διάγραμμα ιδιοτιμών

Βλέπουμε ότι οι σημαντικές ιδιοτιμές σε αυτήν την περίπτωση είναι οι δυο πρώτες (οι υπόλοιπες είναι κάτω από  $10^{-10}$ ). Η εκτίμηση ότι έχουμε δυο πηγές επειδή έχουμε 2 σημαντικές ιδιοτιμές ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση. Ακολουθούμε την ίδια



ακριβώς διαδικασία όπως και προηγουμένως μόνο που αυτήν την φορά έχουμε δυο ιδιοτιμές;

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \cdot U_1^T F(t) \quad (7.39)$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} U_2^T F(t) \quad (7.40)$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις μπορούν να ομαδοποιηθούν με την βοήθεια πινάκων στην επόμενη:

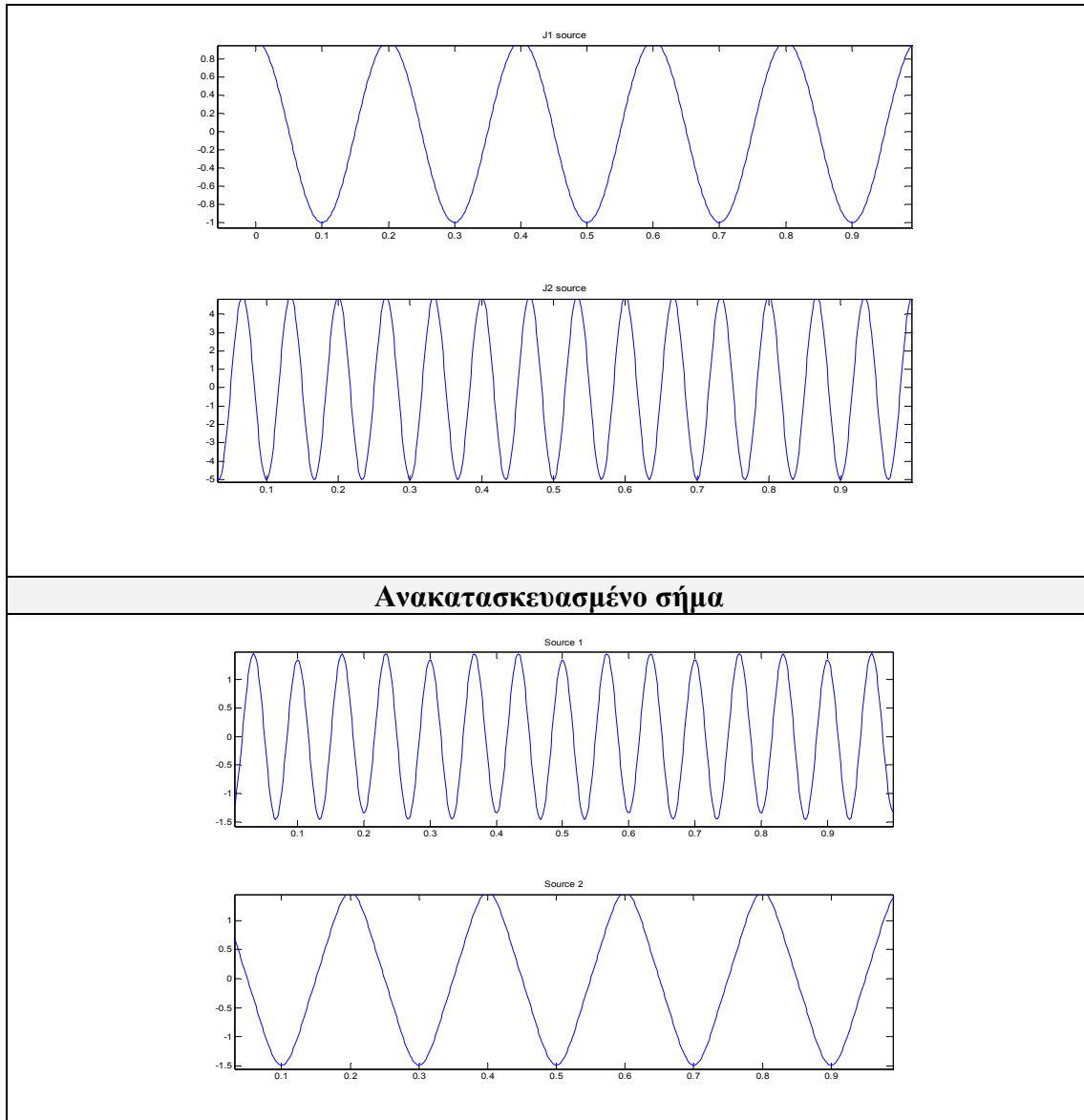
$$\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^N \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_1(t_2) & \dots & \phi_1(t_k) \\ \phi_2(t_1) & \cdot & & \phi_2(t_k) \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ \phi_N(t_1) & \phi_N(t_2) & \dots & \phi_N(t_k) \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

Ακόμα ποιο ομαδοποιημένα έχουμε:

$$S(t) = \sqrt{\Lambda_s^{(-1)}} U_s^T F(t) \quad (7.41)$$

Τώρα θα πρέπει να συγκρίνουμε τα σήματα που ανακατασκευάσαμε με τα αρχικά σήματα των διπόλων που υποθέσαμε. Αντιπαράθεση τους φαίνεται στην επόμενη εικόνα.

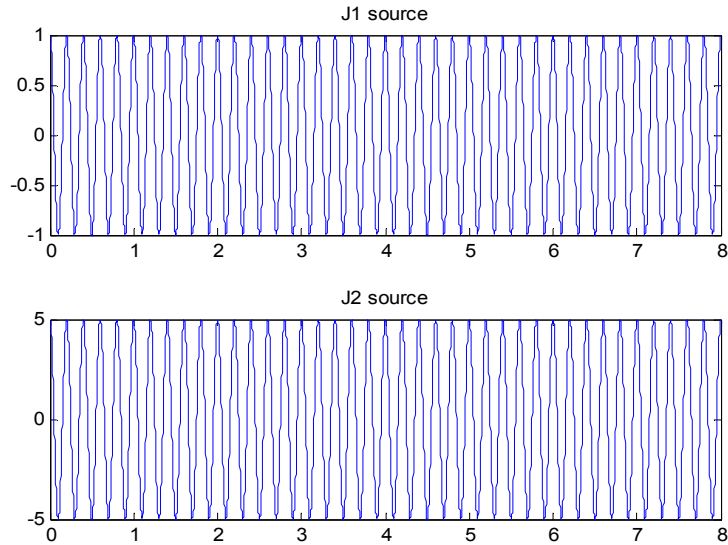
<b>Αρχικό σήμα</b>
--------------------



Εικόνα 58 Σύγκριση με τα αρχικά σήματα

#### 7.3.1.2.4 Δυο ημιτονοειδείς πηγές - σύγχρονες

Στο τρίτο παράδειγμα έχουμε ξανά δυο πηγές που αυτή τη φορά έχουν την ίδια συχνότητα. Δηλαδή:



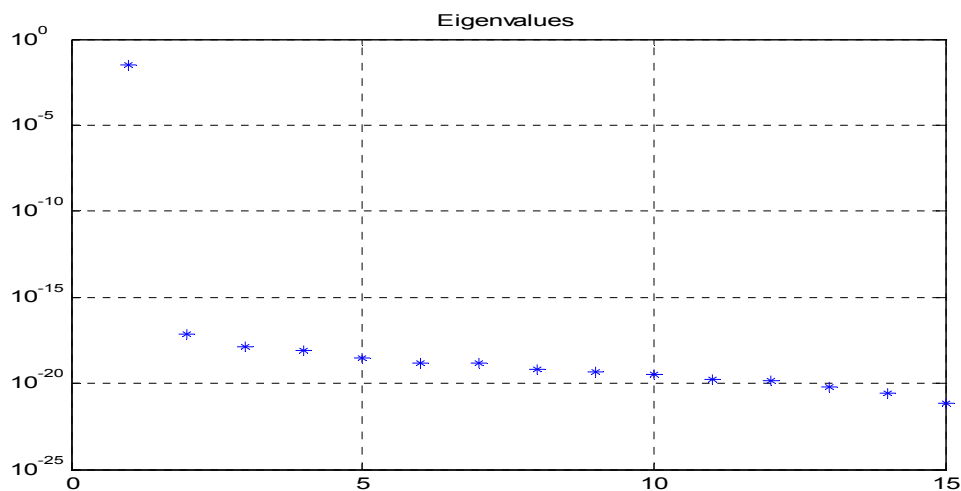
Εικόνα 59 Δυο ημιτινοειδείς πηγές ίδιων συχνοτήτων

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = f_2 = 5 \text{ Hz} \quad (7.42)$$

$$J_2 = 5 \cos(2\pi f_2 t) \quad f_1 = f_2 = 5 \text{ Hz} \quad (7.43)$$

$$0 \text{ sec} < t < 8 \text{ sec} \quad T = 1/512 \text{ sec} \quad (7.44)$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι δυο σύγχρονες πηγές αντιστοιχίζονται στην ίδια ιδιοτιμή όπως μπορούμε να δούμε και στο παρακάτω διάγραμμα:

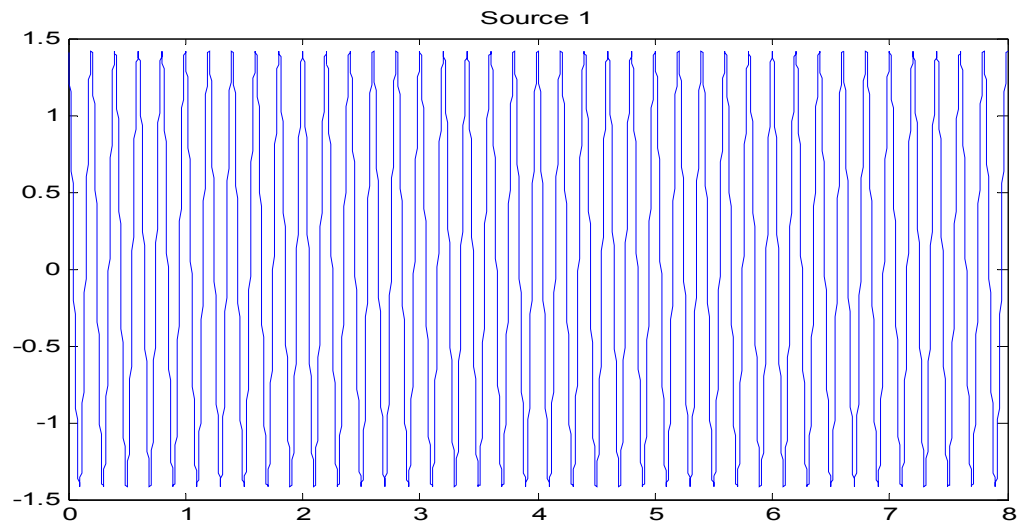


Εικόνα 60 Διάγραμμα ιδιοτιμών

Εδώ η περίπτωση έχει αρκετό ενδιαφέρον μια και οι σημαντικές ιδιοτιμές δεν αντιστοιχούν στον αριθμό των πηγών που έχουμε αρχικά υποθέσει. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μετασχηματισμός PCA δεν μπορεί να ξεχωρίσει δυο πηγές που έχουν στατιστική εξάρτηση μεγαλύτερου βαθμού. Έτσι εφόσον έχουν την ίδια φάση τις αντιστοιχίζει στην ίδια ιδιοτιμή.

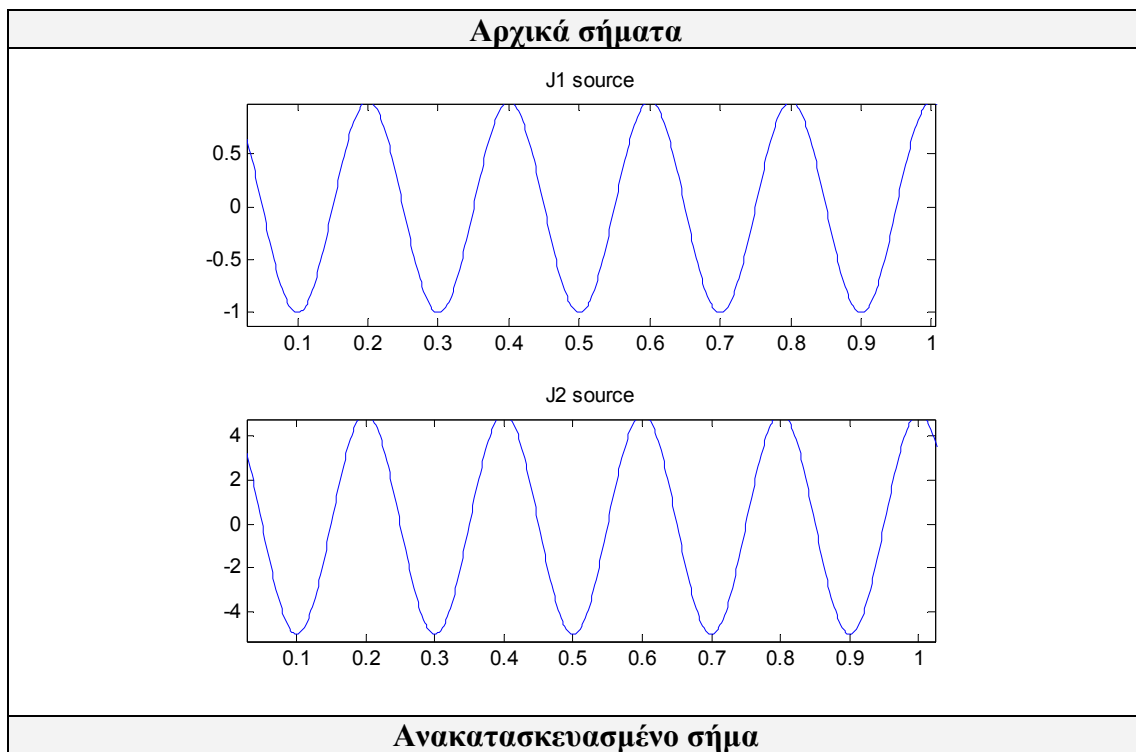
Τ παραπάνω συμβαίνει γιατί τα δυο αυτά σήματα είναι γραμμικά εξαρτημένα . Συγκεκριμένα ισχύει  $J_2 = 5J_1$ .Γι αυτό αντιστοιχίζονται σε μια και μοναδική συνιστώσα.

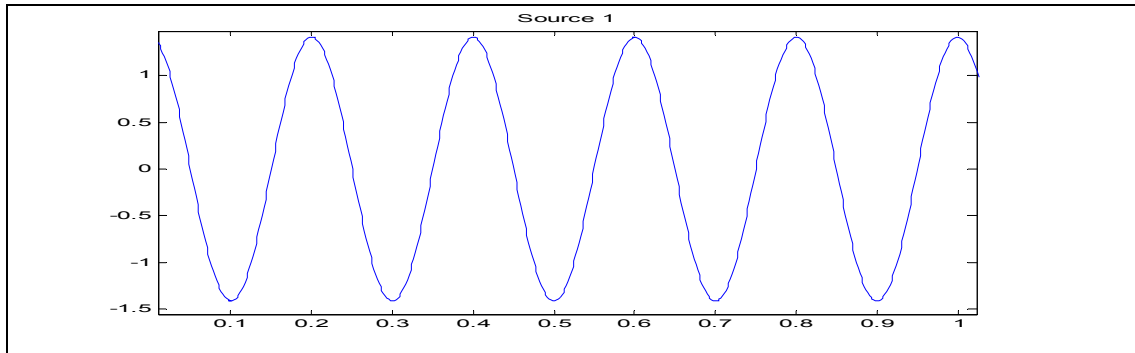
Αν προβάλουμε την ισχυρή αυτή ιδιοτιμή πίσω στον χώρο του σήματος θα χουμε:



Εικόνα 61 Ανακατασκευασμένο σήμα

Σε συγκριση με τα αρχικά σήματα θα χούμε:



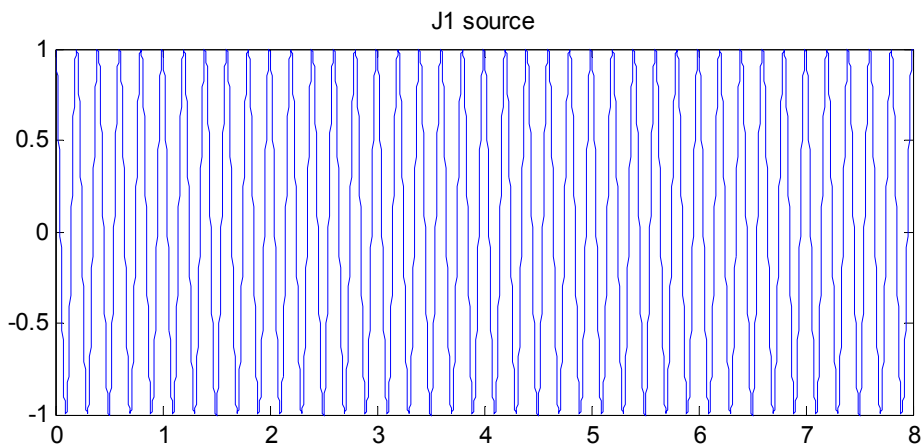


Εικόνα 62 Σύγκριση με αρχικό σήμα

### 7.3.1.3 Σε περιβάλλον θορύβου

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε πως η ανάλυση σε πρωτεύουσες συνιστώσες μας βοηθάει να απαλλαγούμε από ένα μέρος του θορύβου. Έστω λοιπόν ότι έχουμε πάλι μια πηγή J1 που δίνεται από την εξής εξίσωση:

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5\text{Hz} \quad (7.45)$$



Εικόνα 63 Αρχικό σήμα

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα των μετρήσεων F Δηλαδή:

$$F_{\text{signal}}(t) = K \cdot J(t) \quad (7.46)$$

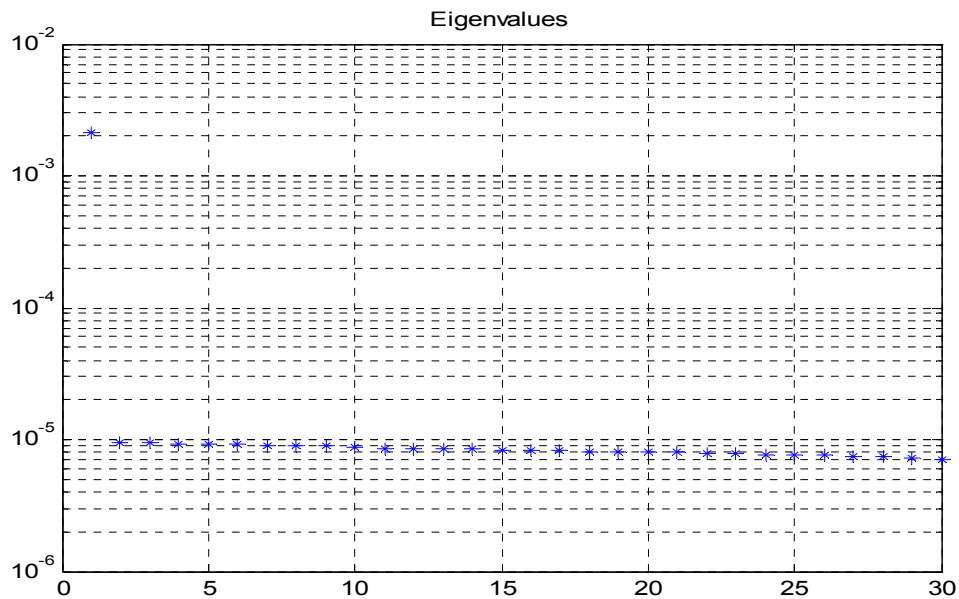
Και προσθέτουμε στον πίνακα F τυχαίο θόρυβο δηλαδή:

$$F_{\text{corrupted}}(t) = F_{\text{signal}}(t) + a \cdot n(t) \quad (7.47)$$

Ο πίνακας  $n(t_k)$  περιέχει τιμές ομοιόμορφα κατανομημένες στον διάστημα

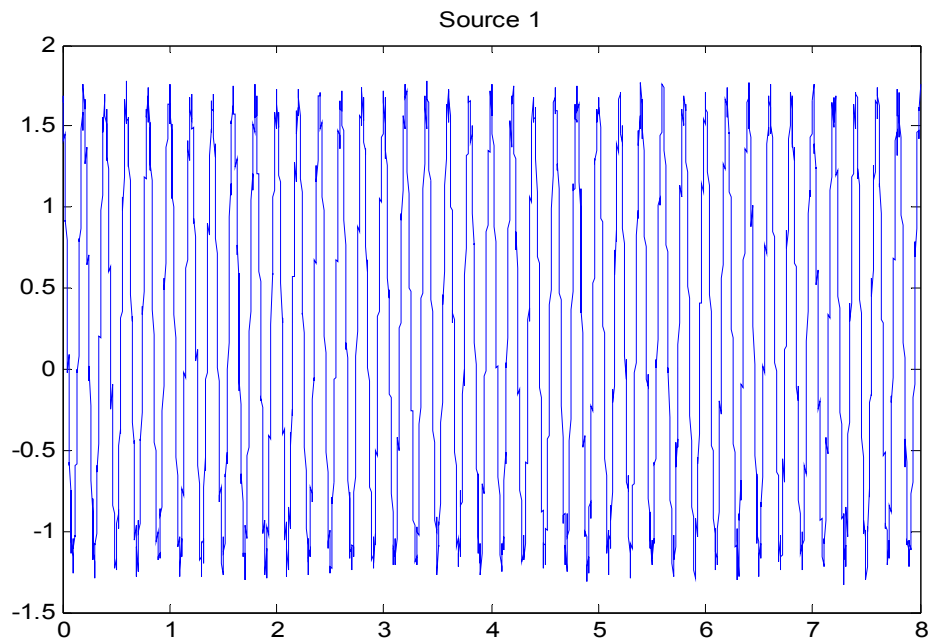
$$[F_{\min}, F_{\max}] \quad (7.48)$$

(Όπου  $F_{\min}$   $F_{\max}$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του πίνακα  $F_{\text{signal}}$  και  $a$  είναι βαθμωτός συντελεστής που καθορίζεται από εμάς). Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό PCA στον πίνακα  $F_{\text{corrupted}}$  και έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα ιδιοτιμών (διαλέγουμε  $\alpha=0.01$  δηλαδή 1% θόρυβο)



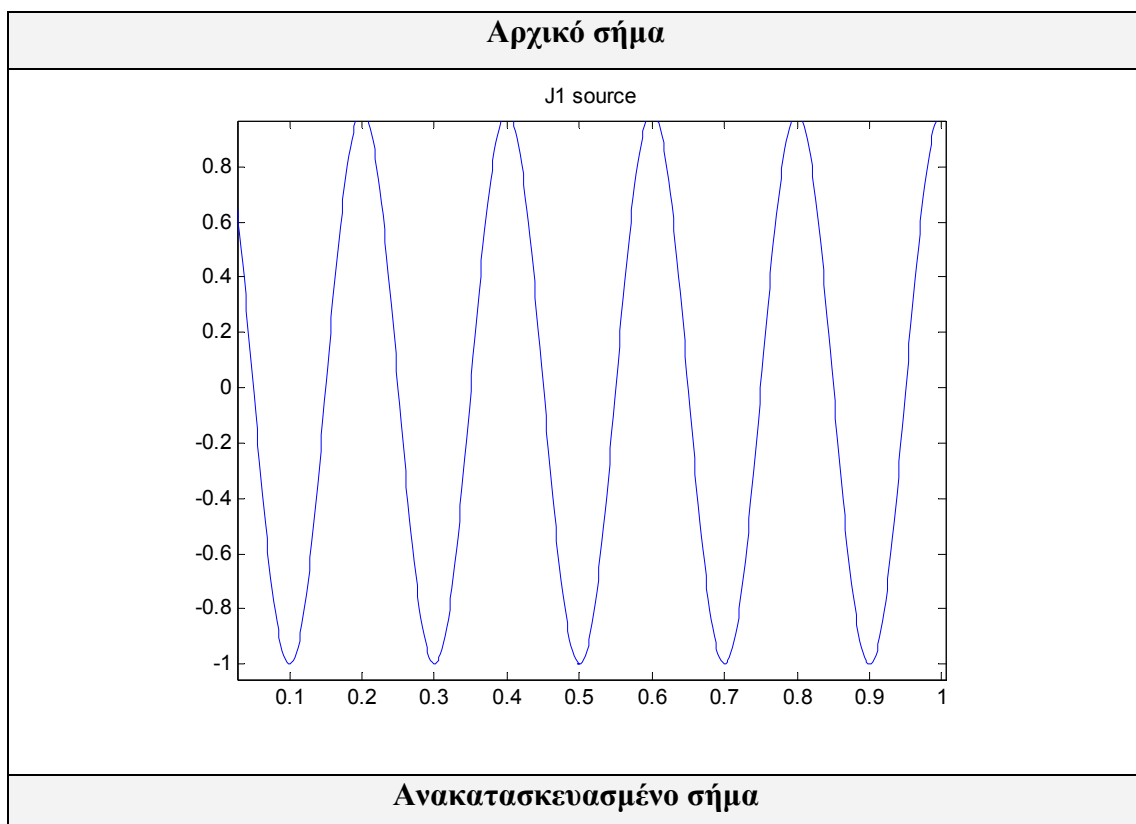
Εικόνα 64 Διάγραμμα ιδιοτιμών

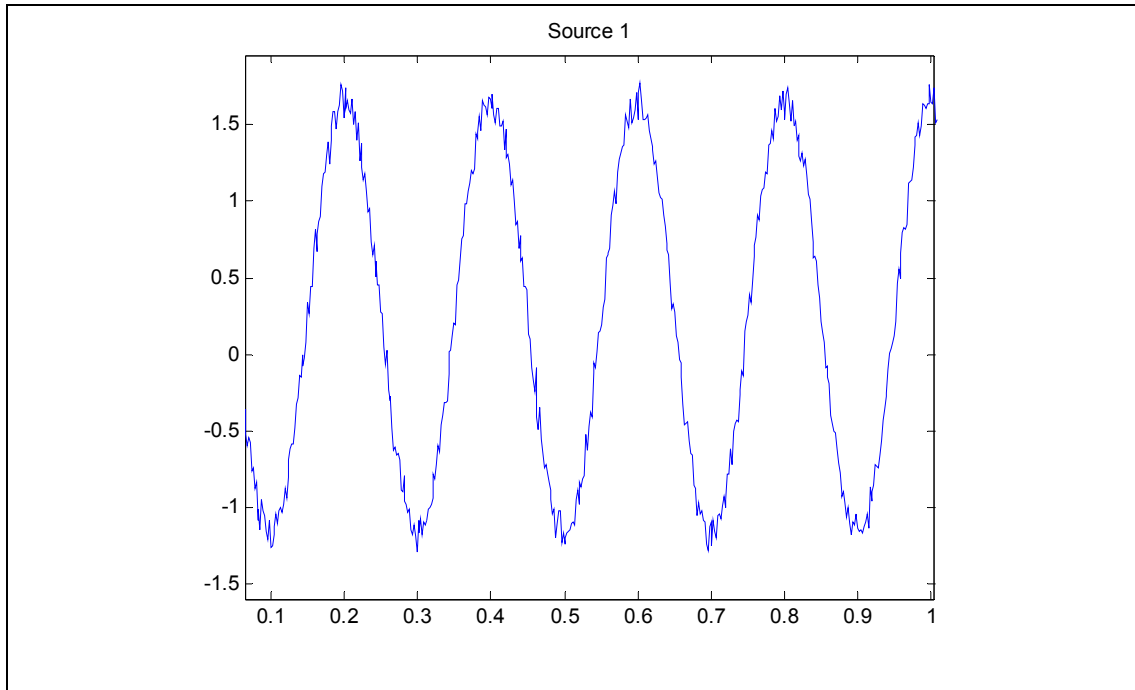
Αυτό που παρατηρούμε με μια πρώτη ματιά είναι η μετακίνηση των ιδιοτιμών του θορύβου (δεύτερη έως τριακοστή ) από το επίπεδο  $10^{-20}$  στο επίπεδο  $10^{-5}$ . Αν ανακατασκευάσουμε το σήμα μας θα έχουμε:



Εικόνα 65 Ανακατασκευασμένο σήμα

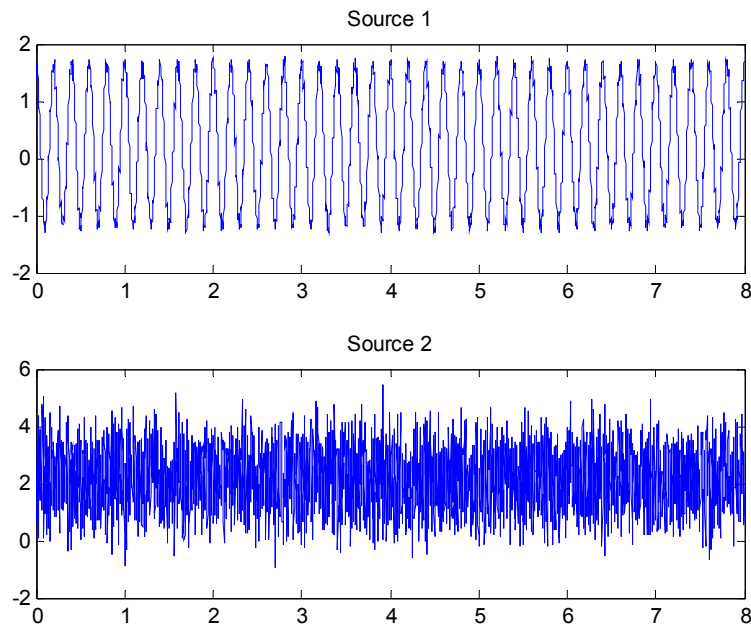
Σε σύγκριση με το αρχικό σήμα:





Εικόνα 66 Σύγκριση με το αρχικό σήμα

Βλέπουμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα έχει θόρυβο. Ο θόρυβος που καταφέραμε να φιλτράρουμε έχει να κάνει με τις ιδιοτιμές που απορρίψαμε. Αν πχ κρατούσαμε και άλλη μια ιδιοτιμές και ανακατασκευάζαμε το σήμα μας θα είχαμε:

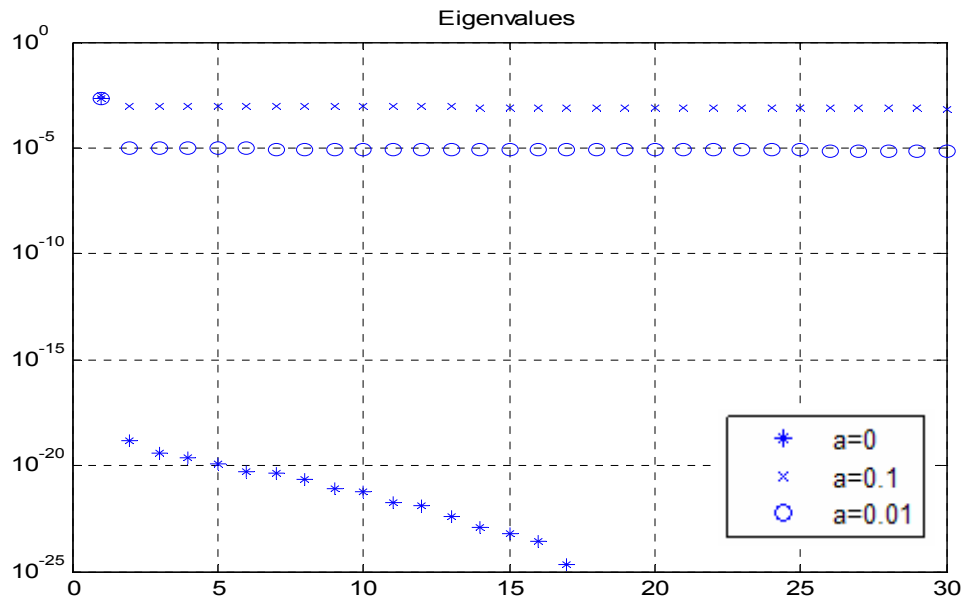


Εικόνα 67 Μια κυματομορφή που αντιστοιχεί σε θόρυβο

Βλέπουμε ότι το ανακατασκευασμένο σήμα που έχει να κάνει με την δευτερη ιδιοτιμή απαρτίζεται αποκλειστικά από θόρυβο ο οποίος θα μας έδινε ψευδή σημεία ενεργοποίησης στον εγκέφαλο (Αν προχωρούσαμε σε τοποθέτηση του σήματος). Για



διαφορετικές τιμές του  $\alpha$  (0, 0.1, 0.01 δηλαδή 0, 10% και 1 % θόρυβος) μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλονται οι ιδιοτιμές στον παρακάτω πίνακα:



Εικόνα 68 απόκριση ιδιοτιμών σε διάφορα επίπεδα θορύβου

### 7.3.2 Αλγόριθμοι υποχώρου σήματος

Πρώτου προχωρήσουμε στην παρουσίαση της ανάλυσης σε ανεξάρτητες συνιστώσες (ICA) θα παρουσιάσουμε (περισσότερο για λόγους ιστορικής συνέχειας) κάποιους αλγορίθμους που ενσωματώνουν τον μετασχηματισμό PCA προκειμένου να επιλύσουν το αντίστροφο πρόβλημα. Αυτοί οι αλγόριθμοι είναι γνωστοί περισσότερο σαν μέθοδοι υποχώρου σήματος (signal subspace methods).

Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των αλγορίθμων είναι ότι αρχικά διαμερίζουν τον χώρο του εγκεφαλογραφήματος-σηματος σε υποχώρους σήματος και θορύβου. στην συνέχεια κάθε ένας εισάγει ένα μετρικό προκειμένου να αξιολογήσει τα σημεία του μοντέλου του εγκεφάλου σαν πιθανά σημεία ύπαρξης διπόλων.

#### 7.3.2.1 Ο αλγόριθμος MUSIC

Ο αλγόριθμος MUSIC (**M**Ultiple **S**ignal **C**lassification) αποτελεί μια ενδιαφέρουσα διαφορετική προσέγγιση προς το πρόβλημα του αντίστροφου καθορισμού πηγής. Στην θεωρία της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος προτάθηκε για πρώτη φορά από

τον Schmidt [19] σαν ένα αλγόριθμος για τον διαχωρισμό των λαμβανομένων σημάτων σε κεραίες . Στην επεξεργασία βιοιατρικού σήματος ,τόσο στα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα (EEG) όσο και στα μαγνητοεγκεφαλογραφήματα (MEG), προτάθηκε από τους Mosher και Leahy στο [29].

Τα βήματα του αλγορίθμου έχουν ως εξής:

**1.**Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό PCA διαχωρίζοντας τον υποχώρο σήματος και θορύβου:

$$FF^T = \Phi \Sigma \Phi^T = \Phi_s \Sigma_s \Phi_s^T + \Phi_e \Sigma_e \Phi_e^T \quad (7.49)$$

**2.**Δημιουργούμε τον πίνακα K (πίνακας μεταφοράς πεδίου) όπως περιγράφεται στο αντίστοιχο κεφάλαιο για την μοντελοποίηση του εγκεφάλου.

**3.**Υπολογίζουμε την συνάρτηση  $subcorr\{K, \Phi_s\} = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_r\}$  σε κάθε σημείο του μοντέλου που έχουμε υποθέσει (Για τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης  $subcorr\{A, B\}$  δες παράρτημα ) . Το μετρικό που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι το  $c_1$  (Το μέγιστο subspace correlation) .Συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία με τις r μεγαλύτερες τιμές .Τα σημεία αυτά είναι οι τοποθεσίες των δίπολων.

Κατά την απεικόνιση αντί για το  $c_1$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το  $\frac{1}{\sqrt{1-c_1}}$  .Σε

αυτήν την περίπτωση όταν οι τιμές θα προσεγγίζουν το άπειρο τότε θα έχουμε ανιχνεύσει το δίπολο ενώ όταν θα προσεγγίζουν την μονάδα τότε δεν θα έχουμε καθόλου δραστηριότητα.

Βελτιωμένες εκδοχές του MUSIC είναι οι αλγόριθμοι R-MUSIC [27] ,IES-MUSIC,RAP-MUSIC [28] και FINES [58].Στην συνέχεια θα περιγράψουμε τον μετασχηματισμό της ανάλυσης σε ανεξαρτητες συνιστώσες και θα δούμε πως μπορούμε να τον συνδυάσουμε με τον μετασχηματισμό της ανάλυσης σε πρωτευουσες συνιστώσες προκειμένου να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα.

### 7.3.3 Μετασχηματισμός ICA (Independent Component Analysis)

Όπως είδαμε ο μετασχηματισμός PCA έχει σαν είσοδο στον πίνακα με τα δεδομένα και σαν έξοδο έναν πίνακα του οποίου κάθε σειρά είναι ορθογώνια με τις υπόλοιπες. Ο μετασχηματισμός ICA παίρνει σαν είσοδο πάλι το σήμα και μας επιστρέφει σαν έξοδο έναν πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (παράρτημα).

#### 7.3.3.1 Περιγραφή του προβλήματος

Το πρόβλημα της ανάλυσης των δεδομένων σε ανεξάρτητες συνιστώσες έχει ως εξής: Έστω ο πίνακας των μετρήσεων για  $k$  χρονικές στιγμές. Εκφράζουμε τον πίνακα των δεδομένων σαν γινόμενο ενός πίνακα που φέρει τις ανεξάρτητες συνιστώσες επί έναν πίνακα  $M$  που ονομάζουμε πίνακα ανάμιξης (Mixing Matrix). Δηλαδή:

$$F(t) = M \cdot S_I(t) \quad (7.50)$$

Ο δείκτης  $I$  (από independent) του  $S$  χρησιμοποιείται για να μην υπάρχει συγχυση με τον πίνακα  $S$  του μετασχηματισμού PCA. Στην συνέχεια αναζητούμε έναν πίνακα  $W$  τέτοιο ώστε:

$$W \cdot F(t) = W \cdot M \cdot S_I(t) = S_I(t) \Rightarrow S_I(t) = W \cdot F(t) \quad (7.51)$$

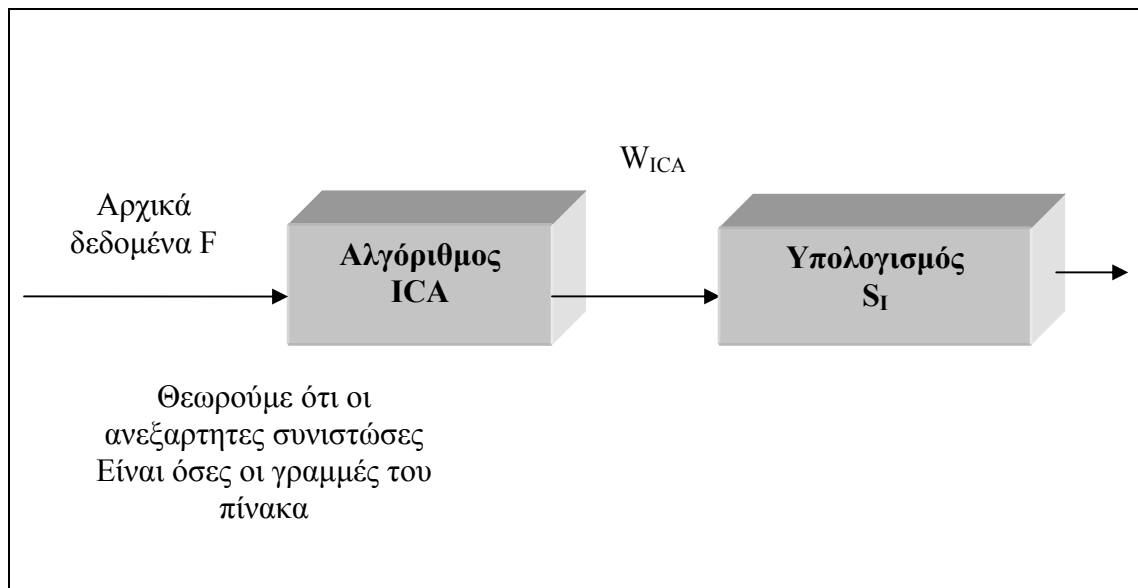
Δηλαδή:

$$W^{-1} = M \quad (7.52)$$

(Οι ανεξάρτητες συνιστώσες που θέλουμε να παράγουμε θεωρούμε ότι δεν υπερβαίνουν τον αριθμό των ηλεκτροδίων, με άλλα λόγια δεν μπορούμε να εντοπίσουμε παραπάνω πηγές από τον αριθμό των μετρήσεων)

Το πρόβλημα είναι ότι δεν γνωρίζουμε τον πίνακα  $M$  για να τον αντιστρέψουμε. Το μόνο στοιχείο που έχουμε είναι ο πίνακας  $F$  με τα δεδομένα μας. Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα που διαχωρίζει τα σήματα έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις. Από κάθε προσέγγιση προκύπτουν διαφορετικοί αλγόριθμοι.

Μια σχηματική αναπαράσταση που δείχνει τον τρόπο λειτουργίας του αλγόριθμου ICA φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 69 διάγραμμα αλγορίθμου ICA

Πρώτου προχωρήσουμε στην παρουσίαση των προσεγγίσεων και των αλγορίθμων θα πρέπει να σημειώσουμε δυο σημεία τα οποία θα πρέπει να έχουμε υπ όψη μας πριν κάνουμε ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες.

1. Δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστωσών εκ των προτέρων

Αυτό σημαίνει ότι ο οποιοσδήποτε αλγόριθμος ICA θα εκτιμήσει τόσες συνιστώσες όσες και οι γραμμές του πίνακα που δίνουμε σαν είσοδο. Η εκ των υστέρων απόρριψη κάποιων συνιστωσών δεν έχει νόημα μια και ο πίνακας  $W$  έχει υπολογιστεί ήδη.

2. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια των ανεξάρτητων συνιστωσών

Αυτό συμβαίνει επειδή έχουμε σαν αγνώστους τόσο το  $M$  όσο και το  $S$ . Κάθε πολλαπλασιασμός του πίνακα  $S$  θα μπορούσε να αντισταθμιστεί και να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα αν διαιρούσαμε την αντίστοιχη στήλη του πίνακα  $A$  με τον ίδιο αριθμό.

Για οποιονδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα  $P$ .

$$F = M \cdot S \Rightarrow F = MP^{-1} \cdot PS \quad (7.53)$$

Η ποσότητα  $PS$  περιλαμβάνει τις συνιστώσες που περιελάμβανε και ο  $S$  αλλά με διαφορετικές ενέργειες. Ευτυχώς η εκτίμηση της ενέργειας του σήματος δεν μας απασχολεί στις περισσότερες εφαρμογές.

### 7.3.3.2 Προσεγγίσεις για επίτευξη ανεξαρτησίας

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε τις προσεγγίσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί για να πετύχουμε την δημιουργία ανεξάρτητων συνιστωσών. Οι προσεγγίσεις αυτές παρατίθενται ακολούθως :

#### 1. Δημιουργία μη κανονικών μεταβλητών

Μπορεί να αποδειχτεί (για περισσότερες πληροφορίες δεξ παράρτημα) ότι αν ξεκινήσουμε από ένα σήμα και προσπαθήσουμε να το αναλύσουμε σε σήματα που παρουσιάζουν όσον το δυνατόν μη-κανονική κατανομή. Αυτά θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό ορίζουμε κάποια μέτρα τα οποία μας δείχνουν πόσο κανονική είναι μια κατανομή και ορίζοντας τις κατάλληλες συναρτήσεις κόστους προσπαθούμε να τα ελαχιστοποιήσουμε. Τα κυριότερα μέτρα που χρησιμοποιούμε είναι τα ακόλουθα:

- a. Μεγιστοποίηση κυρτώσης (kurtosis)
- b. Αρνητική εντροπία (Negentropy)

(Την σχέση που έχουν με την κανονική κατανομή και τον τρόπο που τα χρησιμοποιούμε μπορεί κάποιος να δει στο παράρτημα)

#### 2. Ελαχιστοποίηση αμοιβαίας πληροφορίας

Μια προσέγγιση που προκύπτει από την θεωρία της πληροφορίας έχει να κάνει με την ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας των σημάτων μας. Ορίζουμε ότι δυο

σήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους όταν η αμοιβαία πληροφορία τους είναι μηδενική (για περισσότερες πληροφορίες παράρτημα)

### 3. Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum likelihood estimation)

Η προσέγγιση της εκτίμησης της μέγιστης πιθανοφάνειας είναι μια πολύ δημοφιλής για την επίτευξη της ανεξαρτησίας . Μπορεί να αποδειχτεί ότι στην ουσία είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας (mutual information minimization) [23]

### 7.3.3.3 Ο αλγόριθμος FASTICA

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος FASTICA για την δημιουργία στατιστικά ανεξάρτητων μεταβλητών .Ο αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε όπως περιγράφεται στο [23] . Ο αλγόριθμος επιδιώκει να δημιουργήσει μη Γκαουσιανές μεταβλητές μεγιστοποιώντας την αρνητική εντροπία (negentropy). Τα βήματα του αλγορίθμου έχουν ως εξής:

1. Αρχικά επιλέγουμε ένα τυχαίο αρχικό διάνυσμα βαρών  $w$
2. Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$w^+ = E \left\{ xg \left( w^T F \right) \right\} - E \left\{ g' \left( w^T F \right) \right\} w \quad (7.54)$$

- 3.

$$w = w^+ / \|w^+\| \quad (7.55)$$

4. Αν δεν έχουμε σύγκλιση επιστρέφουμε στο βήμα 2

Στην θέση των συναρτήσεων  $g(\cdot)$  συνήθως χρησιμοποιούμε τις :

$$g_1(u) = \tanh(a_1 u) \quad 1 \leq a_1 \leq 2 \quad (7.56)$$

$$g_2(u) = u \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right) \quad (7.57)$$

Στην συνέχεια θα δούμε την εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού στην επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος.

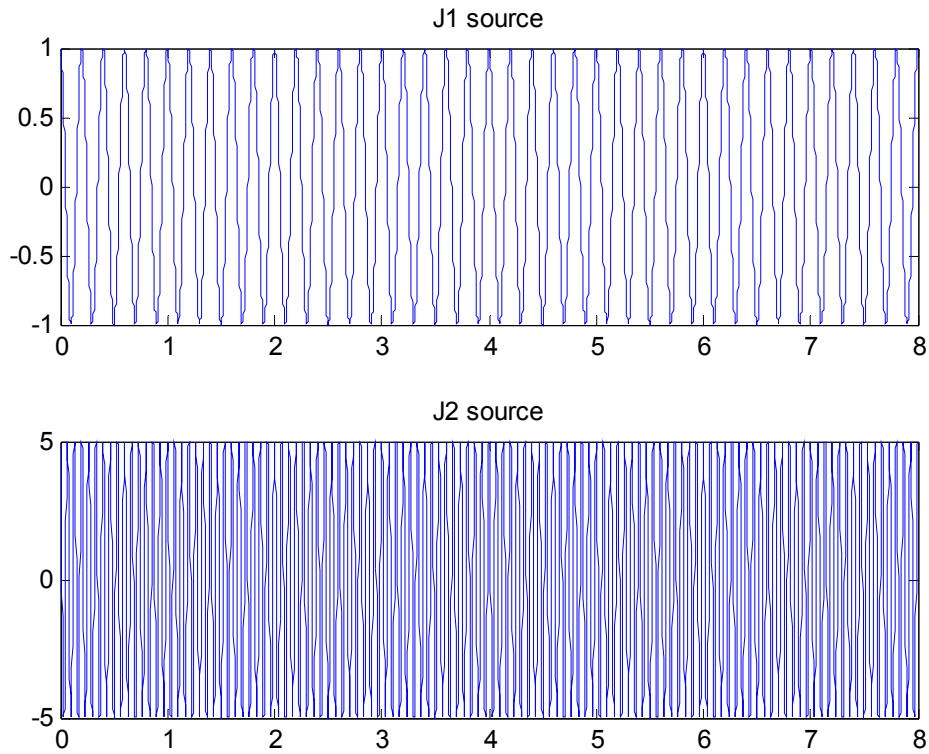
#### 7.3.3.4 Αξιολόγηση ανεξάρτητων συνιστωσών

Η ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες παράγει τόσες συνιστώσες όση η διάσταση του πίνακα που δώσαμε σαν είσοδο . Προκειμένου να αναγνωρίσουμε τις σημαντικές συνιστώσες και να απορρίψουμε τις υπόλοιπες έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές που έχουν να κάνουν με τις τιμές του πίνακα μίξης των σημάτων.

Ένας τρόπος που έχει προταθεί είναι η κατάταξη των ανεξάρτητων συνιστωσών μέσω της νόρμας του πίνακα μίξης των δεδομένων (Μια και αυτός καθορίζει το βάρος των ανεξάρτητων συνιστωσών).Ένας εναλλακτικός τρόπος που έχει προταθεί και σχετίζεται με την φιλοσοφία της έννοιας της ανεξαρτησίας είναι να μετρήσουμε πόσο μη-γκαουσιανή είναι η κάθε ανεξάρτητη συνιστώσα και να ταξινομήσουμε τις συνιστώσες με αυτόν τον τρόπο.

