



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

**ΜΕΛΕΤΗ ΘΕΡΜΟ - ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΕΔΗΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΜΕΝΟΥ ΑΠΟ
ΙΝΟΠΛΙΣΜΕΝΑ ΚΕΡΑΜΙΚΑ ΥΛΙΚΑ**



Δημήτριος Κ. Ταμβάκης

Εξεταστική Επιτροπή: Κωνσταντίνος Προβιδάκης

Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

Ιωάννης Νικολός Λέκτορας Καθηγητής

Ιωάννης Τσομπανάκης Επίκουρος Καθηγητής

Χανιά Ιούνιος 2005

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΜΕΛΕΤΗ ΘΕΡΜΟ – ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΕΔΗΣΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΜΕΝΟΥ ΑΠΟ ΙΝΟΠΛΙΣΜΕΝΑ ΚΕΡΑΜΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Δημήτριος Κ. Ταμβάκης

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Προβιδάκης,
Γενικό Τμήμα

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής, θερμικής φόρτισης του συστήματος πέδησης και πιο συγκεκριμένα του δίσκου και των τακακιών μιας μοτοσυκλέτας κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της πέδησης. Η προσομοίωση της πέδησης έγινε με τη βοήθεια του υπολογιστικού συστήματος MARC Mentat της εταιρίας Marc Analysis Corporation, το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων της μηχανικής. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης της δυναμικής, θερμικής φόρτισης που προέκυψαν, δίνουν ικανοποιητικές πληροφορίες για τα διάφορα φαινόμενα που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της πέδησης τόσο στον δίσκο όσο και στα τακάκια. Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον βέλτιστο σχεδιασμό των εξαρτημάτων αυτών και για την καλύτερη επιλογή των υλικών κατασκευής τους.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ο γράφων επιθυμεί να ευχαριστήσει τον καθηγητή του Προβιδάκη Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Πολυτεχνείο Κρήτης, για την καθοδήγησή του στην εκπόνηση και συγγραφή της εργασίας.

Ακόμη τη Δρ. Σταυρουλάκη Μαρία, για την πολύτιμη βοήθεια της. Επίσης την Κουκαδάκη Μαρία, για τη συμπαράστασή της.

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω την παρούσα εργασία στους γονείς μου Κοσμά και Μαριγώ. Τους ευχαριστώ για όλα.

Περιεχόμενα

Ευρετήριο σχημάτων	vi
Εισαγωγή.....	10
Κεφάλαιο 1: Τα συστήματα πέδησης και τα υλικά κατασκευής τους.....	15
1.1 Ιστορική αναδρομή	15
1.2 Υλικά κατασκευής δισκοφρένων	17
1.3 Τα συνθετικά – κεραμικά υλικά	19
1.4 Η διαδικασία κατασκευής των συνθετικών – κεραμικών δισκοφρένων	21
Κεφάλαιο 2: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....	24
2.1 Γενικά.....	24
2.2 Τεχνολογία πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2003.....	29
2.3 Τρισδιάστατη μοντελοποίηση.....	33
2.4 Ανάλυση επαφής.....	34
2.4.1 Γενικά.....	34
2.4.2 Αριθμητικές μέθοδοι στην ανάλυση επαφής	34
Πολλαπλασιαστές Lagrange	34
Μέθοδοι ποινής.....	35
Υβριδικές και ανάμεικτες μέθοδοι.....	35
Ευθείς περιορισμοί.....	35
2.4.3 Ορισμός των προς επαφή σωμάτων.....	36
2.4.4 Κίνηση των προς επαφή σωμάτων.....	38
2.4.5 Ανίχνευση της επαφής	40
2.4.6 Εφαρμογή περιορισμών	42
2.4.7 Μοντελοποίηση της τριβής.....	45
2.4.8 Η θερμό – μηχανική ανάλυση.....	47
2.5 Επιλογή τύπου πεπερασμένων στοιχείων	49
2.5.1 Γενικά.....	49
2.5.2 Τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία	50
2.5.3 Το εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο.....	51
2.6 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.....	52

2.6.1 Γενικά.....	52
2.6.2 Η μέθοδος Newton – Raphson.....	52
2.6.3 Η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson	54
Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος.....	56
3.1 Γενικά.....	56
3.2 Η μοντελοποίηση των σωμάτων.....	56
3.2.1 Η μοντελοποίηση του δίσκου	57
3.2.2 Η μοντελοποίηση των τακακιών.....	60
3.2.3 Η μοντελοποίηση των ήλων έδρασης.....	61
3.3 Η μοντελοποίηση της επαφής.....	62
3.4 Ορισμός συνοριακών συνθηκών.....	64
3.5 Ορισμός αρχικών συνθηκών.....	65
3.6 Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού	66
3.7 Ορισμός των συνθηκών ανάλυσης.....	68
Κεφάλαιο 4: Τα αποτελέσματα της ανάλυσης και η επεξεργασία τους	71
4.1 Γενικά.....	71
4.2 Τα αποτελέσματα για το δίσκο	71
4.3 Τα αποτελέσματα για τα τακάκια	80
4.4 Επεξεργασία των αποτελεσμάτων	85
Γενικά συμπεράσματα	95
Βιβλιογραφία	96

Ευρετήριο σχημάτων

Σχήμα 1.1.1: Τυπικά παραδείγματα των διαφόρων συστημάτων πέδησης και της εξέλιξής τους.....	16
Σχήμα 1.2.1: Συγκριτικό διάγραμμα τυπικών τιμών συντελεστή τριβής για τα διάφορα υλικά κατασκευής δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).....	18
Σχήμα 1.2.2: Συγκριτικά διαγράμματα τυπικών τιμών πυκνότητας και μέγιστης θερμοκρασίας λειτουργίας για τα διάφορα υλικά κατασκευής δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).....	19
Σχήμα 1.3.1: Λεπτομέρεια της δομής ενός κεραμικού δισκοφρένου (SGL BRAKES GmbH, 2002).	21
Σχήμα 1.4.1: Η τυπική διαδικασία κατασκευής των κεραμικών δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).....	22
Σχήμα 2.4.3.1: Παραμορφώσιμο σώμα (MARC Analysis Research Corporation, 1998).	36
Σχήμα 2.4.3.2: Διάφορα είδη γραμμών και επιφανειών για τη δημιουργία μη παραμορφώσιμων σωμάτων.	37
Σχήμα 2.4.4.2: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από φορτίο (MARC Analysis Research Corporation, 1998).	40
Σχήμα 2.4.5.1: Ανοχή επαφής (MARC Analysis Research Corporation, 1998).	41
Σχήμα 2.4.5.2: Δοκιμαστική μετατόπιση με εισχώρηση (MARC Analysis Research Corporation, 1998).....	42
Σχήμα 2.4.6.1: Σύστημα που έχει υποστεί μετατροπή (2D) (MARC Analysis Research Corporation, 1998).....	43
Σχήμα 2.6.2.1: Η πορεία σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson (MARC Analysis Research Corporation, 1998).	54
Σχήμα 2.6.3.1: Η σύγκλιση της τροποποιημένης μεθόδου Newton – Raphson (MARC Analysis Research Corporation, 1998).	55
Σχήμα 3.2.1.1: Τυπικό εμπρός σύστημα πέδησης αγωνιστικής μοτοσυκλέτας (www.moto-live.com).....	57
Σχήμα 3.2.1.2: Αρχικό στάδιο σχεδιασμού του δίσκου.....	57
Σχήμα 3.2.1.3: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Automesh</i>	58

Σχήμα 3.2.1.4: Διαστασιολόγηση μιας συμμετρικής εκ περιστροφής, τομής του δίσκου.	59
Σχήμα 3.2.1.5: Όψη τριών τετάρτων του μοντέλου του δίσκου.	59
Σχήμα 3.2.2.1: Διαστασιολόγηση του τακακιού.	60
Σχήμα 3.2.2.2: Κάτοψη και τριών τετάρτων όψη του μοντέλου του τακακιού.	60
Σχήμα 3.2.3.1: Όψη τριών τετάρτων των ήλων έδρασης.	61
Σχήμα 3.2.3.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής <i>Renumber</i>	62
Σχήμα 3.3.1: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των προς επαφή σωμάτων.	63
Σχήμα 3.3.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Contact Table</i>	63
Σχήμα 3.4.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Fixed displacement</i>	64
Σχήμα 3.4.2: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των συνοριακών συνθηκών.	65
Σχήμα 3.5.1: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των αρχικών συνθηκών.	66
Σχήμα 3.6.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού μηχανικών και θερμικών ιδιοτήτων, της επιλογής <i>Material Properties</i> για ισότροπο υλικό.	67
Σχήμα 3.6.2: Μηχανικές ιδιότητες του υλικού SIGRASIC® (SGL Brakes GmbH, 2002).	67
Σχήμα 3.6.3: Θερμικές ιδιότητες του υλικού SIGRASIC® (SGL Brakes GmbH, 2002).	68
Σχήμα 3.7.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Loadcase (Coupled Dynamic Transient)</i>	69
Σχήμα 3.7.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Job (Coupled Dynamic Transient)</i>	69
Σχήμα 3.7.3: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Element Types (solid – coupled)</i>	70
Σχήμα 3.7.4: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής <i>Results</i>	70
Σχήμα 4.2.1: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα x για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.	72
Σχήμα 4.2.2: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα y για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.	72
Σχήμα 4.2.3: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα z για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.	73

Σχήμα 4.2.4: Η συνισταμένη της ταχύτητας του δίσκου για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.	74
Σχήμα 4.2.5: Η ανάπτυξη της τριβής μεταξύ του δίσκου και του ενός τακακιού στα βήματα 500, 1000, 1500, 2000 και 2500 με σταθερή κλίμακα.....	74
Σχήμα 4.2.6: : Η ανάπτυξη της θερμοκρασίας στο σώμα του δίσκου στα βήματα 0, 1000, 2000 και 3000 με σταθερή κλίμακα.....	75
Σχήμα 4.2.7: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10..	76
Σχήμα 4.2.8: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90.....	77
Σχήμα 4.2.9: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10.	78
Σχήμα 4.2.10: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90...	78
Σχήμα 4.2.11: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10.....	79
Σχήμα 4.2.12: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90.....	79
Σχήμα 4.3.1: Οι συνιστώσες της τριβής στους άξονες x, y, z και η συνισταμένη τριβή για το βήμα 1500.....	80
Σχήμα 4.3.2: Οι συνιστώσες της κάθετης δύναμης επαφής στους άξονες x, y, z και η συνισταμένη κάθετη δύναμη για το βήμα 1500.....	81
Σχήμα 4.3.3: Η ανάπτυξη της θερμοκρασίας στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 0, 1000, 2000 και 3000.	82
Σχήμα 4.3.4: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.	83
Σχήμα 4.3.5: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.	83
Σχήμα 4.3.6: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.....	84
Σχήμα 4.3.7: Τυπικά παραδείγματα τρόπων αποφυγής της ανομοιόμορφης φθοράς των τακακιών στα συστήματα πέδησης με πολυπίστονες δαγκάνες.	84
Σχήμα 4.4.1: Οι κόμβοι τους οποίους αφορούν τα διαγράμματα της ανάλυσης των αποτελεσμάτων.	85
Σχήμα 4.4.2: Η γραμμική ταχύτητα του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.....	86

Σχήμα 4.4.3: Συνδυασμένο διάγραμμα της τριβής και της ταχύτητας στον άξονα z του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	86
Σχήμα 4.4.4: Συνδυασμένο διάγραμμα της τριβής και της θερμοκρασίας του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.....	87
Σχήμα 4.4.5: Συγκριτικό διάγραμμα της θερμοκρασίας των κόμβων 7582, 12703 και 12706 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.....	88
Σχήμα 4.4.6: Συνδυασμένο διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων Von Misses και της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα y του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	89
Σχήμα 4.4.8: Διάγραμμα της πυκνότητας της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	90
Σχήμα 4.4.9: Συγκριτικό διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων Von Misses των κόμβων 7582 και 12703 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	90
Σχήμα 4.4.10: Συνδυασμένο διάγραμμα της μέσης κάθετης τάσης και της ταχύτητας στον άξονα z του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	91
Σχήμα 4.4.11: Συγκριτικό διάγραμμα της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα z για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	92
Σχήμα 4.4.12: Συγκριτικό διάγραμμα της τριβής λόγω επαφής για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.....	92
Σχήμα 4.4.13: Συγκριτικό διάγραμμα της θερμοκρασίας για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.	93
Σχήμα 4.4.14: Συγκριτικό διάγραμμα της ισοδύναμης τάσης Von Misses για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης...	94

Εισαγωγή

Η μοτοσυκλέτα είναι ένα ευρέως διαδεδομένο μεταφορικό μέσο, η χρησιμοποίηση του οποίου συνεχώς αυξάνεται τις τελευταίες δεκαετίες. Οι λόγοι είναι κυρίως η οικονομία και η ευκολία που προσφέρει αυτό το μέσο στην μετακίνηση, ιδιαίτερα στα μεγάλα αστικά κέντρα, όπου το κυκλοφοριακό πρόβλημα συνεχώς επιδεινώνεται (Στεφανουδάκης, 2004). Από τη στιγμή που εμφανίστηκε το πρώτο μηχανοκίνητο δίκυκλο, έγινε εμφανής και επιτακτική η ανάγκη για ένα σύστημα πέδησης το οποίο θα συνέβαλε στον αποτελεσματικό έλεγχο του. Από τα πρώτα εκείνα χρόνια μέχρι και σήμερα, ο μηχανισμός μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η πέδηση είναι η τριβή και η μετατροπή της κινητικής ενέργειας του οχήματος σε θερμότητα.

Τα τελευταία είκοσι χρόνια, ιδιαίτερα στις μοτοσυκλέτες υψηλών επιδόσεων, τα συστήματα πέδησης που τοποθετούνται χρησιμοποιούν δισκόφρενα. Αυτά τα συστήματα αποτελούνται συνήθως από δύο ξεχωριστά υδραυλικά κυκλώματα τα οποία μεταφέρουν την πίεση από το δεξί χέρι και το δεξί πόδι του αναβάτη, στα δισκόφρενα του εμπρός και πίσω τροχού αντίστοιχα.

Μέσω ενός μοχλού, ο αναβάτης πιέζει ένα έμβολο. Μέσω του ειδικού υδραυλικού υγρού, η πίεση μεταφέρεται στο ή στα έμβολα που πιέζουν τα τακάκια πάνω στο δίσκο, για να αναπτυχθεί η τριβή που θα μειώσει την ταχύτητά του. Τα τακάκια και κατά συνέπεια τα έμβολα που τα πιέζουν, βρίσκονται μέσα σε μια δαγκάνα, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε δίσκο και είναι εδρασμένη σε σταθερό σημείο σε σχέση με τον τροχό, πάνω στον οποίο είναι εδρασμένος ο δίσκος. Αναλόγως με τον αριθμό και τη διάμετρο των εμβόλων που πιέζουν τα τακάκια, επιτυγχάνεται πολλαπλασιασμός της δύναμης του αναβάτη, σύμφωνα με την αρχή του Pascal.

Από την εποχή που εφευρέθηκαν τα συστήματα πέδησης με δισκόφρενα, μορφή τους έχει αλλάξει πολύ και η έρευνες που γίνονται σε όλους τους τομείς, είναι συνεχείς, με στόχο την βελτίωση της αποτελεσματικότητάς τους στις συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες των σύγχρονων μοτοσυκλετών υψηλών επιδόσεων.

Η μέθοδος ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία ήταν αυτή των πεπερασμένων στοιχείων και υλοποιήθηκε με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου MSC.MARC 2003 της εταιρίας Marc Analysis Corp. Τα πλεονεκτήματα της

μεθόδου είναι πολλά και πολλοί ερευνητές την έχουν χρησιμοποιήσει για παρόμοιες μελέτες.

Οι Gao και Lin (2002) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση της κατανομής της θερμοκρασίας σε έναν μεταλλικό δίσκο αυτοκινήτου, κατά τη διάρκεια της πέδησης. Το μοντέλο που δημιούργησαν αποτελούνταν από έναν τρισδιάστατο δίσκο και μια κινούμενη πηγή θερμότητας η οποία προσομοίωνε το τακάκι που έρχεται σε επαφή με το δίσκο για να επιτευχθεί η τριβή και συνεπώς η αύξηση της θερμοκρασίας. Τα αποτελέσματα της ανάλυσής τους κατέδειξαν ότι τα χαρακτηριστικά λειτουργίας του συστήματος πέδησης, επηρεάζουν σημαντικά την κατανομή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια τριβής του δίσκου και τη μέγιστη θερμοκρασία στα σημεία επαφής κάθε στιγμή.

Οι Hohmann et al (1999) διεξήγαν ανάλυση επαφής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σε ένα τυπικό σύστημα δίσκου – δαγκάνας επιβατικού αυτοκινήτου, και ενός συστήματος ταμπούρου – σιαγόνων. Για την επίλυση του προβλήματος της τριβής μεταξύ των επιφανειών δίσκου – τακακίων και τυμπάνου – σιαγόνων, χρησιμοποίησαν τον αλγόριθμο επίλυσης **ADINA 7.1**. Το μοντέλο τριβής που χρησιμοποίησαν ήταν το *stick – slip* και τα αποτελέσματα της έρευνάς τους περιλάμβαναν μεταξύ άλλων τις προκύπτουσες παραμορφώσεις, την κατανομή των τάσεων την πίεση που αναπτυσσόταν κατά την επαφή, καθώς και τους τομείς των τριβόμενων επιφανειών που βρίσκονταν σε κατάσταση *stick* ή *slip* κάθε στιγμή.

Οι Chargin et al (1997) ασχολήθηκαν με το «τρίξιμο» των φρένων. Ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για την επίλυση αυτού του μη γραμμικού, δυναμικού προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος MSC/NASTRAN. Τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν ήταν ενθαρρυντικά, αλλά παράλληλα κατέδειξαν την ανάγκη για βελτίωση της μεθόδου μοντελοποίησης του προβλήματος και τον εμπλουτισμό της με περισσότερα πειραματικά δεδομένα.

Οι Choi και Lee (2003) μελέτησαν το μεταβατικό πρόβλημα της θερμό – ελαστικής συμπεριφοράς του συστήματος δίσκος – τακάκια. Για τη μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποίησαν μια συμμετρική εκ περιστροφής, τομή του δίσκου και τομές, επίσης, των τακακίων. Επιπροσθέτως, μελέτησαν το φαινόμενο της θερμό – ελαστικής αστάθειας, την κατάσταση εκείνη, δηλαδή, κατά την οποία η πίεση και η θερμοκρασία αυξάνονται ασταθώς στις τριβόμενες επιφάνειες. Τα εξαγόμενα της έρευνάς τους περιλάμβαναν μεταξύ άλλων την κατανομή της πίεσης και της θερμοκρασίας στις επιφάνειες τριβής. Ακόμη μελέτησαν τη σημασία των υλικών

κατασκευής του δίσκου και των τακακιών, ενώ χρησιμοποίησαν τα αποτελέσματά τους για την μοντελοποίηση του ίδιου προβλήματος με υλικό κατασκευής carbon.

Οι Yevtushenko και Ivanyk (1995) δημιούργησαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ένα μοντέλο το οποίο τους επέτρεψε να υπολογίσουν τη παραγόμενη από την τριβή θερμοκρασία στην επιφάνεια του δίσκου, καθώς και τις μεταβολές της στο κάθετο επίπεδο. Τα αποτελέσματα της ανάλυσής τους επαληθεύονται επαρκώς από τα πειραματικά δεδομένα, ενώ αποδεικνύουν ότι οι μικρής κλίμακας θερμικές παραμορφώσεις, στην αρχικώς επίπεδη επιφάνεια τριβής του δίσκου, μπορούν να παραληφθούν.

Πολλές όμως, είναι και οι εργαστηριακές έρευνες που έχουν γίνει στον τομέα των συστημάτων πέδησης, συχνά σε συνδυασμό με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Οι επιστήμονες που έχουν ασχοληθεί με το συγκεκριμένο αντικείμενο, επικεντρώνουν τις έρευνές τους σε συγκεκριμένα, κάθε φορά, φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της πέδησης. Ακόμη, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα εναλλακτικά υλικά κατασκευής, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν και παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά αναλόγως με τις μηχανικές, χημικές και θερμικές τους ιδιότητες.

Οι Rodriguez et al (2000) μελέτησαν στο εργαστήριο την αντίσταση στη φθορά, που παρουσιάζει ένα κράμα αλουμινίου 2014 εμπλουτισμένο με σωματίδια οξειδίου του αλουμινίου Al_2O_3 ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Η ανάλυσή τους έδειξε ότι ο ρυθμός της φθοράς αυξάνεται με τη θερμοκρασία, παρουσιάζοντας μια μετάβαση από ελαφριά σε έντονη φθορά πάνω από τους 170° Κελσίου. Ακόμη παρατήρησαν μια ζώνη συνενωμένων σωματιδίων κάτω από την επιφάνεια τριβής. Το πάχος αυτής της περιοχής βρέθηκε να είναι ανάλογο του ρυθμού της φθοράς σε όλο το θερμοκρασιακό φάσμα. Επιπροσθέτως διεξήγαν τρισδιάστατη ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για να υπολογίσουν τις τάσεις σε αυτή την περιοχή συναρτήσει της απόστασής της από την επιφάνεια τριβής. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκαν για να εκτιμήσουν οι ερευνητές τις τάσεις που ασκούνται πάνω στα σωματίδια και για να υπολογίσουν το πάχος της περιοχής των κατακερματισμένων σωματιδίων.

Οι Mackin et al (2002) μελέτησαν το φαινόμενο της εμφάνισης ρωγμών στους δίσκους, εξ αιτίας των μεγάλων και επαναλαμβανόμενων θερμικών καταπονήσεων κατά τη διάρκεια αλληπαλλήλων φρεναρισμάτων από υψηλές ταχύτητες. Διεξήγαν αναλύσεις στο εργαστήριο όσον αφορά στην δυναμική συμπεριφορά των οχημάτων,

για να συνθέσουν μια συνάρτηση της ροής θερμότητας σε σχέση με τις δυνάμεις πέδησης. Χρησιμοποίησαν αυτή τη συνάρτηση ροής για να υπολογίσουν, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τον αριθμό των κύκλων πέδησης που θα οδηγήσουν στην εμφάνιση των ρωγμών και κατά συνέπεια, την αστοχία του δίσκου.

Οι Yamabe et al (2002) ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη ενός δίσκου για συστήματα πέδησης φορτηγών, αυτοκινήτων, ο οποίος θα παρουσιάζει αντίσταση στη θερμική κόπωση. Η έρευνά τους κατέδειξε ότι η αντίσταση στην θερμική κόπωση, ενός δίσκου από φαιό χυτοσίδηρο, είναι ανάλογη της σύστασής του, όσον αφορά το ποσοστό άνθρακα και νικελίου.