Για να γίνει κατανοητός αυτός ο τρόπος αξιολόγησης θεωρούμε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω δυο πηγές  $J_1, J_2$  που οι κυματομορφές τους έχουν ως εξής:



**Εικόνα 70 Αρχικές κυματομορφές**

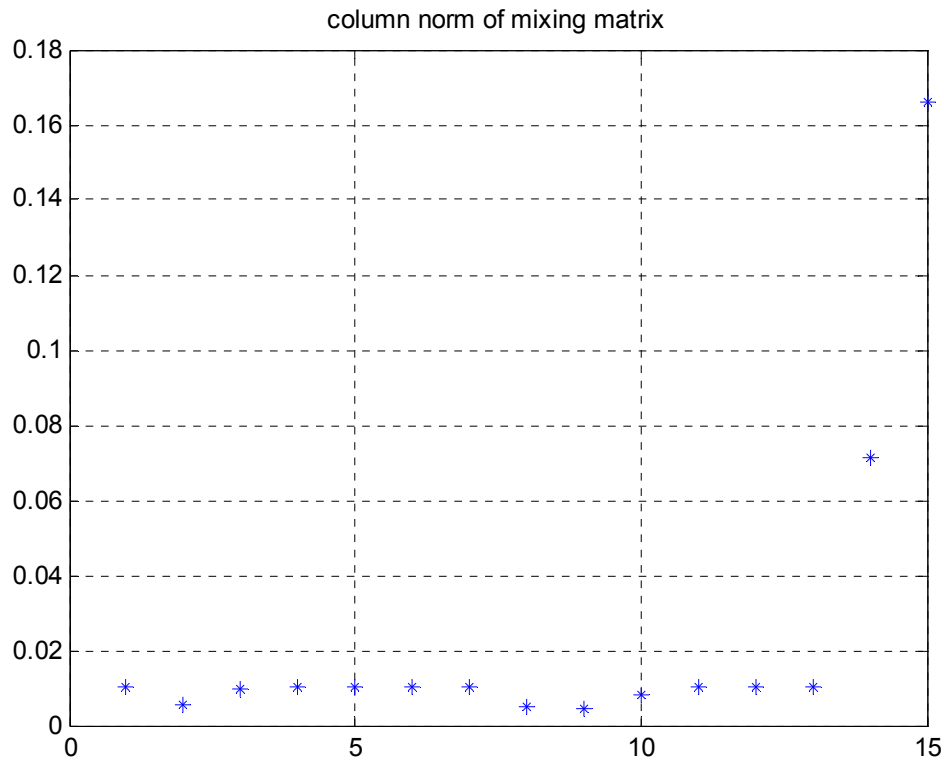
Δηλαδή έχουν εξισώσεις :

$$J_1 = \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 5Hz \quad (7.58)$$

$$J_2 = \cos(2\pi f_2 t) \quad f_2 = 15Hz \quad (7.59)$$



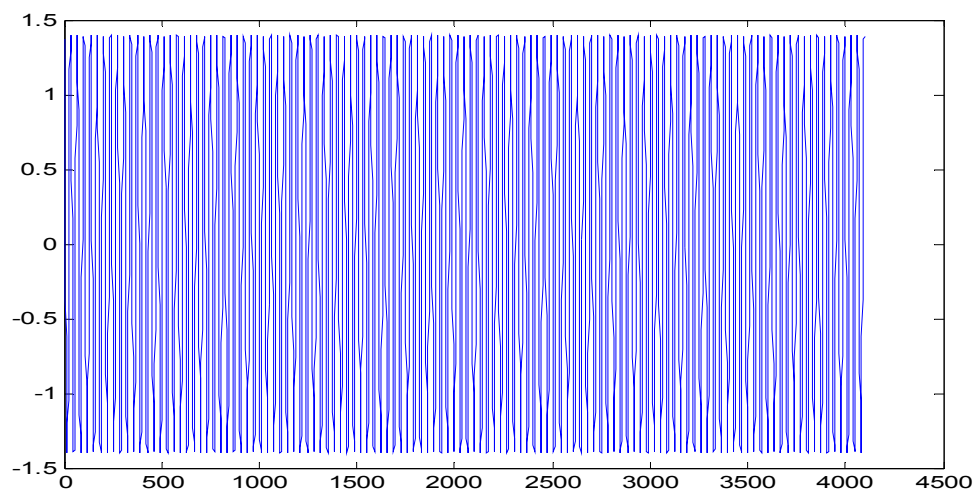
Κάνοντας ICA (και συγκεκριμένα FASTICA) υπολογίζουμε τους πίνακες μίξης και απομίξης. Οι νόρμες των στηλών του πίνακα μίξης  $W$  έχει ως εξής:



Εικόνα 71 τιμές νόρμας στηλών πίνακα μίξης

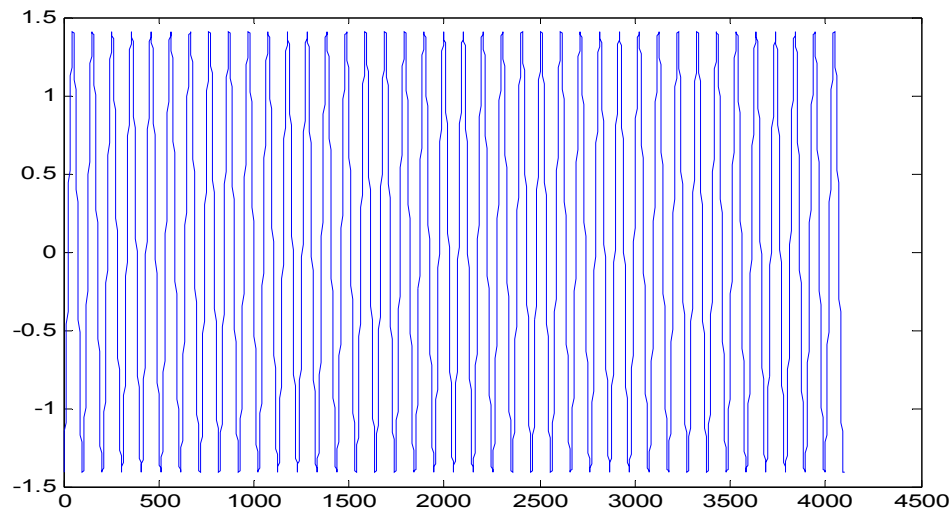
(κανονικά θα επρεπε να πάρουμε 30 independent components αλλά λόγω του αριθμητικού σφάλματος του MATLAB οι ιδιοτιμές από το 15 και μετά είναι αρνητικές γι αυτό δεν τις παρουσιάζουμε καθόλου) Βλέπουμε λοιπόν ότι οι σημαντικές συνιστώσες είναι οι 14,15. Αυτές είναι :

#### Component 14



Εικόνα 72 πρώτο ανακατασκευασμένο σήμα

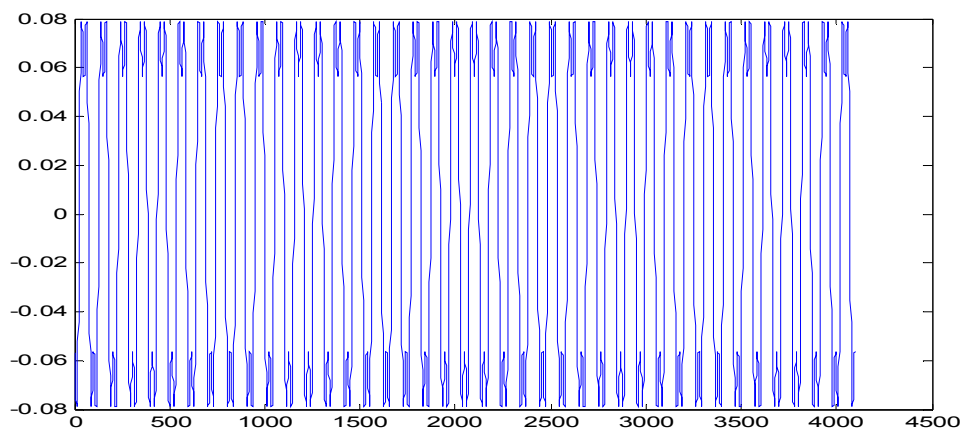
### Component 15



Εικόνα 73 Δεύτερο ανακατασκευασμένο σήμα

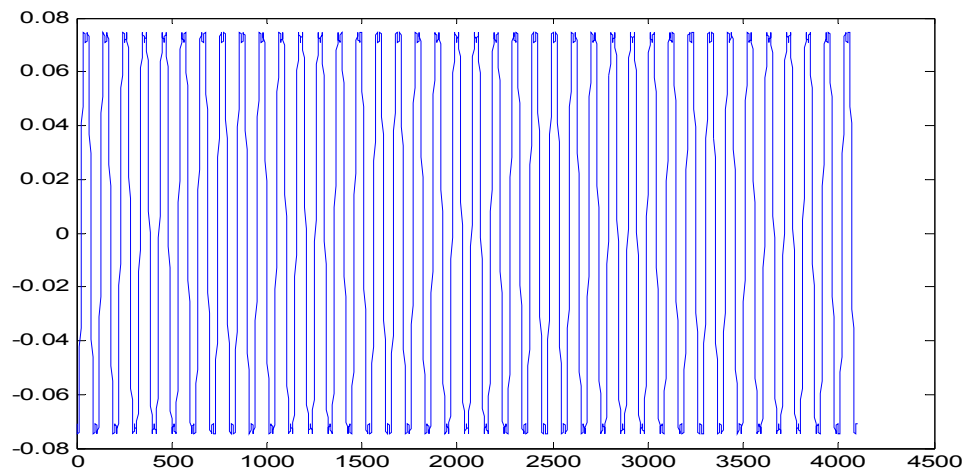
Είναι προφανές ότι η συνιστώσα 14 αντιστοιχεί στην πηγή J2 ενώ η συνιστώσα 15 στην πηγή J1. Ενδεικτικά παραθέτουμε μερικά από τα υπόλοιπα components για να παρατηρήσουμε την μορφή τους:

### Component 12



Εικόνα 74 Ανακατασκευασμένο σήμα από δωδέκατη συνιστώσα

## Component 8

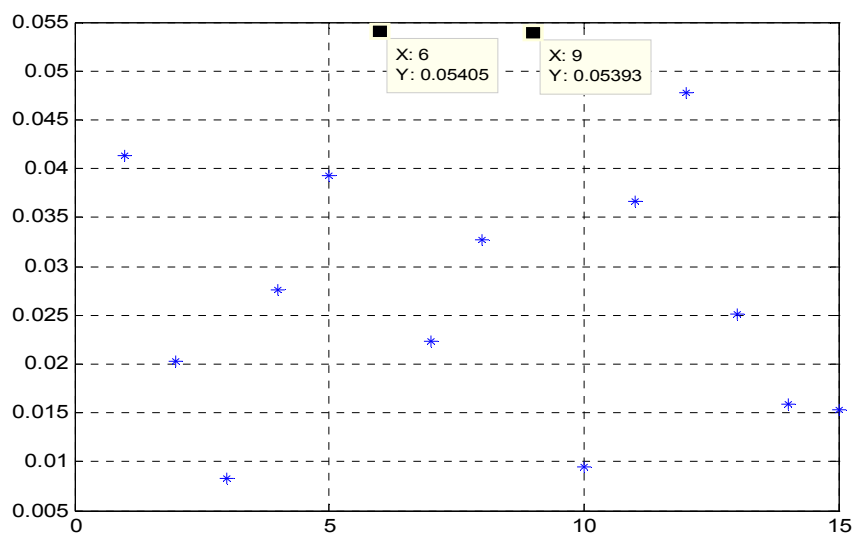


Εικόνα 75 ανακατασκευασμένο σήμα από την όγδοη συνιστώσα

Είναι προφανές ότι οι δυο τυχαίες αυτές κυματομορφές δεν έχουν σχέση με τις αρχικές.

### 7.3.3.5 ICA σε περιβάλλον θορύβου

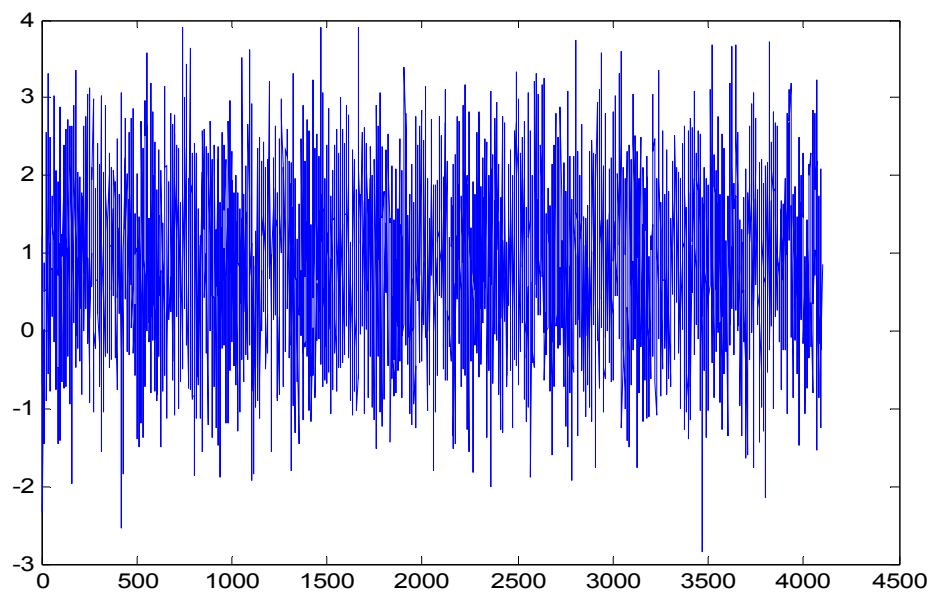
Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τον τρόπο που λειτουργεί ο ICA όταν έχουμε θόρυβο στο προηγούμενο παράδειγμα με τις δυο ημιτονοειδείς πηγές J1,J2 προσθέτουμε ένα τυχαίο διάνυσμα θορύβου (το διάνυσμα φέρει τυχαία νούμερα των οποίων η μέση τιμή είναι το 1/10 της μέσης τιμής του κανονικού σήματος).



Εικόνα 76 Νόρμα στηλών πίνακα μίξης σε περιβάλλον θορύβου

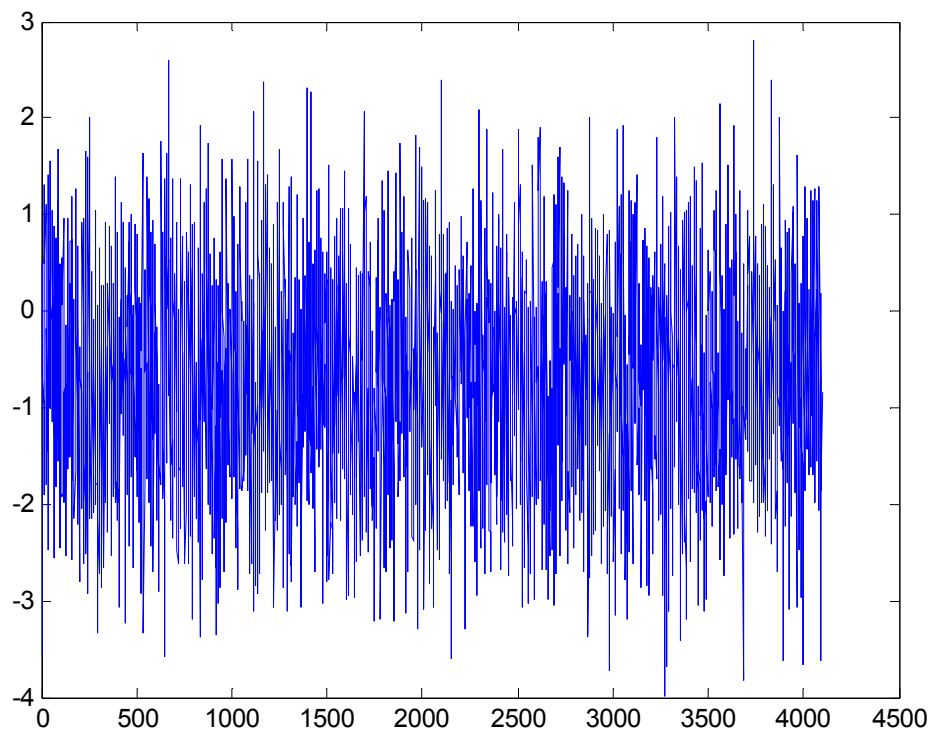
Οι σημαντικές συνιστώσες δείχνουν να είναι οι 6,9. Αυτές έχουν ως εξής

### Component 6



Εικόνα 77 Πρώτο ανακατασκευασμένο σήμα

### Component 9



Εικόνα 78 Δεύτερο ανακατασκευασμένο σήμα

Βλέπουμε ότι η εκτίμηση με αυτόν τον τρόπο είναι εντελώς λανθασμένη. Ο θόρυβος επηρεάζει τις τιμές των νορμών του πίνακα μίξης σε τέτοιο σημείο που να είναι αδύνατη η αξιολόγηση των σημαντικών συνιστωσών. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα ο ποιο αξιόπιστος τρόπος για να απομακρύνουμε τον θόρυβο και να εκτιμούμε τις σημαντικές συνιστώσες είναι η χρήση του μετασχηματισμού PCA.

### 7.3.3.6 Παραλληλισμός ICA-PCA

#### 7.3.3.6.1 Μηδενική συσχέτιση-ανεξαρτησία

Είδαμε ότι ο αλγόριθμος PCA (Principal Component Analysis) μας δίνει ασυσχέτιστες συνιστώσες πραγμα που σημαίνει ότι

$$E\{x_1 x_2\} = E\{x_1\} E\{x_2\} \quad (7.60)$$

Από την άλλη μεριά ο ICA (Independent Component Analysis) μας επιστρέφει ανεξάρτητες συνιστώσες. Δηλαδή ισχύει:

$$E\{h(x_1)h(x_2)\} = E\{h(x_1)\} E\{h(x_2)\} \quad (7.61)$$

Όπου  $h(\bullet)$  μια οποιαδήποτε συνάρτηση.

#### 7.3.3.6.2 Ιδιότητες πινάκων μίξης -απομίξης

Και οι δυο μετασχηματισμοί ξεκινούν από κάποια δεδομένα και καταλήγουν σε ένα πίνακα  $W$  που αποσυσχετίζει – ανεξαρτητοποιεί τα δεδομένα αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$F = K \cdot F_{uncor} \xrightarrow{PCA} F_{uncor} = W_{PCA} \cdot F \quad (7.62)$$

$$F = K \cdot F_{independent} \stackrel{ICA}{\Rightarrow} F_{independent} = W_{ICA} \cdot F \quad (7.63)$$

Χαρακτηριστικό του PCA είναι ότι επικεντρώνει την λειτουργία του στην μείωση της τάξης του προβλήματος και λιγότερο στην επίτευξη ανεξαρτησίας (αποσυσχετίζει τα δεδομένα μόνο σε πρώτο βαθμό). Η μείωση της τάξης του προβλήματος γίνεται μέσω αξιολόγησης των ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης των δεδομένων.

Από την άλλη μεριά ο ICA επικεντρώνει την λειτουργία του στην επίτευξη της ανεξαρτησίας. Εν τούτοις υπάρχει ο τρόπος να επιτύχουμε την μείωση της τάξης του προβλήματος με την χρήση του ICA. (νόρμες πίνακα μίξης)

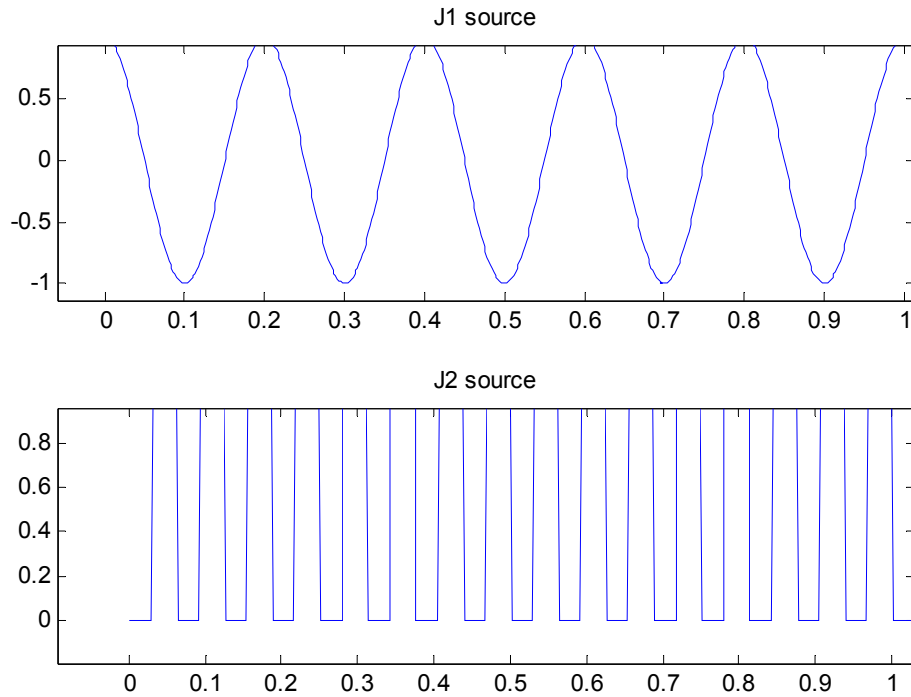
Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μείωση της διάστασης του προβλήματος σπάνια γίνεται με ICA μέθοδο. Αυτό συμβαίνει γιατί η αξιολόγηση των συνιστωσών γίνεται μετά τον υπολογισμό τους. Αντίθετα κατά τον PCA μετασχηματισμό πρώτα γίνεται η αξιολόγηση του αριθμού των ασυσχέτιστων συνιστωσών και στην συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός τους.

Έτσι στην πρώτη περίπτωση δεν μπορούμε να αποφύγουμε τον θόρυβο ενώ στην δεύτερη μπορούμε να τον φιλτράρουμε μέχρι ενός σημείου. Όπως θα δούμε παρακάτω η συνδυασμένη χρήση των δυο μετασχηματισμών κρίνεται αναγκαία για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

### 7.3.4 Συνδυασμένη χρήση ICA - PCA

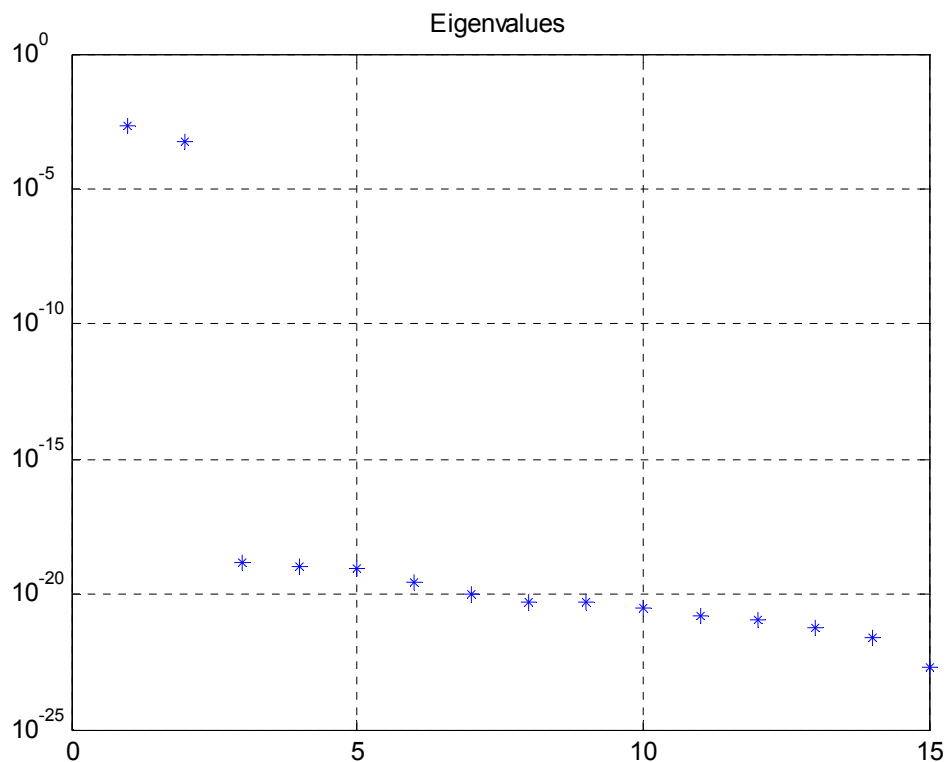
#### 7.3.4.1 Περιβάλλον χωρίς θόρυβο

Μέχρι τώρα είδαμε του δυο μετασχηματισμούς σε παράλληλο επίπεδο. Εξετάσαμε τις δυνατότητες τους και σημειώσαμε τα αδύνατα σημεία τους. Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την λειτουργία τους αν τους εφαρμόσουμε σε σειρά. Η εφαρμογή των δυο αυτών αλγορίθμων σε σειρά είναι αρκετά συνηθισμένη και έχει χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς σε αρκετές εργασίες [22][23]. Έστω ότι έχουμε δυο πηγές  $J_1, J_2$  οι οποίες μεταβάλλονται στο χρόνο όπως φαίνεται παρακάτω:



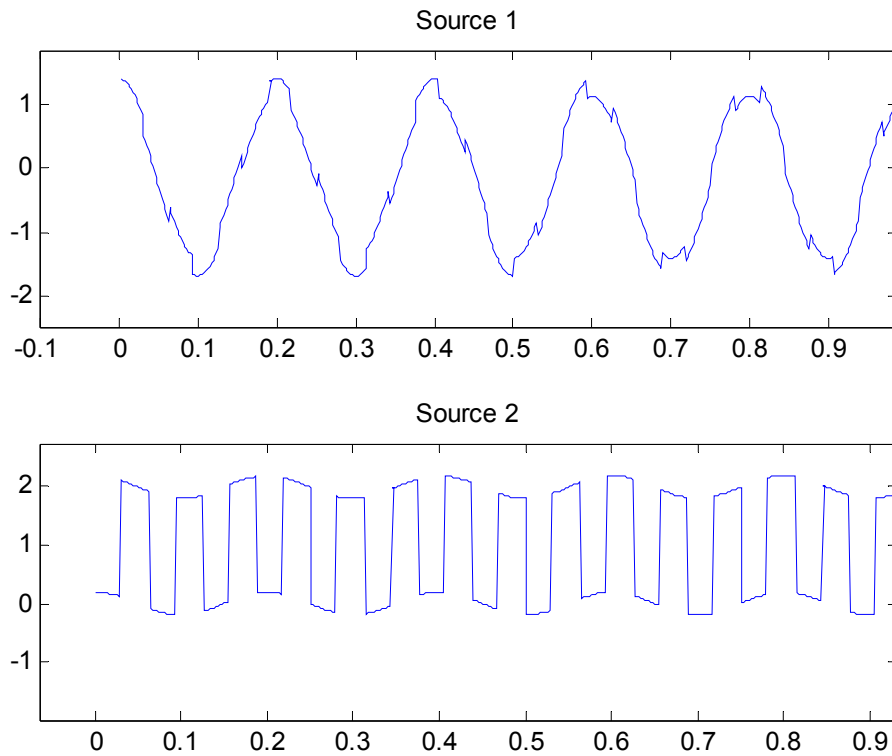
**Εικόνα 79 Δοο αρχικά σήματα**

Κάνοντας ανάλυση σε πρωτεύουσες συνιστώσες θα πάρουμε το εξής διάγραμμα ιδιοτιμών:



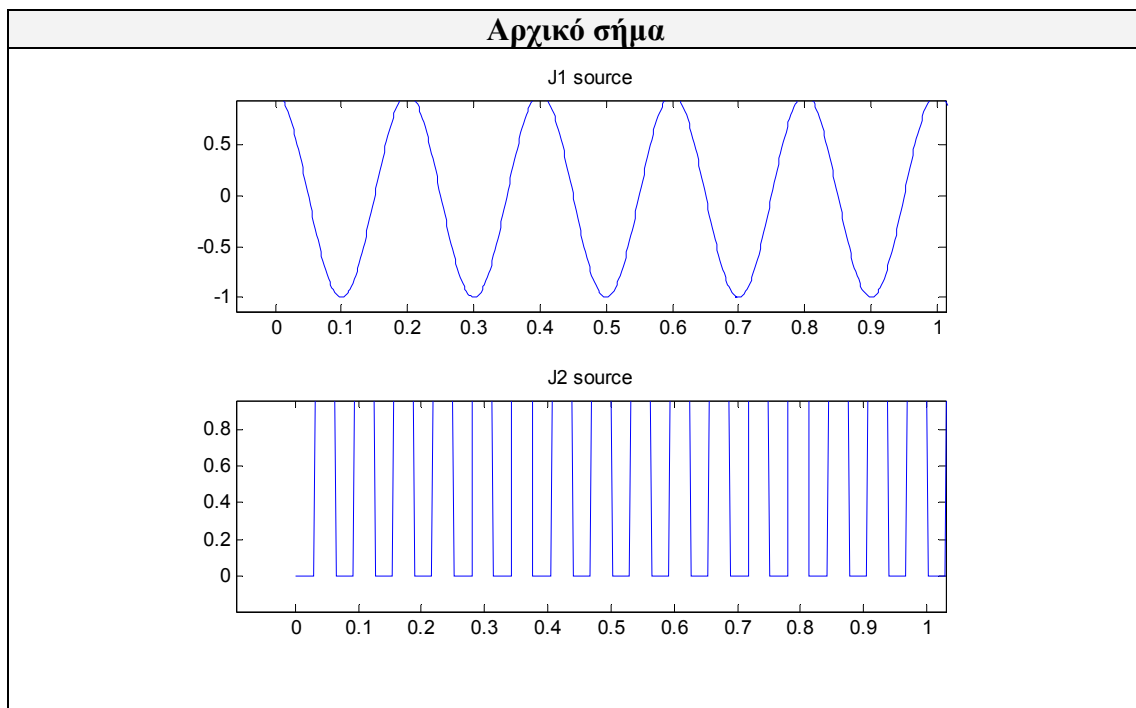
**Εικόνα 80 Διάγραμμα ιδιοτιμών**

Συμπεραίνουμε ότι οι δυο πρώτες είναι οι σημαντικές ιδιοτιμές όποτε αν ανακατασκευάσουμε το σήμα μας θα έχουμε:

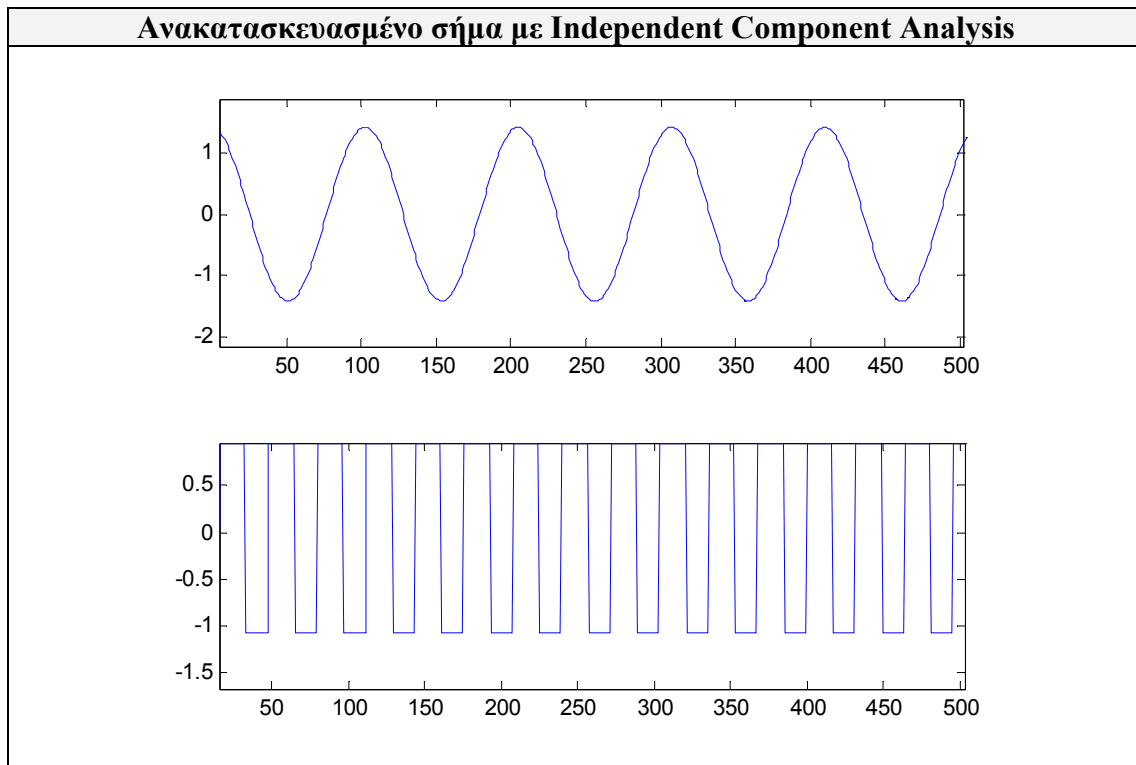


Εικόνα 81 ανακατασκευασμένο σήμα από PCA

Είναι σαφές ότι το σήμα παρότι μοιάζει απέχει αρκετά από τα αρχικά μας σήματα. Αν τώρα εφαρμόσουμε ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες (Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο FASTICA) θα πάρουμε μια εκτίμηση για τον πίνακα W. Ο πίνακας αυτός αναλύεται στις ιδιοτιμές του και στα ιδιοδιανύσματα του ως εξής:



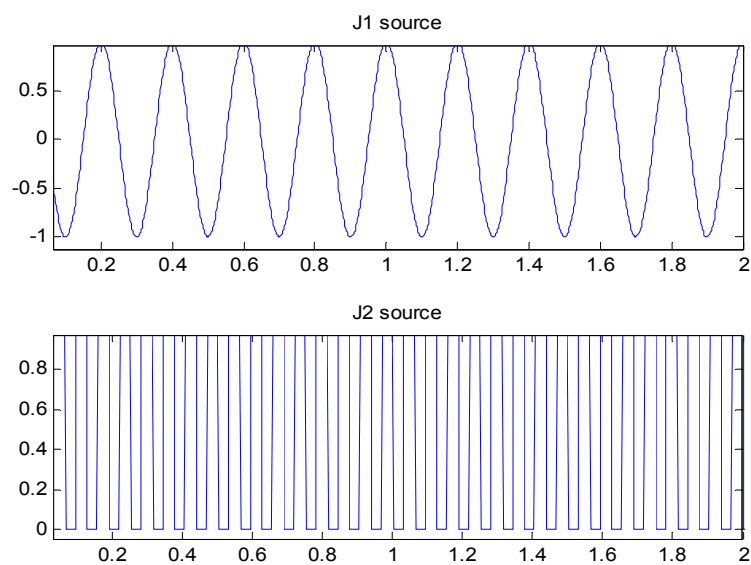




Εικόνα 82 Σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου σήματος

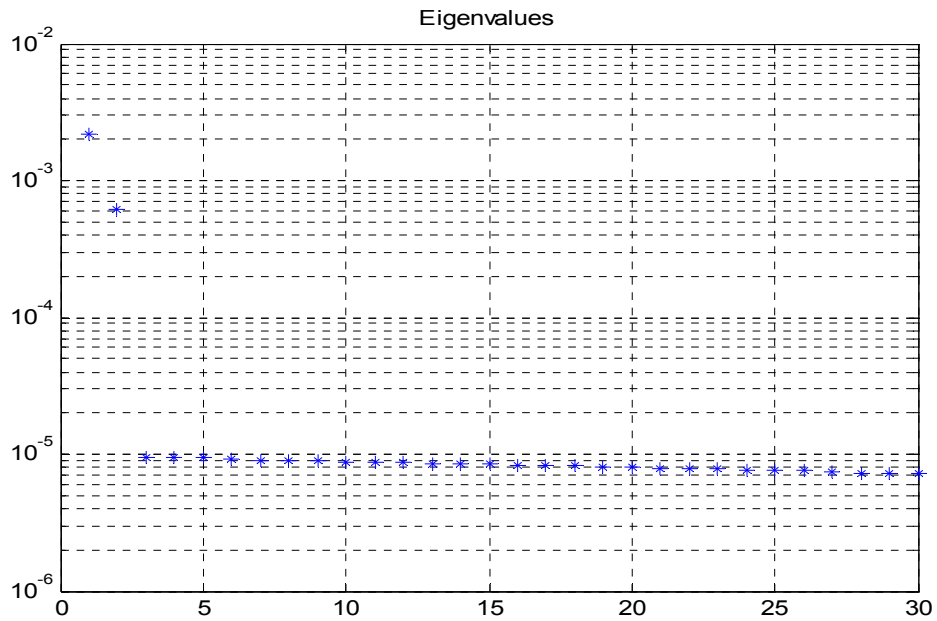
### 7.3.4.2 Βελτίωση σε περιβάλλον θορύβου

Η στιγμή να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμένα τους δυο αλγορίθμους όταν έχουμε σήματα που έχουν αναμιχθεί με θόρυβο. Ας θεωρήσουμε τα ίδια σήματα με το προηγούμενο παράδειγμα.



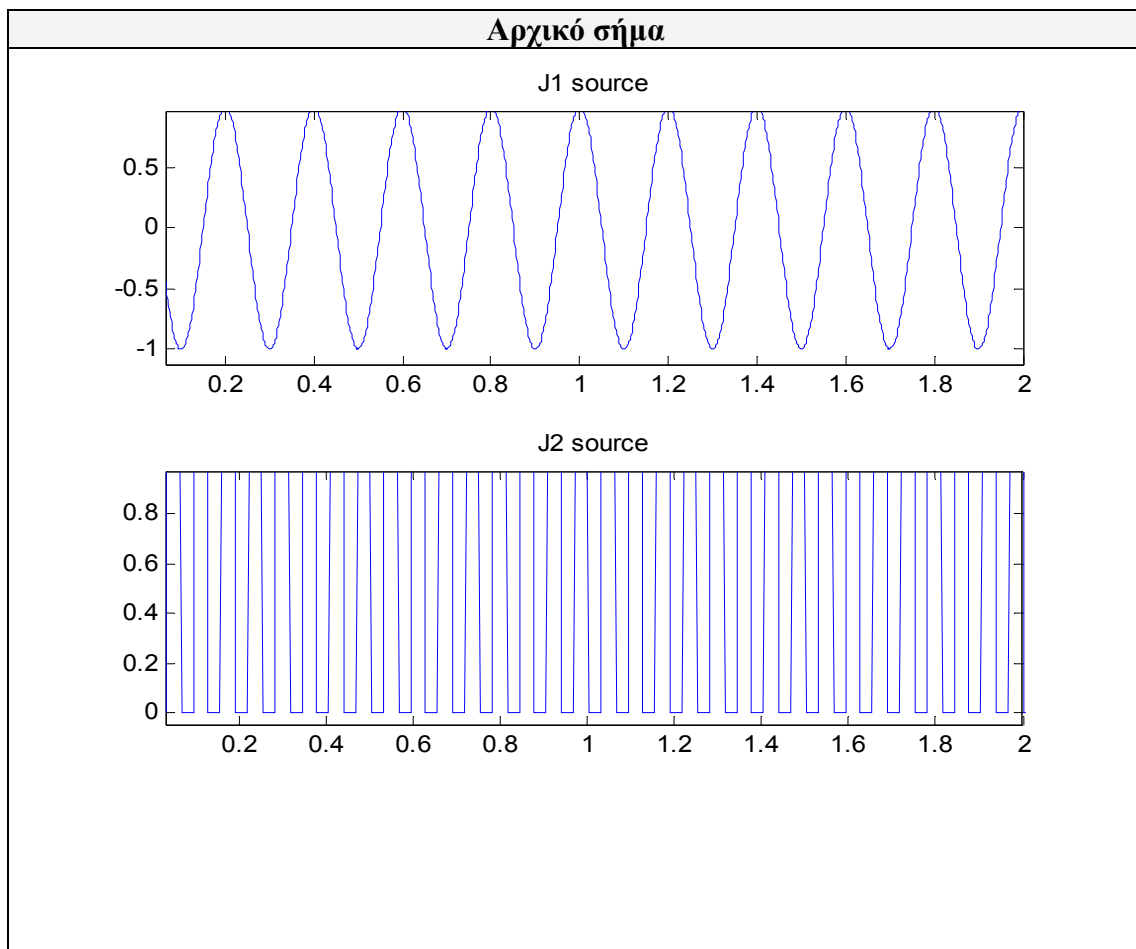
Εικόνα 83 Αρχικά σήματα

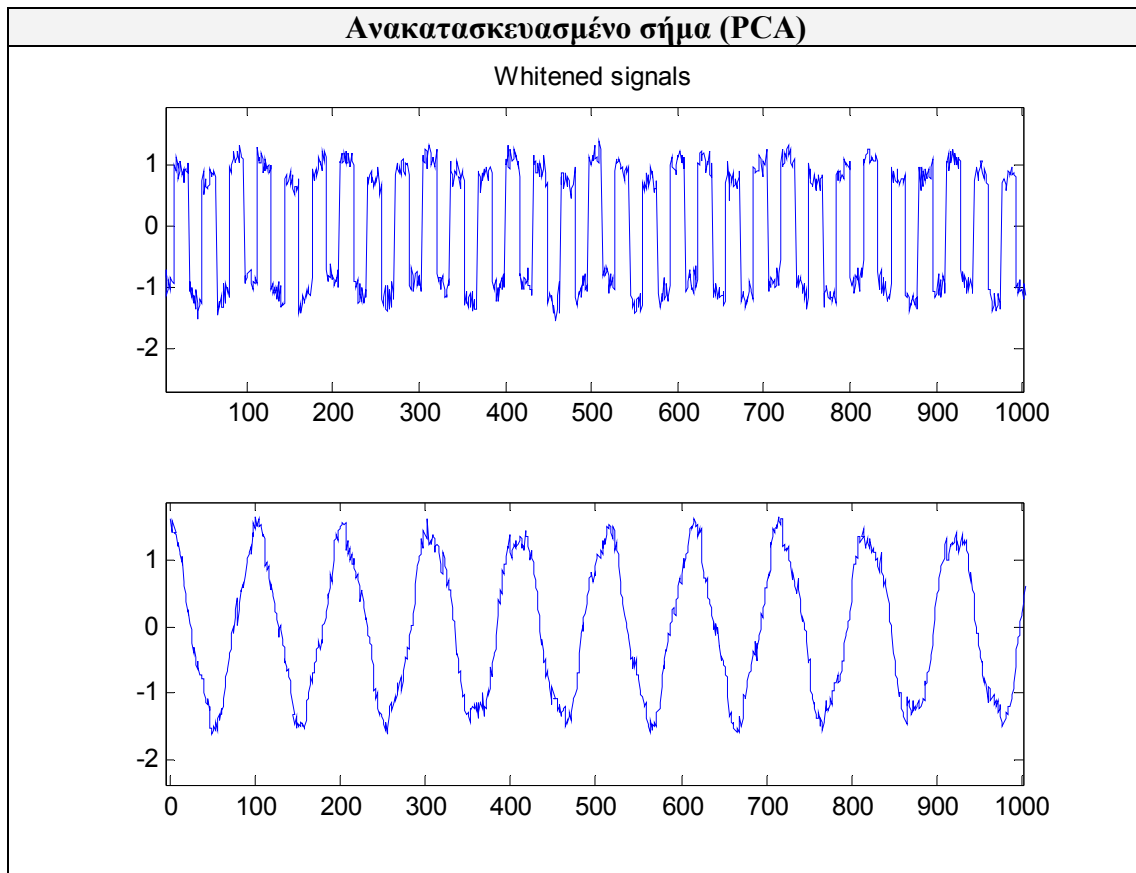
Η ανάλυση PCA μας δείχνει τις εξής ιδιοτιμές;



Εικόνα 84 Διάγραμμα ιδιοτιμών

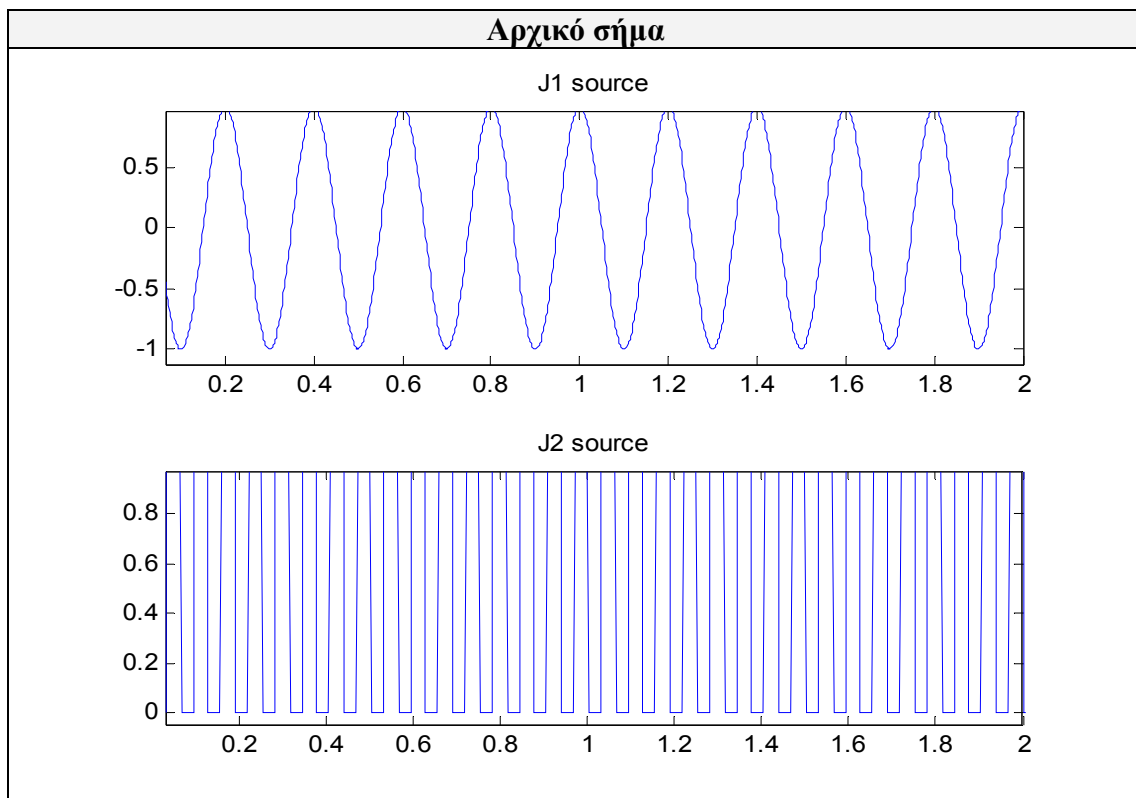
Αυτά τα δυο ανακατασκευασμένα σήματα από τον PCA θα έχουν ως εξής;

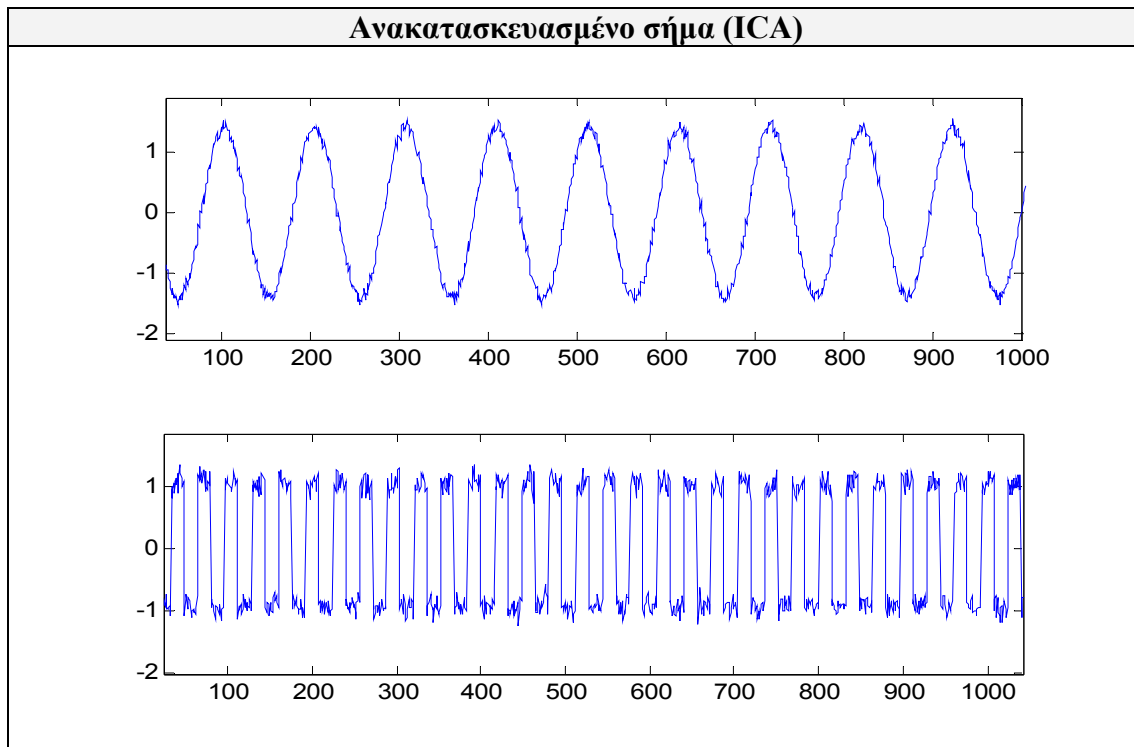




Εικόνα 85 σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου (PCA) σήματος

Αν κάνουμε ICA με αυτές τις δυο συνιστώσες θα πάρουμε τις εξής δυο κυματομορφές





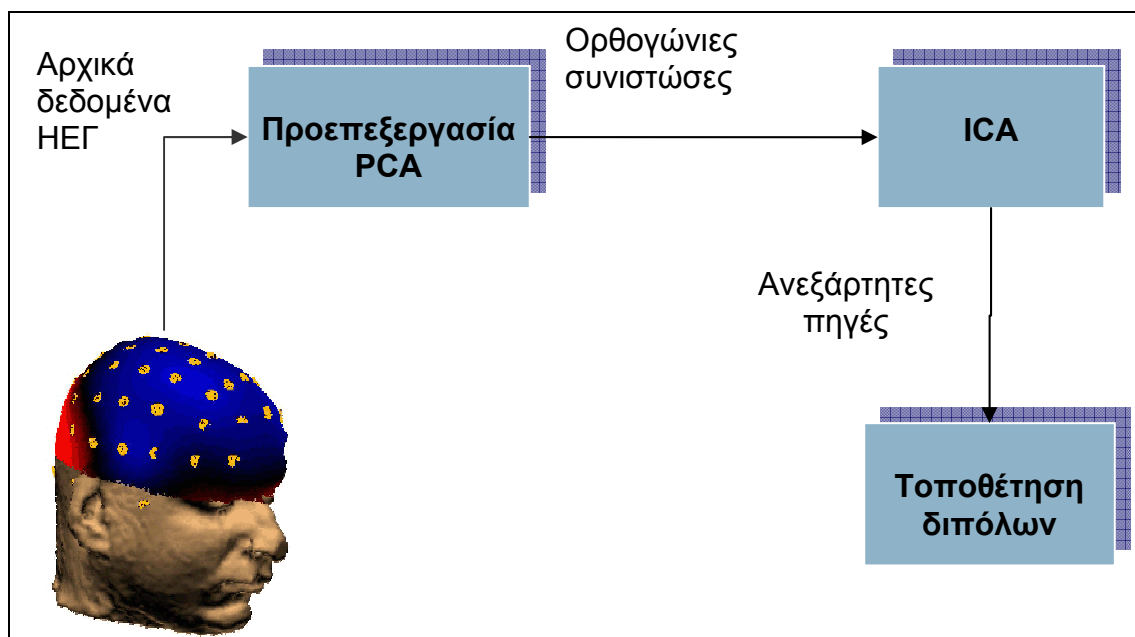
Εικόνα 86 Σύγκριση αρχικού-ανακατασκευασμένου(ICA) σήματος

Οι τελευταίες δυο κυματομορφές παρότι δεν έχουν απαλλαγεί από τον θόρυβο είναι μια πολύ καλή εκτίμηση των αρχικών. Η συνδυασμένη δράση των δυο αυτών αλγορίθμων μας δίνει ασυγκρίτως καλύτερα αποτελέσματα από ότι ο κάθε ένας αλγόριθμος μόνος του.

#### **7.4 Λύση του αντίστροφου προβλήματος με χρήση PCA-ICA και Correlation coefficients**

Αφού εξετάσαμε τους μετασχηματισμούς PCA και ICA θα δείξουμε πως αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα. Η παρούσα προσέγγιση έχει σαν βάση το [22]

Θεωρούμε ότι το σύστημα που επιλύει το πρόβλημα μας αποτελείται από τρεις βαθμίδες που συνδέονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στην Εικόνα 87.

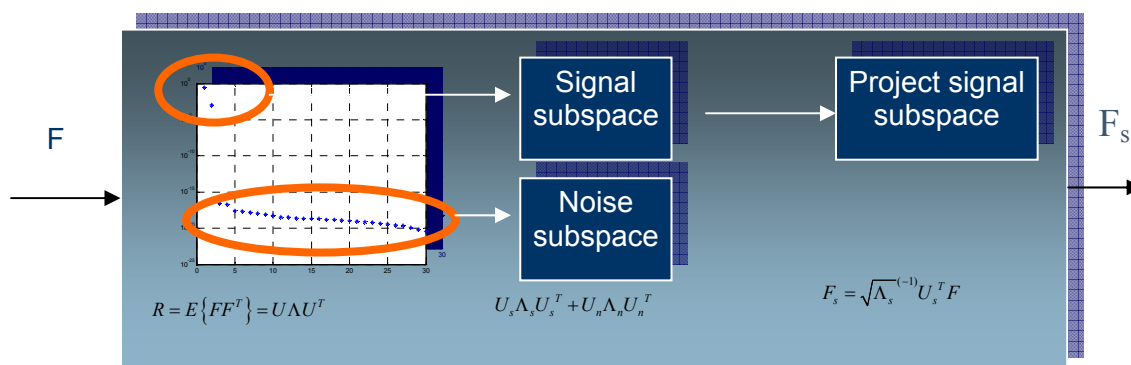


Εικόνα 87 Αρχιτεκτονική συστήματος τοποθέτησης διπόλων βασισμένο σε PCA-ICA

Οι δυο πρώτες βαθμίδες (PCA, ICA) βασίζονται στην λογική των αντίστοιχων μετασχηματισμών και θα παρουσιαστούν εν τάχει. Η Τρίτη βαθμίδα της τοποθέτησης των διπόλων βασίζεται στον υπολογισμό των συντελεστών συσχέτισης (Correlation Coefficients) και στην ελαχιστοποίηση συνάρτησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square error).