Οι Panier et al (2004) έκαναν έρευνες στο εργαστήριο, για να μελετήσουν το φαινόμενο των θερμών σημείων (*hot spots*), κατά τη διάρκεια της πέδησης σε ένα δισκόφρενο τρένου. Σκοπός τους ήταν η κατηγοριοποίηση και εξήγηση αυτών των θερμών σημείων. Χρησιμοποίησαν κάμερα υπερύθρων ακτίνων για να κάνουν θερμογραφικές μετρήσεις των μεταβολών της θερμοκρασίας στην επιφάνεια του δίσκου. Τέλος εκμεταλλευόμενοι τα αποτελέσματα των εργαστηριακών μελετών, παρουσίασαν ένα σενάριο πρόβλεψης της εμφάνισης των θερμών σημείων, συναρτήσει παραμέτρων όπως η ακαμψία και το μήκος των τακακιών.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των συνδυασμένων θερμό – μηχανικών φαινομένων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της πέδησης στο σύστημα δίσκος – τακάκια. Ως πρότυπο χρησιμοποιήθηκε ο ένας από τους δύο δίσκους και τα τακάκια του, του εμπρός τροχού μιας αγωνιστικής μοτοσυκλέτας του παγκοσμίου πρωταθλήματος ταχύτητας. Μεγάλο μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στην όσο το δυνατόν καλύτερη μοντελοποίηση της γεωμετρίας των προς εξέταση σωμάτων, για την καλύτερη απεικόνιση των πραγματικών δεδομένων. Ως υλικό κατασκευής επελέγη το υλικό SYGRASIC® της εταιρίας SGL GmbH το οποίο χρησιμοποιείται στην κατασκευή δίσκων και τακακιών για συστήματα πέδησης αυτοκινήτων και τρένων υψηλών επιδόσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, γίνεται μια ιστορική αναδρομή στα συστήματα πέδησης που έχουν εφαρμοστεί στις μοτοσυκλέτες στην πορεία του χρόνου μέχρι την καθολική επικράτηση των δισκοφρένων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διάφορα υλικά που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή τους και γίνεται μια σύγκριση μεταξύ τους στο επίπεδο των μηχανικών και θερμικών ιδιοτήτων τους. Παρουσιάζονται εκτενέστερα τα συνθετικά – κεραμικά υλικά και στο

τελευταίο κομμάτι του πρώτου κεφαλαίου γίνεται μια περιγραφή της διαδικασίας κατασκευής των δισκοφρένων από αυτά τα υλικά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας. Στο πρώτο κομμάτι γίνεται μια περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων από τη σκοπιά των μαθηματικών. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η τεχνολογία των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιεί το λογισμικό πρόγραμμα με το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση. Γίνεται εμβάθυνση στην ανάλυση επαφής, στο μοντέλο της τριβής που χρησιμοποιήθηκε, καθώς και στο είδος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την τρισδιάστατη μοντελοποίηση του προβλήματος. Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία μοντελοποίησης του προβλήματος. Περιγράφεται αναλυτικά η μοντελοποίηση των σωμάτων, η μοντελοποίηση της επαφής, ο ορισμός των συνοριακών και των αρχικών συνθηκών, καθώς και η εισαγωγή στο πρόγραμμα των ιδιοτήτων του υλικού. Τέλος παρουσιάζεται ο ορισμός των συνθηκών της ανάλυσης και ο τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων από το λογισμικό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα αφορούν στη μεταβολή της θερμοκρασίας στο δίσκο και στα τακάκια, στη ροή της θερμότητας ανάμεσα στα σώματα και στις τάσεις που αναπτύσσονται. Στη συνέχεια γίνεται σχολιασμός και ανάλυση αυτών των αποτελεσμάτων.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την παρούσα εργασία και γίνεται αναφορά στους τομείς που χρήζουν περαιτέρω έρευνας.

Κεφάλαιο 1: Τα συστήματα πέδησης και τα υλικά κατασκευής τους

1.1 Ιστορική αναδρομή

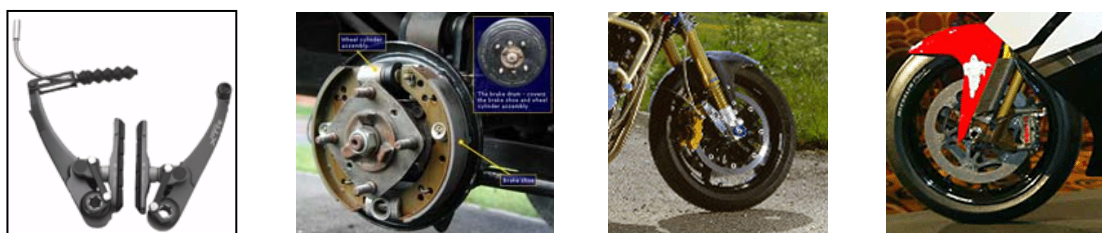
Από την πρώτη στιγμή που εμφανίστηκε το πρώτο ποδήλατο όχημα με κινητήρα εσωτερικής καύσης για την υποβοήθηση του αναβάτη, εμφανίστηκε η ανάγκη για ένα μηχανικό σύστημα που θα μείωνε την ταχύτητα του οχήματος ή θα την διατηρούσε αν κινούνταν σε κατωφέρεια (Hohmann C. et al, 1999).

Τα πρώτα συστήματα πέδησης χρησιμοποιούσαν έναν μηχανισμό από δαγκάνες με τριβείς από καουτσούκ οι οποίοι πίεζαν το πλαϊνό μέρος του ρόπτρου ή του ελαστικού του τροχού, όταν εμφανίστηκαν οι πρώτοι τροχοί με ελαστικά. Την πίεση αυτή την ασκούσε το χέρι του αναβάτη σε ένα μοχλό και μεταφερόταν μέσω ενός συρματόσχοινου στις δαγκάνες. Όσο όμως οι ιπποδυνάμεις των κινητήρων αυξάνονταν αυτά τα συστήματα αποδείχθηκαν ανεπαρκή και δεν μπορούσαν να αντεπεξέλθουν στο έργο τους και έτσι σήμερα τα συναντούμε μόνο σε ποδήλατα. Αυτό συμβαίνει διότι τα συγκεκριμένα συστήματα έχουν το μικρότερο βάρος σχετικά με όλα τα υπόλοιπα.

Στη συνέχεια εμφανίστηκαν τα συστήματα πέδησης που χρησιμοποιούσαν ταμπούρα. Αυτά αποτελούνταν από ένα κοίλο κυλινδρικό τύμπανο στην εσωτερική επιφάνεια του οποίου πίεζαν δύο σιαγόνες επενδεδυμένες με ειδικά υλικά τριβής. Το τύμπανο ήταν πακτωμένο στο κέντρο του τροχού και περιστρεφόταν μαζί του, ενώ οι σιαγόνες ήταν εδρασμένες στον άξονα περιστροφής. Η δύναμη πίεσης μεταφερόταν από το χέρι ή το πόδι του αναβάτη που πίεζε ένα μοχλό, με συρματόσχοινο. Αυτό το σύστημα αποτέλεσε μεγάλη βελτίωση καθώς τα υλικά τριβής είχαν πολύ μεγαλύτερη απόδοση και πολύ μεγαλύτερη αντοχή. Ακόμη, καλύτερη απόδοση επιτυγχάνονταν λόγω μεγαλύτερης επιφάνειας τριβής. Όμως, καθώς και πάλι τα τελευταία είκοσι χρόνια οι ιπποδυνάμεις των κινητήρων έχουν αυξηθεί και έχει γίνει επιτακτική η ανάγκη για καλύτερο έλεγχο του οχήματος, έγιναν εμφανή τα δύο κύρια μειονεκτήματα αυτού του συστήματος πέδησης. Αυτά είναι το μεγάλο βάρος και η

πολύ μικρή ικανότητα απαγωγής της θερμότητας ακόμη και όταν τα ταμπούρα είναι αεριζόμενα.

Έτσι φτάσαμε στο τελευταίο σύστημα πέδησης που εφαρμόζεται σχεδόν καθολικά σήμερα με διάφορες μορφές. Αυτό χρησιμοποιεί συνήθως έναν μεταλλικό δίσκο ο οποίος είναι πακτωμένος στον τροχό και περιστρέφεται μαζί του και μία δαγκάνα η οποία είναι πακτωμένη σε σταθερό σημείο σε σχέση με τον δίσκο και περιέχει δύο πλακίδια επενδεδυμένα με ειδικά υλικά τριβής τα οποία πιέζουν το δίσκο αναπτύσσοντας τριβή μεταξύ τους για να επιτευχθεί η πέδηση. Στις σύγχρονες μοτοσυκλέτες υψηλών επιδόσεων ολόκληρο το σύστημα πέδησης αποτελείται από δύο μεγάλης διαμέτρου μεταλλικούς δίσκους στον εμπρός τροχό οι οποίοι συνεργάζονται με δύο δαγκάνες αντίστοιχα και έναν μεταλλικό δίσκο με μια δαγκάνα στον οπίσθιο τροχό. Η δύναμη πέδησης στις δύο εμπρός δαγκάνες μεταφέρεται από το χέρι του αναβάτη μέσω κλειστού υδραυλικού κυκλώματος. Ο αναβάτης πιέζει με έναν μοχλό ένα έμβολο το οποίο μέσω ενός ειδικού υδραυλικού υγρού και σύμφωνα με την αρχή του Pascal, πιέζει ένα ή και περισσότερα έμβολα - επιτυγχάνοντας έτσι και πολλαπλασιασμό της δύναμης του αναβάτη- τα οποία με τη σειρά τους πιέζουν τα τακάκια επάνω στους δίσκους.



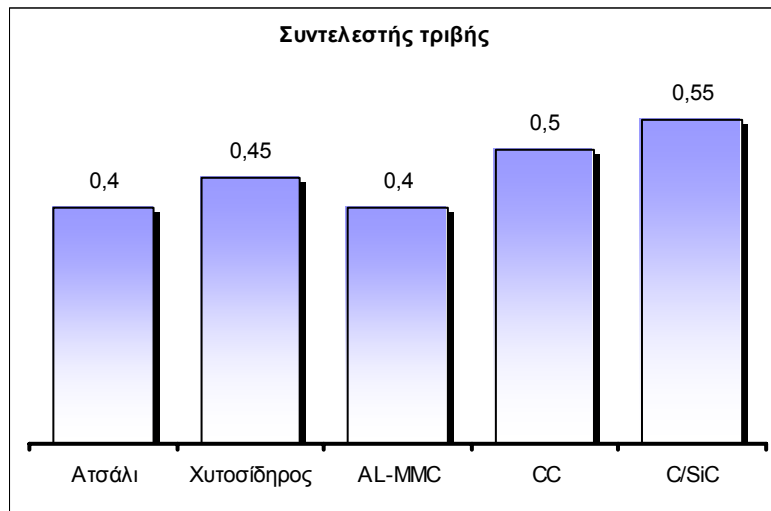
Σχήμα 1.1.1: Τυπικά παραδείγματα των διαφόρων συστημάτων πέδησης και της εξέλιξής τους.

Αυτό το σύστημα πέδησης έχει όλα τα πλεονεκτήματα του συστήματος με τα ταμπούρα, αλλά έχει πολύ μεγαλύτερη ικανότητα απαγωγής της παραγόμενης θερμότητας και αρκετά μικρότερο βάρος. Αυτοί είναι και οι λόγοι για τους οποίους έχει επικρατήσει. Όμως, αν και η ικανότητά του να απάγει την παραγόμενη θερμότητα είναι βελτιωμένη σε σχέση με τα προηγούμενα, λόγω σχεδιασμού, και μπορεί να βελτιωθεί με τη διάνοιξη οπών και αυλάκων στην επιφάνεια τριβής των δίσκων, εντούτοις οι περιορισμοί προέρχονται από το ίδιο το υλικό κατασκευής των δίσκων και την ικανότητά του να ανταπεξέλθει στο θερμικό σοκ που του προκαλούν ένα ή περισσότερα, διαδοχικά φρεναρίσματα από υψηλή ταχύτητα. Έτσι δεν είναι

ασύνηθες το φαινόμενο της δημιουργίας ρωγμών ή πλαστικών παραμορφώσεων στους δίσκους πέδησης λόγω των μεγάλων τάσεων που αναπτύσσονται εντός τους από την απότομη και κατακόρυφη αύξηση της θερμοκρασίας τους κατά τη διάρκεια πέδησης από πολύ υψηλή ταχύτητα (Yevtushenko A. et al. 1995, Mackin T. J. et al. 2002).

1.2 Υλικά κατασκευής δισκοφρένων

Οι έρευνες κυρίως του τομέα της αεροναυπηγικής οδήγησαν στην κατασκευή δίσκων τριβής από διάφορα μείγματα μεταλλικών στοιχείων και συνθετικών υλικών με κυριότερους τους δίσκους από φαιό χυτοσίδηρο, διάφορα είδη ατσαλιού, από μείγμα αλουμινίου εμπλουτισμένου με σωματίδια οξειδίων και καρβιδίων (AL-MMC), συνθετικούς δίσκους από ίνες άνθρακα και συνδετικό υλικό γραφίτη (CC) και συνθετικούς δίσκους από ίνες άνθρακα και συνδετικό υλικό κεραμικό (CMC). Η πιο συνηθισμένη μορφή αυτού του υλικού αποτελείται από ίνες άνθρακα και συνδετικό υλικό καρβίδιο του πυριτίου (C/SiC). Αυτά τα δύο υλικά έχουν μικρότερη πυκνότητα, άρα και μικρότερο βάρος από τους συνηθισμένους δίσκους από φαιό χυτοσίδηρο ή ατσάλι, αλλά και σαφώς καλύτερη συμπεριφορά στα θερμικά σοκ. Το βασικό τους μειονέκτημα είναι το κατά πολύ υψηλότερο κόστος τους. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος για τον οποίο έχουν βρει εφαρμογή μόνο στον τομέα των αγωνιστικών μοτοσυκλετών του παγκοσμίου πρωταθλήματος ταχύτητας. Άλλος ένας παράγων που δεν έχει επιτρέψει την εφαρμογή των Carbon/Carbon δίσκων συγκεκριμένα, σε μοτοσυκλέτες για καθημερινή χρήση, είναι ότι ο συντελεστής τριβής τους δεν είναι σταθερός και μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία και την υγρασία (Blanco C. et al. 1997).



Σχήμα 1.2.1: Συγκριτικό διάγραμμα τυπικών τιμών συντελεστή τριβής για τα διάφορα υλικά κατασκευής δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).

Οι βασικοί παράγοντες που καθορίζουν την επιλογή υλικού για τα δισκόφρενα πρώτης τοποθέτησης από τους κατασκευαστές είναι κατά σειρά προτεραιότητας:

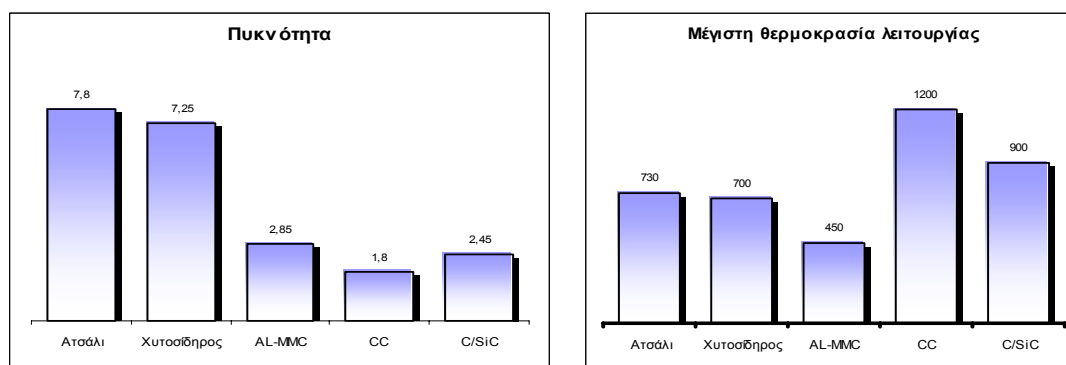
- Το κόστος
- Η διάρκεια ζωής
- Η θερμική ικανότητα
- Ο συντελεστής τριβής
- Το βάρος

Η συνηθέστερη επιλογή υλικού για δίσκους πρώτης τοποθέτησης είναι το ατσάλι σε διάφορους τύπους. Αυτό συμβαίνει διότι πλεονεκτεί στους δύο βασικούς παράγοντες που είναι το κόστος και η διάρκεια ζωής επειδή τα είδη του ατσάλιου που χρησιμοποιούνται είναι σε κάποιο βαθμό ανοξείδωτα με αποτέλεσμα να μην φθείρονται από τις περιβαλλοντικές συνθήκες.

Όσον αφορά τους δίσκους αντικατάστασης από ανεξάρτητους κατασκευαστές, για υψηλών επιδόσεων μοτοσυκλέτες, το επικρατέστερο υλικό είναι ο φαιός χυτοσίδηρος. Αυτό συμβαίνει γιατί οι συγκεκριμένοι δίσκοι έχουν μικρότερο βάρος, και μεγαλύτερο συντελεστή τριβής (βλ. Σχήμα 1&2).

Οι συνθετικοί δίσκοι, προς το παρόν, τοποθετούνται μόνο σε αγωνιστικές, πρωτότυπες μοτοσυκλέτες της υψηλότερης κατηγορίας του παγκόσμιου πρωταθλήματος ταχύτητας. Σε αυτό το επίπεδο ο παράγων κόστος δεν έχει κανένα βάρος, όπως και η διάρκεια ζωής. Έτσι προτιμούνται τα υλικά που έχουν το μέγιστο

συντελεστή τριβής, το μικρότερο βάρος και την υψηλότερη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας (βλ. Σχήμα 1&2).



Σχήμα 1.2.2: Συγκριτικά διαγράμματα τυπικών τιμών πυκνότητας και μέγιστης θερμοκρασίας λειτουργίας για τα διάφορα υλικά κατασκευής δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).

1.3 Τα συνθετικά – κεραμικά υλικά

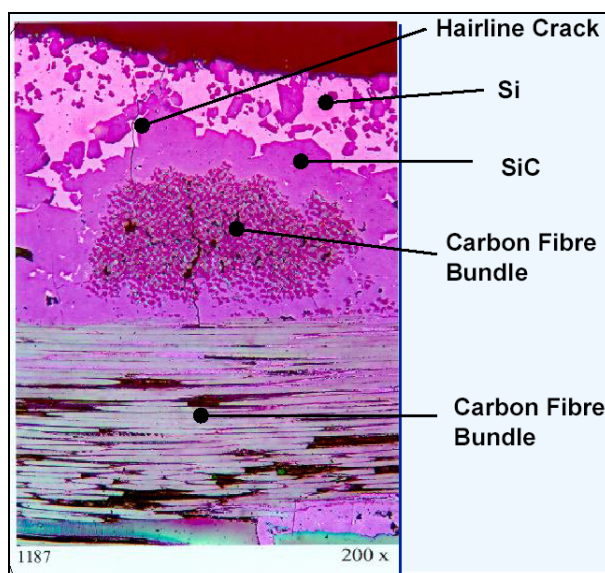
Στο πεδίο της επιστημονικής έρευνας, όσον αφορά στα συνθετικά υλικά κατασκευής συστημάτων πέδησης, το πλήθος των βιβλιογραφικών αναφορών είναι πολύ περιορισμένο (Blanco et al, 1996). Ο βασικός λόγος για αυτό το γεγονός είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών γίνεται από την βιομηχανία, η οποία προστατεύει τις έρευνές της με διπλώματα ευρεσιτεχνιών. Ο άνθρακας (*Carbon*) ως στοιχείο, βρίσκεται στη φύση σε κρυσταλλική μορφή, συνήθως με τη μορφή γραφίτη ή διαμαντιού. Ο όρος *carbon* θα έπρεπε να αναφέρεται μόνο στο στοιχείο του άνθρακα. Όσον αφορά στα υλικά από carbon, αυτά θα μπορούσαν να οριστούν με ακρίβεια ως διάφορες μορφές γραφίτη. Όμως θα ήταν καλύτερο, να χρησιμοποιείται ο όρος *carbon* μαζί με έναν επιθετικό προσδιορισμό, όπως ενεργοποιημένος, πυρολυτικός κτλ. Τα υλικά *carbon* μπορούν να ταξινομηθούν στις παρακάτω κύριες κατηγορίες. Υπάρχουν *carbon* υλικά τα οποία όταν υποστούν θερμική κατεργασία στους 3000°C περίπου, δεν μετασχηματίζονται σε τρισδιάστατη, γραφιτική, κρυσταλλική μορφή. Αυτά τα υλικά περιγράφονται ως *non – graphitic* και *non – graphitizable*, δηλαδή ως *carbon* υλικά τα οποία δεν μπορούν να υποστούν γραφίτιση. Υπάρχουν *carbon* υλικά τα οποία όταν υποστούν θερμική

κατεργασία στους 3000°C, περίπου, μετασχηματίζονται σε τρισδιάστατη, γραφιτική, κρυσταλλική μορφή. Αυτά τα υλικά περιγράφονται ως *initially non – graphitic*, αλλά *graphitizable*. Δηλαδή ως carbon υλικά τα οποία δεν είναι γραφιτικής μορφής, αλλά μπορούν να μετασχηματιστούν σε γραφίτη. Ένα υλικό *carbon* που μπορεί να υποστεί γραφίτιοποίηση (*graphitizable*), όταν υποστεί θερμική κατεργασία στους 3000°C γίνεται γραφιτικό. Μια μελέτη με ακτίνες X ενός *non – graphitizable, non – graphitic* υλικού *carbon* που έχει υποστεί θερμική κατεργασία στους 900°C και ενός *non – graphitic*, αλλά *graphitizable* υλικού που έχει υποστεί θερμική κατεργασία στην ίδια θερμοκρασία, δεν θα μπορούσε να ξεχωρίσει μεταξύ τους τα δύο υλικά, αν και η δομή τους είναι πολύ διαφορετική.

Για τη διακρίβωση μεταξύ των δύο δομών, γίνεται χρήση οπτικού μικροσκοπίου. Χρησιμοποιώντας απλό πολωμένο φως, το οποίο αντικατοπτρίζεται πάνω σε γυαλισμένη επιφάνεια από το *carbon* υλικό, παρατηρείται ότι το *non – graphitizable* υλικό είναι ισότροπο, ενώ το *graphitizable* είναι ανισότροπο, παρουσιάζοντας οπτική αντίδραση κατά το επίπεδο πόλωσης του προσπίπτοντος φωτός. Γενικά, από τα υλικά *carbon* που προέρχονται από το ξύλο ή άλλες πρώτες ύλες και δεν λιώνουν κατά τη θερμική τους κατεργασία, προκύπτουν ισότροπα υλικά. Αντιθέτως, από τα υλικά *carbon* που προέρχονται από την πίσσα ή άλλες πρώτες ύλες και λιώνουν κατά τη θερμική τους κατεργασία, προκύπτουν ανισότροπα υλικά. Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των δύο τύπων *carbon* υλικού, είναι ο σχετικός προσανατολισμός των γραφιτικών κόκκων από τους οποίους αποτελούνται. Στα ισότροπα *non – graphitizable carbon* υλικά, οι γραφιτικοί κόκκοι είναι μικροί, τυχαία διατεταγμένοι και ενωμένοι μεταξύ τους σε όλες τις κατευθύνσεις με ισχυρούς, χημικούς δεσμούς. Στα ανισότροπα *graphitizable carbon* υλικά, οι γραφιτικοί κόκκοι είναι μεγαλύτεροι, διατεταγμένοι παράλληλα και ενωμένοι μεταξύ τους με ισχυρούς, χημικούς δεσμούς. Τα ισότροπα *carbon* υλικά έχουν δομές οι οποίες σχετίζονται με τις πρώτες ύλες από τις οποίες προήλθαν, πχ. ξύλο, ρητίνη ή ίνες PAN. Τα ανισότροπα *carbon* υλικά οφείλουν τη δομή τους σε ένα αρωματικό, πτητικό σύστημα υγρών κρυστάλλων, αποκαλούμενο *μεσοφάση*, το οποίο δημιουργείται μέσα στην πίσσα κατά τη διάρκεια της πυρόλυσης και εξανθράκωσής της.