#### 7.4.1 Βαθμίδα PCA

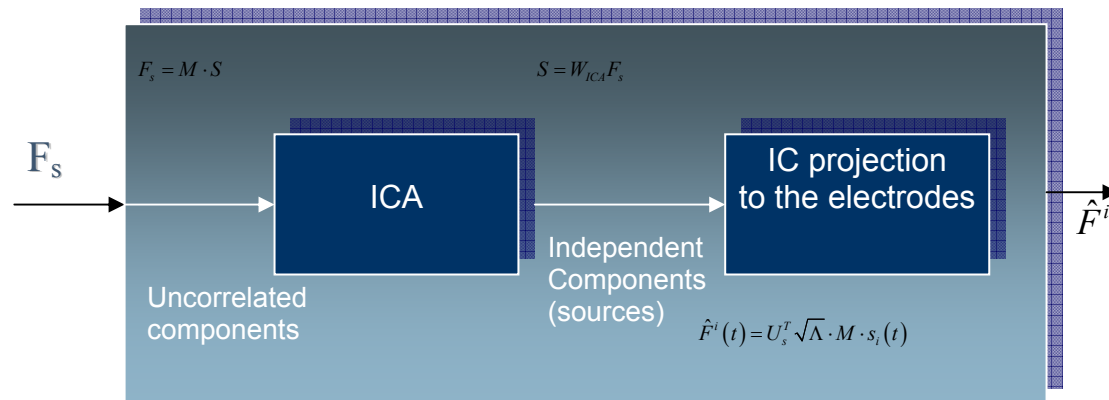
Στην πρώτη λοιπόν βαθμίδα έχουμε την ανάλυση του σήματος σε υποχώρο σήματος και θορύβου και στην εξαγωγή ορθογώνιων συνιστωσών. Στην Εικόνα 88 μπορούμε να δούμε την σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδας



Εικόνα 88 Σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδας PCA

### 7.4.2 Βαθμίδα ICA

Στην βαθμίδα του μετασχηματισμού σε ανεξάρτητες συνιστώσες έχουμε την απομίξη των ορθογώνιων συνιστωσών και την εξαγωγή των πηγών  $s_i$  καθώς και τις ανεξάρτητες προβολές των πηγών αυτών στα ηλεκτρόδια  $\hat{F}^i$



Εικόνα 89 Σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδα ICA

Στην Εικόνα 89 μπορούμε να δούμε τη σχηματική αναπαράσταση της ανάλυσης σε ανεξάρτητες συνιστώσες.

### 7.4.3 Βαθμίδα τοποθέτησης διπόλων

Μετά την εξαγωγή των ανεξάρτητων πηγών και τον υπολογισμό των προβολών των πηγών αυτών στα ηλεκτρόδια σειρά έχει η τοποθέτηση των πηγών αυτών σε κάποιο σημείο του εγκεφάλου. Ο τρόπος που έχει προταθεί για [22] να επιτύχουμε κάτι τέτοιο είναι μέσω των συντελεστών συσχέτισης (Correlation Coefficients).

Για κάθε πηγή  $s_i$  έχουμε μια ανεξάρτητη προβολή  $\hat{F}^i$ . Για τα  $M$  σημεία του ανθρώπινου εγκεφάλου που έχουμε υποθέσει δημιουργούμε  $3M$  πίνακες  $J$  (3 πίνακες για κάθε σημείο 1 για κάθε συνιστώσα του σημείου) της μορφής:

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

Δηλαδή πίνακες με όλες τις σειρές μηδέν εκτός από την  $k$  ( $k=1:M$ ) σειρά που θα περιέχει την πηγή  $s_i$ . Για κάθε πίνακα  $J_k$  θα υπολογίσουμε την προς τα εμπρός λύση μέσω της εξίσωσης :

$$F_k = K \cdot J_k \quad (7.65)$$

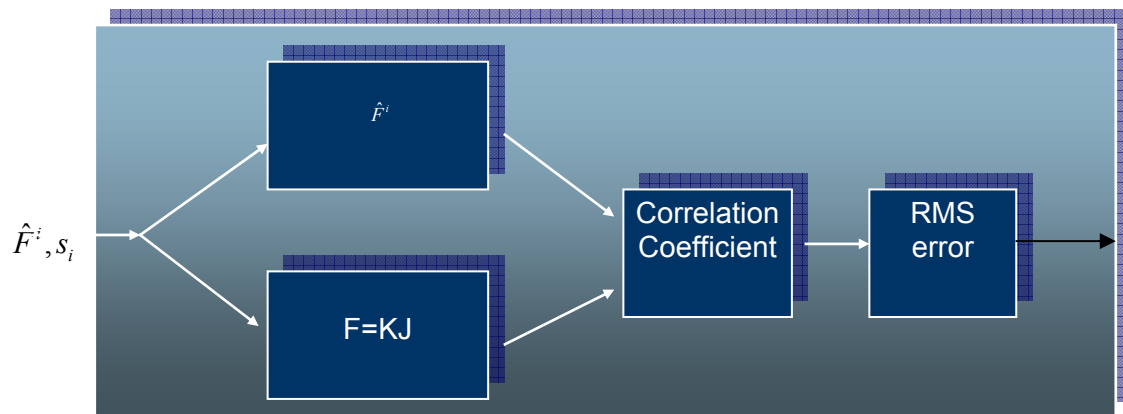
Για κάθε λύση  $F_k$  θα υπολογίσουμε την συσχέτιση της με τον πίνακα  $\hat{F}^i$  για κάθε κανάλι από την σχέση:

$$CC_j = \frac{F_k^j \hat{F}_i^j}{\|F_k^j\| \|\hat{F}_i^j\|} \quad j=1: \text{number of channels} \quad (7.66)$$

Αφού υπολογίσουμε τους συντελεστές συσχέτισης για κάθε ένα κανάλι ξεχωριστά στην συνέχεια υπολογίζουμε το μέσω τετραγωνικό σφάλμα των καναλιών (RMS error) από την σχέση:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\text{number\_channels}} (CC_j - 1)^2}{\text{number\_channels}}} \quad (7.67)$$

Έτσι για κάθε πηγή θα λάβουμε  $3M$  τιμές μέσω των τετραγωνικών σφαλμάτων . Αναζητούμε το σημείο που ελαχιστοποιείται το μέσω τετραγωνικό σφάλμα . Σαν μετρικό για να παράγουμε διαγράμματα ψευδοχρωματισμού μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα  $\frac{1}{RMS}$  και να αναζητούμε τα μέγιστα.

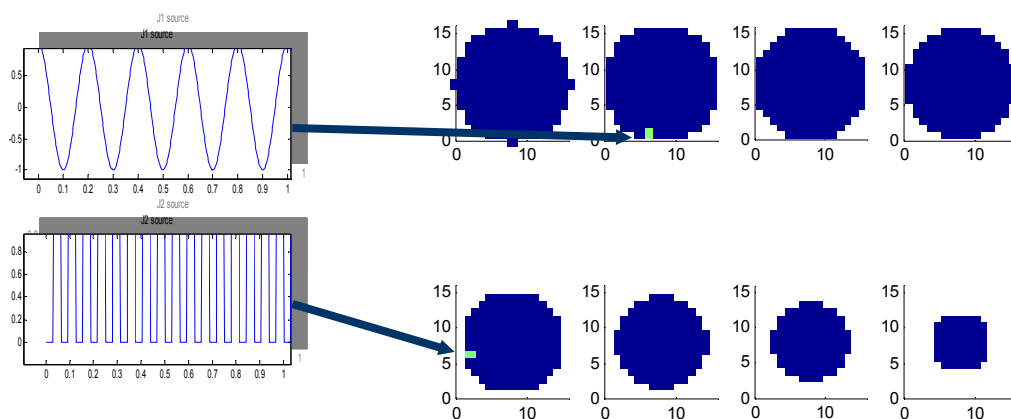


Εικόνα 90 σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδας τοποθέτησης διπόλων

Μια σχηματική αναπαράσταση της βαθμίδας τοποθέτησης των διπόλων μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 90. Στην συνέχεια θα δούμε την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε εικονικά σήματα (περιβάλλον εξομοίωσης) καθώς και σε πραγματικά.

#### 7.4.4 Αποτελέσματα εξομοίωσης

Προκειμένου να δοκιμάσουμε την απόδοση του προτεινόμενου τρόπου επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος θεωρήσαμε ένα σενάριο εξομοίωσης. Έχουμε λοιπόν δυο πηγές (μια ημιτονοειδούς μορφής και ένας τετραγωνικό παλμό) τις οποίες τοποθετούμε σε τυχαία σημεία εντός του εγκεφάλου όπως φαίνεται στην .

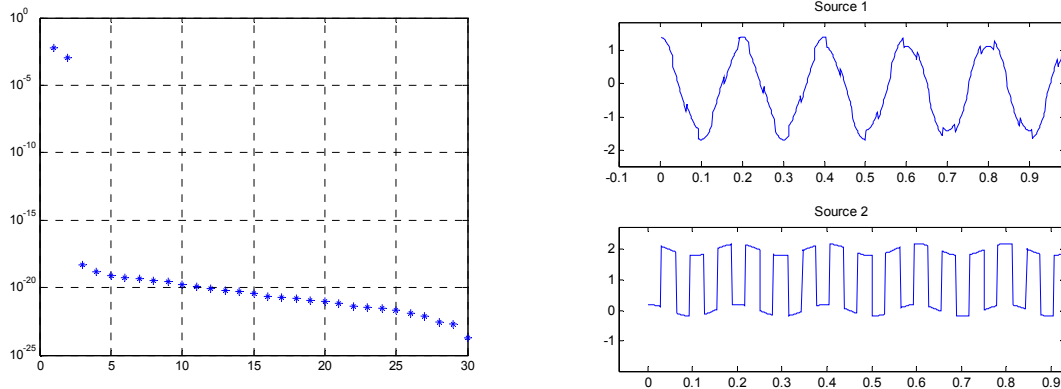


Εικόνα 91 αρχική θέση πηγών στον εγκεφαλο

Στην συνέχεια μέσω της εξίσωσης  $F=KJ$  υπολογίζουμε το «εικονικό» εγκεφαλογράφημα και στην συνέχεια προσπαθούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα. Αρχικά υπολογίζουμε τις ορθογώνιες συνιστώσες μέσω του

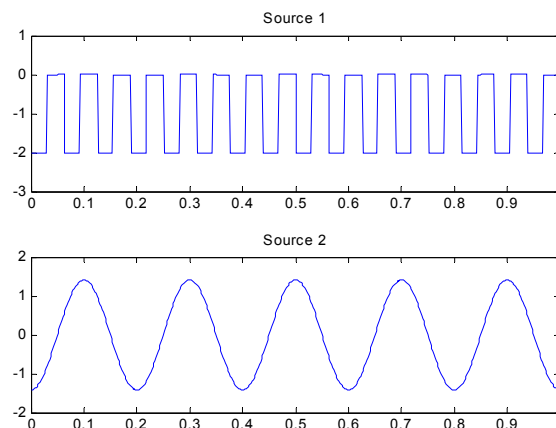


μετασχηματισμού PCA. Το διάγραμμα των ιδιοτιμών καθώς και τα ανακατασκευασμένα ορθογώνια σήματα φαίνονται παρακάτω:

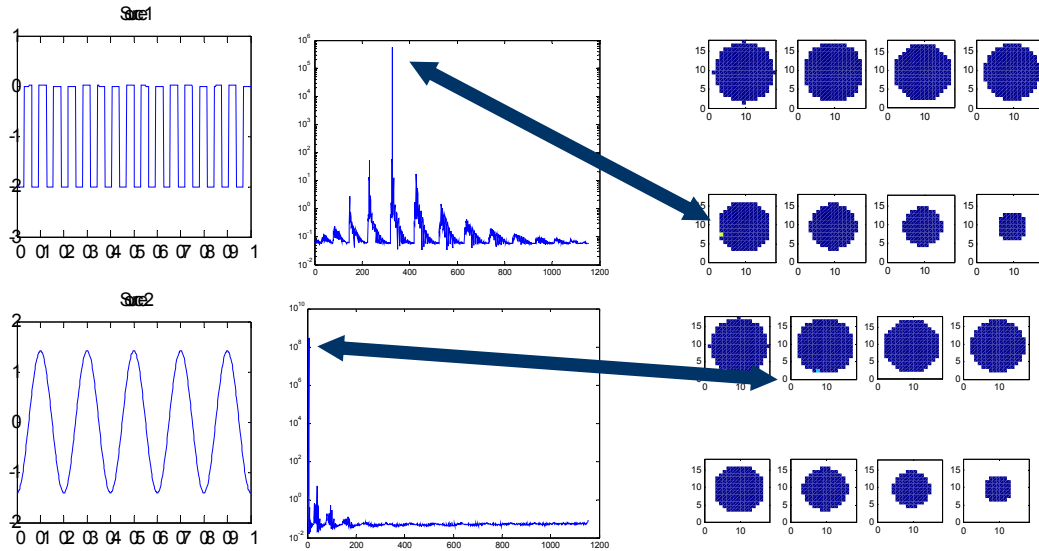


Εικόνα 92 Διάγραμμα ιδιοτιμών και ανακατασκευασμένα σήματα

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες (με αλγόριθμο FASTICA) και λαμβάνουμε τα ακόλουθα σήματα.

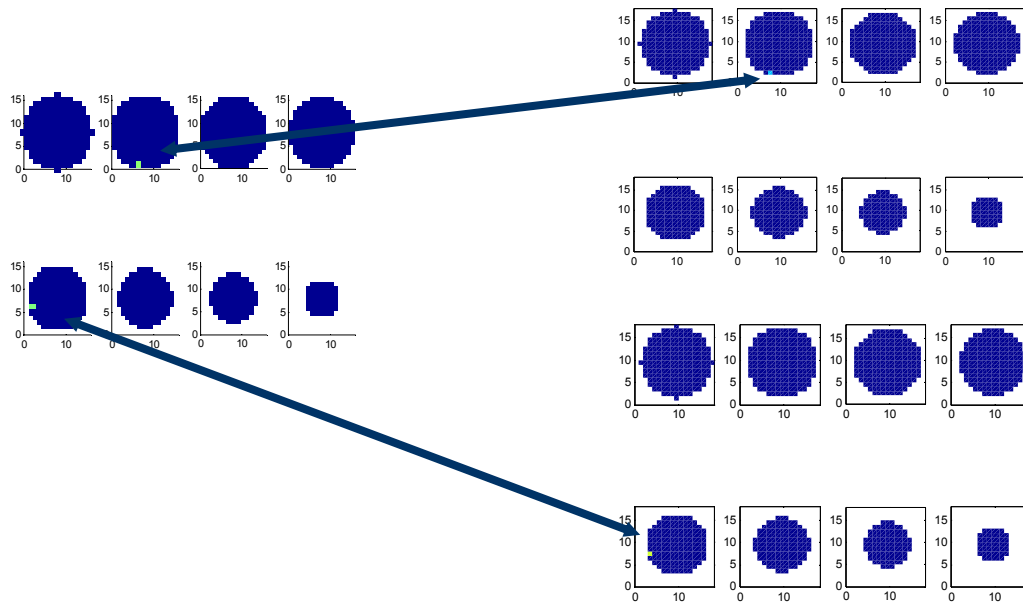


Προχωρώντας στην διαδικασία τοποθέτησης των σημάτων σε κάποιο σημείο του εγκεφάλου υπολογίζουμε την μέση συσχέτιση των καναλιών και στην συνέχεια την συνάρτηση RMS (Root Mean Square) error. Τα διαγράμματα ψευδοχρωματισμού του μετρικού  $1/\text{RMS}$  φαίνονται παρακάτω:



Εικόνα 93 Διαγράμματα ψευδοχρωματισμού ποσότητας  $1/\text{RMS}$

Τα μέγιστα των συναρτήσεων  $1/\text{RMS}$  δίνουν την ακριβή θέση των σημάτων μέσα στον εγκέφαλο. Για να φανεί αυτό καλύτερα αντιπαραθέτουμε τα αρχικά μας δεδομένα με τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας.



Εικόνα 94 Αντιπαραθεση αρχικών δεδομένων-αποτελεσμάτων

Για την συγκεκριμένη μέθοδο δοκιμάστηκαν διάφοροι συνδυασμοί διπόλων-θέσεων με εξ ίσου καλά αποτελέσματα. Η καλή απόκριση του σε περιβάλλον εξομοίωσης μας οδήγησε στην χρήση του σε περιβάλλον πραγματικών δεδομένων.

#### 7.4.5 Αποτελέσματα σε πραγματικά δεδομένα

Το επόμενο στάδιο αξιολόγησης του αλγορίθμου ήταν η εφαρμογή του σε πραγματικά δεδομένα . Τον εφαρμόσαμε στα δεδομένα<sup>3</sup> όπου περιγράφονται στην παράγραφο 4.5 προκειμένου να επαληθεύσουμε την υπόθεση που διατυπώνεται στην παράγραφο 7.1.2.

Αρχικά χωρίσαμε το κάθε εγκεφαλογράφημα στις μπάντες συχνοτήτων ως εξής:

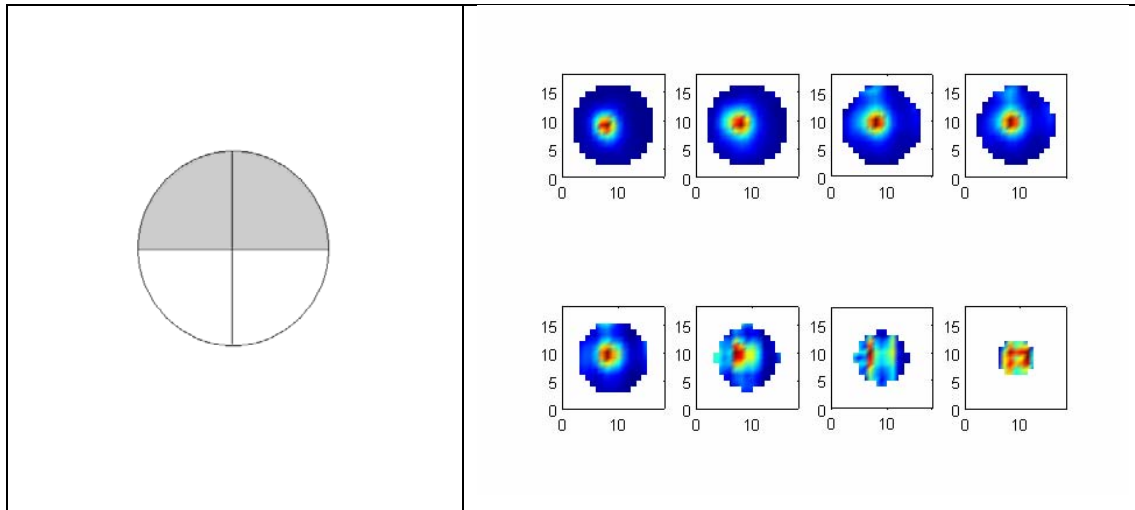
- Πηραμε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος
- Το πολλαπλασιάσαμε με τετραγωνικό παράθυρο στο πεδίο των συχνοτήτων με άνω και κάτω συχνότητες τις συχνότητες της μάντας που μελετούσαμε κάθε φορά
- Εφαρμόσαμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο φιλτραρισμένο σήμα μας.
- Το σήμα μας αυτό δίνεται σαν είσοδος στο σύστημά μας

Για κάθε εγκεφαλογράφημα εφαρμόσαμε PCA και κρατήσαμε τις ιδιοτιμές εκείνες που το άθροισμα τους ήταν ίσο με 90%. Για κάθε εγκεφαλογράφημα του δείγματός μας υπολογίσαμε την συνάρτηση RMS και τοποθετήσαμε την κάθε συνιστώσα στο ελάχιστο της συνάρτησης αυτής.

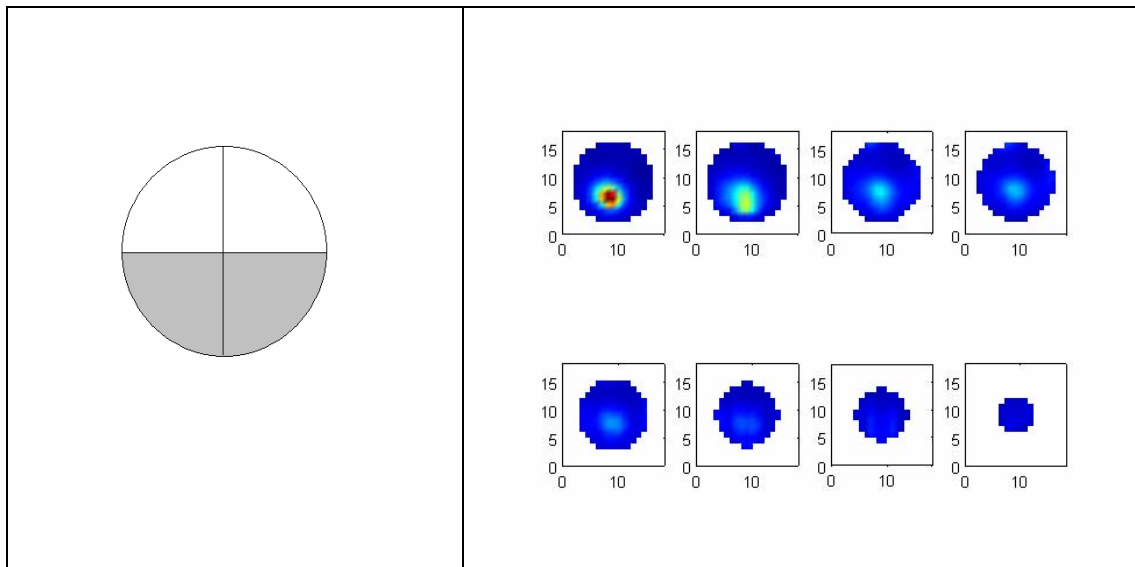
Αρχικά ας δούμε τα διαγράμματα ψευδοχρωματισμού της πρώτης συνιστώσας (συνιστώσα με την περισσότερη ενέργεια) για ένα εγκεφαλογράφημα προκειμένου να εξετάσουμε αν τα μέγιστα της συνάρτησης  $1/\text{RMS}$  διακρίνονται ευκρινώς .

---

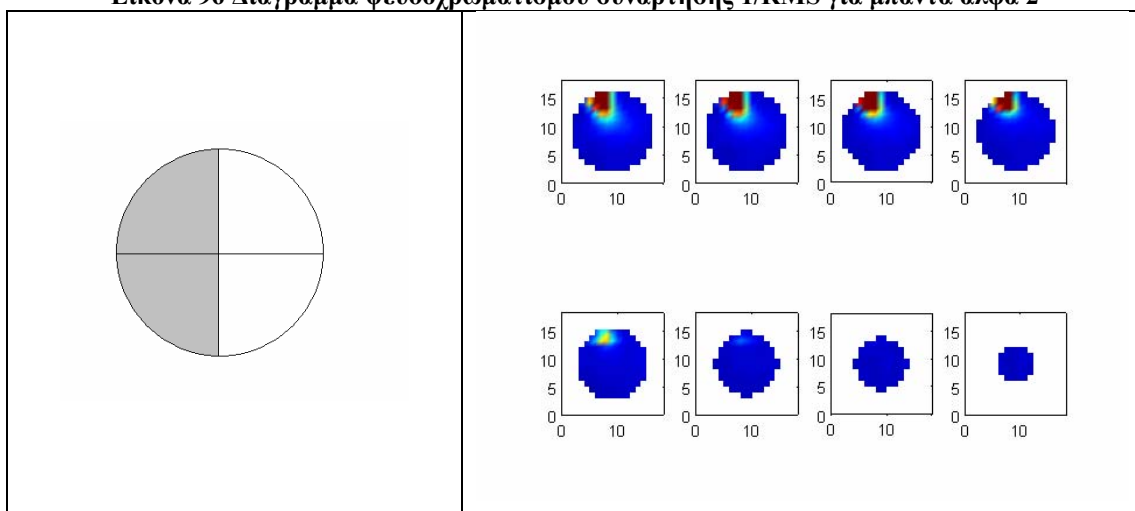
<sup>3</sup> Χρησιμοποιήσαμε τα εγκεφαλογράφημα τύπου «Ε» αφού σε αυτά αναφέρεται η υπόθεση που έχουμε κάνει



Εικόνα 95 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης  $1/\text{RMS}$  για μπάνα θήτα



Εικόνα 96 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης  $1/\text{RMS}$  για μπάνα άλφα 2

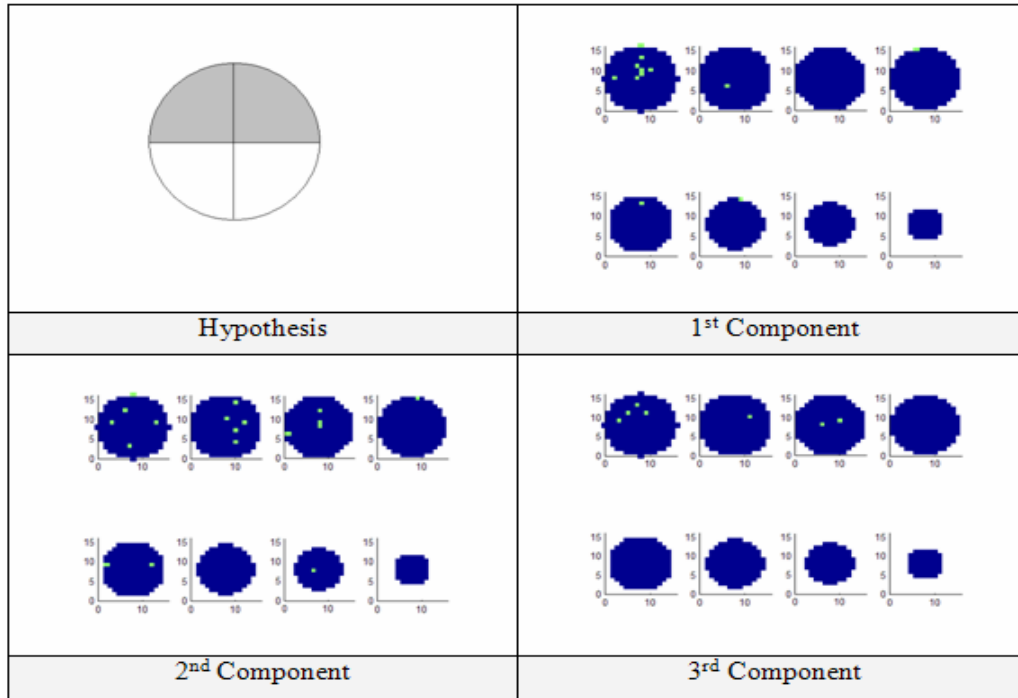


Εικόνα 97 Διάγραμμα ψευδοχρωματισμού συνάρτησης  $1/\text{RMS}$  για μπάνα γάμα 1

Στην συνέχεια εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο σε ολόκληρο το δείγμα μας και σημειώσαμε τις θέσεις που τοποθετεί ο αλγόριθμος μας κάθε συνιστώσα . Για κάθε

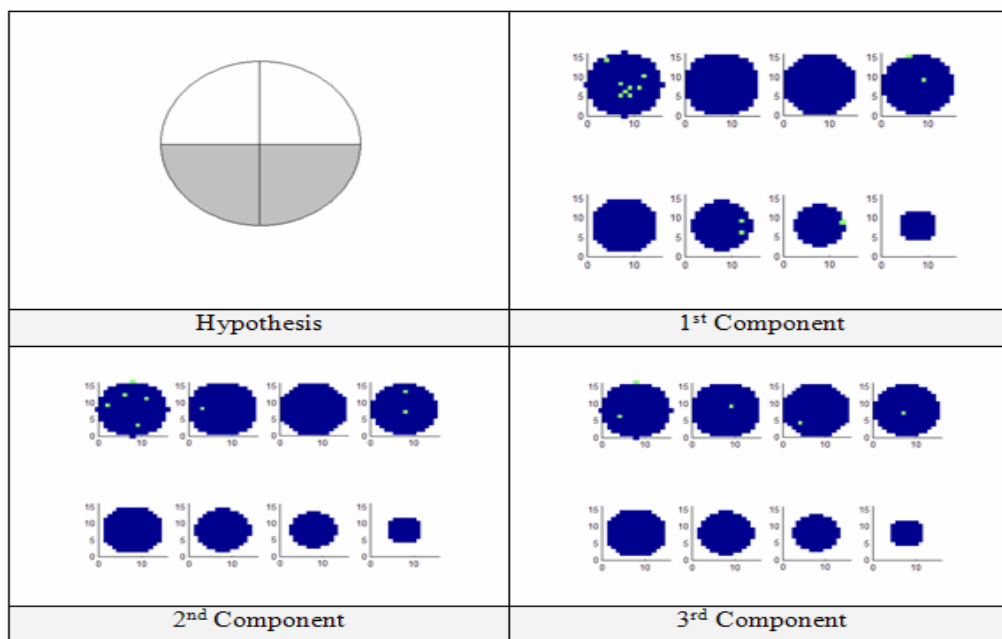
μπάντα δείχνουμε τις τρεις πρώτες συνιστώσες από όλα τα εγκεφαλογραφήματα .  
Υπενθυμίζουμε ότι οι συνιστώσες παρουσιάζονται κατά σειρά φθίνουσας ενέργειας.

Για την μπάντα θήτα (4-8 Hz) έχουμε:



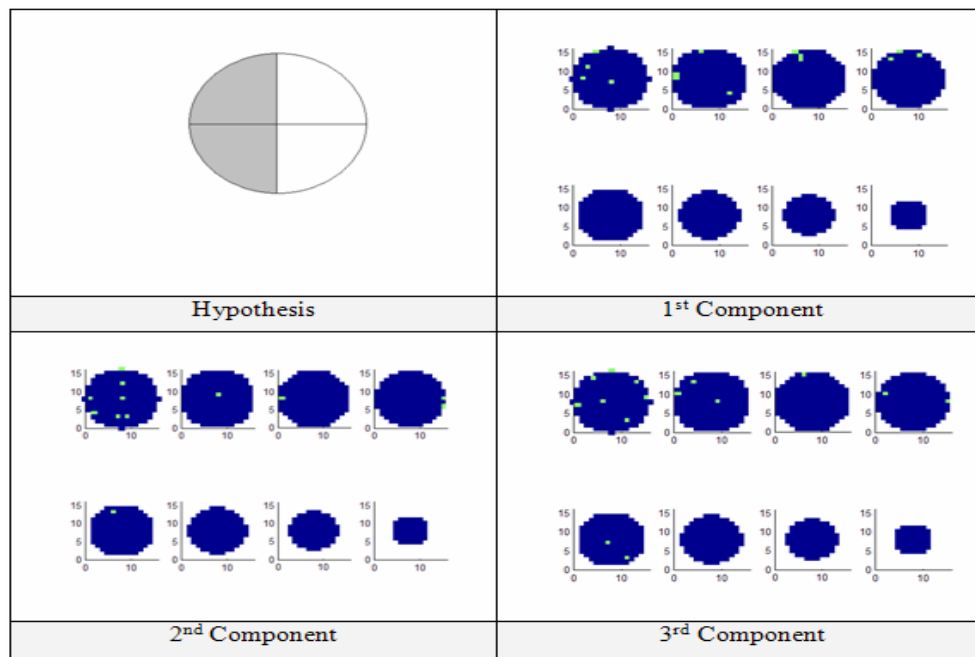
Εικόνα 98 θέσεις διπόλων για μπάντα θήτα

Για την μπάντα άλφα 2 (10-13 Hz) έχουμε:



Εικόνα 99 Θέσεις διπόλων για μπάντα άλφα 2

Για την μπάντα γάμα 1:



Εικόνα 100 Θέσεις διπόλων για μπάντα γάμα 1

Βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των συνιστωσών (ειδικά αυτών με την περισσότερη ενέργεια ) συμπεριλαμβάνονται στις σωστές περιοχές ενεργοποίησης .Τα αποτελέσματα μας είναι πολύ καλύτερα από τους αλγορίθμους που στηρίζονται σε μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων (MN,WMN,LORETA) .Η χρήση αυτής της μεθόδου μπορεί να αντιμετωπίσει το αντίστροφο πρόβλημα .Το μόνο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι ο πλήρης υπολογισμός των RMS συναρτήσεων .Μπορούμε στο μέλλον να χρησιμοποιήσουμε αυτών τον αλγόριθμο με διαφορετικές μεθόδους ελαχιστοποίησης προκειμένου να πετύχουμε καλύτερα αποτελέσματα.

## 8 Συμπεράσματα – μελλοντική δουλειά

Έχοντας εξετάσει τους κυριότερους αλγόριθμους που έχουν προταθεί για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος είμαστε σε θέση να κάνουμε κάποια σχόλια – προβλέψεις για το πως θα πρέπει να κινηθεί η έρευνα μελλοντικά .

### 8.1 Σχετικά με τους αλγόριθμους

Η πρώτη ομάδα αλγορίθμων που παρουσιάστηκε (αλγόριθμοι άμεσης επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος) έχουν κατά καιρούς κατηγορηθεί σαν μη βελτιστοι μια και οι λύσεις που παράγουν (βασισμένες σε ελαχιστοποίηση νόρμας) δεν έχουν κάποιο λογικό υπόβαθρο στην νευροφυσιολογία [7] .

Αντίθετα ο διαχωρισμός του προβλήματος σε δυο μέρη (διαχωρισμός ανεξάρτητων συνιστωσών και τοποθέτηση πηγών στο εσωτερικό του εγκεφάλου) μπορεί να παράγει καλύτερα αποτελέσματα. Σε αυτό το συμπέρασμα οδηγούμαστε τόσο από τα αποτελέσματα σε επίπεδο εξομοίωσης όσο και σε επίπεδο δοκιμής σε πραγματικά σήματα.

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του υπολογισμού ολόκληρης της συνάρτησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMS error) προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Το γεγονός ότι μετασχηματίσαμε το αρχικό πρόβλημα σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μας δίνει αφορμές να δοκιμάσουμε στο μέλλον σύγχρονες μεθόδους ελαχιστοποίησης όπως γενετικούς αλγόριθμους και νευρωνικά δίκτυα. Σε πρόσφατες ερευνητικές εργασίες έχει καταστεί σαφές ότι η λύση του αντίστροφου προβλήματος πρέπει να περάσει αναγκαστικά από την μοντέρνα θεωρία της ελαχιστοποίησης .Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα [56][57] (χρήση νευρωνικών δικτύων) [59] (χρήση γενετικών αλγορίθμων) [22] (χρήση αλγορίθμου simplex) .

## 8.2 Σχετικά με την μοντελοποίηση του εγκεφάλου

Ένα άλλο σημείο άξιο σχολιασμού είναι η μοντελοποίηση του ανθρώπινου εγκεφάλου . Η κατασκευή ενός μοντέλου ανθρώπινου εγκεφάλου κοινά αποδεκτό είναι ένας στόχος που πρέπει να τεθεί στους ερευνητές ανά τον κόσμο. Σε αυτό το σημείο προς το παρόν υπάρχει αρκετή σύγχυση ακόμη σχετικά με το ποιο μοντέλο είναι το βέλτιστο . Ακόμα και αν δεν υιοθετηθεί η άποψη του μοναδικά κοινά αποδεκτού μοντέλου θα πρέπει να συμφωνηθεί μια μεθοδολογία κοινά αποδεκτή για την κατασκευή μοντέλου ανάλογα με τον ασθενή . Εδώ μπορεί να παίζει πολύ σημαντικό ρόλο η ολοκλήρωση της πληροφορίας με την χρήση εξετάσεων MRI που θα λαμβάνονται παράλληλα με το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα . Η ακαθόριστη φύση του αντίστροφου προβλήματος θα πρέπει να μας οδηγήσει στην συνδυασμένη χρήση διαφόρων πηγών λήψης σήματος (όχι μόνο με χρήση ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος η μαγνητοεγκεφαλογραφήματος) προκειμένου να μειώσουμε τον βαθμό αβεβαιότητας μας όσον αφορά την πραγματική θέση των διπόλων .

Νέα ώθηση στην μελέτη του ανθρώπινου εγκεφάλου και μαζί και του αντίστροφου προβλήματος θα αναμένεται να δώσει με την ολοκλήρωση του το project μοντελοποίησης του ανθρώπινου εγκεφάλου [60] (Blue Brain Project) που φιλοδοξεί να μοντελοποιήσει τον εγκέφαλο σε επίπεδο μορίου με σκοπό να δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως τον τρόπο που μεταδίδονται τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία εντός του εγκεφάλου και πως αυτά συνδέονται με τις διάφορες εγκεφαλικές δραστηριότητες. Το project γίνεται από το ομοσπονδιακό πολυτεχνείο της Λοζάννης σε συνεργασία με την IBM και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση . Μέσα από μια τέτοια εργασία θα μπορούσαν να εξαχθούν μοντέλα περισσότερο ακριβή από αυτά που χρησιμοποιούνται σήμερα.

Η αξιόπιστη λύση στο αντίστροφο πρόβλημα θα ωθήσει την έρευνα στο επίπεδο της μελέτης του εγκεφάλου και στην εύρεση διαγνωστικών μεθόδων για αρρώστιες όπως επιληψία , καρκίνο του εγκεφάλου κ.α. ενώ θα βοηθήσει στην αποκρυπτογράφηση του τρόπου με τον οποίο επιτελούνται οι πνευματικές λειτουργίες.



## 9 Παράρτημα

### 9.1 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας και μαθηματικοί ορισμοί

Στο παρόν μέρος του παραρτήματος παρατίθενται μερικοί ποιο εκτεταμένοι ορισμοί και στοιχεία γραμμικής άλγεβρας που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Η παρουσίαση τους γίνεται σ' αυτό το σημείο για να μην υπάρχει η πολλαπλή επανάληψη τους στα κεφάλαια που παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι καθώς και για την ποιο κατανοητή παρουσίαση των αλγορίθμων.

#### 9.1.1 Γινόμενο Kronecker

Το γινόμενο Kronecker όπως μπορούμε να δούμε και στο [4] αποτελεί μια πράξη μεταξύ πινάκων που ορίζεται ως εξής:

Έστω ο πίνακας  $A$  διαστάσεων  $m \times n$  και ο πίνακας  $B$  διαστάσεων  $p \times q$  ορίζουμε σαν γινόμενο kronecker (ή direct product) μεταξύ των δυο πινάκων και συμβολίζουμε  $A \otimes B$  τον πίνακα  $C$  διαστάσεων  $(mp) \times (nq)$  τέτοιον ώστε:

$$C = A \otimes B \quad (9.1)$$

Με στοιχεία:

$$c_{\alpha\beta} = a_{ij} b_{kl} \quad (9.2)$$

Όπου:

$$a = p(i-1) + k \quad (9.3)$$

$$\beta = q(j-1) + l \quad (9.4)$$

Για παράδειγμα αν ο  $A$  είναι  $2 \times 2$  και ο  $B$  είναι  $3 \times 2$  τότε το γινόμενο kronecker  $A \otimes B$  θα είναι ο πίνακας  $6 \times 4$  :

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

### 9.1.2 Ψευδοαντίστροφος πίνακας Moore-Penrose

Για έναν οποιονδήποτε πίνακα  $B$  διαστάσεων  $m \times n$  ορίζουμε τον ψευδοαντίστροφο πίνακα Moore-Penrose και συμβολίζουμε  $B^\dagger$  διαστάσεων  $n \times m$  τον πίνακα για τον οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες [1]:

$$BB^\dagger B = B \quad (9.6)$$

$$B^\dagger BB^\dagger = B^\dagger \quad (9.7)$$

$$(BB^\dagger)^T = BB^T \quad (9.8)$$

$$(B^\dagger B)^T = B^\dagger B \quad (9.9)$$

Ο πίνακας Moore-Penrose ονομάζεται και γενικευμένος αντίστροφος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα της μορφής

$$y = Bx \quad (9.10)$$

Όπου για τον  $B$  ισχύει  $n \gg m$ . Σ' αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Moore Penrose είναι

$$B^\dagger = (B^T B)^{-1} B^T \quad (9.11)$$

Η λύση που ικανοποιεί την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων . Σε περίπτωση που ο πίνακας  $B$  είναι τετραγωνικός και υπάρχει ο αντίστροφός του τότε ισχύει η σχέση:

$$B^{-1} = B^\dagger \quad (9.12)$$

Ένας αριθμητικά αποδοτικός τρόπος για να υπολογίσουμε τον ψευδοαντίστροφο πίνακα [1] είναι να χρησιμοποιήσουμε Singular Value Decomposition στον πίνακα  $B$  δηλαδή

$$B = U \cdot S \cdot V^T \quad (9.13)$$

και στην συνέχεια υπολογίζουμε τον ψευδοαντίστροφο από την παρακάτω σχέση:

$$B = V \cdot S^{-1} \cdot U^T \quad (9.14)$$

Ο αντίστροφος του  $S$  είναι εύκολο να υπολογιστεί μια και είναι διαγώνιος οπότε ο αντίστροφος θα είναι και αυτός διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου  $\frac{1}{s_i}$  όπου  $s_i$  τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα  $S$ .

### 9.1.3 Singular value decomposition (SVD)

Ο μετασχηματισμός **SVD** είναι ένα μαθηματικό «εργαλείο» που βρίσκει πληθώρα εφαρμογών στον χώρο της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Στην ουσία αποτελεί την παραγοντοποίηση ενός πίνακα σε γινόμενο τριών πινάκων οι οποίοι μπορούν στην συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να μειωθεί ο θόρυβος του σήματος μας ή να αναπαρασταθεί μελλοντικά το σήμα μας από τις σημαντικότερες ιδιοτιμές και ιδοδιανύσματα του. Συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός SVD έχει ως εξής:

Οποιοσδήποτε πίνακας  $A$  διαστάσεων  $m \times n$  με  $m > n$  μπορεί να γραφτεί [2] σαν γινόμενο τριών πινάκων δηλαδή

$$A = U D V^T \quad (9.15)$$

Όπου ισχύουν οι εξής ιδιότητες :

$$U^T U = V^T V = I \quad (9.16)$$

Και ο πίνακας  $D$  είναι διαγώνιος με στοιχεία της κύριας διαγωνίου τις singular τιμές του πίνακα. Ο μετασχηματισμός SVD μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά με την μέθοδο LAPACK [5]

### 9.1.4 Eigenvalue decomposition

Μια ειδική περίπτωση του SVD (singular value decomposition) αποτελεί ο eigenvalue decomposition μετασχηματισμός. Έτσι αν ένας πίνακας είναι τετραγωνικός και θετικά ορισμένος (positive definite) τότε μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή [3]

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad (9.17)$$

Όπου ο πίνακας D είναι διαγώνιος και έχει τις ιδιοτιμές<sup>4</sup> του πίνακα A και ο πίνακας P έχει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

**Σημείωση:** όταν υπάρχει το eigenvalue decomposition του πίνακα δηλαδή είναι τετραγωνικός και θετικά ορισμένος τότε συμπίπτει με το Singular value decomposition (SVD).

### 9.1.5 Υπολογισμός συσχέτισης υποχώρου (subspace correlation)

Κατά τον αλγόριθμο MUSIC μας ζητείται να υπολογίσουμε την συνάρτηση  $subcorr\{A, B\} = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_r\}$ . Ο αλγόριθμος που ακολουθούμε για τον υπολογισμό αυτό είναι ο ακόλουθος;

1. Έστω δυο πίνακες A, B. Αν είναι ορθογώνιοι τους ονομάζουμε  $U_A, U_B$  και συνεχίζουμε στο βήμα 3. Σε διαφορετική περίπτωση προχωράμε στο βήμα 2

2. Κάνουμε ένα SVD (singular value decomposition –δες παράγραφο 9.1.3) στους πίνακες A, B και παίρνουμε:

$$A = U_A \Sigma_A V_A^T \quad (9.18)$$

$$B = U_B \Sigma_B V_B^T \quad (9.19)$$

---

<sup>4</sup> Λυσείς της εξίσωσης  $\det(B - \lambda I)$  όπου I ο μοναδιαίος πίνακας

3.Υπολογίζουμε το γινόμενο  $C = U_A U_B^T$

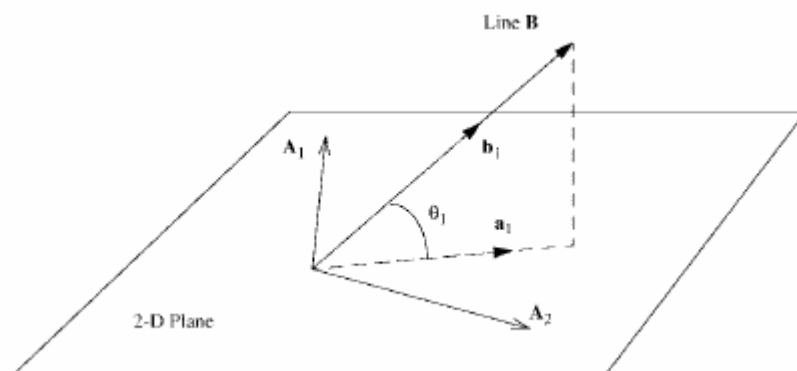
4.Οι τιμές  $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_r\}$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα C

### 9.1.5.1 Γεωμετρικό παράδειγμα

Για να γίνει ποιο κατανοητή η έννοια της συσχέτισης υποχώρου παρατίθεται το επόμενο γεωμετρικό παράδειγμα:

Από τις στήλες ενός πίνακα A διαστάσεων 3X2 ορίζουμε ένα επίπεδο στον τρισδιάστατο χώρο . Έστω και ο πίνακας B διαστάσεων 3X1.Ο τελευταίος αποτελεί έναν μονοδιάστατο χώρο . Επίσης οι υποχώροι των A,B διατρέχουν την αρχή των αξόνων.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση  $subcorr\{A,B\}$  μας δίνει 1 συντελεστή που αποτελεί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η γραμμή με το επίπεδο.



Εικόνα 101 Γεωμετρικό παράδειγμα

Στην Εικόνα 101 Γεωμετρικό παράδειγμα να αντιληφθούμε καλύτερα το παράδειγμα αυτό .Σε περίπτωση που είχαμε έναν πίνακα B 3X2 αντί για 3X1 τότε ο πρώτο συντελεστής θα ήταν άπειρος και ο δεύτερος θα ήταν το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα δυο επίπεδα [27]

### 9.1.6 Έννοια της στατιστικής ανεξαρτησίας

Στην ενότητα της στατιστικής προεπεξεργασίας του εγκεφαλογραφήματος έγινε λόγος για ανεξαρτησία . Σε αυτήν την ενότητα θα εξηγήσουμε κάποιες έννοιες

προκειμένου να γίνει ποιο κατανοητή η φιλοσοφία της μεθόδου της ανάλυσης σε ανεξάρτητες συνιστώσες (Independent Component Analysis).

Για να γίνει αντιληπτή η έννοια της ανεξαρτησίας [23] ας θεωρήσουμε δυο τυχαίες μεταβλητές  $y_1, y_2$ . Οι δυο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες όταν η  $y_1$  δεν μας δίνει κάποια πληροφορία για το πως μεταβάλλεται η  $y_2$  και αντίστροφα. Για να ορίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας ποιο αυστηρά έχουμε:

Έστω η από κοινού (joint) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) των δυο μεταβλητών  $p(y_1, y_2)$  και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $y_1$

$$p(y_1) = \int p(y_1, y_2) dy_2 \quad (9.20)$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε την  $p(y_2)$ . Οι δυο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφτεί στην παραγοντοποιημένη μορφή:

$$p(y_1, y_2) = p(y_1)p(y_2) \quad (9.21)$$

Αυτός ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε  $n$  μεταβλητές με όμοιο τρόπο.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να παρατηρήσουμε την πολύ χρήσιμη ιδιότητα που προκύπτει λόγω της ύπαρξης της ανεξαρτησίας. Συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχτεί ότι:

$$E\{h(y_1)h(y_2)\} = E\{h(y_1)\}E\{h(y_2)\} \quad (9.22)$$

Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $h(\cdot)$ . Στην περίπτωση που έχουμε  $h(y) = y$  τότε παίρνουμε:

$$E\{y_1 y_2\} = E\{y_1\}E\{y_2\}$$

Που είναι ορισμός της μηδενικής συσχέτισης

### 9.1.6.1 Δημιουργία μη γκαουσιανών μεταβλητών

Το κλειδί για την εξαγωγή ανεξάρτητων συνιστωσών είναι η μεγιστοποίηση ενός μέτρου που δηλώνει πόσο μη γκαουσιανές είναι δυο μεταβλητές.

Από το θεώρημα της κεντρικής τιμής [23] έχουμε ότι το άθροισμα δυο τυχαίων μεταβλητών τείνει να προσεγγίσει μια γκαουσιανή κατανομή. Δηλαδή το άθροισμα θα έχει χαρακτηριστικά γκαουσιανής κατανομής περισσότερο από τις δυο μεταβλητές μεμονωμένα.

Στην περίπτωση μας τα αρχικά σήματα του εγκεφάλου συσχετίζονται γραμμικά με αποτέλεσμα να παίρνουμε το μετρήσιμο σήμα. Τα αρχικά σήματα θα είναι ποιο μη-γκαουσιαννα από τον γραμμικό συνδυασμό τους. Συνεπώς αν βρούμε ένα κριτήριο που να μετράει πόσο μη γκαουσιανο είναι ένα σήμα και το μεγιστοποιήσουμε θα καταλήξουμε σε μια εκτίμηση ανεξάρτητων συνιστωσών.

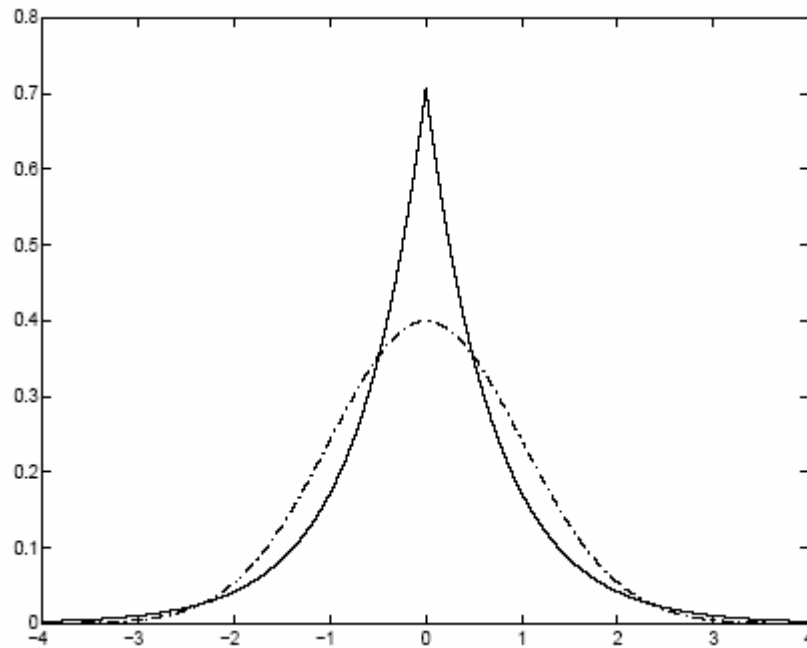
#### 9.1.6.1.1 Κύρτωση

Ένα κλασσικό μέτρο για την εκτίμηση της ποσότητας μη-gaussian (non gaussianity) είναι η κύρτωση (kurtosis). Για μια τυχαία μεταβλητή  $y$  ορίζεται ως εξής:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3\left(E\{y^2\}\right)^2 \quad (9.23)$$

Αν μια μεταβλητή είναι γκαουσιανή ισχύει  $E\{y^4\} = 3\left(E\{y^2\}\right)^2$ . Έτσι η συνάρτηση της κύρτωσης για μια γκαουσιανή μεταβλητή θα παίρνει μηδενική τιμή. Οι υπόλοιπες μεταβλητές συνήθως έχουν μη μηδενική τιμή κύρτωσης (υπαρχουν και κάποιες μεμονωμένες που έχουν μηδενική κύρτωση χωρίς να είναι γκαουσιανές αλλά είναι πολύ σπάνιες και δεν επηρεάζουν την ανάλυση μας).