Για την κατασκευή των συνθετικών δισκοφρένων χρησιμοποιούνται ίνες PAN, που είναι *non – graphitizable carbon* υλικό και συνδετικό *graphitizable carbon* υλικό προερχόμενο από πίσσα ή από τη θερμική διάσπαση μεθανίου. Σε αυτό ακριβώς το συνδετικό υλικό έγκειται και η διαφορά μεταξύ των συνθετικών (CC) και

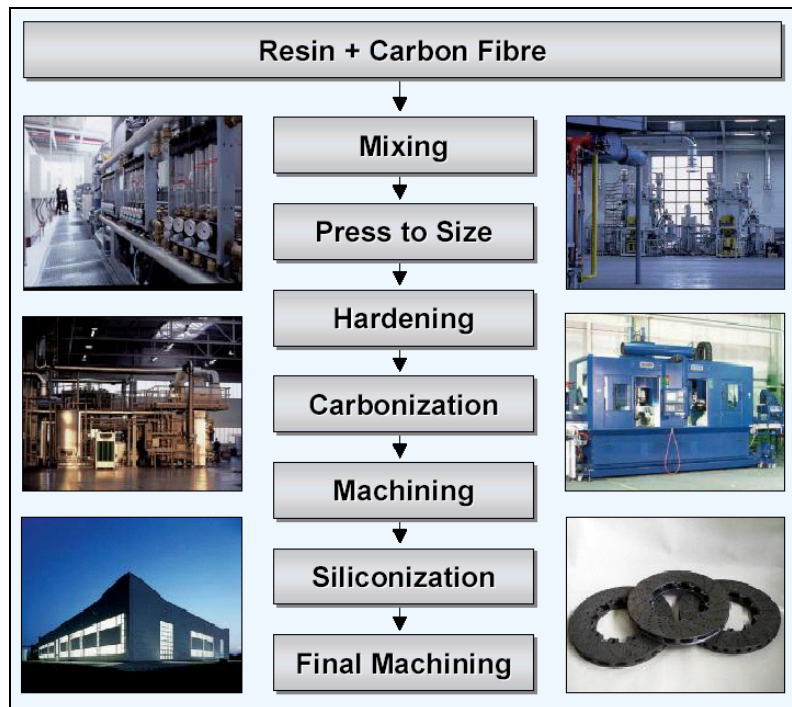
των κεραμικών (CMC) δισκοφρένων (βλ. Σχήμα 1.3.1). Στα κεραμικά δισκόφρενα το συνδετικό υλικό είναι καρβίδιο του πυριτίου SiC, το οποίο είναι ένα κεραμικό υλικό υψηλής σκληρότητας και μεγάλης αντοχής σε υψηλές θερμοκρασίες που συνήθως χρησιμοποιείται σαν τεχνητό διαμάντι και σαν κοπτικό εργαλείο σε εργαλειομηχανές κοπής (τόρνους, φρέζες κτλ).



Σχήμα 1.3.1: Λεπτομέρεια της δομής ενός κεραμικού δισκοφρένου (SGL BRAKES GmbH, 2002).

1.4 Η διαδικασία κατασκευής των συνθετικών – κεραμικών δισκοφρένων

Είναι φυσιολογικό να μην μπορεί να περιγραφεί επακριβώς και αναλυτικά η διαδικασία κατασκευής των συνθετικών ή των κεραμικών δισκοφρένων, καθώς κάθε βιομηχανία χρησιμοποιεί ξεχωριστή διαδικασία για την κατασκευή διαφορετικών δισκοφρένων, από διαφορετικές πρώτες ύλες και με διαφορετικά αποτελέσματα. Όμως είναι δυνατόν να δοθεί μια γενική περιγραφή των τυπικών διαδικασιών που ακολουθούνται στα διάφορα στάδια κατασκευής (βλ. Σχήμα 1.4.1).



Σχήμα 1.4.1: Η τυπική διαδικασία κατασκευής των κεραμικών δισκοφρένων (SGL BRAKES GmbH, 2002).

Αρχικά, λοιπόν, σχεδιάζεται ο δίσκος. Σύμφωνα με το σχέδιο, κατασκευάζεται το καλούπι από το οποίο θα προκύψει το προϊόν. Από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δίσκου υπολογίζονται οι ποσότητες των πρώτων υλών που θα χρησιμοποιηθούν στο πρώτο στάδιο κατασκευής. Σε αυτό το στάδιο γίνεται η δημιουργία του οπλισμού του δίσκου από τις *carbon* ίνες PAN. Σε έναν ειδικό αναδευτήρα αναμειγνύονται μικρού μήκους ίνες (< 2mm) με ειδική εποξική ρητίνη σε αναλογία 70/30 περίπου. Στη συνέχεια το μείγμα τοποθετείται στο καλούπι και συμπιέζεται για να εξέλθει ο αέρας που έχει πιθανώς εγκλωβιστεί εντός του καλουπιού. Όταν το μείγμα στερεοποιηθεί, εισέρχεται σε ειδικό φούρνο υψηλής πίεσης. Αυτό γίνεται για να γίνει πυρόλυση της ρητίνης και να μείνει από αυτήν μόνο ο άνθρακας που υπήρχε στο μόριό της, ο οποίος και ενώνεται χημικά με τον άνθρακα των *carbon* ινών PAN. Μέχρι αυτό το σημείο, η διαδικασία κατασκευής των (CC) και των (CMC) δίσκων είναι κοινή.

Στη συνέχεια, ο δίσκος που προορίζεται να γίνει (CC) μπαίνει σε έναν άλλο φούρνο υψηλής θερμοκρασίας και περιβάλλοντος αερίου υδρογονάνθρακα στον οποίο μένει για διάστημα ενός ως δύο μηνών μέχρις ότου να χτιστεί η δομή του συνδετικού carbon υλικού, από τη χημική αντίδραση του άνθρακα των ινών και της ρητίνης με τον αέριο υδρογονάνθρακα.

Ο δίσκος που προορίζεται να γίνει (CMC), αφού βγει από το φούρνο της πυρόλυσης, εμποτίζεται ξανά με ρητίνη και τοποθετείται πάλι στο φούρνο της πυρόλυσης. Όταν ολοκληρωθεί αυτός ο κύκλος, ο δίσκος τοποθετείται σε έναν άλλο φούρνο υψηλής θερμοκρασίας όπου θα μείνει για ένα εικοσιτετράωρο περίπου, σε περιβάλλον υγρού πυριτίου, μέχρις ότου χτιστεί η δομή του συνδετικού καρβιδίου του πυριτίου από τη χημική αντίδραση του πυριτίου με τον άνθρακα των ινών και της ρητίνης. Αυτός είναι και ο λόγος που απαιτείται και δεύτερος κύκλος εμποτισμού με ρητίνη, και πυρόλυσης. Για να υπάρχει ικανή ποσότητα άνθρακα να αντιδράσει με το πυρίτιο.

Το τελευταίο στάδιο κατασκευής είναι κοινό και για τους δύο τύπους δισκοφρένων και αφορά στην τελική διαδικασία φινιρίσματος του προϊόντος, ούτως ώστε να είναι έτοιμο να περάσει στην εφαρμογή.

Κεφάλαιο 2: Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

2.1 Γενικά

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια από τις πιο δυναμικές διαδικασίες για την αριθμητική προσεγγιστική επίλυση ποσοτικών προβλημάτων στην επιστήμη της Μηχανικής. Η πρώτη δημοσίευση που έγινε για τη μέθοδο αυτή ήταν του μαθηματικού Courant (1940). Πέρασε όμως απαρατήρητη, γιατί η εφαρμογή της είχε μεγάλο φόρτο μαθηματικών πράξεων. Με την εφεύρεση των ηλεκτρονικών υπολογιστών όμως, πέρασε στην πρώτη γραμμή της έρευνας και η εξέλιξή της ήταν ραγδαία.

Ο Strang (1988) μας λέει ότι το πρώτο βήμα ήταν η τροποποίηση των αρχών των ελαχίστων. Επειδή ήταν εύκολο να δει κανείς πώς «διακριτοποιείται» μια διαφορική εξίσωση, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είχε την πρωτοπορία. Αυτό που δεν είχε γίνει αντιληπτό πλήρως ήταν ότι ακόμη και οι πεπερασμένες διαφορές γίνονται απίστευτα πολύπλοκες σε πραγματικά προβλήματα Τεχνικής, όπως οι τάσεις σε ένα αεροπλάνο ή οι φυσικές συχνότητες του ανθρωπίνου εγκεφάλου. Η πραγματική δυσκολία δεν έγκειται στην επίλυση των εξισώσεων, αλλά στην διατύπωσή τους. Για μια ασύμμετρη περιοχή χρειαζόμαστε ασύμμετρο πλέγμα, αποτελούμενο από τρίγωνα, τετράπλευρα, τετράεδρα ή εξαέδρα, και κατόπιν χρειαζόμαστε έναν συστηματικό τρόπο προσέγγισης των υποκειμένων φυσικών νόμων. Με άλλα λόγια, ο υπολογιστής πρέπει να βοηθήσει όχι μόνο στη λύση του διακριτού προβλήματος, αλλά και στη διατύπωσή του.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπόρεσε να εκμεταλλευτεί τη δύναμη του υπολογιστή στο να κατασκευάσει μια διακριτή προσέγγιση, να τη λύσει και να παραθέσει αποτελέσματα, περισσότερο από κάθε άλλη τεχνική στην επιστημονική υπολογιστική. Το κλειδί είναι να διατηρήσουμε την απλότητα της βασικής ιδέας και ας είναι οι εφαρμογές πολύπλοκες.

Για να εξηγήσει τη μέθοδο, ο Strang ξεκινάει από την κλασική αρχή των Rayleigh - Ritz που λέει ότι η λύση της $Ax = b$ ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της $P(x) = (1/2)x^T Ax - x^T b$ και κατόπιν εισάγει τη νέα ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων.

Εργάζεται με την ίδια διαφορική εξίσωση $-u'' = f(x)$ και τις ίδιες συνοριακές συνθήκες $u(0) = u(1) = 0$ των πεπερασμένων διαφορών. Το πρόβλημα, ομολογουμένως, είναι «απείρων διαστάσεων», το b έχει αντικατασταθεί από τη συνάρτηση f και ο πίνακας A από τον τελεστή $-d^2/dx^2$. Προχωρά ανάλογα και καταγράφει την τετραγωνική μορφή της οποίας ζητείται η ελαχιστοποίηση, αντικαθιστώντας εσωτερικά γινόμενα με ολοκληρώματα

$$P(u) = (1/2)u^T A u - u^T b = (1/2) \int_0^1 u(x)(-u''(x))dx - \int_0^1 u(x)f(x)dx. \quad (2.1-1)$$

Η παράσταση αυτή πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, ως προς όλες τις συναρτήσεις u που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες και η συνάρτηση που δίνει το ελάχιστο θα είναι η λύση u . Η διαφορική εξίσωση μετατράπηκε σε αρχή ελαχίστου και απομένει να ολοκληρώσουμε κατά μέρη:

$$\int_0^1 u(-u'')dx = \int_0^1 (u')^2 dx - [uu']_{x=0}^{x=1} \quad \text{άρα} \quad P(u) = (1/2) \int_0^1 (u')^2 dx - \int_0^1 u f dx.$$

Ο όρος uu' είναι μηδέν και στα δύο άκρα, διότι το ίδιο συμβαίνει με την u . Επίσης ο τετραγωνικός όρος $\int (u')^2$ είναι συμμετρικός, όπως η $x^T A x$, καθώς επίσης και θετικός, άρα εξασφαλίζουμε ένα ελάχιστο.

Πώς βρίσκεται αυτό το ελάχιστο; Ο ακριβής υπολογισμός είναι ισοδύναμος με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης και το πρόβλημα αυτό είναι απείρων διαστάσεων. Η αρχή των Rayleigh - Ritz παράγει ένα n -διάστατο πρόβλημα, διαλέγοντας n μόνο δοκιμαστικές συναρτήσεις $u = V_1, \dots, u = V_n$, αποδεχόμενη όλους τους συνδυασμούς $V = y_1 V_1(x) + \dots + y_n V_n(x)$ και υπολογίζοντας τον ειδικό συνδυασμό U που ελαχιστοποιεί την $P(V)$. Η ιδέα είναι να ελαχιστοποιήσουμε υπεράνω ενός υποχώρου, αντί υπεράνω όλων των δυνατών u και η συνάρτηση που δίνει το ελάχιστο είναι η U , αντί της u , ελπίζοντας ότι αυτές οι δύο θα είναι κοντά η μία στην άλλη.

Αντικαθιστώντας την u με την V , η τετραγωνική μορφή γίνεται

$$P(V) = (1/2) \int_0^1 (y_1 V_1' + \dots + y_n V_n')^2 dx - \int_0^1 (y_1 V_1 + \dots + y_n V_n) f dx. \quad (2.1-2)$$

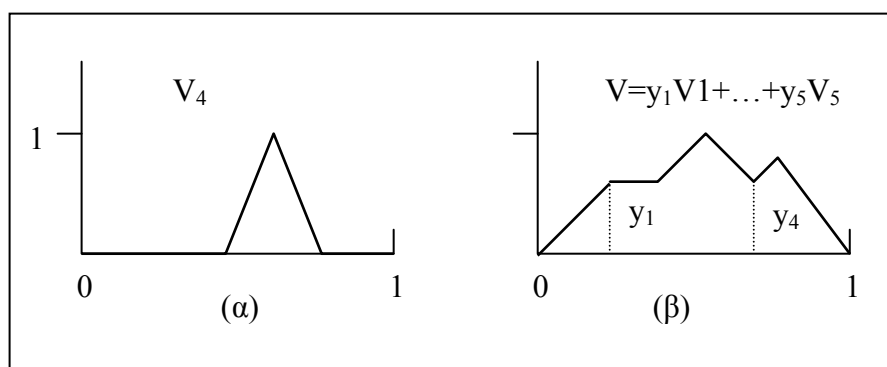
Οι V επελέγησαν εκ των προτέρων και οι άγνωστοι είναι τα y_1, \dots, y_n . Εάν βάλουμε αυτά τα βάρη σε ένα διάνυσμα y , τότε η $P(V) = (1/2)y^T A y - y^T b$ αναγνωρίζεται ακριβώς σαν μια από τις οικείες τετραγωνικές μορφές. Τα στοιχεία A_{ij} του πίνακα είναι $\int V_i' V_j' dx =$ συντελεστής του $y_i y_j$ και οι συνιστώσες b_i είναι $\int V_i f dx =$ συντελεστές των y_i . Τώρα μπορεί να βρεθεί το ελάχιστο της $(1/2)y^T A y - y^T b$, πράγμα ισοδύναμο με τη λύση της $A y = b$. Τα βήματα λοιπόν της μεθόδου των Rayleigh- Ritz

είναι (i) διάλεξε δοκιμαστικές συναρτήσεις (ii) υπολόγισε τους συντελεστές A_{ij} και b_j (iii) λύσε την $Ay = b$ και (iv) γράψε την προσεγγιστική λύση $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$.

Τα πάντα εξαρτώνται από το βήμα (i). Εκτός κι αν οι συναρτήσεις V_j είναι εξαιρετικά απλές, τα άλλα βήματα θα είναι, στην πραγματικότητα ακατόρθωτα. Εάν επίσης δεν υπάρχει συνδυασμός των V κοντά στην πραγματική λύση u , τα βήματα θα είναι άχρηστα. Το πρόβλημα είναι να συνδυαστούν και τα δύο, δυνατότητα υπολογισμού και ακρίβεια, και η ιδέα κλειδί που χάρισε την επιτυχία στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ήταν η χρήση τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων ως δοκιμαστικών συναρτήσεων V .

Το απλούστερο και περισσότερο χρησιμοποιούμενο στοιχείο είναι τμηματικά γραμμικό. Αρχικά τοποθετούνται κόμβοι στα σημεία $x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = nh$, όπως ακριβώς και στις πεπερασμένες διαφορές. Στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_{n+1} = 1$, οι συνοριακές απαιτούν από κάθε V να είναι μηδέν. Τότε η V_j είναι η «συνάρτηση - οροφή» που ισούται με 1 στον κόμβο x_j και μηδέν σε όλους τους άλλους κόμβους (βλ. Σχήμα 2.1α), άρα είναι συγκεντρωμένη σε ένα μικρό διάστημα γύρω από τον κόμβο της και μηδενίζεται παντού αλλού. Ο κάθε συνδυασμός $y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$ θα πρέπει να έχει την τιμή y_j στον κόμβο j , διότι όλες οι άλλες V είναι μηδέν. Έτσι το γράφημά της σχεδιάζεται εύκολα (βλ. Σχήμα 2.1β).

Αυτά συμπληρώνουν το βήμα (i). Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές $A_{ij} = \int V_i' V_j' dx$ του «πίνακα ακαμψίας» A . Η κλίση V_j' ισούται με $1/h$ στο μικρό διάστημα αριστερά του x_j και $-1/h$ στο διάστημα δεξιά του. Το ίδιο ισχύει και για την V_i' κοντά στον κόμβο της x_i και εφ' όσον αυτά τα «διπλά διαστήματα» δεν τέμνονται, το γινόμενο $V_i' V_j'$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Τα διαστήματα τέμνονται μόνο όταν



Σχήμα 2.3: Συναρτήσεις - οροφές και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους (Strang, 1988).

$$i = j \quad \text{και} \quad \int V_i' V_j' dx = \int \left(\frac{1}{h}\right)^2 + \int \left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{2}{h},$$

ή

$$i = j \pm 1 \quad \text{και} \quad \int V_i' V_j' dx = \int \left(\frac{1}{h}\right) \int \left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h}.$$

Συνεπώς ο πίνακας ακαμψίας είναι, στην πραγματικότητα, τριδιαγώνιος:

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αυτό μοιάζει με τις πεπερασμένες διαφορές και οδήγησε σε χιλιάδες συζητήσεις για τη σχέση μεταξύ των δύο μεθόδων. Πιο πολύπλοκα πεπερασμένα στοιχεία – πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού, που ορίζονται σε τρίγωνα ή τετράπλευρα, για μερικές διαφορικές εξισώσεις – παράγουν επίσης αραιούς πίνακες A . Τα πεπερασμένα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν ως ένα συστηματικός τρόπος κατασκευής εξισώσεων διαφορών ακριβείας για ασύμμετρα πλέγματα, οπότε τα πεπερασμένα στοιχεία βρίσκονται στην «τομή» των μεθόδων Rayleigh- Ritz και πεπερασμένων διαφορών. Το ουσιαστικό είναι η απλότητα αυτών των τμηματικά πολυωνυμικών συναρτήσεων, λόγω της οποίας οι κλίσεις τους σε κάθε υποδιάστημα είναι εύκολο να βρεθούν και να ολοκληρωθούν.

Οι συνιστώσες b_j στην δεξιά πλευρά είναι διαφορετικές. Αντί για τη μεμονωμένη τιμή της f στο x_j , όπως στις πεπερασμένες διαφορές, είναι τώρα μια μέση τιμή της f γύρω από το σημείο: $b_j = \int V_j f dx$. Κατόπιν, στο βήμα (iii) λύνουμε το τριδιαγώνιο σύστημα $Ay = b$, που δίνει τους συντελεστές της δοκιμαστικής, ελαχιστοποιούσας συνάρτησης $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$. Τέλος, συνδέοντας όλα αυτά τα ύψη y_j με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουμε μια εικόνα της προσεγγιστικής λύσης U .

Η ιδέα των Rayleigh - Ritz – η ελαχιστοποίηση υπεράνω μιας οικογένειας συναρτήσεων V , πεπερασμένων διαστάσεων, αντί για όλες τις δυνατές u – είναι χρήσιμη τόσο στις εξισώσεις σταθεράς καταστάσεως όσο και στα προβλήματα ιδιοτιμών. Αυτή τη φορά ελαχιστοποιείται το πηλίκο Rayleigh. Το πραγματικό του ελάχιστο είναι η θεμελιώδης συχνότητα λ_1 και το κατά προσέγγιση ελάχιστο Λ_1 θα

αυξηθεί όταν περιορίσουμε την οικογένεια των δοκιμαστικών συναρτήσεων από τις u στις V . Και πάλι το διακριτό πρόβλημα μπορεί να διευθετηθεί. Η αρχή πράγματι εφαρμόζεται, μόνο που θα πρέπει οι συναρτήσεις V_j να υπολογίζονται εύκολα. Έτσι το βήμα που έγινε τα τελευταία 30 χρόνια ήταν τελείως φυσιολογικό και αναπόφευκτο: να εφαρμοστούν οι νέες ιδέες των πεπερασμένων στοιχείων σ' αυτή την από μακρού καθιερωθείσα μεταβολική μορφή του προβλήματος των ιδιοτιμών.

Το καλύτερο παράδειγμα κατά τον Strang είναι το απλούστερο:

$$-u'' = \lambda u, \quad \mu \varepsilon \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Το πρώτο ιδιοδιάνυσμά του είναι $u = \sin \pi x$, με ιδιοτιμή $\lambda_1 = \pi^2$. Η συνάρτηση $u = \sin \pi x$ δίνει το ελάχιστο στο αντίστοιχο πηλίκο Rayleigh

$$R(u) = \frac{u^T [-d^2/dx^2] u}{u^T u} = \frac{\int_0^1 u(-u'') dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

Από φυσική άποψη, αυτό είναι το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια, που ισορροπούν για το ιδιοδιάνυσμα. Κανονικά αυτό το ιδιοδιάνυσμα θα ήταν άγνωστο και για να το προσεγγισθεί θα έπρεπε να παρθούν μόνο υποψήφιες συναρτήσεις $V = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$:

$$R(u) = \frac{\int_0^1 (y_1 V_1' + \dots + y_n V_n')^2 dx}{\int_0^1 (y_1 V_1 + \dots + y_n V_n)^2 dx} = \frac{y^T Ay}{y^T My}.$$

Αντιμετωπίζεται τώρα το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του $y^T Ay / y^T My$. Εάν ο πίνακας M ήταν ο ταυτοτικός, αυτό θα οδηγούσε στο συνηθισμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $Ay = \lambda y$. Όμως ο πίνακας M θα είναι τριδιαγώνιος και αυτή ακριβώς η κατάσταση είναι που οδηγεί στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Η ελάχιστη τιμή Λ_1 θα είναι η μικρότερη ιδιοτιμή της $Ay = \lambda My$ και θα είναι κοντά στο π^2 . Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα y θα δίνει μια προσέγγιση της ιδιοσυνάρτησης: $U = y_1 V_1 + \dots + y_n V_n$. Όπως και στο στατικό πρόβλημα, η μέθοδος μπορεί να συνοψισθεί σε τέσσερα βήματα: (i) διάλεξε τα V_j , (ii) υπολόγισε τους A και M , (iii) λύσε το $Ay = \lambda My$, (iii) τύπωσε το Λ_1 και την U .

2.2 Τεχνολογία πεπερασμένων στοιχείων στο λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2003

Στην παρούσα εργασία, για να γίνει η μελέτη του σύνθετου θερμό- μηχανικού προβλήματος της πέδησης, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο ηλεκτρονικού υπολογιστή MSC.MARC 2003. Το Mentat είναι το περιβάλλον στο οποίο γίνεται ο σχεδιασμός και γενικότερα η μοντελοποίηση του προβλήματος, ενώ το Marc είναι το λογισμικό πρόγραμμα που εφαρμόζει την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος.