Οι μεταβλητές για τις οποίες η κύρτωση παίρνει αρνητικές τιμές ονομάζονται υπογκαουσιανές (subgaussian) ενώ αυτές που παίρνουν θετικές τιμές ονομάζονται υπεργκαουσιανές (supergaussian). Στην παρακάτω εικόνα μπορούμε να δούμε την αντιπαραβολή μιας γκαουσιανής και μιας υπεργκαουσιανής μεταβλητής



Εικόνα 102 Γκαουσιανή κατανομή (διακεκομμένη γραμμή) και υπεργκαουσιανή κατανομή

Η κύρτωση χρησιμοποιείται σαν μετρικό της ανεξαρτησίας γιατί θεωρητικά αποτελεί μια απλή έννοια ενώ είναι απλός και ο υπολογισμός της. Για δυο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x_1, x_2$  και έναν βαθμωτό συντελεστή  $a$  ισχύουν οι εξής ιδιότητες (μπορούν να αποδειχτούν εύκολα με βάση τον ορισμό)

$$kurt(x_1 + x_2) = kurt(x_1) + kurt(x_2) \quad (9.24)$$

$$kurt(ax_1) = a^4 kurt(x_2) \quad (9.25)$$

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε ένα παράδειγμα για να φανεί ο τρόπος με τον οποίο η κύρτωση χρησιμοποιείται σαν μετρικό ανεξαρτησίας.

Έστω λοιπόν το πρόβλημα της ανάλυσης σε ανεξάρτητες συνιστώσες:

$$F = MS \quad (9.26)$$

Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι ψάχνουμε δυο ανεξάρτητες συνιστώσες  $s_1, s_2$  και έστω ότι θα έχουν μη μηδενικές τιμές κύρτωσης  $kurt(s_1), kurt(s_2)$  (διαφορετικές του μηδέν) αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των δεδομένων μας  $y = w^T x$



Επίσης ορίζουμε και τον μετασχηματισμό  $z = M^T w$

Έτσι έχουμε:

$$y = w^T F = w^T MS = z^T S = z_1 s_1 + z_2 s_2 \quad (9.27)$$

Δηλαδή το  $y$  αποτελεί έναν γραμμικό συνδυασμό των  $s_1, s_2$ . Όπως είπαμε το άθροισμα δυο τυχαίων μεταβλητών παρουσιάζει ποιο γκαουσιαννη κατανομή από κάθε μεταβλητή ξεχωριστά.

Από τις ιδιότητες που δείξαμε προηγουμένως θα έχουμε:

$$kurt(y) = kurt(z_1 s_1) + kurt(z_2 s_2) = z_1^4 kurt(s_1) + z_2^4 kurt(s_2) \quad (9.28)$$

Έτσι αν βρούμε ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε να μεγιστοποιείται η συνάρτηση  $|kurt(y)|$  τότε η μεταβλητή  $y$  θα είναι όσο γκαουσιανή όσο και μια από τις  $s_1, s_2$ . Με αυτό τον τρόπο η  $y$  θα προσεγγίσει μια από τις ανεξάρτητες συνιστώσες  $s_1, s_2$ .

Αν επιπλέον κάνουμε την υπόθεση για την μεταβλητή  $y$  ισχύει  $E\{y^2\} = 1$  τότε θα πρέπει να ισχύει και η εξίσωση:

$$z_1^2 + z_2^2 = 1 \quad (9.29)$$

Έτσι το πρόβλημα μας μετασχηματίζεται στο ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης  
Ποια είναι τα μέγιστα της συνάρτησης

$$|kurt(y)| = |z_1^4 kurt(s_1) + z_2^4 kurt(s_2)| \quad (9.30)$$

Όταν τα  $z_1, z_2$  είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου.

#### **9.1.6.1.2 Αρνητική Εντροπία (Negentropy)**

Αυτή η προσέγγιση μας έρχεται από τον επιστήμη της θεωρίας πληροφορίας .η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής μας δίνει το πόσοι της πληροφορίας που

εμπεριέχει η μεταβλητή αυτή . Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή  $Y$  η εντροπία ορίζεται ως εξής :

$$H(Y) = -\sum_i P(Y = a_i) \log(Y = a_i) \quad (9.31)$$

Σε περίπτωση που η μεταβλητή  $Y$  είναι συνεχής (συμβολίζουμε με  $y$ ) τότε ορίζουμε την διαφορική εντροπία σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$H(y) = -\int f(y) \log(y) dy \quad (9.32)$$

Απο την θεωρία της πληροφορίας προκύπτει ότι η γκαουσιανή μεταβλητή διαθέτει την μεγαλύτερη δυνατή τιμή εντροπίας . Έτσι ένα μέτρο για μη-γκαουσιανότητα μπορεί να εξαχθεί από την σχέση:

$$J(y) = H(y_{Gauss}) - H(y) \quad (9.33)$$

Όπου  $y_{gauss}$  είναι η αντίστοιχη μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Gauss και παρουσιάζει την ίδια συνδιακύμανση με την μεταβλητή  $y$  .

Την ποσότητα  $J$  την ονομάζουμε αρνητική εντροπία ( negentropy ). Η μεγιστοποίηση αυτής της ποσότητας μας οδηγεί στην δημιουργία ανεξάρτητων συνιστωσών . Το ζήτημα είναι με τους τρόπους μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $J$  . Μια εξίσωση που έχει προταθεί [23] είναι η ακόλουθη:

$$J(y) \approx \frac{1}{12} E\{y^3\}^2 + \frac{1}{48} kurt(y)^2 \quad (9.34)$$

Η τυχαία μεταβλητή  $y$  θεωρούμε ότι έχει μέση τιμή μηδέν και μοναδιαία τυπική απόκλιση . Μια εναλλακτική [23] προσέγγιση που αποφεύγει την χρήση της συνάρτησης  $kurt()$  και σχετίζεται περισσότερο με την έννοια της εντροπίας είναι η ακόλουθη.

$$J(y) = \sum_i k_i \left[ E\{G_i(y)\} - E\{G_i(v)\} \right]^2 \quad (9.35)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα  $J(y)$  είναι ανάλογη με την ποσότητα  $\left[ E\{G_i(y)\} - E\{G_i(v)\} \right]^2$ . Στην θέση των συναρτήσεων  $G_i$  διαλέγουμε μια μη τετραγωνική συνάρτηση (non-quadratic). Συνήθως χρησιμοποιούμε μια εκ των:

$$G_1(u) = \frac{1}{a_1} \log \cosh a_1 u \quad (9.36)$$

$$G_2(u) = -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (9.37)$$

Η σταθερά  $a_1$  παίρνει μια τιμή μέσα στο διάστημα  $[1, 2]$ .

### 9.1.6.1.3 Ελαχιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας

Η αμοιβαία πληροφορία ανάμεσα σε  $m$  τυχαίες διακριτές μεταβλητές  $y_i$   $i = 1, \dots, m$  ορίζεται ως εξής:

$$I(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m H(y_i) - H(y) \quad (9.38)$$

Όπου με  $y$  συμβολίζουμε το διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών. Η αμοιβαία πληροφορία είναι ένα μέτρο για να προσδιορίσουμε τον βαθμό ανεξαρτησίας τυχαίων μεταβλητών. Επίσης μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα της είναι η ακόλουθη.

Αν  $y = Wx$  τότε ισχύει;

$$I(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m H(y_i) - H(x) - \log |\det(W)| \quad (9.39)$$

Αν επιπλέον τα δεδομένα μας παρουσιάζουν μηδενική συσχέτιση (Έχει δηλαδή προηγηθεί προεπεξεργασία PCA) δηλαδή ισχύει μπορεί να αποδειχτεί ότι η ποσότητα  $|\det(W)|$  είναι σταθερή. Οπότε η τελευταία εξίσωση γράφεται;

$$I(y_1, y_2, \dots, y_m) = C - \sum_{i=1}^m H(y_i) - H(x) = C - J(y_i) \quad (9.40)$$

Όπου  $C$  η σταθερά που προκύπτει από την ποσότητα  $\log|\det(W)|$ . Η τελευταία σχέση δίνει την σχέση μεταξύ της αρνητικής εντροπίας και της αμοιβαίας πληροφορίας.

#### 9.1.6.1.4 Μέγιστη πιθανοφάνεια (Maximum likelihood)

Μια άλλη πολύ δημοφιλής προσέγγιση της ανεξαρτησίας προέρχεται από την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum likelihood estimation). Αρχικά ορίζουμε την πιθανοφάνεια  $L$  και στην συνέχεια εφαρμόζουμε μεθόδους βελτιστοποίησης προκειμένου να την μεγιστοποιήσουμε. Η πιθανοφάνεια (Likelihood) ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$L = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \log f_i(w_i^T x(t) + T \log|\det(W)|) \quad (9.41)$$

Οι συναρτήσεις  $f_i$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (pdf) των σημάτων. Τα διανύσματα  $w_i$  είναι οι στήλες του πίνακα  $W$ .

#### 9.1.6.2 Σχέση ισχύς ιδιοτιμών σήματος

Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε την σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές του πίνακα συνδιακύμανσης και στην ισχύ του αρχικού σήματος. Αρχικά θα ορίσουμε το ίχνος (trace) ενός πίνακα και μια ιδιότητα που θα μας χρησιμεύσει στην απόδειξη. Το trace ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  διαστάσης  $N$  ορίζεται σαν το αθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του. Δηλαδή:

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^N a_{ii} \quad (9.42)$$

Για το trace ενός πίνακα ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA) \quad (9.43)$$

Ας επιστρέψουμε πάλι πίσω στο αρχικό μας πρόβλημα. Έστω ένα πραγματικό σήμα  $\underline{x}$ . Ο πίνακας συνδιακύμανσης του θα είναι ο  $R = E\{\underline{x} \cdot \underline{x}^T\}$ . Το ίχνος (trace) του πίνακα  $R$  θα είναι :

$$\text{trace}(R) = \text{trace}\left(E\{\underline{x} \cdot \underline{x}^T\}\right) = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i^2 \quad (9.44)$$

Δηλαδή ισούται με την μέση ισχύ του σήματος. Επίσης ισχύει:

$$\text{trace}(R) = \text{trace}(U \Lambda U^T) = \text{trace}(\Lambda U U^T) = \text{trace}(\Lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (9.45)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα συνδιακύμανσης εκφράζουν την ισχύ του αρχικού σήματος  $\underline{x}$ .

### 9.1.6.3 Ανεξαρτησία και συσχέτιση

Δυο μεταβλητές ονομάζονται ασυσχέτιστες όταν ισχύει:

$$E\{y_1 y_2\} - E\{y_1\} E\{y_2\} = 0 \quad (9.46)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για ανεξάρτητες μεταβλητές όπως δείξαμε στην (9.22). Το αντίθετο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή δυο μεταβλητές που είναι ασυσχέτιστες δεν συνεπάγεται ότι είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν συναρτήσεις  $h(\cdot)$  για τις οποίες να μην ισχύει η (9.22). Αυτό μπορούμε να το δούμε με ένα αριθμητικό παράδειγμα: Έστω ότι οι δυο μεταβλητές παίρνουν διακριτές τιμές και με πιθανότητα  $\frac{1}{4}$  παίρνουν μια από τα 4 ζευγάρια τιμών : (0,1) , (0,-1) , (1,0) , (-1,0). Βλέπουμε ότι παρότι οι δυο μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες εντούτοις

$$E\{y_1^2, y_2^2\} = 0 \neq 1/4 = E\{y_1^2\} E\{y_2^2\} \quad (9.47)$$

Άρα οι μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες . Η εξασφάλιση της μηδενικής αυτοσυσχέτισης (PCA) χρησιμοποιείται μερικές φορές σαν προεπεξεργασία πριν την ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες προκειμένου να ελαττώσουμε τις διαστάσεις του προβλήματος και να ωφεληθούμε υπολογιστικά

## 9.2 Συντομογραφίες

Στο παρόν μέρος του παραρτήματος παρατίθενται οι διάφορες συντομογραφίες που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία . Παρότι οι ερμηνείες υπάρχουν διάσπαρτες στην εργασία κρίνεται αναγκαία η συγκεντρωτική παρουσίαση τους για λόγους που έχουν να κάνουν με την ευκολότερη εύρεση τους

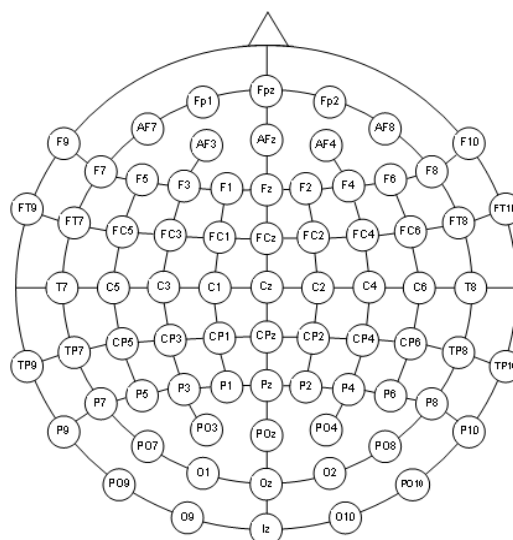
Πίνακας 5 Συντομογραφίες

Συντομογραφία	Αγγλική Ορολογία	Ελληνική Ορολογία
<b>EEG</b>	Electroencephalogram	Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα
<b>MEG</b>	Magnetoencephalogram	Μαγνητοεγκεφαλογράφημα
<b>ECG</b>	Electrocardiogram	Ηλεκτροκαρδιογράφημα
<b>FECG</b>	Fetus Electrocardiogram	Εμβρυακό ηλεκτροκαρδιογράφημα
<b>EMG</b>	Electromyogram	Ηλεκτρομυογράφημα
<b>MN</b>	Minimum norm	Ελάχιστη νόρμα
<b>WMN</b>	Weighted minimum norm	Ελάχιστη νόρμα με βάρη
<b>LORETA</b>	Low Resolution Electromagnetic Tomography	Ηλεκτρομαγνητική τομογραφία χαμηλής ανάλυσης
<b>FOCUSS</b>	Focal Underdetermined System Solution	Επικεντρωμένη υποκαθορισμένη λύση συστήματος
<b>MUSIC</b>	Multiple signal Classification	Κατηγοριοποίηση πολλαπλών σημάτων
<b>R-MUSIC</b>	Recursive Multiple signal	Επαναληπτική

	classification	κατηγοριοποίηση Πολλαπλών σημάτων
<b>RAP-MUSIC</b>	Recursively Applied and Projected Multiple signal Classification	Επαναληπτικά εφαρμοζόμενη και προβαλλόμενη κατηγοριοποίηση Πολλαπλών σημάτων
<b>PCA</b>	Principal Component analysis	Ανάλυση σε πρωτεύοντες συνιστώσες
<b>ICA</b>	Independent Component Analysis	Ανάλυση ανεξάρτητων συνιστωσών
<b>ISL</b>	Inverse Source localization	Αντίστροφος καθορισμός πηγής
<b>BSS</b>	Blind Signal Separation	Τυφλός διαχωρισμός σήματος
<b>AES</b>	American Engcephalographic Society	Αμερικανική Εγκεφαλογραφική εταιρία

### 9.3 Συντεταγμένες ηλεκτροδίων

Σε αυτό το σημείο του παραρτήματος κρίνεται σκόπιμη η παράθεση των πινάκων αναφοράς με τις συντεταγμένες των ηλεκτροδίων στο σύστημα 10%. Πρώτα Παραθετούμε το διαγραμμα με τις θέσεις των ηλεκτροδίων (Εικόνα 103 Τα ηλεκτρόδια στο σύστημα 10%)



**Εικόνα 103 Τα ηλεκτρόδια στο σύστημα 10%**

Πίνακας 6 Καρτεσιανές συντεταγμένες ηλεκτροδίων

	x	y	z			x	y	z
<b>Fp1</b>	-2,7	8,6	3,6		<b>F5</b>	-5,8	5,9	5,8
<b>Fp2</b>	2,7	8,6	3,6		<b>F6</b>	5,8	5,9	5,8
<b>F3</b>	-4,7	6,2	8,0		<b>FC5</b>	-5,5	3,2	6,6
<b>F4</b>	4,7	6,2	8,0		<b>FC6</b>	5,5	3,2	6,6
<b>C3</b>	-6,1	0,0	9,7		<b>C5</b>	-7,4	0,0	6,7
<b>C4</b>	6,1	0,0	9,7		<b>C6</b>	7,4	0,0	6,7
<b>P3</b>	-4,7	-6,2	8,0		<b>CP5</b>	-7,2	-2,7	6,6
<b>P4</b>	4,7	-6,2	8,0		<b>CP6</b>	7,2	-2,7	6,6
<b>O1</b>	-2,7	-8,6	3,6		<b>P5</b>	-5,8	-5,9	5,8
<b>O2</b>	2,7	-8,6	3,6		<b>P6</b>	5,8	-5,9	5,8
<b>F7</b>	-6,7	5,2	3,6		<b>AF7</b>	-5,0	7,2	3,6
<b>F8</b>	6,7	5,2	3,6		<b>AF8</b>	5,0	7,2	3,6
<b>T7</b>	-7,8	0,0	3,6		<b>FT7</b>	-7,6	2,8	3,6
<b>T8</b>	7,8	0,0	3,6		<b>FT8</b>	7,6	2,8	3,6
<b>P7</b>	-6,7	-5,2	3,6		<b>TP7</b>	-7,6	-2,8	3,6
<b>P8</b>	6,7	-5,2	3,6		<b>TP8</b>	7,6	-2,8	3,6
<b>Fz</b>	0,0	6,7	9,5		<b>PO7</b>	-5,0	-7,2	3,6
<b>Cz</b>	0,0	0,0	12,0		<b>PO8</b>	5,0	-7,2	3,6
<b>Pz</b>	0,0	-6,7	9,5		<b>F9</b>	-6,0	4,8	0,0
<b>F1</b>	-2,4	6,5	9,0		<b>F10</b>	6,0	4,8	0,0
<b>F2</b>	2,4	6,5	9,0		<b>FT9</b>	-6,9	2,5	0,0
<b>FC1</b>	-3,0	3,3	11,0		<b>FT10</b>	6,9	2,5	0,0
<b>FC2</b>	3,0	3,3	11,0		<b>TP9</b>	-7,3	-2,5	0,0
<b>C1</b>	-3,4	0,0	11,6		<b>TP10</b>	7,3	-2,5	0,0
<b>C2</b>	3,4	0,0	11,6		<b>P9</b>	-6,3	-4,8	0,0
<b>CP1</b>	-3,0	-3,2	11,0		<b>P10</b>	6,3	-4,8	0,0
<b>CP2</b>	3,0	-3,2	11,0		<b>PO9</b>	-4,7	-6,7	0,0
<b>P1</b>	-2,4	-6,5	9,0		<b>PO10</b>	4,7	-6,7	0,0
<b>P2</b>	2,4	-6,5	9,0		<b>O9</b>	-2,5	-8,0	0,0
<b>AF3</b>	-3,4	7,0	6,4		<b>O10</b>	2,5	-8,0	0,0
<b>AF4</b>	3,4	7,0	6,4		<b>Fpz</b>	0,0	9,0	3,6
<b>FC3</b>	-5,5	3,2	9,4		<b>AFz</b>	0,0	8,3	6,9
<b>FC4</b>	5,5	3,2	9,4		<b>FCz</b>	0,0	3,4	11,3
<b>CP3</b>	-5,3	-3,2	9,4		<b>CPz</b>	0,0	-3,4	11,3
<b>CP4</b>	5,3	-3,2	9,4		<b>POz</b>	0,0	-8,3	6,9
<b>PO3</b>	-3,4	-7,9	6,4		<b>Oz</b>	0,0	-9,0	3,6
<b>PO4</b>	3,4	-7,9	6,4		<b>Iz</b>	0,0	--8,6	0,0

Τέλος παραθέτουμε τον πίνακα με τις σφαιρικές συντεταγμένες



Πίνακας 7 Πολικές συντεταγμένες ηλεκτροδίων

	Theta, Phi			Theta, Phi
Fp1	-92, -72		F5	-75, -41
Fp2	92, 72		F6	75, 41
F3	-60, -51		FC5	-72, -21
F4	60, 51		FC6	72, 21
C3	-46, 0		C5	-69, 0
C4	46, 0		C6	69, 0
P3	-60, 51		CP5	-72, 21
P4	60, -51		CP6	72, -21
O1	-92, 72		P5	-75, 41
O2	92, -72		P6	75, -41
F7	-92, -36		AF7	-92, -54
F8	92, 36		AF8	92, 54
T7	-92, 0		FT7	-92, -18
T8	92, 0		FT8	92, 18
P7	-92, 36		TP7	-92, 18
P8	92, -36		TP8	92, -18
Fz	46, 90		PO7	-92, 54
Cz	0, 0		PO8	92, -54
Pz	46, -90		F9	-115, -36
F1	-50, -68		F10	115, 36
F2	50, 68		FT9	-115, -18
FC1	-32, -45		FT10	115, 18
FC2	32, 45		TP9	-115, 18
C1	-23, 0		TP10	115, -18
C2	23, 0		P9	-115, 36
CP1	-32, 45		P10	115, -36
CP2	32, -45		PO9	-115, 54
P1	-50, 68		PO10	115, -54
P2	50, -68		O9	-115, 72
AF3	-74, -65		O10	115, -72
AF4	74, 65		Fpz	92, 90
FC3	-53, -33		AFz	69, 90
FC4	53, 33		FCz	23, 90
CP3	-52, 33		CPz	23, -90
CP4	52, -33		POz	69, -90
PO3	-74, 65		Oz	92, -90
PO4	74, -65		Iz	115, -90

Πίνακας 2 Σφαιρικές συντεταγμένες ηλεκτροδίων

Οι πίνακες παρατίθενται όπως παρουσιάζονται στο [38].

#### 9.4 Πακέτα λογισμικού για *source localization*

Για την λύση του προβλήματος του αντίστροφου καθορισμού πηγής έχουν αναπτυχθεί πακέτα λογισμικού τόσο σε εμπορικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο ανοικτού κώδικα . Σε αυτό το σημείο του παραρτήματος θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μερικά από αυτά τα πακέτα για να δώσουμε στον αναγνώστη μια σφαιρική

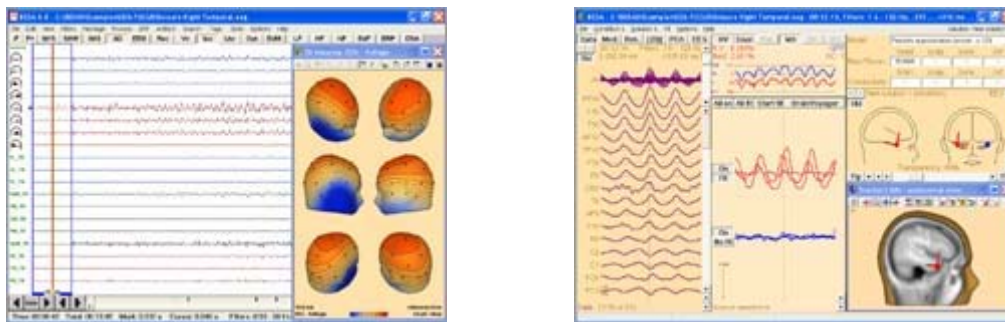
άποψη των προσπαθειών που έχουν γίνει για να λυθεί το πρόβλημα τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο εφαρμοσμένης έρευνας

### 9.4.1 Εμπορικά πακέτα

Θα ξεκινήσουμε με την αναφορά των εμπορικών πακέτων που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος

#### 9.4.1.1 BESA

Το πακέτο BESA (Brain Electrical Source Analysis) είναι ένα από τα σημαντικότερα εμπορικά πακέτα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος. Ο τρόπος λειτουργίας του περιγράφεται στα [39][40][41]. Υποστηρίζει ολοκλήρωση της πληροφορίας με υποστήριξη MRI καθώς και υποστήριξη της δημιουργίας μοντέλου εγκεφάλου. Οι δυνατότητες του πακέτου εκτείνονται στον υπολογισμό και απεικόνιση των δεδομένων



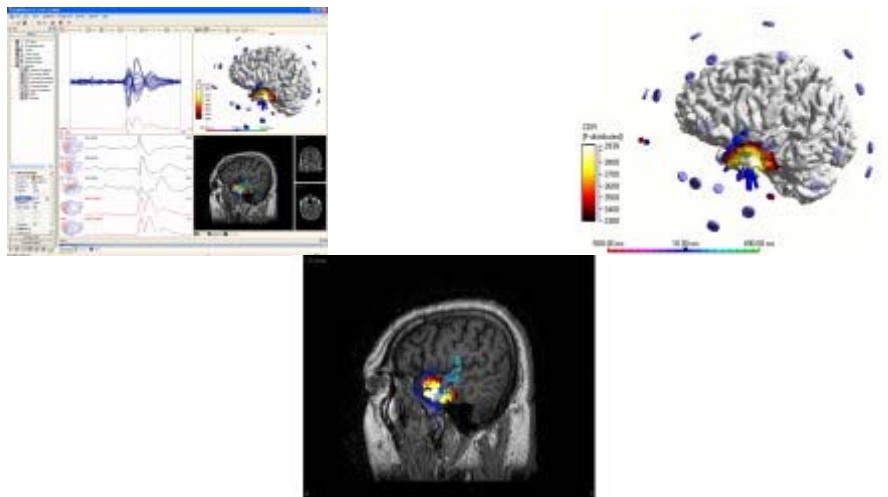
Εικόνα 104 snapshots από το πακέτο BESA

Στην Εικόνα 104 μπορούμε να δούμε μερικές φωτογραφίες από το περιβάλλον του προγράμματος. Συγκεκριμένα το πακέτο BESA υποστηρίζει τις εξής λειτουργίες:

- Υποστήριξη ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων (EEG)
- Υποστήριξη μαγνητοεγκεφαλογραφημάτων (MEG)
- Υποστήριξη Evoked Potentials –Evoked fields
- Υποστήριξη Event related potentials-Fields
- Ολοκλήρωση πληροφορίας με συνδυασμό MRI-EEG

### 9.4.1.2 CURRY

Ένα εναλλακτικό πακέτο λογισμικού για επεξεργασία εγκεφαλογραφημάτων και επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος είναι το CURRY [42].στην Εικόνα 105 μπορούμε να δούμε μερικές φωτογραφίες από το περιβάλλον του προγράμματος.