Το MSC.MARC 2003 αναπτύχθηκε στη βάση της μεθόδου μετατόπισης (MARC Analysis Research Corporation, 1998). Η μεθοδολογία ακαμψίας που χρησιμοποιεί αναθέτει σχέσεις δύναμης – μετατόπισης μέσα από την ακαμψία του συστήματος. Η σχέση δύναμης – μετατόπισης για ένα γραμμικό, στατικό πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως

$$Ku = f. \quad (2.2-1)$$

όπου K είναι ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος, u είναι η κομβική μετατόπιση και f είναι το διάνυσμα της δύναμης. Υποθέτοντας ότι έχουν αποδοθεί στην κατασκευή συννοριακές συνθήκες, όσον αφορά στις δυνάμεις και τις μετατοπίσεις η εξίσωση (2.2-1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.2-2)$$

όπου u_1 είναι το άγνωστο διάνυσμα μετατόπισης, f_1 είναι το δοσμένο διάνυσμα δύναμης, u_2 είναι το δοσμένο διάνυσμα μετατόπισης και f_2 είναι το διάνυσμα της δύναμης αντίδρασης. Αφού επιλυθεί η εξίσωση (2.2-2) ως προς u , τότε οι τάσεις σε κάθε στοιχείο μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης που όσον αφορά στην παραμόρφωση του κόμβου ενός στοιχείου είναι:

$$\varepsilon_{el} = \beta u_{el}. \quad (2.2-3)$$

Οι ορθές τάσεις σε ένα στοιχείο υπολογίζονται από τη σχέση διατμητικών – ορθών τάσεων ως:

$$\sigma_{el} = L \varepsilon_{el}. \quad (2.2-4)$$

όπου σ_{el} και L_{el} είναι ορθές και διατμητικές τάσεις αντίστοιχα και u_{el} είναι το διάνυσμα της παραμόρφωσης που αφορά στα κομβικά σημεία του στοιχείου. Τα β και L είναι συντελεστές διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης και ορθής – διατμητικής τάσης αντίστοιχως.

Για δυναμικά προβλήματα η συνεισφορά των μαζών και των αποσβέσεων θα πρέπει να περιληφθεί στο σύστημα. Η εξίσωση που περιγράφει ένα γραμμικό, δυναμικό πρόβλημα είναι:

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = f. \quad (2.2-5)$$

όπου M είναι ο πίνακας μάζας του συστήματος, D είναι ο πίνακας απόσβεσης, η εξίσωση (2.2-6) είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης και u είναι το διάνυσμα της ταχύτητας. Η εξίσωση που περιγράφει ένα αναπόσβεστο δυναμικό σύστημα είναι:

$$M\ddot{u} + Ku = f. \quad (2.2-6)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν άλλες διαδικασίες είναι παρόμοιες. Για παράδειγμα η εξίσωση που περιγράφει την ανάλυση του μεταβολικού προβλήματος μετάδοσης θερμότητας είναι:

$$C\dot{T} + HT = Q. \quad (2.2-7)$$

όπου C είναι ο πίνακας θερμικής ικανότητας, H είναι ο πίνακας θερμικής αγωγιμότητας, Q είναι το διάνυσμα ροής της θερμότητας και T είναι το διάνυσμα της κομβικής θερμοκρασίας. Η εξίσωση (2.2-7) απλοποιείται για το πρόβλημα σταθερής κατάστασης και γίνεται:

$$HT = Q. \quad (2.2-8)$$

Είναι προφανές ότι η εξίσωση που περιγράφει τη μεταφορά θερμότητας σε ένα πρόβλημα σταθερής κατάστασης (2.2-8) και η εξίσωση της στατικής (2.2-1) παίρνουν την ίδια μορφή.

Η εξίσωση που περιγράφει το θερμό – μηχανικό πρόβλημα έχει ως εξής:

$$M\ddot{u} + D(T)\dot{u} + K(T)u = f. \quad (2.2-9)$$

$$C(T)\dot{T} + H(T)T = Q + Q'. \quad (2.2-10)$$

Στις εξισώσεις (2.2-9) και (2.2-10) ο πίνακας απόσβεσης D , ο πίνακας ακαμψίας K , ο πίνακας θερμικής ικανότητας C και ο πίνακας θερμικής αγωγιμότητας H είναι όλοι εξαρτώμενοι από τη θερμοκρασία. Το Q' είναι η εσωτερική θερμότητα που αναπτύσσεται λόγω ανελαστικής παραμόρφωσης. Η ζεύξη του προβλήματος

μετάδοσης της θερμότητας και του μηχανικού προβλήματος γίνεται μέσω των εξαρτώμενων από τη θερμοκρασία μηχανικών ιδιοτήτων και της εσωτερικά αναπτυσσόμενης θερμότητας. Εάν πραγματοποιηθεί μια ανανεωμένη *Λαγκρανζιανή* ανάλυση, τα K και H εξαρτώνται από προηγούμενες παραμορφώσεις.

Οι εξισώσεις που περιγράφονται παραπάνω είναι είτε αλγεβρικές εξισώσεις είτε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η μεταβλητή του χρόνου είναι συνεχής για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για την απλοποίηση των διαφορικών εξισώσεων και την μετατροπή τους σε αλγεβρικές χρησιμοποιείται μια διαδικασία ολοκλήρωσης (για παράδειγμα *Newmark-Beta*, *Houbolt*, ή *κεντρικών διαφορών* για δυναμικά προβλήματα, και *προς τα πίσω διαφοράς* για προβλήματα μετάδοσης θερμότητας). Η τελική μορφή των σχέσεων που περιγράφουν όλες τις διαδικασίες ανάλυσης ενός προβλήματος, είναι συνεπώς, ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων.

Παραπάνω παρουσιάστηκαν πίνακες συστήματος οι οποίοι συναρμολογήθηκαν από πίνακες στοιχείων μέσα στο σύστημα. Για παράδειγμα, ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος, εκφράζεται ως άθροισμα των πινάκων ακαμψίας των στοιχείων του συστήματος:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i^{el} . \quad (2.2-11)$$

όπου το N είναι το πλήθος των στοιχείων που αποτελούν το σύστημα. Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος είναι ένας συμμετρικός ταινιοειδής πίνακας. Όταν χρησιμοποιείται επίλυση στοιχείο προς στοιχείο, δεν σχηματίζεται ποτέ ο συνολικός πίνακας ακαμψίας του συστήματος. Ο πίνακας ακαμψίας ενός στοιχείου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$K^{el} = \int_{V^{el}} \beta^T L \beta dV^{el} . \quad (2.2-12)$$

όπου V^{el} είναι ο όγκος του στοιχείου, β^* είναι ο συντελεστής διατμητικής τάσης – παραμόρφωσης και L είναι ο συντελεστής ορθών – διατμητικών τάσεων.

$$\varepsilon = \beta u . \quad (2.2-13)$$

$$\sigma = L \varepsilon . \quad (2.2-14)$$

Ο πίνακας της μάζας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$M^{el} = \int_{V^{el}} N^T \rho N dV . \quad (2.2-15)$$

* Σημείωση: Ο πίνακας β εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του στοιχείου

Η ολοκλήρωση στην εξίσωση (2.2-12) γίνεται αριθμητικά στο MSC.MARC 2003 και εξαρτάται από την επιλογή των σημείων ολοκλήρωσης. Ο πίνακας ακαμψίας στοιχείου μπορεί να ολοκληρωθεί πλήρως ή μερικώς, ενώ ο πίνακας μάζας ολοκληρώνεται πάντοτε πλήρως.

Στην εξίσωση (2.2-1) το διάνυσμα δύναμης f στον κόμβο περιλαμβάνει τη συνεισφορά πολλών ειδών φορτίσεων.

$$f = f_{point} + f_{surface} + f_{body} + f^*. \quad (2.2-16)$$

όπου το f_{point} είναι διάνυσμα σημειακού φορτίου, το $f_{surface}$ είναι διάνυσμα φορτίου κατανεμημένου σε επιφάνεια και το f_{body} είναι διάνυσμα φορτίου κατανεμημένου σε όγκο. Το f^* αναφέρεται σε άλλου είδους φορτίσεις όπως θερμικές και άλλες. Οι σημειακές φορτίσεις σχετίζονται άμεσα με τους βαθμούς ελευθερίας των κόμβων και έτσι μπορούν να προστεθούν απ' ευθείας στο διάνυσμα δύναμης του κόμβου. Για τα κατανεμημένα φορτία $f_{surface}$ και f_{body} πρέπει να υπολογισθούν τα ισοδύναμα διανύσματα κομβικού φορτίου για να προστεθούν στο διάνυσμα δύναμης του κόμβου. Στο MSC.MARC 2003 αυτός ο υπολογισμός γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση του κατανεμημένου φορτίου στην επιφάνεια ή τον όγκο στον οποίο εφαρμόζεται και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$f_{surface} = \int_A N^T \rho dA. \quad (2.2-17)$$

$$f_{body} = \int_V N^T \rho dV. \quad (2.2-18)$$

όπου ρ είναι η πίεση.

2.3 Τρισδιάστατη μοντελοποίηση

Το απλούστερο επίπεδο συνεχές πεπερασμένο στοιχείο είναι το τριγωνικό. Στο χώρο των τριών διαστάσεων το ισοδύναμο στοιχείο είναι το τετράεδρο, το οποίο έχει τέσσερις κόμβους στις αντίστοιχες ακμές του. Το πρόβλημα που υπάρχει γενικά στην ανάλυση κατασκευών με πεπερασμένα στοιχεία είναι ο σωστός τρόπος αρίθμησης των κόμβων μιας κατασκευής, που διακριτοποιείται σε τέτοια στοιχεία, καθώς επηρεάζεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου.

Είναι επίσης προφανές ότι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να επιτευχθεί ένας ικανοποιητικός βαθμός ακρίβειας πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος. Αυτό έχει όμως σαν αποτέλεσμα, σε ένα πρακτικό πρόβλημα, τη δημιουργία υπερβολικού αριθμού αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες μπορούν στην πράξη να οδηγήσουν σε μεγάλο περιορισμό της χρησιμότητας της μεθόδου. Περαιτέρω αύξηση του αριθμού των εξισώσεων έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των απαιτήσεων σε μνήμη και χρόνο του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Για να γίνει κατανοητό το μέγεθος του προβλήματος που προκύπτει αν υποτεθεί ότι η ακρίβεια των τριγώνων στη δισδιάστατη ανάλυση είναι συγκρίσιμη με αυτή των τετράεδρων στις τρεις διαστάσεις. Εάν μια επαρκής ανάλυση τάσης μιας τετραγωνικής, δισδιάστατης περιοχής απαιτεί ένα πλέγμα με $20 \times 20 = 400$ κόμβους, ο συνολικός αριθμός αλγεβρικών εξισώσεων είναι γύρω στις 800, δεδομένου ότι ο κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Μια ισοδύναμη ανάλυση στον χώρο των τριών διαστάσεων, είναι αυτή ενός κύβου με $20 \times 20 \times 20 = 8000$ κόμβους. Ο συνολικός αριθμός των εξισώσεων είναι τώρα 24000 καθώς κάθε κόμβος έχει τώρα τρεις βαθμούς ελευθερίας.

Δεδομένου ότι με τις συνηθισμένες άμεσες τεχνικές επίλυσης, η προσπάθεια υπολογισμού είναι κατά προσέγγιση ανάλογη προς τον αριθμό των εξισώσεων και ανάλογη προς το τετράγωνο του εύρους του πίνακα του συστήματος, μπορεί να εκτιμηθεί και το κόστος. Δεν αποτελούν έκπληξη επομένως οι προσπάθειες που γίνονται στο χώρο της τρισδιάστατης ανάλυσης, για να βελτιωθεί η ακρίβεια της λύσης, μέσω της χρησιμοποίησης σύνθετων στοιχείων με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας (Στεφανουδάκης, 2004).

2.4 Ανάλυση επαφής

2.4.1 Γενικά

Η προσομοίωση πολλών φυσικών προβλημάτων απαιτεί την ικανότητα μοντελοποίησης του φαινομένου της επαφής. Αυτό περιλαμβάνει μεταξύ άλλων, την ανάλυση ανοχών συναρμολόγησης, την ανάλυση ελαστικών και την ανάλυση διαφόρων κατασκευαστικών διαδικασιών όπως η σφυρηλασία, η ολκή και άλλων. Η ανάλυση της συμπεριφοράς της επαφής είναι πολύπλοκη, εξαιτίας της ανάγκης για ακριβή παρακολούθηση της κίνησης πολλαπλών γεωμετρικών σωμάτων και της κίνησης που προκύπτει από την αλληλεπίδρασή τους μετά την εμφάνιση της επαφής. Αυτό περιλαμβάνει την απεικόνιση της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ επιφανειών και τη μετάδοση θερμότητας μεταξύ σωμάτων, όταν είναι απαραίτητο. Ο αριθμητικός στόχος είναι να ανιχνευθεί η κίνηση των σωμάτων, να εφαρμοσθεί περιορισμός μη – διείσδυσης και να εφαρμοστούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την προσομοίωση της τριβικής συμπεριφοράς και της μετάδοσης θερμότητας. Διάφορες διαδικασίες έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση αυτών των προβλημάτων, όπως οι *λαγκρανζιανές μέθοδοι*, οι *μέθοδοι ποινής*, οι *ευθείς περιορισμοί* και άλλες. Επιπροσθέτως, η προσομοίωση επαφής συχνά απαιτεί τη χρήση ειδικών στοιχείων ανοχής. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα κυριότερα μέρη της ανάλυσης επαφής (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

2.4.2 Αριθμητικές μέθοδοι στην ανάλυση επαφής

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Στην ανάλυση επαφής, ουσιαστικά λύνεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης υπό περιορισμόν, ο οποίος είναι ο περιορισμός μη διείσδυσης. Η τεχνική των *πολλαπλασιαστών Lagrange* είναι η πιο κοινή διαδικασία για την εφαρμογή

μαθηματικών περιορισμών σε ένα σύστημα. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, αν οι περιορισμοί γραφούν με ακρίβεια, δεν θα προκύψει διείσδυση. Δυστυχώς οι πολλαπλασιαστές *Lagrange* οδηγούν σε υπολογιστικές δυσκολίες, διότι η εφαρμογή τους έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μη – θετικά ορισμένου συστήματος. Αυτό απαιτεί πρόσθετες λειτουργίες για την εξασφάλιση μιας ακριβούς και σταθερής λύσης, με αποτέλεσμα την αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Άλλο ένα πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο είναι ότι δεν υπάρχει μάζα στο βαθμό ελευθερίας του πολλαπλασιαστή *Lagrange*. Αυτό οδηγεί στη δημιουργία ενός γενικού πίνακα μάζας ο οποίος δεν είναι δυνατόν να αντιστραφεί. Αυτό οδηγεί στην ανικανότητα της μεθόδου να εφαρμοστεί σε δυναμικά προβλήματα.

Μέθοδοι ποιής

Η μέθοδος ποιής είναι μία εναλλακτική διαδικασία για την εφαρμογή των περιορισμών της επαφής. Περιορίζει την κίνηση των σωμάτων εφαρμόζοντας μια ποιή στο μέγεθος της διείσδυσης που προκύπτει μεταξύ τους. Η προσέγγιση της ποιής μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογη ενός μη γραμμικού ελατηρίου μεταξύ των σωμάτων. Η μέθοδος αυτή είναι σχετικά εύκολο να εφαρμοστεί και χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση δυναμικών προβλημάτων, αν και μπορεί να οδηγήσει σε ένα πολύ δύσκαμπτο πίνακα όταν πρόκειται για επαφή μεταξύ μη παραμορφώσιμων σωμάτων.

Υβριδικές και ανάμεικτες μέθοδοι

Στην υβριδική μέθοδο το στοιχείο επαφής προέρχεται από μια συνδυασμένη ενεργειακή αρχή μέσω της εφαρμογής της συνέχειας της επιφάνειας επαφής ως περιορισμού και θεωρώντας της δυνάμεις της επαφής ως πρόσθετα στοιχεία. Οι ανάμεικτες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την υπερπήδηση των δυσκολιών της μεθόδου *Lagrange*.

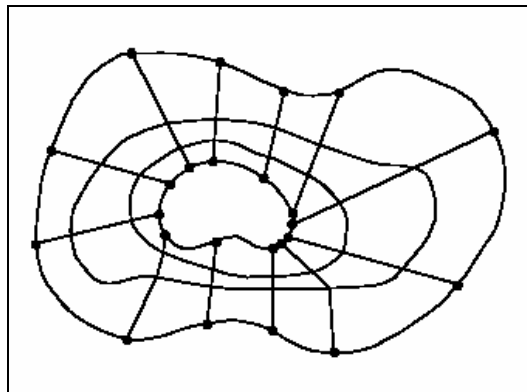
Ευθείς περιορισμοί

Άλλη μία μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος της επαφής είναι η μέθοδος των ευθέων περιορισμών. Σε αυτή τη διαδικασία, παρακολουθείται η

κίνηση των σωμάτων και μόλις προκύψει επαφή, εφαρμόζονται ευθείς περιορισμοί στην κίνηση μέσω των συνοριακών συνθηκών – τόσο κινηματικοί περιορισμοί στους μετασχηματισμένους βαθμούς ελευθερίας, όσο και στις κομβικές δυνάμεις. Αυτή η μέθοδος μπορεί να είναι πολύ ακριβής εάν το πρόγραμμα μπορεί να προβλέψει πότε ακριβώς θα προκύψει η επαφή και δεν χρειάζεται ειδικά στοιχεία ανοχής.

2.4.3 Ορισμός των προς επαφή σωμάτων

Υπάρχουν δύο είδη σωμάτων στην ανάλυση επαφής – παραμορφώσιμα και μη παραμορφώσιμα. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.4.3.1 τα παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από ένα σύνολο πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 2.4.3.1: Παραμορφώσιμο σώμα (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Αυτό το σώμα έχει τρία σημεία κλειδιά:

1. Τα πεπερασμένα στοιχεία από τα οποία αποτελείται.
2. Τους κόμβους που βρίσκονται στην εξωτερική του επιφάνεια και μπορούν να έρθουν σε επαφή με άλλα σώματα ή με το ίδιο. Αυτοί οι κόμβοι θεωρούνται εν δυνάμει κόμβοι επαφής.
3. Τις ακμές (2D) ή τις έδρες (3D) που περιγράφουν την εξωτερική του επιφάνεια με την οποία ένας κόμβος ή ένα άλλο σώμα μπορεί να έρθει σε επαφή. Αυτές οι ακμές / έδρες θεωρούνται εν δυνάμει τομείς επαφής.

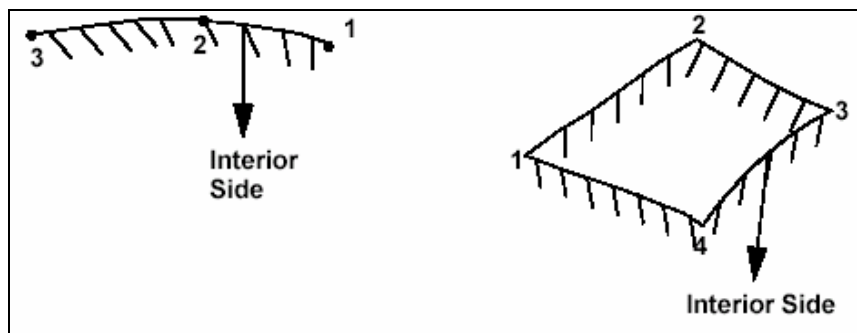
Είναι σημαντικό ότι αυτό το σώμα μπορεί να είναι πολλαπλώς ενωμένο (δηλ. να περιέχει οπές). Είναι ακόμη δυνατόν να αποτελείται τόσο από τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία, όσο και από τετράπλευρα, αν είναι δισδιάστατο και από τετράεδρα και εξάεδρα πεπερασμένα στοιχεία αν είναι τρισδιάστατο. Ακόμη είναι διαθέσιμα για ανάλυση επαφής, στοιχεία ράβδοι και στοιχεία κελύφη.

Τα μη παραμορφώσιμα σώματα αποτελούνται από γραμμές όταν είναι δισδιάστατα και από επιφάνειες όταν είναι τρισδιάστατα. Μπορούν ακόμη να αποτελούνται από ειδικά, «θερμικά» πεπερασμένα στοιχεία όταν πρόκειται για θερμό-μηχανική ανάλυση. Το πιο σημαντικό σημείο των μη παραμορφώσιμων σωμάτων είναι αυτό που δηλώνει και το όνομά τους, ότι δηλαδή δεν παραμορφώνονται. Τα μη παραμορφώσιμα σώματα μπορούν να έρθουν σε επαφή με παραμορφώσιμα σώματα, αλλά δεν μπορούν να έρθουν σε επαφή με άλλα μη παραμορφώσιμα σώματα. Μπορούν να δημιουργηθούν με τη βοήθεια κάποιου συστήματος CAD και να περάσουν στο MSC.MARC 2003 μέσα από το σχεδιαστικό κομμάτι του λογισμικού συστήματος, το Mentat, ή να δημιουργηθούν απευθείας χρησιμοποιώντας το Mentat. Υπάρχουν διάφοροι τύποι γραμμών και επιφανειών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.4.3.2.

2D	3D
line	4-node patch
circular arc	ruled surface
spline	surface of revolution
NURB	Bezier
	poly-surface
	cylinder
	sphere
	NURB
	trimmed NURB

Σχήμα 2.4.3.2: Διάφορα είδη γραμμών και επιφανειών για τη δημιουργία μη παραμορφώσιμων σωμάτων.

Όλες αυτές οι γεωμετρικές οντότητες μπορούν να προσεγγισθούν με δύο τρόπους, είτε τμηματικά είτε αναλυτικά. Όταν θεωρούνται τμηματικά, διαιρούνται σε ευθύγραμμα τμήματα – οι γραμμές – και σε επίπεδα οι επιφάνειες. Ελέγχοντας την πυκνότητα της διαίρεσης μπορεί να ρυθμιστεί η ακρίβεια αυτής της προσέγγισης. Όταν προσεγγίζονται αναλυτικά βελτιώνεται η ακρίβεια της αναπαράστασης. Άλλο ένα σημαντικό σημείο κατά τον καθορισμό της γεωμετρίας των μη παραμορφώσιμων σωμάτων είναι ο ορισμός της εσωτερικής και της εξωτερικής τους πλευράς. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού καθώς ακολουθείται μια γραμμή στις δύο διαστάσεις και καθώς ακολουθείται ένα κομμάτι επιφανείας στις τρεις διαστάσεις.



Σχήμα Σχήμα 2.4.3.3: Προσανατολισμός τομέων μη παραμορφώσιμων σωμάτων (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

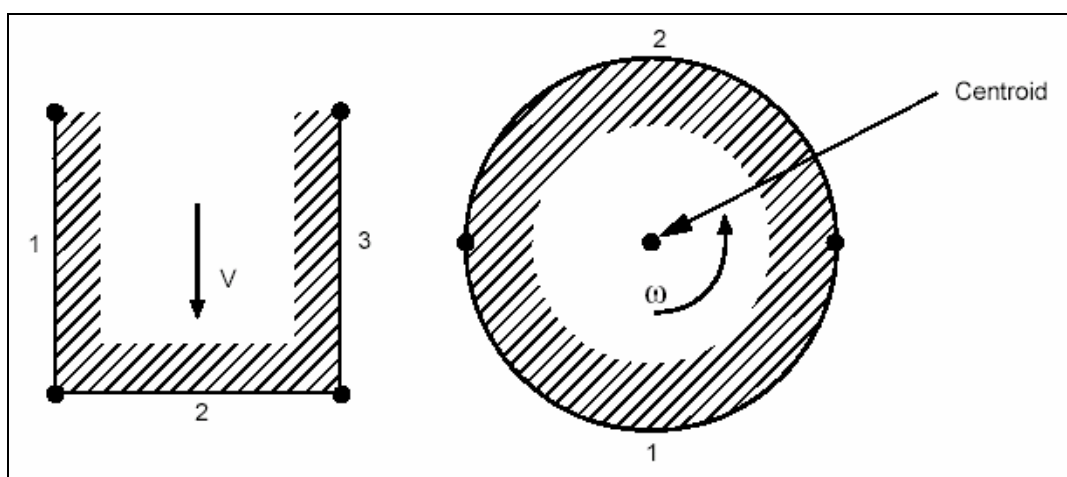
2.4.4 Κίνηση των προς επαφή σωμάτων

Η κίνηση των παραμορφώσιμων σωμάτων καθορίζεται συμβατικά από την εφαρμογή μετακινήσεων, δυνάμεων και κατανεμημένων φορτίων σε αυτά. Είναι προτιμότερο να μην εφαρμόζονται μετακινήσεις ή σημειακά φορτία σε κόμβους οι οποίοι μπορεί να έλθουν σε επαφή με άλλα μη παραμορφώσιμα σώματα. Αν είναι απαραίτητος ο καθορισμός μιας μετακίνησης είναι καλύτερο να δημιουργηθεί ένα νέο μη παραμορφώσιμο σώμα και να εφαρμοστεί η κίνηση σε αυτό. Οι επιφάνειες συμμετρίας αντιμετωπίζονται σαν να είναι ειδικά σώματα τα οποία έχουν την ιδιότητα να μην εμφανίζουν τριβή και οι κόμβοι τους να μην διαχωρίζονται.