Εικόνα 105 Snapshot από το πακέτο CURRY

Χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε τις κυριότερες λειτουργίες που υποστηρίζει το πακέτο CURRY όπως περιγράφονται στο [42].

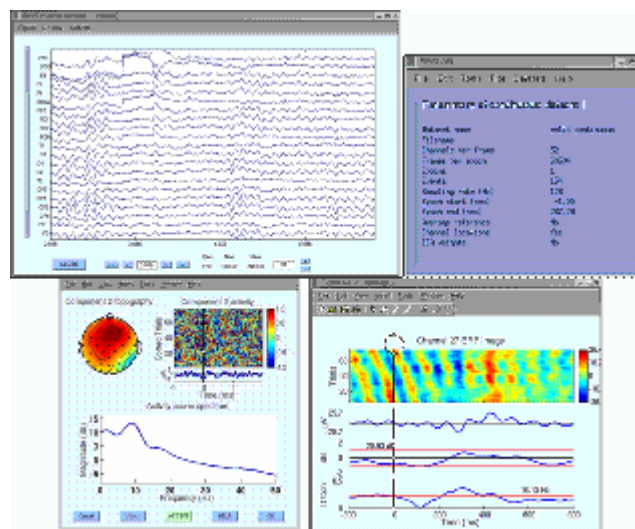
- Υποστήριξη δεδομένων EEG,MEG,MRI,CT,fMRI,PET,SPECT
- Υποστήριξη ανάλυσης δεδομένων σε γραμμικά ανεξαρτητες συνιστώσες (Independent Component Analysis)
- Υποστήριξη ρεαλιστικών μοντέλων εγκεφάλου με την μέθοδο BEM (Boundary Element Method)
- Υποστήριξη αλγορίθμων νορμών (L1,L2), LORETA , S-LORETA ,MUSIC
- Δυνατότητα για εισαγωγή περιορισμών με βάση κριτήρια ανατομίας-νευροφυσιολογίας.

## 9.4.2 Πακέτα ανοικτού λογισμικού

Έκτός από τα εμπορικά πακέτα έχουν αναπτυχθεί πακέτα ανοικτού λογισμικού για την επίλυση του προβλήματος του καθορισμού πηγής. Τα πακέτα αυτά έχουν αναπτυχθεί κατά κύριο λόγο από ανεξάρτητα ερευνητικά εργαστήρια και πανεπιστήμια με σκοπό την προώθηση της έρευνας στο πεδίο της μελέτης του εγκεφάλου. Χαρακτηριστικό τους είναι ότι προσφέρουν αρκετά δυνατά χαρακτηριστικά και αποτελούν εναλλακτική λύση για την αποφυγή ακριβών πακέτων λογισμικού.

### 9.4.2.1 EEGLAB

Το EEGLAB είναι ένα πακέτο που έχει αναπτυχθεί στο πανεπιστήμιο της California, San Diego. Έχει αναπτυχθεί εξολοκλήρου σε περιβάλλον MATLAB. Οι λειτουργίες του περιγράφονται αναλυτικά στα [52][45]. Ενδεικτικά αξίζει να αναφέρουμε ότι υποστηρίζει προεπεξεργασία δεδομένων σε, ανάλυση σε ανεξάρτητες συνιστώσες και επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος. Για την επίλυση του αντιστροφικού καθορισμού πηγής χρησιμοποιεί την μεθοδολογία που περιγράφεται στο [53] ενώ χρησιμοποιεί σφαιρικό μοντέλο εγκεφάλου N-ομόκεντρων σφαιρών.



Εικόνα 106 snapshot από το πακέτο EEGLAB

Οι δημιουργοί του πακέτου ανακοίνωσαν ότι πρόκειται να κυκλοφορήσει σύντομα η νέα έκδοση του προγράμματος στην οποία θα υποστηρίζονται ρεαλιστικά μοντέλα εγκεφάλου και επιπλέον αλγόριθμοι για τοποθέτηση πηγής.

#### 9.4.2.2 Brainstorm

Το BrainStorm είναι επίσης ένα πακέτο που έχει αναπτυχθεί στο MATLAB. Έχει αναπτυχθεί στο πανεπιστήμιο της νότιας Καλιφόρνια σε συνεργασία με άλλους φορείς και πανεπιστήμια. Στην ερευνητική ομάδα συγκαταλέγονται ερευνητές που έχουν προτείνει τους αλγορίθμους R-MUSIC, RAP-MUSIC. Η λειτουργικότητα του περιγράφεται στο [43]. Στη Εικόνα 107 μπορούμε να δούμε μια φωτογραφία από το περιβάλλον του πακέτου.



Εικόνα 107 Snapshot από το πακέτο Brainstorm

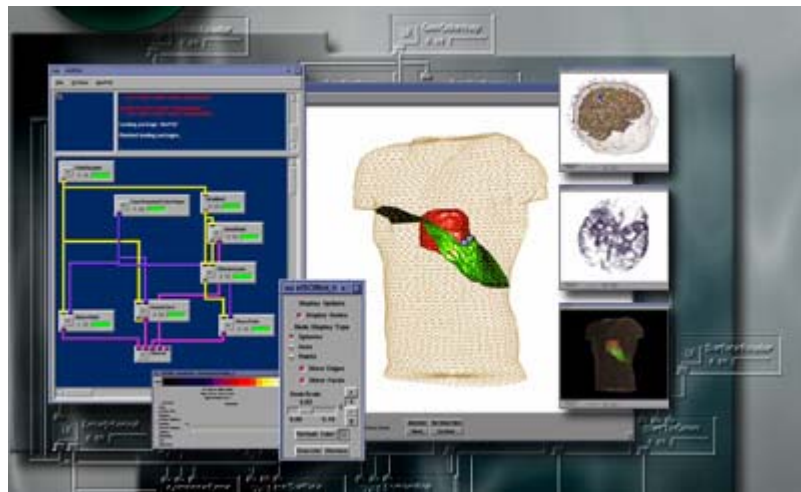
Ενδεικτικά θα αναφέρουμε μερικές από τις λειτουργίες που υποστηρίζει το πακέτο:

- Υποστήριξη διάφορων format δεδομένων
- Τρισδιάστατη απεικόνιση εγκεφάλου –πηγών
- Επεξεργασία καναλιών
- Ολοκλήρωση πληροφορίας με υποστήριξη δεδομένων MRI
- Υποστήριξη αλγορίθμων MUSIC, RAP-MUSIC, R-MUSIC καθώς και αλγορίθμων ελάχιστης νόρμας για επίλυση αντίστροφου προβλήματος.

#### 9.4.2.3 SCIRun-BIOPSE

Το πακέτο BIOPSE είναι μια αξιολογή περίπτωση πακέτου ανοικτού κώδικα γενικότερα για την επεξεργασία βιοιατρικού σήματος. Αναπτύχθηκε από ερευνητές του πανεπιστημίου της Utah [46]. Έχει αναπτυχθεί σε γλώσσα C εξ ολοκλήρου σε

περιβάλλον Linux. Στην Εικόνα 108 Snapshot από το πακέτο SCIRUN/BIOPSE μπορούμε να δούμε μια φωτογραφία από το περιβάλλον του προγράμματος.

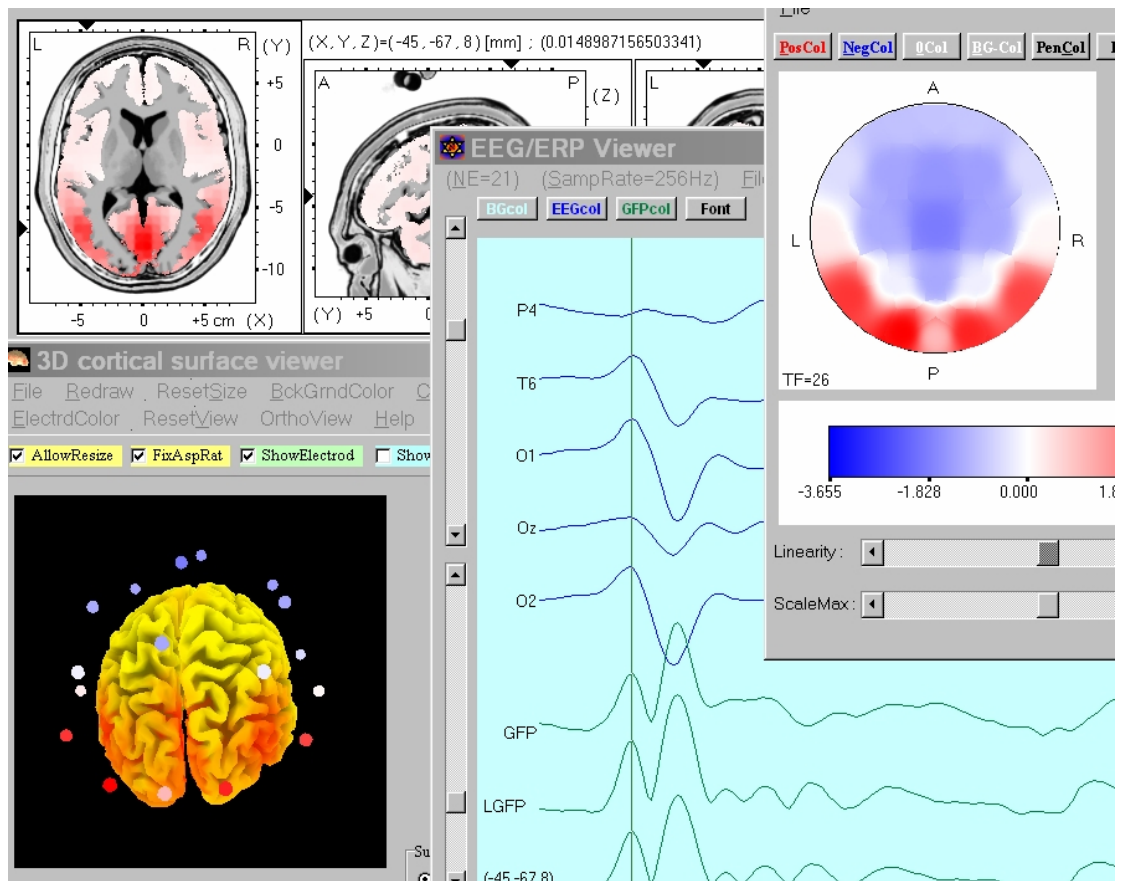


Εικόνα 108 Snapshot από το πακέτο SCIRUN/BIOPSE

Η ιδιαιτερότητα του συγκεκριμένου προγράμματος είναι ότι παρουσιάζεται σαν ένα περιβάλλον επίλυσης προβλημάτων. Έτσι λοιπόν αντί κάποιος να επιλέξει έτοιμους αλγορίθμους μέσα από ένα μενού μπορεί να κατασκευάσει το δικό του block diagram για την επίλυση του προβλήματος. Τα δικτυώματα κατασκευάζονται από έτοιμα blocks. Η εφαρμογές του πακέτου ξεπερνούν τα όρια της επεξεργασίας του εγκεφαλογραφήματος καθώς υποστηρίζεται η ανάλυση και η επεξεργασία πεδίων για όλο το ανθρώπινο σώμα. Οι λειτουργικότητα και οι εφαρμογές του πακέτου περιγράφονται στα [47][48][49][50][51]

#### 9.4.2.4 LORETA key

Τέλος θα κλείσουμε την συνοπτική αυτή παρουσίαση των πακέτων λογισμικού με την παρουσίαση του πακέτου LORETA key. Το λογισμικό LORETA key δημιουργήθηκε από τον ερευνητή που πρότεινε τον αλγόριθμο LORETA και s-LORETA (R.D. Pascal Marqui). Στην ουσία το πακέτο αποτελεί την υλοποίηση αυτών των αλγορίθμων κατ'ευθείαν από τους δημιουργούς τους. Το παρόν πακέτο δεν υποστηρίζει την δημιουργία μοντέλου εγκεφάλου. Υποστηρίζεται όμως η συνδυασμένη απεικόνιση των αποτελεσμάτων πάνω σε MRI φωτογραφίες



Εικόνα 109 snapshot από το πακέτο LORITA key

Οι λειτουργίες του περιγράφονται πλήρως στο [44]. Στην Εικόνα 109 μπορούμε να δούμε μια φωτογραφία από το περιβάλλον του προγράμματος LORITA key.



## Βιβλιογραφία

- [1] Eric W. Weisstein. "*Moore-Penrose Matrix Inverse*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html>
- [2] Eric W. Weisstein. "*Singular Value Decomposition*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/SingularValueDecomposition.html>
- [3] Eric W. Weisstein. "*Eigen Decomposition Theorem*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/EigenDecompositionTheorem.html>
- [4] Eric W. Weisstein. "*Matrix Direct Product*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MatrixDirectProduct.html>
- [5] Anderson, E., Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, "LAPACK User's Guide" ([http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack\\_lug.html](http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack_lug.html)) , Third Edition, SIAM, Philadelphia, 1999
- [6] Murat Sonmez "A tutorial on EEG"  
<http://www.neuronet.pitt.edu/groups/slg/>
- [7] Christoph M. Michel, Micah M. Murray, Goran Lantz, Sara Gonzalez, Laurent Spinelli, Rolando Grave de Peralta "EEG source imaging" Clinical Neurophysiology 115 (2004) 2195–2222
- [8] Jaakko Malmivuo , Robert Plonsey «*Bioelectromagnetism Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*» New York Oxford , Oxford University Press 1995
- [9] A.Cichocki ,S.Amari "Adaptive blind signal and image processing – learning algorithms and applications" Wiley and sons LTD
- [10] R.M. Berne M.N Levy «Αρχές φυσιολογίας» Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης ISBN 960-524-097-3
- [11] Κουτσούρης Δ. Παυλόπουλος Σ. Πρέντζα Α. "Εισαγωγή στην βιοιατρική τεχνολογία και" ανάλυση ιατρικών σημάτων" Εκδόσεις Τζιόλα 2004 ISBN 960-418-026-6
- [12] C. Silva, J.C. Maltez, E. Trindade, A. Arriaga , E. Ducla-Soares «*Evaluation of L1 and L2 minimum norm performances on EEG localizations*» Clinical neurophysiology 115 (2004) 1657-1668



- [13] Pascual-Marqui RD. “*Review of methods for solving the EEG inverse problem*” International Journal of Bioelectromagnetism 1999, 1: 75-86
- [14] Pascual-Marqui RD, Michel CM, Lehmann D. “*Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain*” International Journal of Psychophysiology. 1994, 18:49-65
- [15] Pascual-Marqui RD, Esslen M, Kochi K, Lehmann D: “*Functional imaging with low resolution brain electromagnetic tomography (LORETA): review, new comparisons, and new validation*”. Japanese Journal of Clinical Neurophysiology 30:81-94, 2002
- [16] R.D. Pascual-Marqui, M. Esslen, K. Kochi, D. Lehmann. “*Functional imaging with low resolution brain electromagnetic tomography (LORETA): a review*”. Methods & Findings in Experimental & Clinical Pharmacology 2002, 24C:91-95
- [17] Hamalainen MS, Ilmoniemi RJ. “*Interpreting magnetic fields of the brain: minimum norm estimates*” Med Biol Eng Comput 1994;32:35–42.
- [18] Irina F. Gorodnitsky , John S. George , Bhaskar D. Rao «*Neuromagnetic source imaging with FOCUSS: a recursive weighted minimum norm algorithm*» Electroencephalography and clinical Neurophysiology 95 (1995) 231-251
- [19] R. O. Schmidt, “*Multiple emitter location and signal parameter estimation,*” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, pp. 276–280, Mar. 1986; reprint of the original paper presented at RADC Spectrum Estimation Workshop, 1979.
- [20] Pascual-Marqui RD. “*Reply to Comments Made by R. Grave De Peralta Menendez and S.I. Gozalez Andino*”. International Journal of Bioelectromagnetism 1999, Vol. 1, No. 2, at: <http://www.ee.tut.fi/rgi/ijbem/volume1/number2/html/pascual.htm>.
- [21] TZYU-PING JUNG, SCOTT MAKEIG, MARTIN J. MCKEOWN, ANTHONY J. BELL, TE-WON LEE, AND TERRENCE J. SEJNOWSKI, “*Imaging Brain Dynamics Using Independent Component Analysis*” PROCEEDINGS OF THE IEEE, VOL. 89, NO. 7, JULY 2001
- [22] Leonid Zhukov, David Weinstein, Chris Johnson “*INDEPENDENT COMPONENT ANALYSIS FOR EEG SOURCE LOCALIZATION IN REALISTIC HEAD MODELS*” Proceedings of Third International Conference on Inverse Problems in Engineering June 13-18, 1999,
- [23] Aapo Hyvärinen and Erkki Oja “*Independent Component Analysis : Algorithms and Applications*” Neural Networks, 13(4-5) : 411-430, 2000

- [24] A. Hyvärinen. "Survey on Independent Component Analysis. *Neural Computing Surveys*" 2:94--128, 1999.
- [25] Amari, S. and Cichocki, A. and Yang, H.H. "*A new learning algorithm for blind signal separation*", Advances in Neural Information Processing Systems 8, MIT press, 1996.
- [26] Jing Lin, Aimin Zhang "*Fault feature separation using wavelet-ICA filter*" NDT&E International 38 (2005) 421–427
- [27] John C. Mosher, and Richard M. Leahy "*Recursive MUSIC: A Framework for EEG and MEG Source Localization*" IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, VOL. 45, NO. 11, NOVEMBER 1998
- [28] John C. Mosher and Richard M. Leahy "*Source Localization Using Recursively Applied and Projected (RAP) MUSIC*" IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 47, NO. 2, FEBRUARY 1999
- [29] J . Mosher , P . Lewis , R . Leahy "*Multiple dipole modeling and localization from spatiotemporal MEG data*" IEEE transactions on biomedical engineering vol 39 No 6 June 1992
- [30] John C. Mosher, Richard M. Leahy, and Paul S. Lewis "*EEG and MEG: Forward Solutions for Inverse Methods*" IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, VOL. 46, NO. 3, MARCH 1999
- [31] R. Van Uiter and C. Johnson "*Can a Spherical Model Substitute for a Realistic Head Model in Forward and Inverse MEG Simulations?*"
- [32] John C. Mosher, Richard M. Leahy, and Paul S. Lewis "*Matrix Kernels for the Forward Problem in EEG and MEG*" Los Alamos Technical Report: LA-UR-97-3812
- [33] David Weinstein, Leonid Zhukov, and Chris Johnson "*Lead-field Bases for Electroencephalography Source Imaging*" Annals of Biomedical Engineering, Vol. 28, Num. 9, pp. 1059-1164, September 2000.
- [34] Berg, P., Scherg, M., "*A fast method for forward computation of multiple-shell spherical head models,*" Electroenceph. clin. Neurophysiol, vol. 90, 1994, pp. 58–64.
- [35] Zhang, Z, "*A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres,*" Phys. Med. Biol 40, May 1995, pp. 335–349.
- [36] D. A. Brody, F. H. Terry, and R. E. Ideker, "*Eccentric dipole in a spherical medium: Generalized expression for surface potentials,*" IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. BME-20, Mar. 1973, pp. 141–143.

- [37] Ramon, C, Schimpf, PH, Haueisen “*Effect of Model Complexity on EEG Source Localizations*“ Neurology and Clinical Neurophysiology 2004:81 (November 30, 2004)
- [38] EasyCap homepage <http://www.easycap.de>
- [39] BESA project homepage <http://www.besa.de/>
- [40] Scherg, M. and Berg, P. (1996). “*New concepts of brain source imaging and localization*”. In: Functional Neuroscience (eds. C. Barber, G. Celesia, G.C. Comi and F. Mauguière). Elsevier Science B.V., Amsterdam, EEG Suppl., 46: 127-137.
- [41] M. Scherg, T. Bast, and P. Berg (1999). “*Multiple source analysis of interictal spikes: Goals, requirements, and clinical Value*” . J Clin Neurophysiol 16:3, 214-224.
- [42] CURRY homepage <http://www.neuro.com/>
- [43] Brainstorm project homepage <http://neuroimage.usc.edu/brainstorm>
- [44] LORETA key homepage <http://www.unizh.ch/keyinst>
- [45] EEGLAB homepage <http://sccn.ucsd.edu/eeglab/>
- [46] BIOPSE SCIRUN homepage  
[http://www.sci.utah.edu/stories/2001/apr\\_scirun\\_release.html](http://www.sci.utah.edu/stories/2001/apr_scirun_release.html)
- [47] D.M. Weinstein, L. Zhukov, C.R. Johnson. “*An Inverse EEG Problem Solving Environment and its Applications to EEG Source Localization,*” In NeuroImage (suppl.), pp. 921. 2000.
- [48] D.M. Weinstein, L. Zhukov, C.R. Johnson, S.G. Parker, R. Van Uitert, R.S. MacLeod, C.D. Hansen. “*Interactive Source Imaging with BioPSE,*” In Chicago 2000 World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering, Chicago, IL., Note: Refereed abstract., July, 2000.
- [49] D. Weinstein, P. Krysl, C. Johnson. “*The BioPSE Inverse EEG Modeling Pipeline,*” In ISGG 7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computation Field Simulations, The International Society of Grid Generation, Mississippi State University pp. 1091--1100. 2000.
- [50] S.G. Parker, M. Miller, C.D. Hansen, C.R. Johnson. “*Computational Steering and the SCIRun Integrated Problem Solving Environment,*” In Proceedings of Dagstuhl 1997 Workshop on Scientific Visualization, Note: Invited and peer reviewed, Edited by Hans Hagen and Greg Nielson and Frits Post, pp. 257--266. 2000.

- [51] C.R. Johnson, S. Parker, D. Weinstein. “*Large-Scale Computational Science Applications Using the SCIRun Problem Solving Environment*,” In Proceedings of The International Supercomputer Conference 2000, 2000.
- [52] Arnaud Delorme, Scott Makeig “*EEGLAB: an open source toolbox for analysis of single-trial EEG dynamics including independent component analysis*” Journal of Neuroscience Methods 134 (2004), 9-21
- [53] R. Kavanagh, T. M. Darccey, D. Lehmann, and D. H. Fender. “*Evaluation of methods for three-dimensional localization of electric sources in the human brain.*” IEEE Trans Biomed Eng, 25:421-429, 1978
- [54] Sifis Micheloyannis, Vagelis Sakkalis, Michalis Vourkas, Cornelis J. Stam, Panagiotis G. Simos “*Neural networks involved in mathematical thinking: evidence from linear and non-linear analysis of electroencephalographic activity*” Neuroscience Letters 373 (2005) 212–217
- [55] Thomas F. Collura , “The Measurement, Interpretation, and Use of EEG Frequency Bands” <http://www.altered-states.co.nz/cgi-local/reload.cgi?^/brainmaster/freqs.htm> December 7, 1997
- Νευρωνικά δίκτυα
- [56] Sung Chan Jun and Barak A. Pearlmutter “*Fast Robust Subject-Independent Magnetoencephalographic Source Localization Using an Artificial Neural Network*” Human Brain Mapping 24:21–34(2005)
- [57] Gert Van Hoey, Jeremy De Clercq, Bart Vanrumste, Rik Van de Walle, Ignace Lemahieu, Michel D’Hav’e and Paul Boon “*EEG dipole source localization using artificial neural networks*” Phys. Med. Biol. 45 (2000) 997–1011
- [58] Xiao-Liang Xu, Bobby Xu and Bin He “*An alternative subspace approach to EEG dipole source localization*” Phys. Med. Biol. 49 (2004) 327–343
- [59] D. McNay , E. Michielssen , R. L. Rogers , S. A. Taylor, M. Akhtari and W. W. Sutherling “Multiple source localization using genetic algorithms” J Neurosci Methods. 1996 Feb;64(2):163-72.
- [60] Blue Brain Project homepage <http://bluebrainproject.epfl.ch/>
- [61] T. F. Chan, “*Deflated decomposition solutions of nearly singular systems*,” SIAM J. Numer. Anal., vol. 21, pp. 738–754, 1984.
- [62] “*The use of multiple deflations in the numerical solution of singular systems of equations with applications to potential theory*,” SIAM J. Numer. Analysis, vol. 5, no. 2, pp. 303–322, 1968.