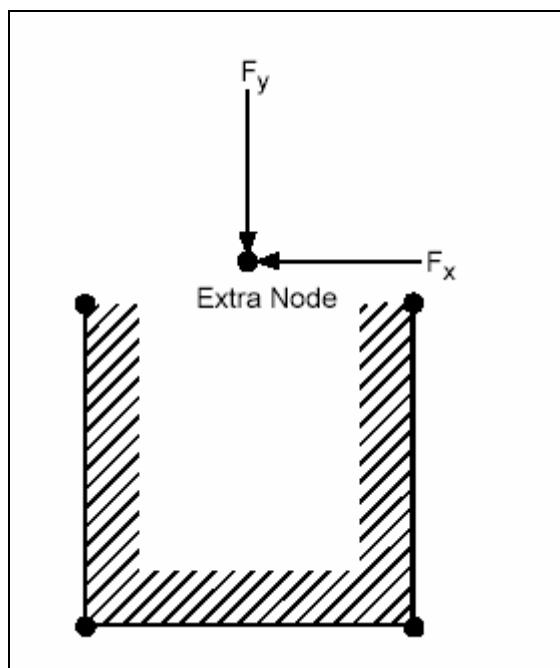
Υπάρχουν τρεις τρόποι να καθοριστεί η κίνηση μη παραμορφώσιμων επιφανειών:

- Καθορισμένη ταχύτητα.
- Καθορισμένη θέση.
- Καθορισμένο φορτίο.

Σχετιζόμενο με ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, είναι ένα σημείο το οποίο ονομάζεται κέντρο περιστροφής (centroid). Όταν επιλέγεται μια από τις δύο πρώτες μεθόδους, καθορίζεται η μεταφορική κίνηση και η περιστροφική κίνηση αυτού του σημείου, γύρω από έναν άξονα ο οποίος περνάει από αυτό το σημείο (βλ. Σχήμα 2.4.4.1). Η διεύθυνση του άξονα αυτού, μπορεί να καθοριστεί για τρισδιάστατα προβλήματα, ενώ για προβλήματα στις δύο διαστάσεις ο άξονας περιστροφής είναι μια γραμμή παράλληλη με το επίπεδο. Όταν χρησιμοποιούνται μη παραμορφώσιμα σώματα, ελεγχόμενα από φορτία, ένας πρόσθετος κόμβος σχετίζεται με κάθε μη παραμορφώσιμο σώμα (βλ. Σχήμα 2.4.4.2). Έτσι το φορτίο μεταφέρεται στους κόμβους που έρχονται σε επαφή με την μη παραμορφώσιμη επιφάνεια.



Σχήμα 2.4.4.1: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από ταχύτητα (MARC Analysis Research Corporation, 1998).



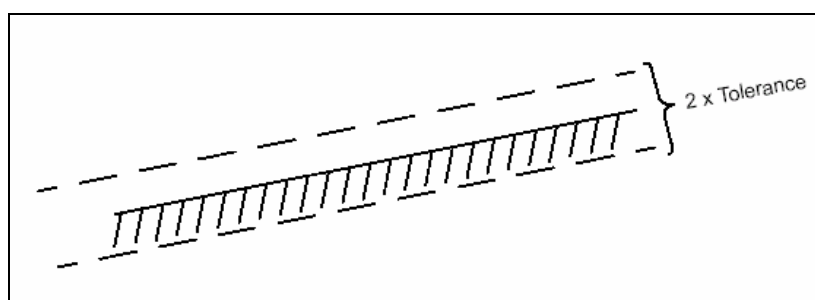
Σχήμα 2.4.4.2: Μη παραμορφώσιμη επιφάνεια ελεγχόμενη από φορτίο (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

2.4.5 Ανίχνευση της επαφής

Κατά τη βηματική διαδικασία επίλυσης, κάθε προς επαφή κόμβος, ελέγχεται αρχικά για να διαπιστωθεί αν βρίσκεται κοντά σε έναν τομέα επαφής. Οι τομείς επαφής είναι είτε ακμές άλλων δισδιάστατων παραμορφώσιμων σωμάτων, είτε έδρες άλλων τρισδιάστατων σωμάτων, είτε τομείς μη παραμορφώσιμων σωμάτων. Εξ ορισμού κάθε κόμβος, θα μπορούσε να έρθει σε επαφή με οποιονδήποτε άλλον τομέα, περιλαμβανομένων και τομέων που ανήκουν στο ίδιο σώμα με τον κόμβο. Αυτό επιτρέπει σε ένα σώμα να έρθει σε επαφή με τον εαυτό του. Για την απλοποίηση των υπολογισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επιλογή του **πίνακα επαφής**, για να καθοριστεί αν ένα συγκεκριμένο σώμα μπορεί ή όχι να έρθει σε επαφή με τον εαυτό του.

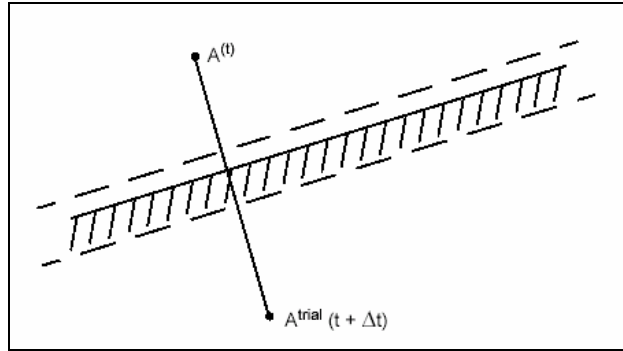
Εξαιτίας της πιθανής ύπαρξης μεγάλου αριθμού κόμβων και τομέων, έχουν αναπτυχθεί επαρκείς αλγόριθμοι για την επίλυση αυτών των διαδικασιών. Ένας αλγόριθμος περικλείοντος κουτιού χρησιμοποιείται, για να ξεκαθαριστεί γρήγορα αν ένας κόμβος βρίσκεται κοντά σε έναν τομέα επαφής. Αν ο κόμβος περάσει μέσα στο κουτί, τότε χρησιμοποιούνται πιο ενδεδειγμένες τεχνικές για τον καθορισμό της ακριβούς κατάστασης του κόμβου.

Κατά τη διαδικασία της επαφής, ένας κόμβος είναι σχετικά δύσκολο να έρθει ακριβώς σε επαφή με μια επιφάνεια. Γι' αυτό το λόγο μια ανοχή επαφής σχετίζεται με κάθε επιφάνεια (βλ. Σχήμα 2.4.5.1).



Σχήμα 2.4.5.1: Ανοχή επαφής (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Αν ένας κόμβος βρεθεί μέσα στην ανοχή επαφής, τότε θεωρείται ότι έρχεται σε επαφή με τον συγκεκριμένο τομέα. Η ανοχή επαφής υπολογίζεται από το πρόγραμμα, ως μικρότερη από το 5% της πλευράς του μικρότερου πεπερασμένου στοιχείου. Είναι ακόμη δυνατόν να καθοριστεί κατά βούληση η ανοχή επαφής από τον χρήστη του προγράμματος. Κατά τη διάρκεια ενός βήματος επίλυσης, αν ένας κόμβος A κινηθεί από το $A^{(i)}$ στο $A^{(trial)}(t + \Delta t)$ όπου $A^{(trial)}(t + \Delta t)$ είναι μέσα στην ανοχή επαφής, τότε ο κόμβος θεωρείται ότι έχει εισχωρήσει στην επιφάνεια. Σε αυτήν την περίπτωση το βήμα είτε διαιρείται σε υπό – βήματα, είτε μειώνεται σε μέγεθος (βλ. Σχήμα 2.4.5.2).



Σχήμα 2.4.5.2: Δοκιμαστική μετατόπιση με εισχώρηση (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Το μέγεθος της ανοχής επαφής έχει καθοριστική σημασία για το υπολογιστικό κόστος και την ακρίβεια της λύσης. Αν η ανοχή επαφής είναι πολύ μικρή, τότε η ανίχνευση της επαφής καθίσταται δύσκολη με αποτέλεσμα το υψηλότερο υπολογιστικό κόστος. Ακόμη, πολλοί κόμβοι, μπορεί να θεωρηθούν ότι εισχωρούν, με αποτέλεσμα να αυξηθεί η διαίρεση των βημάτων επίλυσης αυξάνοντας το υπολογιστικό κόστος. Αν η ανοχή επαφής είναι πολύ μεγάλη, τότε κάποιοι κόμβοι θεωρείται ότι έρχονται σε επαφή πρόωρα, με αποτέλεσμα την απώλεια της ακρίβειας. Επιπροσθέτως, κάποιοι κόμβοι μπορεί να «εισχωρήσουν» στην επιφάνεια σε μεγάλο βαθμό.

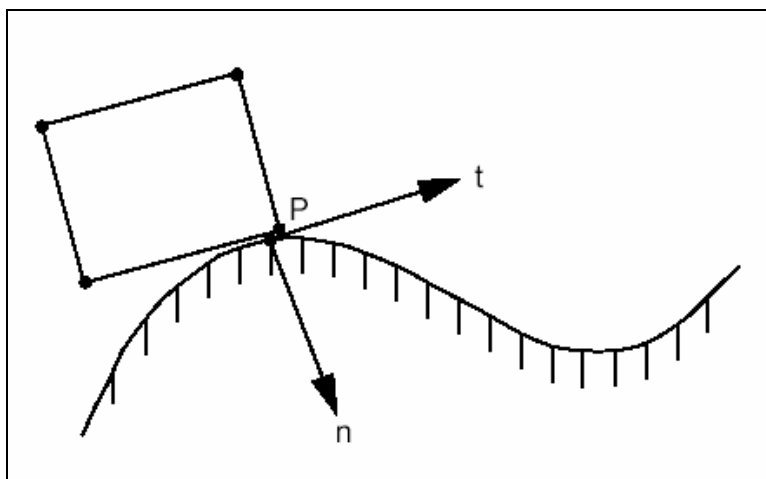
2.4.6 Εφαρμογή περιορισμών

Για την επαφή μεταξύ ενός παραμορφώσιμου σώματος και μιας μη παραμορφώσιμης επιφάνειας, ο περιορισμός που σχετίζεται με τη μη διείσδυση, επιτυγχάνεται με τη μετατροπή των βαθμών ελευθερίας του προς επαφή κόμβου και την εφαρμογή μιας συνοριακής συνθήκης για την κάθετη μετατόπιση. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε την επίλυση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{bmatrix} K_{\hat{a}\hat{a}} & K_{\hat{a}b} \\ K_{b\hat{a}} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\hat{a}} \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\hat{a}} \\ f_b \end{Bmatrix}.$$

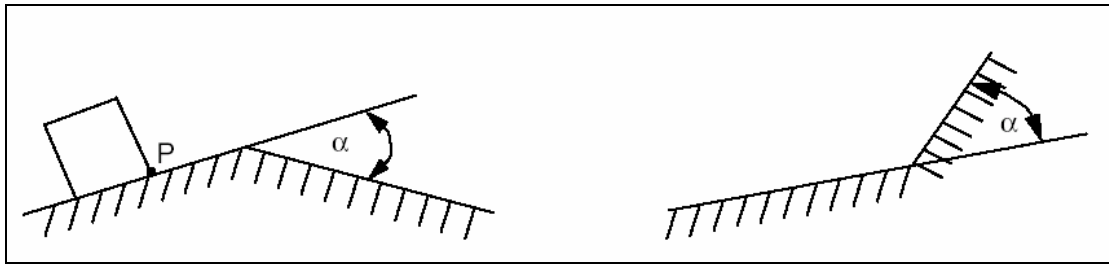
όπου το \hat{a} αναπαριστά τους κόμβους σε επαφή, οι οποίοι έχουν τοπική μετατροπή και το \hat{b} αναπαριστά τους κόμβους που δεν εφάπτονται πουθενά και έτσι δεν έχουν

υποστεί καμία μετατροπή. Στους κόμβους που έχουν υποστεί μετατροπή, η μετατόπιση στην κάθετη διεύθυνση περιορίζεται έτσι ώστε το $\delta_{\dot{a}n}$ να είναι ίσο με τη βηματική, κάθετη μετατόπιση του μη παραμορφώσιμου σώματος στο σημείο επαφής (βλ. Σχήμα 2.4.6.1).



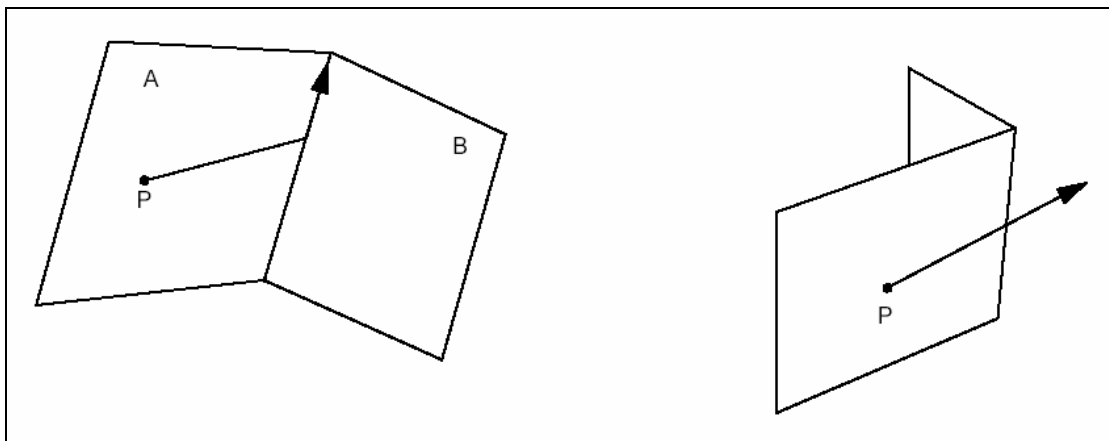
Σχήμα 2.4.6.1: Σύστημα που έχει υποστεί μετατροπή (2D) (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Καθώς ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια τμηματικά γραμμική ή σαν μια αναλυτική (NURB) επιφάνεια, χρησιμοποιούνται δύο διαδικασίες. Για τμηματικά γραμμικές αναπαραστάσεις, η κάθετη μετατόπιση είναι συνεχής μέχρι ο κόμβος P να συναντήσει μια γωνία μεταξύ δύο τομέων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4.6.2. Κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να προκύψει μία από τις τρεις παρακάτω καταστάσεις. Αν η γωνία α είναι μικρή ($-\alpha_{\text{smooth}} < \alpha < \alpha_{\text{smooth}}$), τότε ο κόμβος P περνά στον επόμενο τομέα. Σε αυτή την περίπτωση η κάθετη μετατόπιση επαναπροσδιορίζεται με βάση το νέο τομέα. Αν η γωνία α είναι μεγάλη ($\alpha > \alpha_{\text{smooth}}$ ή $\alpha < -\alpha_{\text{smooth}}$), τότε ο κόμβος διακόπτει την επαφή με την επιφάνεια αν βρίσκεται στην εξωτερική πλευρά της γωνίας ή κολλάει στην επιφάνεια αν βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά της γωνίας. Η τιμή της α_{smooth} είναι σημαντική για τον έλεγχο του υπολογιστικού κόστους. Μια μεγάλη τιμή για την α_{smooth} μειώνει το κόστος, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε ανακρίβειες. Η προκαθορισμένες τιμές του προγράμματος είναι 8,625 μοίρες για δισδιάστατη ανάλυση και 20 μοίρες για τρισδιάστατη.



Σχήμα 2.4.6.2: Γωνιακές συνθήκες για εξωτερική και εσωτερική πλευρά αντίστοιχα (2D) (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Στις τρεις διαστάσεις οι γωνιακές συνθήκες είναι περισσότερο πολύπλοκες. Ένας κόμβος (P) σε επαφή με έναν επίπεδο τομέα A, γλιστράει ελεύθερα μέχρι να συναντήσει την τομή μεταξύ δύο τομέων. Αν βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά, τότε προσπαθεί αρχικά να κινηθεί πάνω στην τομή, πριν περάσει στον τομέα B (βλ. Σχήμα 2.4.6.3). Αυτή είναι και η φυσική ακολουθία της κίνησης (προς τη μικρότερη ενεργειακή κατάσταση). Αυτές οι γωνιακές συνθήκες ισχύουν και στην περίπτωση της ανάλυσης επαφής μεταξύ παραμορφώσιμων σωμάτων. Εξαιτίας του γεγονότος ότι τα σώματα αλλάζουν συνεχώς σχήμα, οι γωνιακές συνθήκες επαναπροσδιορίζονται συνεχώς.



Σχήμα 2.4.6.3: Γωνιακές συνθήκες για εσωτερική και εξωτερική πλευρά αντίστοιχα (3D) (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Όταν ένα μη παραμορφώσιμο σώμα αναπαρίσταται σαν αναλυτική επιφάνεια, η κάθετη μετατόπιση επαναπροσδιορίζεται σε κάθε επανάληψη με βάση τη θέση του

κόμβου κάθε στιγμή. Αυτό οδηγεί σε μια ακριβέστερη λύση, αλλά έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος εξαιτίας της αναπαράστασης NURB.

Όταν ένας κόμβος ενός παραμορφώσιμου σώματος έρθει σε επαφή με ένα άλλο παραμορφώσιμο σώμα, αυτομάτως εφαρμόζεται ένας περιορισμός πολλαπλών σημείων. Γνωρίζοντας τις εξωτερικές ακμές (2D) ή τις εξωτερικές πλευρές (3D) των άλλων παραμορφώσιμων σωμάτων, σχηματίζεται ένα σύνολο περιορισμών. Για δισδιάστατη ανάλυση περιορίζονται τρεις κόμβοι – δύο από την ακμή και ο εφαπτόμενος κόμβος. Στις τρεις διαστάσεις ο αριθμός των περιοριζόμενων κόμβων είναι πέντε – τέσσερις από τον επίπεδο τομέα και ο εφαπτόμενος κόμβος. Η εξίσωση των περιορισμών είναι τέτοια ώστε ο εφαπτόμενος κόμβος να μπορεί να γλιστρήσει πάνω στον τομέα υποκείμενος στις εκάστοτε συνθήκες τριβής. Αυτό οδηγεί σε μια μη ομογενή, μη γραμμική εξίσωση περιορισμών.

Κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας, ένας κόμβος μπορεί να γλιστρήσει από έναν τομέα σε έναν άλλο, αλλάζοντας κάθε φορά τους κόμβους που σχετίζονται με τον περιορισμό.

2.4.7 Μοντελοποίηση της τριβής

Η τριβή είναι ένα πολύπλοκο φυσικό φαινόμενο που περιλαμβάνει τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας στην οποία εμφανίζεται όπως την τραχύτητα, τη θερμοκρασία, την ορθή τάση και τη σχετική ταχύτητα. Η κατανόηση της φυσικής της τριβής συνεχίζει να είναι ένα θέμα για συνεχή επιστημονική έρευνα. Συνεπώς η αριθμητική μοντελοποίηση του φαινομένου έχει απλοποιηθεί σε δύο ιδανικά μοντέλα.

Το πιο δημοφιλές μοντέλο είναι το μοντέλο τριβής **Coulomb**. Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται στις περισσότερες εφαρμογές, εκτός από εφαρμογές μορφοποίησης όγκου, όπως είναι η σφυρηλασία. Το μοντέλο **Coulomb** ορίζεται ως:

$$\sigma_{fr} \leq -\mu \sigma_n \cdot t .$$

όπου

σ_n είναι η ορθή τάση.

σ_{fr} είναι η εφαπτομένη τάση (τάση τριβής).

μ είναι ο συντελεστής τριβής.

t είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην κατεύθυνση της σχετικής ταχύτητας.

$$t = \frac{V_r}{|V_r|}.$$

όπου V_r είναι η σχετική ταχύτητα ολίσθησης.

Συχνά το μοντέλο Coulomb γράφεται σε σχέση με τις δυνάμεις:

$$f_t \leq -\mu f_n \cdot t.$$

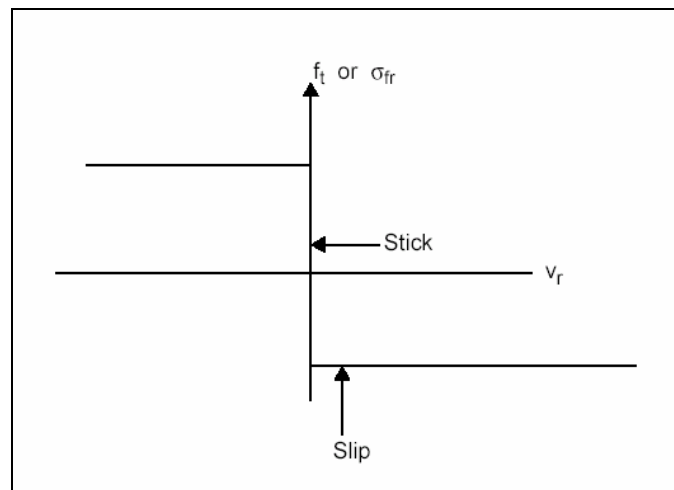
όπου

f_t είναι η εφαπτομένη δύναμη.

f_n είναι η κάθετη αντίδραση.

Αρκετά συχνά σε προβλήματα επαφής, δημιουργούνται ουδέτερες γραμμές. Αυτό σημαίνει ότι επάνω σε μια επιφάνεια επαφής, υλικό ρέει προς μια κατεύθυνση σε ένα κομμάτι της επιφάνειας και προς την αντίθετη κατεύθυνση σε ένα άλλο κομμάτι της επιφάνειας. Αυτές οι ουδέτερες γραμμές δεν είναι γνωστές, εκ των προτέρων, συνήθως.

Για μια δεδομένη κάθετη τάση, η τάση της τριβής έχει συμπεριφορά βηματικής συνάρτησης με βάση την τιμή του v_r ή την τιμή του Δu (βλ. Σχήμα 2.4.7.1).



Σχήμα 2.4.7.1: Το μοντέλο τριβής Coulomb (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Αυτή η ασυνέχεια στην τιμή του σ_{fr} μπορεί να οδηγήσει σε αριθμητικές δυσκολίες· έτσι χρησιμοποιείται ένα διαφοροποιημένο μοντέλο τριβής **Coulomb**.

$$\sigma_{fr} \leq -\mu\sigma_n \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{V_r}{RVCNST}\right) \cdot t.$$

Στην πραγματικότητα το *RVCNST* είναι η τιμή της σχετικής ταχύτητας των δύο σωμάτων όταν ολισθαίνουν μεταξύ τους. Η τιμή του *RVCNST* είναι σημαντική για τον καθορισμό της ακρίβειας του μαθηματικού μοντέλου όσον αφορά στην αναπαράσταση της βηματικής συνάρτησης. Μεγάλη τιμή του *RVCNST* συνεπάγεται μείωση της τιμής της τριβής που αναπτύσσεται, ενώ μικρή τιμή του *RVCNST* οδηγεί σε δυσκολία της επαναληπτικής μεθόδου να συγκλίνει. Συνίσταται η τιμή του *RVCNST* να είναι μεταξύ του 1% και 10% της πραγματικής σχετικής ταχύτητας V_r . Εξαιτίας αυτής της διαδικασίας ομαλοποίησης, ένας κόμβος που βρίσκεται σε επαφή, πάντοτε θα εμφανίζει ένα ποσό ολίσθησης. Εκτός των αριθμητικών λόγων, αυτό το μοντέλο «αένας ολίσθησης» έχει και βάση στη φυσική. Οι Oden και Pires (1983) έδειξαν ότι για τα μέταλλα υπάρχει μια ελαστο – πλαστική παραμόρφωση σε μικροσκοπικό επίπεδο (ονομαζόμενη «ψυχρή συγκόλληση»), η οποία οδηγεί σε μη τοπική, μη γραμμική τριβική συμπεριφορά.

Ένας ειδικός τύπος μοντέλου τριβής είναι η επιλογή **συγκόλλησης**, η οποία θεωρεί ότι δεν υφίσταται σχετική, εφαπτομενική κίνηση μεταξύ των επαπτόμενων σωμάτων. Η **συγκολλημένη** κίνηση ενεργοποιείται από την επιλογή του πίνακα επαφής. Μια συνηθισμένη εφαρμογή επαφής είναι η ένωση δυο διαφορετικών πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Σε αυτή την περίπτωση, καθορίζοντας μια υπερβολικά μεγάλη δύναμη διαχωρισμού και εφαρμόζοντας την επιλογή της **συγκόλλησης**, γράφονται αυτομάτως οι εξισώσεις των περιορισμών για τα δύο πλέγματα των πεπερασμένων στοιχείων.

2.4.8 Η θερμό – μηχανική ανάλυση

Η ανάλυση επαφής έχει αρκετές συνέπειες όταν εφαρμόζεται σε μια θερμό – μηχανική ανάλυση. Κατά τη διεξαγωγή μιας θερμό – μηχανικής ανάλυσης επαφής μεταξύ πολλών παραμορφώσιμων σωμάτων, κάθε σώμα δύναται να παραμορφωθεί εξαιτίας μηχανικών ή /και θερμικών φορτίων, και να άγει θερμότητα. Όταν τα σώματα έρθουν σε επαφή, εμφανίζεται μια ροή θερμότητας μεταξύ των επιφανειών επαφής. Συνεπώς είναι απαραίτητο να καθορίσουμε έναν συντελεστή θερμικής

αγωγιμότητας ανάμεσα σε αυτές τις επιφάνειες. Αυτό είναι, συνήθως σημαντικό, καθώς είναι δυνατόν ένα θερμό εξάρτημα να έρθει σε επαφή με ένα ψυχρό εργαλείο. Επιπροσθέτως, αν εμφανίζεται και τριβή, η θερμότητα που παράγεται υπολογίζεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$q = f_{fr} \cdot V_r \cdot M_{eq}.$$

όπου το M_{eq} είναι το μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας. Η θερμότητα που παράγεται εξαιτίας της τριβής αποδίδεται ισομερώς στα δύο επαπτόμενα σώματα. Αν η μοντελοποίηση που χρησιμοποιείται επιτρέπει σε ένα σώμα να είναι μη παραμορφώσιμο υπάρχουν δυο διαθέσιμες επιλογές. Στην πρώτη περίπτωση, το μη παραμορφώσιμο σώμα θεωρείται ότι έχει σταθερή θερμοκρασία και υπάρχει ροή θερμότητας μεταξύ του μη παραμορφώσιμου και του παραμορφώσιμου σώματος. Στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να διεξαχθεί μια ανάλυση μεταφοράς θερμότητας στο μη παραμορφώσιμο σώμα. Σε αυτή την περίπτωση το μη παραμορφώσιμο σώμα πρέπει να κατασκευαστεί από πεπερασμένα στοιχεία τα οποία πρέπει να επιλεγούν καταλλήλως για μεταφορά θερμότητας. Παραμόρφωση δεν εμφανίζεται σε αυτό το σώμα, αλλά διεξάγεται ανάλυση μεταφοράς θερμότητας σε αυτό το σώμα. Αυτό είναι υπολογιστικά καλύτερο από τη διεξαγωγή μιας θερμό – μηχανικής ανάλυσης όπου όλα τα σώματα θα είναι παραμορφώσιμα.

Οι ροές θερμότητας σε όλα τα σύνορα των παραμορφώσιμων σωμάτων. Δύο συντελεστές ροής εφαρμόζονται σε κάθε σώμα. Ο ένας αντιστοιχεί σε ελεύθερη αγωγή θερμότητας στο περιβάλλον όταν το σύνορο είναι ελεύθερο και ο άλλος αντιστοιχεί σε αγωγή μέσω επαφής όταν το σύνορο εφάπτεται σε ένα άλλο σώμα. Σε αυτές τις περιπτώσεις η ροή της θερμότητας στη διεπιφάνεια επαφής δίδεται από την παρακάτω σχέση:

$$q = HD(TD - T).$$

όπου

T είναι η θερμοκρασία της επιφάνειας.

HD είναι ο συντελεστής αγωγής θερμότητας ανάμεσα στις δυο επιφάνειες.

TD είναι η θερμοκρασία της ίδιας περιοχής επαφής η οποία εξάγεται από την αναγωγή των κομβικών θερμοκρασιών του σώματος που έρχεται σε επαφή.

Όταν ένα παραμορφώσιμο σώμα έρχεται σε επαφή με ένα μη παραμορφώσιμο σώμα, τότε χρησιμοποιούνται οι συντελεστές αγωγής θερμότητας του μη παραμορφώσιμου σώματος. Όταν δυο παραμορφώσιμα σώματα έρχονται σε επαφή,

τότε χρησιμοποιείται η μέση τιμή των συντελεστών αγωγής που έχουν αποδοθεί σε κάθε ένα από τα δυο σώματα. Όπως γίνεται και σε κάθε άλλο θερμό – μηχανικό πρόβλημα, η θερμότητα που παράγεται από πλαστική παραμόρφωση μπορεί να υπολογισθεί και να εφαρμοστεί ως ροή μεταξύ όγκων. Η θερμότητα που παράγεται από την τριβή μπορεί επίσης να υπολογισθεί και να εφαρμοστεί ως ροή μεταξύ επιφανειών.

2.5 Επιλογή τύπου πεπερασμένων στοιχείων

2.5.1 Γενικά

Το λογισμικό πρόγραμμα MSC.MARC 2003 επιτρέπει την επαφή σχεδόν με κάθε διαθέσιμο τύπο πεπερασμένου στοιχείου, αλλά η χρήση συγκεκριμένων στοιχείων έχει συνέπειες στη διαδικασία της ανάλυσης. Η ανάλυση επαφής μπορεί να διεξαχθεί με όλους τους τύπους των δομικών, σε σειρά πεπερασμένων στοιχείων, εκτός από εκείνα που είναι συμμετρικά εκ περιστροφής με στρέψη. Η μοντελοποίηση της τριβής περιλαμβάνεται σε όλα αυτά τα στοιχεία, εκτός από εκείνα που είναι ημί – άπειρα. Υψηλότερης τάξης ισοπαραμετρικού σχήματος συναρτήσεις έχουν αναγωγικές συναρτήσεις οι οποίες οδηγούν στις ισοδύναμες δυνάμεις που εμφανίζονται μεταξύ των γωνιακών και των κεντρικών κόμβων των στοιχείων. Καθώς αυτό επηρεάζει καταλυτικά την ανίχνευση της τριβής, αλλά και το διαχωρισμό των σωμάτων που ήλθαν σε επαφή, έχει εφαρμοσθεί μια διαδικασία για την αποφυγή αυτού του προβλήματος. Στις εξωτερικές επιφάνειες οι κεντρικοί κόμβοι περιορίζονται σε σχέση με τους γωνιακούς αυτομάτως. Συνεπώς, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την γραμμική μεταβολή της μετατόπισης σε αυτές τις επιφάνειες. Τα υπόλοιπα στοιχεία στο εσωτερικό μέρος του σώματος συμπεριφέρονται με το συμβατικό τρόπο της υψηλότερης τάξης.

Σε αρκετές αναλύσεις μεθόδων κατασκευής, τα χαμηλότερης τάξης πεπερασμένα στοιχεία συμπεριφέρονται καλύτερα, εξαιτίας της ικανότητάς τους να αναπαριστούν μεγάλες παραμορφώσεις, και άρα συνίστανται για τέτοιου είδους εφαρμογές.

2.5.2 Τα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

Η ισοπαραμετρική διατύπωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή πολλών χρήσιμων στοιχείων (Στεφανουδάκης, 2004). Ο ισοπαραμετρικός τύπος κάνει δυνατή τη δημιουργία στοιχείων τα οποία δεν είναι ορθογώνια αλλά έχουν καμπύλες πλευρές. Αυτές οι μορφές των στοιχείων είναι πολύ χρήσιμες για τη διακριτοποίηση και την αναπαραγωγή κυρτών επιφανειών. Η οικογένεια των ισοπαραμετρικών στοιχείων περιλαμβάνει στοιχεία επίπεδα, στερεά, πλάκες και κελύφη για την επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων.

Η αρχή στην οποία στηρίζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία βασίζεται στη θεώρηση κατ' αρχάς, μιας απεικόνισης ένα προς ένα μεταξύ των καμπυλόγραμμων και των καρτεσιανών συντεταγμένων. Έχοντας αυτή την απεικόνιση είναι δυνατόν να καταγραφούν σε τοπικά συστήματα οι συναρτήσεις σχήματος και στη συνέχεια με κατάλληλους μετασχηματισμούς να θεμελιωθούν οι ιδιότητες του στοιχείου βάσει των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Όμως για να πάρουμε τις τελικές εξισώσεις ισορροπίας του σώματος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αντίστροφη απεικόνιση, εφ' όσον οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στον καρτεσιανό χώρο.

Στον τύπο των ισοπαραμετρικών στοιχείων πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι τοπικές συντεταγμένες (σύστημα ξ, η, ζ). Τα διαστήματα εκφράζονται αρχικά στα τοπικά συστήματα συντεταγμένων και στη συνέχεια καθορίζονται και στο ολικό. Για να γίνει αυτή η μετατροπή πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας J που ονομάζεται «Ιακωβιανός» πίνακας.

Για να είναι ένα στοιχείο ισοπαραμετρικό θα πρέπει να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Με τον όρο ισοπαραμετρικό εννοείται «ίδιες παράμετροι», που σημαίνει ότι επειδή οι μετατοπίσεις αλλά και οι συντεταγμένες εξαρτώνται από τον βαθμό των κόμβων θα πρέπει οι πίνακες N και \tilde{N} να είναι ίδιοι για να είναι ένα στοιχείο ισοπαραμετρικό. Οι N και \tilde{N} δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

1. ο βαθμός ελευθερίας του κόμβου $\{d\}$ καθορίζει τη μετατόπιση $[u \ v \ w]$ ενός σημείου στο στοιχείο η οποία δίνεται από τον πίνακα $[u \ v \ w]/T = [N] \{d\}$.
2. οι συντεταγμένες του κόμβου $\{c\}$ καθορίζουν τις συντεταγμένες $[x \ y \ z]$ ενός σημείου στο στοιχείο με τον πίνακα $[x \ y \ z]/T = [\tilde{N}] \{c\}$.

Οι πίνακες N και \tilde{N} είναι συναρτήσεις των ξ , η και ζ . Αν ο N είναι μεγαλύτερου βαθμού από ότι ο \tilde{N} τότε το στοιχείο ονομάζεται υποπαραμετρικό, αλλά αν ο N είναι μικρότερου βαθμού από τον \tilde{N} τότε το στοιχείο λέγεται υπερπαραμετρικό.

2.5.3 Το εξαεδρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο

Στο χώρο των τριών διαστάσεων η ισοπαραμετρική διαδικασία μοιάζει αρκετά με αυτή που γίνεται στον διδιάστατο χώρο. Η γενική διαδικασία που χρησιμοποιείται στα ισοπαραμετρικά στοιχεία έχει λίγο να κάνει με την μορφή του συγκεκριμένου στοιχείου.

Για τα γεωμετρικά μεγέθη του στοιχείου και του χώρου Φ ενός στερεού ισοπαραμετρικού στοιχείου ισχύει:

$$x = \sum N_i x_i \quad y = \sum N_i y_i \quad z = \sum N_i z_i \quad \Phi = \sum N_i \Phi_i$$

όπου το i εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου. Η εξίσωση μορφής N_i είναι συναρτήσεις των ισοπαραμετρικών συντεταγμένων ξ , η και ζ . οι επιφάνειες του στοιχείου βρίσκονται $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, και $\zeta = \pm 1$. Ο «Ιακωβιανός» πίνακας είναι τρία επί τρία και έχει τη μορφή:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix}.$$

ισχύει $[G] = [J]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{,x} & \Phi_{,y} & \Phi_{,z} \end{bmatrix}^T = [G] \begin{bmatrix} \Phi_{,\xi} & \Phi_{,\eta} & \Phi_{,\zeta} \end{bmatrix}^T.$$

Για η αριθμό κόμβων ανά στοιχείο το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T k [B] J d\xi d\eta d\zeta.$$

$_{nxn}$ $_{-1-1-1}$ $_{nx3}$ $_{3xn}$

όπου k είναι οι ιδιότητες του υλικού. Η ορίζουσα του ‘‘Ιακωβιανού’’ πίνακα $J = \det[J]$ εκφράζει το λόγο των dx, dy, dz ως προς τις $d\xi, d\eta$ και $d\zeta$. Γενικά οι $[J]$ και $[B]$ είναι συναρτήσεις των ξ, η και ζ . Η σχέση μεταξύ της παραμόρφωσης – μετατόπισης δίνεται από την εξίσωση

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}.$$

όπου το διάνυσμα $\{d\}$ περιέχει τις μετατοπίσεις των κόμβων του στοιχείου και $[B]$ είναι χωρικό παράγωγο των μεταβλητών του χώρου.

2.6 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων

2.6.1 Γενικά

Η διακριτοποίηση και στη συνέχεια η επίλυση συστημάτων τα οποία παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά, απαιτεί την αναπαράστασή τους από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για το οποίο πρέπει να βρεθεί λύση. Συνήθως η επίλυση ενός τέτοιου συστήματος είναι αδύνατον να γίνει με αναλυτικό τρόπο, γι’ αυτό και έχουν προταθεί διάφορες επαναληπτικές, αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης, οι οποίες έχουν την ικανότητα να συγκλίνουν σε μια αποδεκτή προσέγγιση της λύσης.

2.6.2 Η μέθοδος Newton – Raphson

Η βάση της μεθόδου **Newton – Raphson** στην ανάλυση δομικών προβλημάτων, είναι ότι πρέπει να ικανοποιείται η ισορροπία του συστήματος. Αρχικά θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$K(u)\delta u = F - R(u). \quad (2.6.2-1)$$

όπου το u είναι το διάνυσμα της κομβικής μετατόπισης, το F είναι το διάνυσμα του εξωτερικού, κομβικού φορτίου, το R είναι το διάνυσμα της εσωτερικής, κομβικής αντίδρασης σε αυτό το φορτίο και το K αναπαριστά τον εφαπτόμενο πίνακα ακαμψίας. Το διάνυσμα της εσωτερικής κομβικής αντίδρασης προκύπτει από τις εσωτερικές τάσεις ως εξής:

$$R = \sum_{elem} \int_V \beta^T \sigma dv. \quad (2.6.2-2)$$

Σε αυτό το σύστημα εξισώσεων το R και το K είναι συναρτήσεις του u . Σε πολλές περιπτώσεις, και το F είναι συνάρτηση του u . Η μορφή των εξισώσεων επιτρέπει την επίλυσή τους με τη μέθοδο **Newton – Raphson**.

Θεωρώντας ότι η τελευταία προσέγγιση είναι η δu^i , όπου ο εκθέτης (i) είναι ο αύξων αριθμός της επανάληψης, η εξίσωση (2.6.2-1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

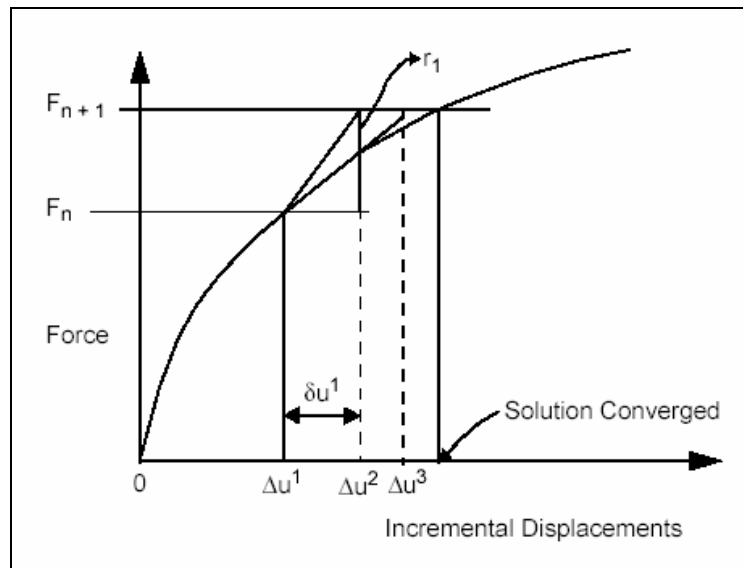
$$K(u_{n+1}^{i-1})\delta u = F - R(u_{n+1}^{i-1}). \quad (2.6.2-3)$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται ως προς δu^i και η επόμενη λύση προκύπτει από:

$$\Delta u^i = \Delta u^{i-1} + \delta u^i \text{ και } u_{n+1}^i = u_{n+1}^{i-1} + \delta u^i. \quad (2.6.2-4)$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης ολοκληρώνει μια επανάληψη και η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί. Ο δείκτης n εννοεί τον αύξοντα αριθμό του βήματος και παρουσιάζει την κατάσταση $t = n$.

Η μέθοδος **Newton – Raphson** είναι η προεπιλεγμένη μέθοδος που χρησιμοποιεί το MSC.MARC 2003 για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων. Παρουσιάζει καλά αποτελέσματα για τα περισσότερα προβλήματα (βλ. Σχήμα 2.6.2.1), αλλά έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος για πολύπλοκες τρισδιάστατες αναλύσεις.



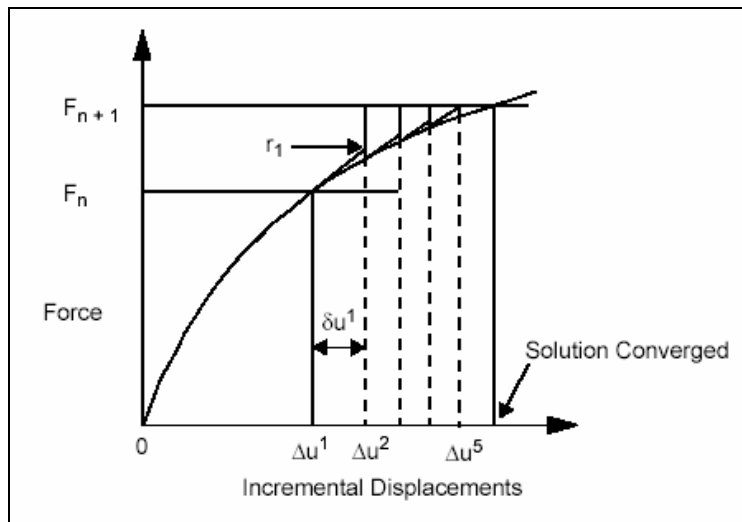
Σχήμα 2.6.2.1: Η πορεία σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

2.6.3 Η τροποποιημένη μέθοδος Newton – Raphson

Η τροποποιημένη μέθοδος **Newton – Raphson** μοιάζει με την ολοκληρωμένη μέθοδο **Newton – Raphson**, με τη διαφορά ότι δεν δημιουργεί από την αρχή τον πίνακα ακαμψίας σε κάθε επανάληψη.

$$K(u^0)\delta u^i = F - R(u^{i-1}).$$

Η διαδικασία έχει μικρό υπολογιστικό κόστος, διότι ο εφαπτόμενος πίνακας ακαμψίας δημιουργείται και αποσυντίθεται μια φορά στην αρχή. Από εκεί κι ύστερα, κάθε επανάληψη απαιτεί τη δημιουργία της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης μόνο, και μια απλή προς τα πίσω αντικατάσταση στη διαδικασία της επίλυσης. Η σύγκλιση όμως, είναι γραμμική και υπάρχει πιθανότητα να χρειαστούν πολλές επαναλήψεις ή και να μην συγκλίνει η μέθοδος τελικά.



Σχήμα 2.6.3.1: Η σύγκλιση της τροποποιημένης μεθόδου Newton – Raphson (MARC Analysis Research Corporation, 1998).

Αν προκύψει μη γραμμική συμπεριφορά εξαιτίας επαφής ή εξαιτίας του υλικού που μελετάται, δεν είναι δυνατόν να αποφευχθεί η δημιουργία του πίνακα ακαμψίας ξανά. Συνεπώς η μέθοδος έχει αποτέλεσμα σε μεγάλης κλίμακας, αλλά ελαφράς μη γραμμικότητας προβλήματα. Όταν καλείται ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης, δεν είναι δυνατή η απλή, προς τα πίσω αντικατάσταση, καθιστώντας τη μέθοδο αναποτελεσματική. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιείται η ολοκληρωμένη μέθοδος **Newton – Raphson**.

Κεφάλαιο 3: Η μοντελοποίηση του προβλήματος

3.1 Γενικά

Η μελέτη των πολύπλοκων θερμικών και μηχανικών φαινομένων που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της πέδησης, μέσω της τριβής, έχει γίνει αντικείμενο πολυάριθμων ερευνών τόσο σε πανεπιστημιακό όσο και σε βιομηχανικό επίπεδο. Η συμπεριφορά των τριβόμενων επιφανειών, η μεταφορά της θερμότητας, η αντοχή των υλικών στη θερμική καταπόνηση είναι μερικά από τα πολλά σημεία, στα οποία έχει εστιαστεί η επιστημονική έρευνα.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό, τη μελέτη ενός τυπικού συστήματος, ενός κεραμικού δίσκου – δύο κεραμικών τακακιών μιας μοτοσυκλέτας, κατά τη διάρκεια της πέδησης. Όσον αφορά στη μοντελοποίηση του προβλήματος, έγινε μεγάλη προσπάθεια για την κατά το δυνατό, πιο ρεαλιστική αναπαράσταση του συστήματος, ούτως ώστε τα αποτελέσματα να προσεγγίσουν την πραγματικότητα.

3.2 Η μοντελοποίηση των σωμάτων

Η μελέτη του προβλήματος πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και για την υλοποίησή της χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο ηλεκτρονικού υπολογιστή MSC.MARC 2003 της εταιρίας Marc Analysis Research Corporation. Το Mentat είναι το κομμάτι του λογισμικού που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του προβλήματος, ενώ το Marc είναι που αναλαμβάνει την επίλυσή του, μέσω των επαναληπτικών αλγορίθμων επίλυσης που διαθέτει.

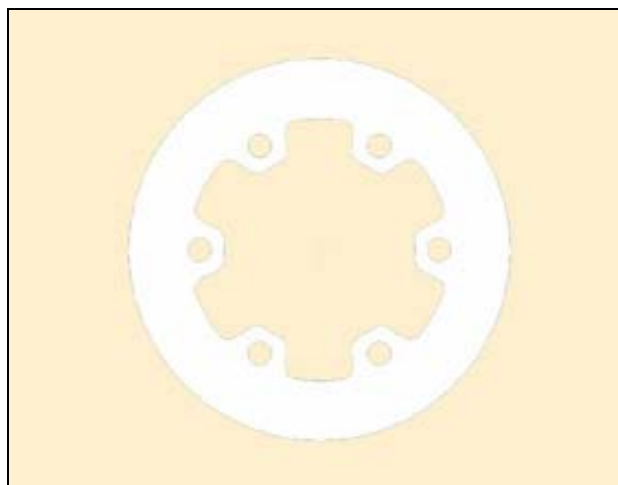
3.2.1 Η μοντελοποίηση του δίσκου

Για τη μοντελοποίηση του δίσκου, ως πρότυπο χρησιμοποιήθηκε ο ένας από τους δύο εμπρός δίσκους μιας αγωνιστικής μοτοσυκλέτας, του παγκοσμίου πρωταθλήματος ταχύτητας (βλ. Σχήμα 3.2.1.1).



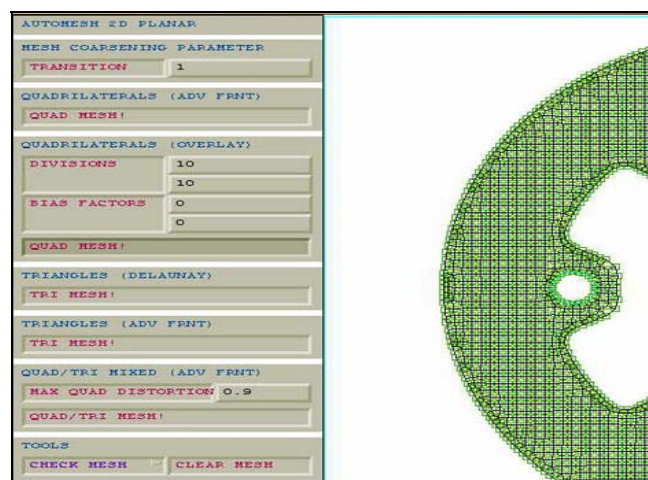
Σχήμα 3.2.1.1: Τυπικό εμπρός σύστημα πέδησης αγωνιστικής μοτοσυκλέτας (www.moto-live.com).

Η διαδικασία της δημιουργίας του δίσκου στο περιβάλλον εργασίας του Mentat, άρχισε από το σχεδιασμό των ακμών που ορίζουν την περιφέρειά του, την εσωτερική του διαμόρφωση και τις οπές εφαρμογής των ήλων έδρασης όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.1.2.



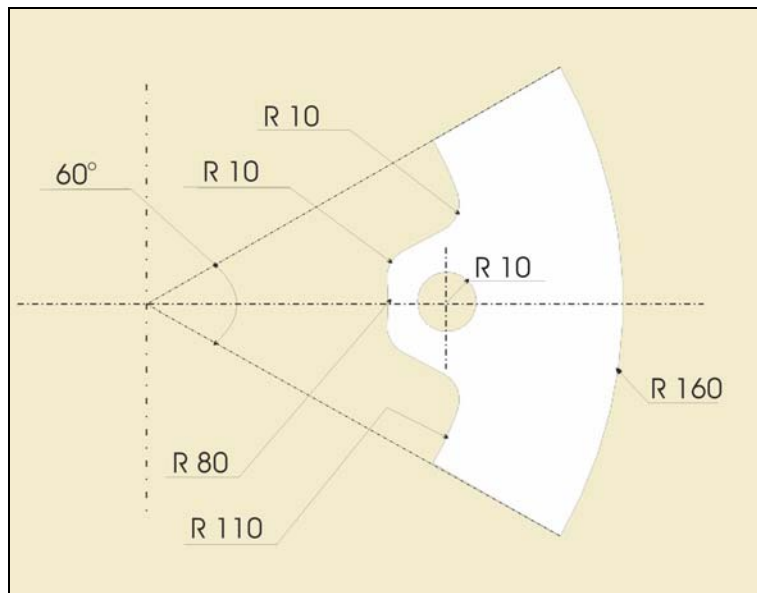
Σχήμα 3.2.1.2: Αρχικό στάδιο σχεδιασμού του δίσκου.

Στη συνέχεια, με τη χρησιμοποίηση της εντολής *Automesh* έγινε ο χωρισμός σε πεπερασμένα στοιχεία. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε έχει ως εξής. Αφού σχεδιάστηκαν όλες οι ακμές που ορίζουν τη γεωμετρία του δίσκου, από το μενού *Automesh* έγινε η επιλογή *2D Planar Meshing* (βλ. Σχήμα 3.2.1.3). Σε αυτή την επιλογή είναι δυνατόν να δημιουργηθεί αυτομάτως ένα σύνολο δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, το οποίο θα ορίζεται από ένα σύνολο ακμών, το οποίο θα ορίζει μια – απαραίτητως – κλειστή γεωμετρία. Η πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων ορίζεται από το χρήστη και είναι πολύ σημαντική παράμετρος όσον αφορά στην ακρίβεια της μεθόδου.



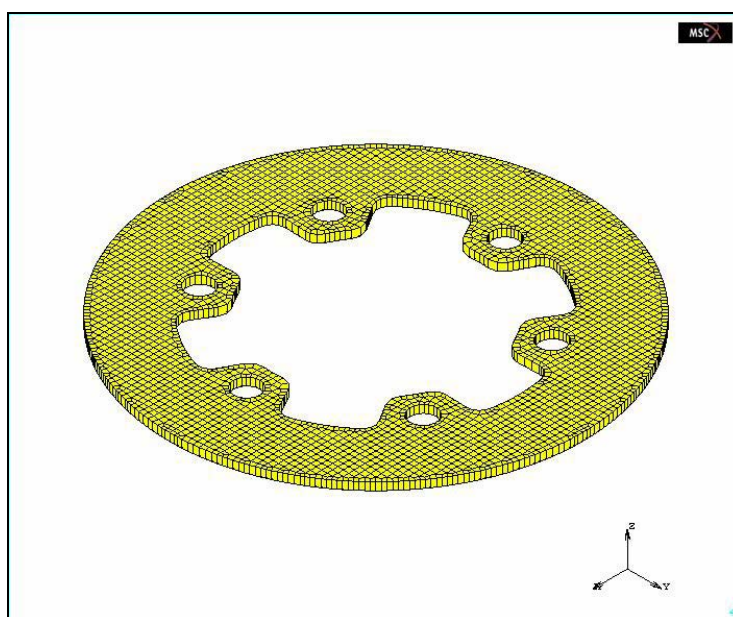
Σχήμα 3.2.1.3: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Automesh*.

Η επιλογή της αυτόματης δημιουργίας του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων δεν έγινε τυχαία. Ήταν απαραίτητη λόγω της πολύπλοκης γεωμετρίας της εσωτερικής διαμόρφωσης του δίσκου, η οποία κατέστησε αδύνατο το διαχωρισμό του σε πεπερασμένα στοιχεία με άλλο τρόπο. Στο Σχήμα 3.2.1.4 παρουσιάζεται μια διαστασιολογημένη τομή εξήντα μοιρών του δίσκου, η οποία είναι συμμετρική εκ περιστροφής.



Σχήμα 3.2.1.4: Διαστασιολόγηση μιας συμμετρικής εκ περιστροφής, τομής του δίσκου.

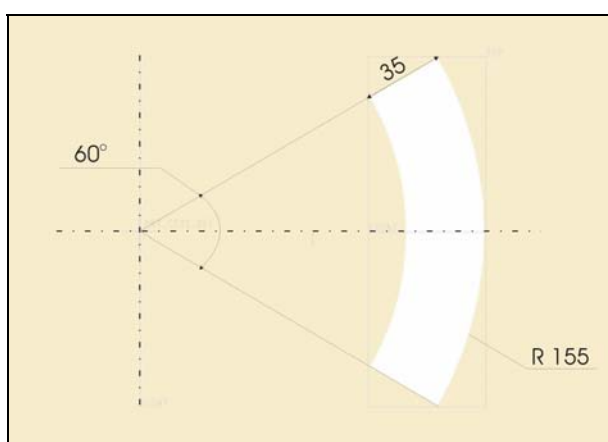
Στη συνέχεια, για να γίνει το πέρασμα από τις δύο διαστάσεις στις τρεις, χρησιμοποιήθηκε η εντολή *Expand*, η χρήση της οποίας έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατροπή ενός συνόλου δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, σε τρισδιάστατα με τη πρόσθεση όγκου στον z άξονα. Το πάχος στον z άξονα ορίστηκε να είναι 6mm. Το αποτέλεσμα των παραπάνω ενεργειών, ήταν η δημιουργία μιας γεωμετρίας δίσκου πολύ κοντά στην πραγματικότητα, αποτελούμενης από τρισδιάστατα, εξαεδρικά, πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων (βλ. Σχήμα 3.2.1.5).



Σχήμα 3.2.1.5: Όψη τριών τετάρτων του μοντέλου του δίσκου.

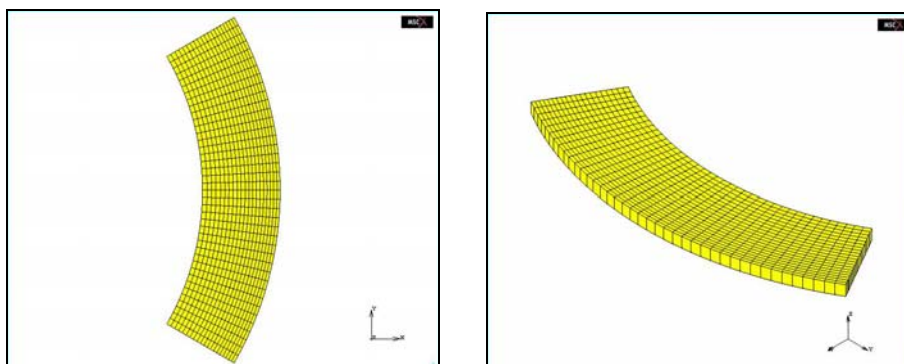
3.2.2 Η μοντελοποίηση των τακακιών

Για τη μοντελοποίηση των τακακιών ακολουθήθηκε διαφορετική διαδικασία. Αρχικά σχεδιάστηκαν οι δύο χορδές που ορίζουν την εξωτερική και την εσωτερική περιφέρεια του τακακιού όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2.2.1. Στη συνέχεια ορίστηκε από της δύο αυτές χορδές, μια επίπεδη επιφάνεια, η οποία με την εντολή *Convert* μετετράπη σε ένα σύνολο δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Και πάλι η πυκνότητα της διακριτοποίησης ορίζεται από το χρήστη. Η παραπάνω διαδικασία είναι η πιο συνηθισμένη όταν πρόκειται να διακριτοποιηθεί μια σχετικά απλή επίπεδη γεωμετρία.



Σχήμα 3.2.2.1: Διαστασιολόγηση του τακακιού.

Για το πέρασμα στις τρεις διαστάσεις και πάλι χρησιμοποιήθηκε η εντολή *Expand* για την πρόσθεση όγκου στον άξονα z. Το πάχος του τακακιού ορίστηκε στα 5mm. Το αποτέλεσμα των παραπάνω ενεργειών παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2.2.2.



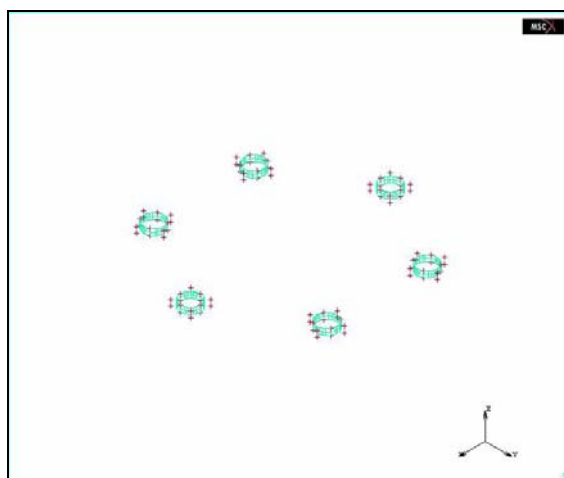
Σχήμα 3.2.2.2: Κάτοψη και τριών τετάρτων όψη του μοντέλου του τακακιού.

Ακόμη, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα, το τακάκι αποτελείται κι αυτό από τρισδιάστατα, εξαεδρικά, πεπερασμένα στοιχεία οκτώ κόμβων.

Για τη δημιουργία του δεύτερου τακακιού χρησιμοποιήθηκε η εντολή *Duplicate*, η οποία προσφέρει τη δυνατότητα αναπαραγωγής του συνόλου των επιλεγμένων πεπερασμένων στοιχείων σε κάποια άλλη θέση του χώρου.

3.2.3 Η μοντελοποίηση των ήλων έδρασης

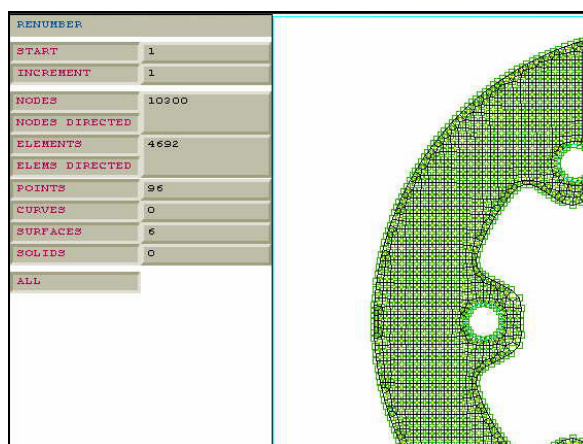
Για τη δημιουργία των ήλων έδρασης σχεδιάστηκε μια κυκλική γραμμή εφαπτομένη σε μία από τις οπές του δίσκου. Στη συνέχεια με την εντολή *Duplicate*, αυτή η γραμμή αναπαρήχθη στην άλλη άκρη της ίδιας οπής του δίσκου. Από τις δύο αυτές γραμμές ορίστηκε μία κυλινδρική επιφάνεια. Τέλος, με την εντολή *Duplicate*, αυτή η επιφάνεια αναπαρήχθη πέντε φορές, ούτως ώστε να δημιουργηθούν, τελικά, έξι επιφάνειες, εφαπτόμενες ακριβώς στις αντίστοιχες οπές του δίσκου. Στο Σχήμα 3.2.3.1 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα των παραπάνω ενεργειών.



Σχήμα 3.2.3.1: Όψη τριών τετάρτων των ήλων έδρασης.

Ανακεφαλαιώνοντας, το προς μελέτη σύστημα αποτελείται από εννέα σώματα. Τρία σώματα που αναπαρίστανται από πεπερασμένα στοιχεία και έξι σώματα που αναπαρίστανται από κυλινδρικές επιφάνειες. Ο δίσκος αποτελείται από 3092 ισοπαραμετρικά, εξαεδρικά, πεπερασμένα στοιχεία, ενώ το κάθε τακάκι αποτελείται από 800 ισοπαραμετρικά, εξαεδρικά, πεπερασμένα στοιχεία. Συνολικά η

ανάλυση περιλαμβάνει 10300 κόμβους. Τέλος, για τη βελτιστοποίηση της διαδικασίας επίλυσης, όταν τελειώσει η μοντελοποίηση των σωμάτων, είναι απαραίτητη η εκτέλεση της εντολής *Renumber*, η οποία έχει σκοπό την απαρίθμηση και σωστή καταχώρηση των πεπερασμένων στοιχείων και των κόμβων που τα αποτελούν. Έτσι εξασφαλίζεται ο σωστός προσανατολισμός και η ακριβής σύνδεση των στοιχείων που συμμετέχουν στην ανάλυση (βλ. Σχήμα 3.2.3.2).

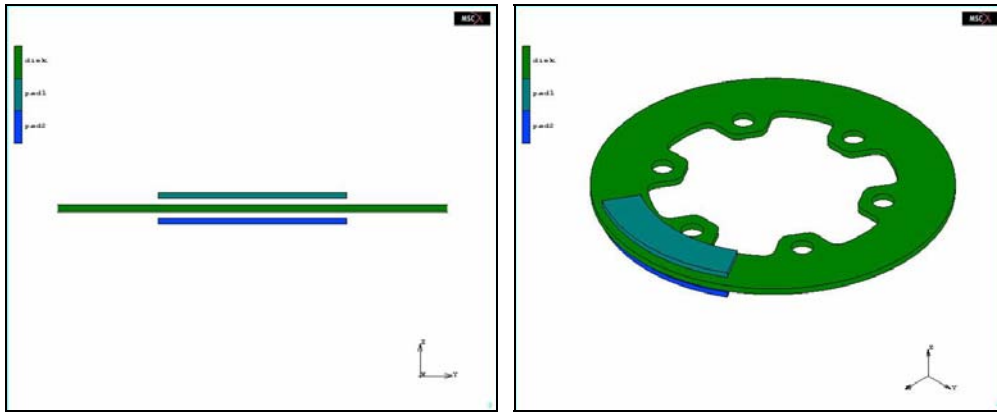


Σχήμα 3.2.3.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της εντολής *Renumber*.

3.3 Η μοντελοποίηση της επαφής

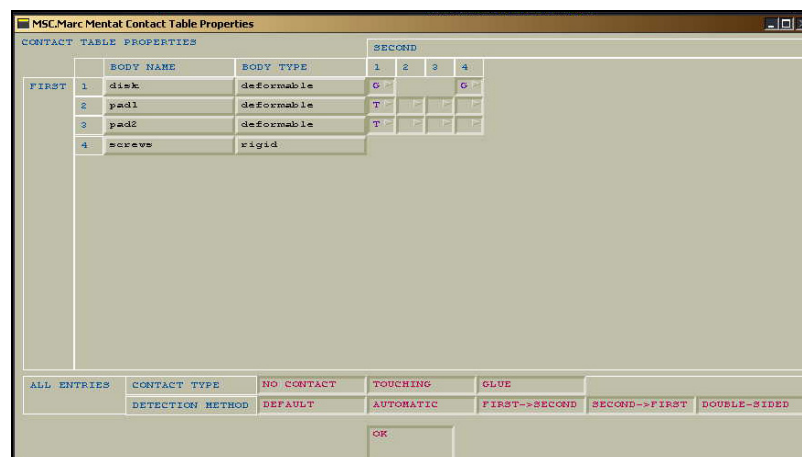
Για τη μελέτη ενός θερμό – μηχανικού προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού MSC.MARC 2003, είναι απαραίτητος ο καθορισμός των συνθηκών της επαφής μεταξύ των διαφόρων σωμάτων που λαμβάνουν μέρος στην ανάλυση.

Αρχικά πρέπει να οριστούν τα προς επαφή σώματα μέσα από την εντολή *Contact Bodies*. Εν προκειμένω, ο δίσκος, τα τακάκια και οι ήλοι έδρασης. Ο δίσκος ορίζεται από το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων που των αποτελούν, ως ένα παραμορφώσιμο σώμα με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$. Τα τακάκια ορίζονται κι αυτά από τα πεπερασμένα στοιχεία από τα οποία αποτελούνται, ως δύο ξεχωριστά παραμορφώσιμα σώματα με συντελεστή τριβής $\mu = 0,5$ (βλ. Σχήμα 3.3.1). Τέλος οι ήλοι έδρασης ορίζονται από τις επιφάνειές τους ως ένα ενιαίο μη – παραμορφώσιμο σώμα.



Σχήμα 3.3.1: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των προς επαφή σωμάτων.

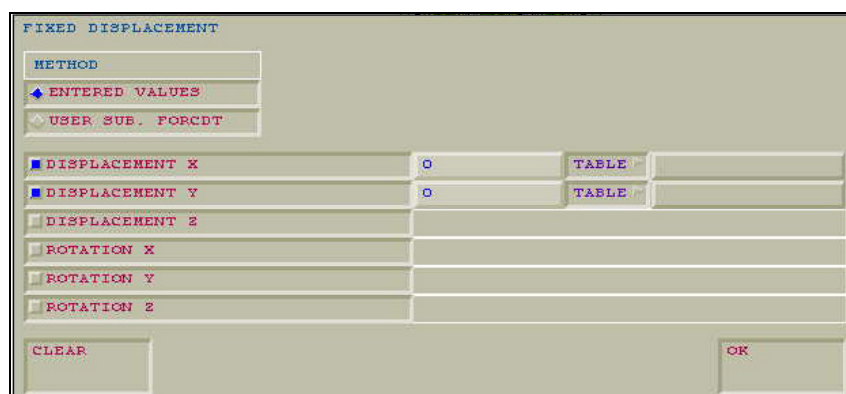
Στη συνέχεια, από την εντολή *Contact Table*, γίνεται ο ορισμός για το ποια σώματα θα έρθουν σε επαφή με ποια και υπό ποιες συνθήκες. Έτσι θεωρείται ότι ο δίσκος μπορεί να έρθει σε επαφή με τα δύο τακάκια με *Touch*. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να ακουμπήσουν και να ολισθήσουν το ένα πάνω στον άλλο και να αναπτυχθεί τριβή μεταξύ τους, σύμφωνα με τον δοσμένο συντελεστή τριβής μ . Για το δίσκο, σε σχέση με το απαραμόρφωτο σώμα που απαρτίζουν οι ήλοι, έχει ορισθεί η επιλογή *Glue*. Αυτό σημαίνει ότι είναι μονίμως σε επαφή μεταξύ τους και δεν μπορεί να αναπτυχθεί σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο δίσκο και τις επιφάνειες που ορίζουν τους ήλους έδρασης. Τέλος, για να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος, από την επιλογή *Contact Table* ορίζουμε ότι κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, η ανίχνευση της επαφής, θα γίνεται σε σχέση με τους κόμβους των τακακιών, που είναι σαφώς λιγότεροι από αυτούς του δίσκου (βλ. Σχήμα 3.3.2).



Σχήμα 3.3.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Contact Table*.

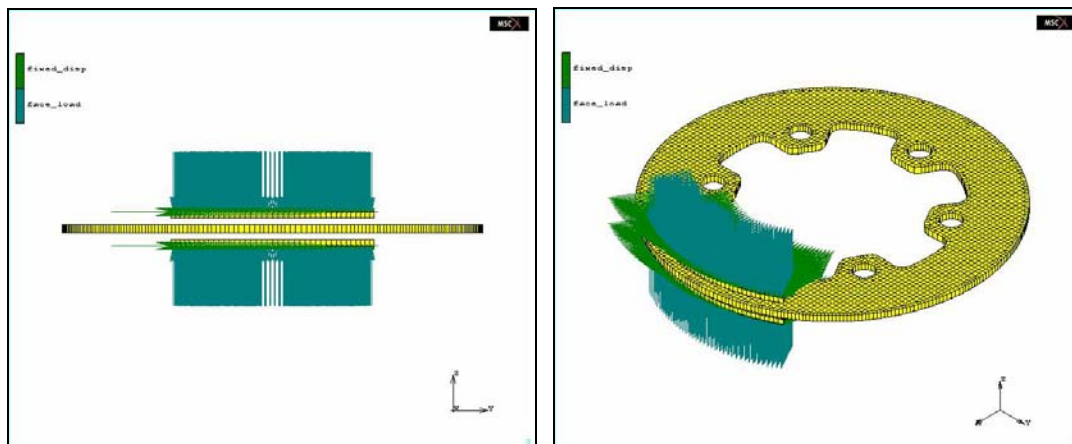
3.4 Ορισμός συνοριακών συνθηκών

Σε κάθε ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, είναι απαραίτητος ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών που επικρατούν και ορίζουν τις στηρίξεις των σωμάτων και τα διάφορα εξωτερικά φορτία που επιδρούν σε αυτά. Στη συγκεκριμένη μελέτη οι συνοριακές συνθήκες αφορούν στη στήριξη και στη φόρτιση των τακακιών. Από το μενού *Boundary Conditions* του προγράμματος έγινε η επιλογή *Fixed Displacement* για να οριστεί η στήριξη των τακακιών. Πιο συγκεκριμένα, ορίστηκε ότι τα τακάκια δεν μπορούν να μετακινηθούν στον άξονα x και στον άξονα y (βλ. Σχήμα 3.4.1). Η εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης έγινε στους κόμβους των τακακιών, οι οποίοι βρίσκονται στην εξωτερική τους πλευρά και συνεπώς δεν υπάρχει πιθανότητα να έρθουν σε επαφή με το δίσκο, κάτι που θα δημιουργούσε πρόβλημα στη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, όπως ελέγχθη και στο δεύτερο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.4.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Fixed displacement*.

Στη συνέχεια έγινε η επιλογή *Face Load* για να καθοριστεί ένα κατανεμημένο φορτίο ασκούμενο στα τακάκια. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται μια προσομοίωση της πίεσης που ασκείται στα τακάκια μέσω του υδραυλικού κυκλώματος των φρένων. Η τιμή που δόθηκε ήταν 0.1 και εφαρμόστηκε στις εξωτερικές πλευρές των πεπερασμένων στοιχείων που απαρτίζουν τα τακάκια. Η συνδυασμένη εικόνα των συνοριακών συνθηκών που ορίστηκαν για τα τακάκια φαίνεται στο Σχήμα 3.4.2.

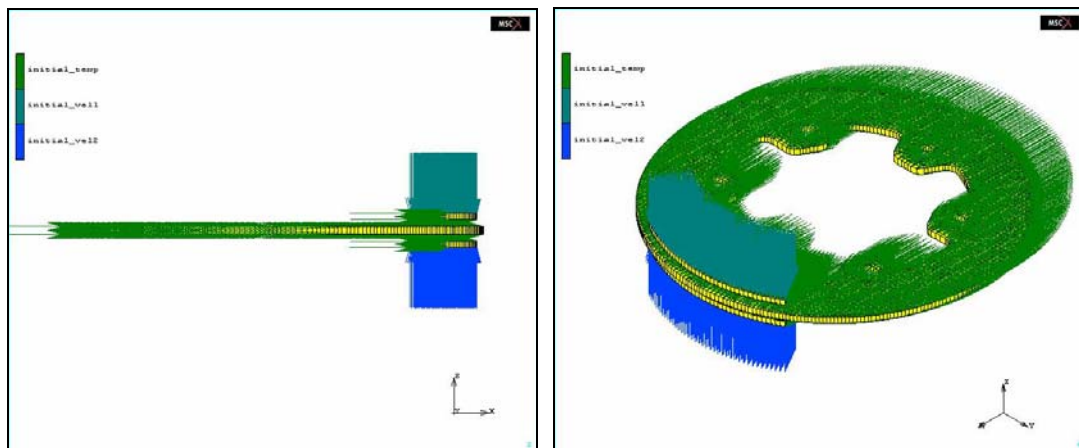


Σχήμα 3.4.2: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των συνοριακών συνθηκών.

3.5 Ορισμός αρχικών συνθηκών

Οι αρχικές συνθήκες είναι πολύ σημαντικές για κάθε ανάλυση και πρέπει να ορίζονται έτσι ώστε να μπορεί να προσεγγισθεί η πραγματικότητα κάθε εξεταζόμενου προβλήματος. Στη συγκεκριμένη εργασία υπάρχουν δύο ειδών αρχικές συνθήκες. Το πρώτο καθορίζει την αρχική θερμοκρασία των σωμάτων που λαμβάνουν μέρος στη μελέτη και το δεύτερο είδος αρχικών συνθηκών, αφορά στην αρχική ταχύτητα που προσδίδεται στα τακάκια και στο δίσκο.

Η αρχική θερμοκρασία του δίσκου και των τακακιών ορίστηκε στους 20° Κελσίου. Η εφαρμογή αρχικής ταχύτητας στα τακάκια, κρίθηκε απαραίτητη, επειδή μοντελοποιήθηκαν σε μια απόσταση 5mm από το δίσκο. Για να επισπευστεί η επαφή τους, αποδόθηκε στα τακάκια αρχική ταχύτητα 10 m/sec στον z άξονα, με φορά προς το δίσκο. Η συνδυασμένη εικόνα αυτών των αρχικών συνθηκών φαίνεται στο Σχήμα 3.5.1.



Σχήμα 3.5.1: Πλάγια και τριών τετάρτων όψη του ορισμού των αρχικών συνθηκών.

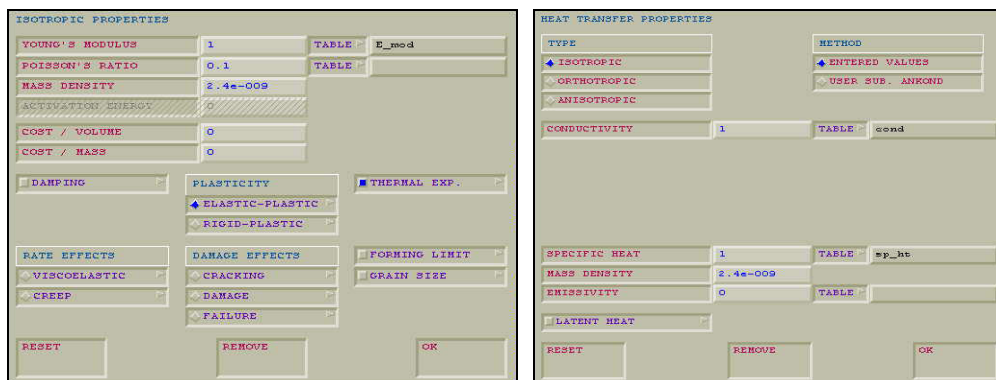
Όσον αφορά στην την ταχύτητα του δίσκου, αυτή ορίσθηκε εμμέσως ούτως ώστε να αντικατοπτρίζεται καλύτερα η πραγματικότητα. Πιο συγκεκριμένα, αποδόθηκε ένας συγκεκριμένος ρυθμός περιστροφής στους ήλους έδρασης, μειούμενος γραμμικά από τα 50 rad/sec στο μηδέν σε χρονικό διάστημα 1,5 sec, κατά τον ορισμό των συνθηκών επαφής μέσω της εντολής *Contact Bodies*. Η αρχική ταχύτητα των 50 rad/sec, αντιστοιχεί σε 50 km/h περίπου, σύμφωνα με τις διαστάσεις ενός τυπικού τροχού μοτοσυκλέτας. Η διάρκεια της πέδησης, αντιστοιχεί κι αυτή σε ένα τυπικό φρενάρισμα από αυτή την ταχύτητα. Η μόνη απλούστευση που έγινε για ευκολία υπολογισμών, ήταν η γραμμικότητα της επιβράδυνσης. Κάτι όμως, που δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της μελέτης, σημαντικά.

3.6 Ορισμός των ιδιοτήτων του υλικού

Όπως είναι φυσικό, για να αποδώσει αποτελέσματα μια ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, θα πρέπει να έχουν οριστεί οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών που απαρτίζουν τα προς μελέτη σώματα. Για θερμό – μηχανικές αναλύσεις ιδιαίτερα, θα πρέπει να οριστούν και εκείνες οι ιδιότητες που αφορούν στη θερμική συμπεριφορά των υλικών.

Συγκεκριμένα, στην παρούσα μελέτη, ο δίσκος και τα τακάκια θεωρείται ότι είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό, όπως είναι και το σύνθηες σε αυτού του είδους τις εφαρμογές. Αυτό το υλικό θεωρήθηκε ισότροπο και οι ιδιότητές του

ορίστηκαν από την επιλογή *Material Properties* του λογισμικού MSC.MARC 2003 (βλ. Σχήμα 3.6.1).



Σχήμα 3.6.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας του ορισμού μηχανικών και θερμικών ιδιοτήτων, της επιλογής *Material Properties* για ισότροπο υλικό.

Πιο συγκεκριμένα, οι απαραίτητες τιμές των μηχανικών και των θερμικών ιδιοτήτων του υλικού SIGRASIC® (βλ. Σχήμα 3.6.2 & 3.6.3), παρασχέθηκαν από την εταιρία SGL Brakes GmbH, η οποία κατασκευάζει κεραμικούς δίσκους πρώτης τοποθέτησης για εφαρμογή σε συστήματα πέδησης αυτοκινήτων και τρένων υψηλών επιδόσεων.

Mechanical properties			
Property	Temperature	Unit	Typical value*
Density		g/cm ³	2.4
Tensile strength	20°C	MPa	20 to 30
Poisson's ratio			0.1
Young's modulus	20°C	GPa	20 to 30
	1200°C	GPa	n.a.
Elongation at break		%	0.3
Flexural strength (3-point)	20°C	MPa	50 to 60
	1200°C	MPa	85 to 95
Flexural modulus (3-point)	20°C	GPa	30
	1200°C	GPa	40
Compressive strength	20°C	MPa	250
	1200°C	MPa	
Universal hardness (HU)		N/mm ²	7000
Notched impact strength		J/m	5

Σχήμα 3.6.2: Μηχανικές ιδιότητες του υλικού SIGRASIC® (SGL Brakes GmbH, 2002).

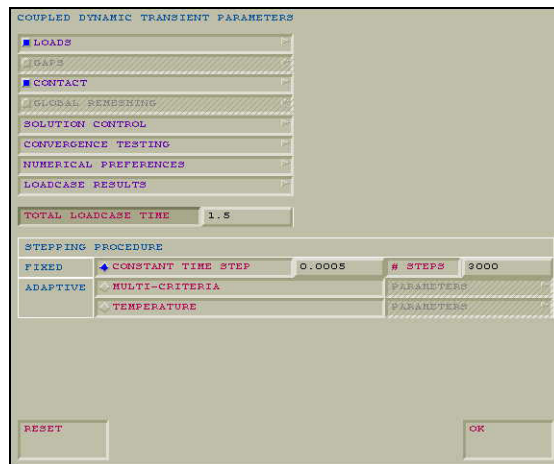
Thermal properties			
Property	Temperature	Unit	Typical value*
Maximum service temperature		°C	1350
Coefficient of thermal shock resistance		kW/m	46
Coefficient of thermal expansion	0°C .. 300°C	10 ⁻⁶ /K	1.8
	300°C .. 1200°C	10 ⁻⁶ /K	3.0
Thermal conductivity	20°C	W/m·K	40
	1200°C	W/m·K	20
Specific heat capacity	20°C	J/g·K	0.6 to 0.8
	1200°C	J/g·K	1.3 to 1.7

Σχήμα 3.6.3: Θερμικές ιδιότητες του υλικού SIGRASIC® (SGL Brakes GmbH, 2002).

3.7 Ορισμός των συνθηκών ανάλυσης

Σε αυτό το κομμάτι της μοντελοποίησης του προβλήματος, πραγματοποιείται η συγκέντρωση και καταχώριση όλων των παραμέτρων που έχουν καθοριστεί παραπάνω, σε μορφή που μπορεί να διαχειριστεί το λογισμικό του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επιλέγεται ο τύπος του προς επίλυση προβλήματος, η διαδικασία επίλυσης, ορίζονται οι παράμετροι της επαναληπτικής διαδικασίας, καθορίζεται ο τύπος των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν και τέλος, καθορίζονται οι παράμετροι για τις οποίες θα ανακτηθούν αποτελέσματα, καθώς και η συχνότητα ανάκτησης αυτών των αποτελεσμάτων.

Ο τύπος του προβλήματος επιλέγεται μέσα από το μενού *Loadcase* και καθορίστηκε ως θερμό – μηχανικό, δυναμικό, μεταβατικό πρόβλημα επαφής (βλ. Σχήμα 3.7.1). Η διαδικασία επίλυσης είναι η ολοκληρωμένη μέθοδος **Newton – Raphson**. Η χρονική διάρκεια της πέδησης ορίστηκε όπως ειπώθηκε παραπάνω, στο 1,5 sec και χωρίστηκε σε 3000 βήματα σταθερής διάρκειας 0,0005 sec.



Σχήμα 3.7.1: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Loadcase (Coupled Dynamic Transient)*.

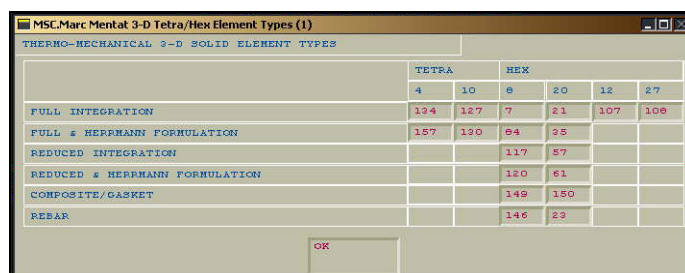
Στη συνέχεια στο μενού *Job* εισάγουμε όλα τα παραπάνω δεδομένα και επιλέγουμε επιπροσθέτως, το είδος της τριβής, τη σχετική ταχύτητα ολίσθησης μεταξύ των εφραπτομένων σωμάτων, τον τύπο των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και τα εξαγόμενα αποτελέσματα που θα προκύψουν μετά το πέρας της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης (βλ. Σχήμα 3.7.2).



Σχήμα 3.7.2: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Job (Coupled Dynamic Transient)*.

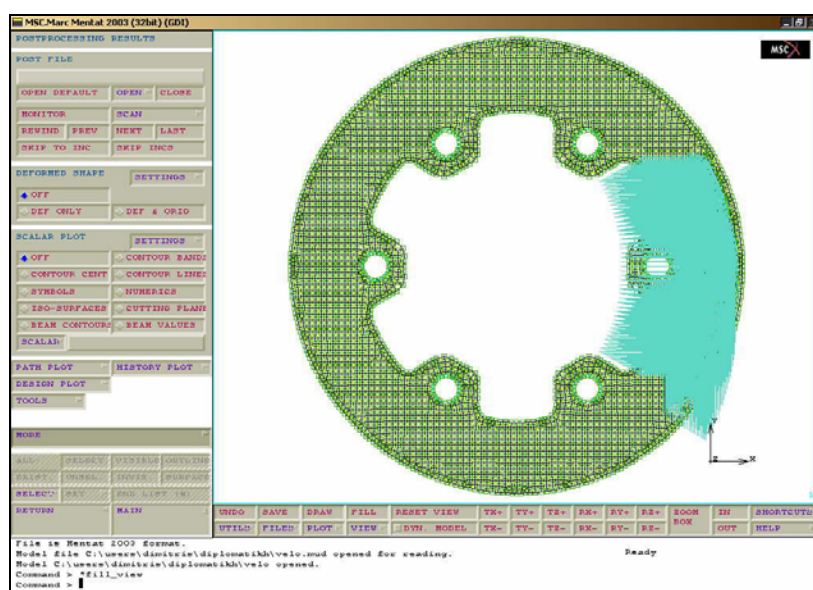
Το είδος της τριβής που επελέγη ήταν ***Coulomb for Rolling***, ενώ η σχετική ταχύτητα επελέγη ανάμεσα στο 1 – 10% της μέσης ταχύτητας περιστροφής του δίσκου. Ο τύπος των πεπερασμένων στοιχείων που θα συμμετάσχουν στην ανάλυση,

ορίστηκε να είναι ο τύπος 7. Στερεά, ισοπαραμετρικά, εξαεδρικά, πεπερασμένα στοιχεία πλήρους ολοκλήρωσης (βλ. Σχήμα 3.7.3). Τα δεδομένα για τα οποία ορίστηκε να εξαχθούν αποτελέσματα, ήταν μεταξύ άλλων η θερμοκρασία, η ροή της θερμότητας, οι δυνάμεις αντίδρασης, οι ισοδύναμες τάσεις, η μέση τιμή των κάθετων τάσεων, η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης, η κάθετη δύναμη επαφής και η δύναμη τριβής. Η συχνότητα ανάκτησης δεδομένων, ορίστηκε να είναι κάθε πέντε βήματα.



Σχήμα 3.7.3: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Element Types (solid – coupled)*.

Όλα αυτά τα δεδομένα συγκροτούν ένα νέο αρχείο, το οποίο αποθηκεύεται αυτομάτως από το λογισμικό πρόγραμμα στο σκληρό δίσκο του ηλεκτρονικού υπολογιστή και μπορεί να υποστεί επεξεργασία μέσω της επιλογής *Results* (βλ. Σχήμα 3.7.4). Σε αυτό το σημείο έγκειται και ο λόγος που δεν επελέγη να ανακτώνται αποτελέσματα για όλα τα βήματα της επίλυσης, διότι το προκύπτον αρχείο ήταν τόσο μεγάλο, που ήταν αδύνατη η πρόσβασή του από το σύστημα.



Σχήμα 3.7.4: Άποψη του περιβάλλοντος εργασίας της επιλογής *Results*.

Κεφάλαιο 4: Τα αποτελέσματα της ανάλυσης και η επεξεργασία τους

4.1 Γενικά

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται γραφικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης, όπως προέκυψαν μετά το πέρας της προσομοίωσης της επιβράδυνσης, με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το λογισμικό πακέτο MSC.MARC 2003 χρησιμοποιεί χρωματικές κλίμακες για την απεικόνιση των διακυμάνσεων των τιμών, για τις οποίες ζητείται κάθε φορά να παρουσιαστούν αποτελέσματα. Ακόμη τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν για κάθε κόμβο, σε κάθε βήμα της ανάλυσης, υπάρχει η δυνατότητα να ανακτηθούν και να εισαχθούν σε οποιοδήποτε πρόγραμμα ανάλυσης δεδομένων για περαιτέρω επεξεργασία.

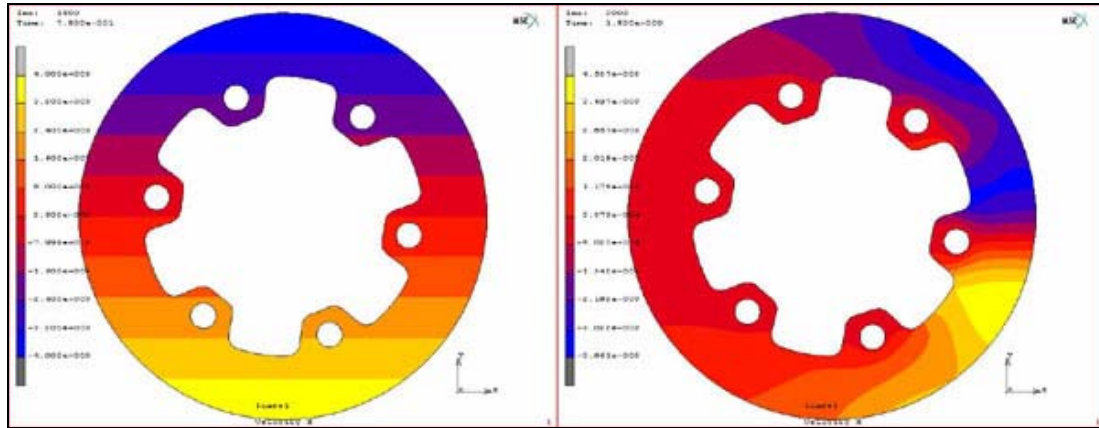
Συγκεκριμένα, στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα για το δίσκο και τα τακάκια ξεχωριστά, όπως απεικονίζονται από το πρόγραμμα με χρωματικές κλίμακες, σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και σε χρονικές αλληλουχίες, αναλόγως με το κάθε αποτέλεσμα και με κύριο σκοπό την ανάδειξη ενδιαφερόντων φαινομένων και την καλύτερη κατανόησή τους.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν γραφήματα που έχουν προκύψει από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος **Excel** της **Microsoft**. Αυτά τα γραφήματα θα παρουσιάζουν τη διακύμανση των τιμών θερμοκρασίας, δυνάμεων, τάσεων κτλ. κατά τη διάρκεια της πέδησης, για συγκεκριμένους κόμβους του δίσκου και των τακακιών.

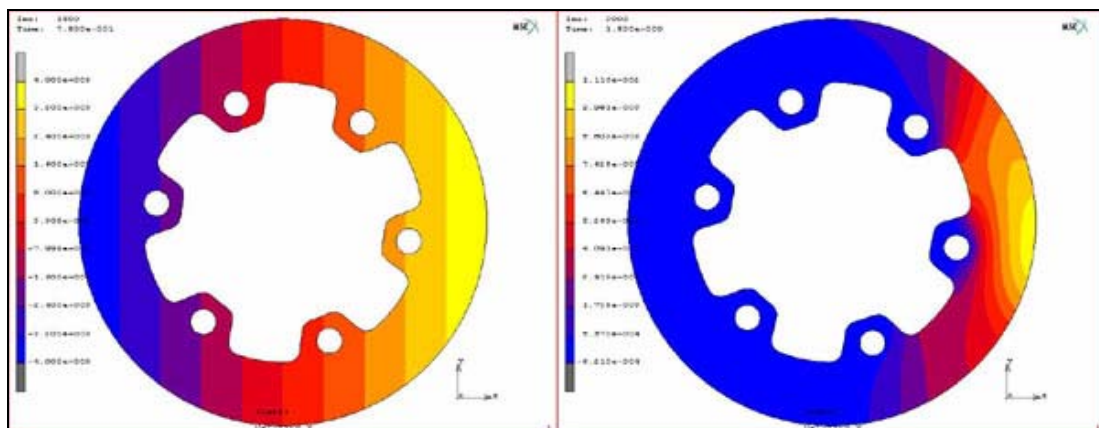
4.2 Τα αποτελέσματα για το δίσκο

Αρχικά παρουσιάζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος του δίσκου, όπως τις υπολογίζει το λογισμικό πρόγραμμα και τις αποδίδει γραφικά με

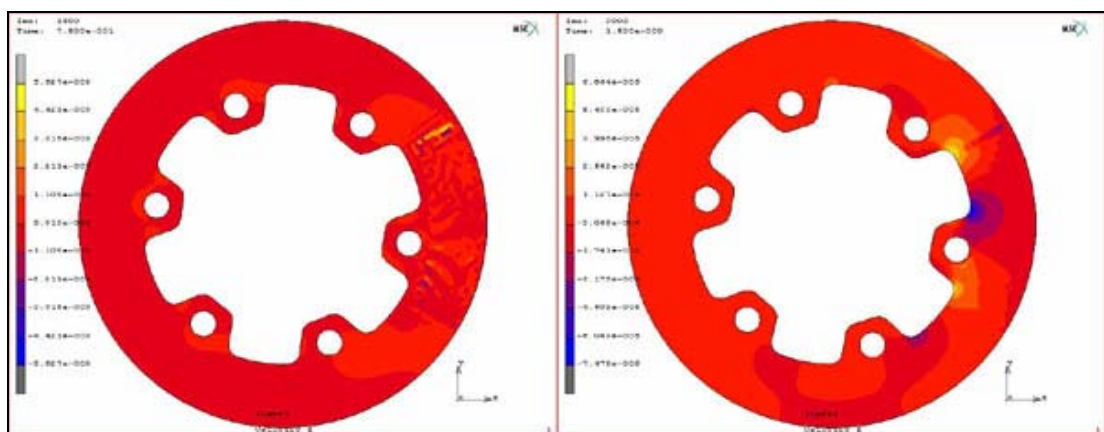
χρωματικές κλίμακες, για δύο χρονικές στιγμές στο βήμα 1500 και στο βήμα 3000 της ανάλυσης. Αυτά τα βήματα είναι στο μέσον της χρονικής διάρκειας της επιβράδυνσης και στο τέλος της αντίστοιχα.



Σχήμα 4.2.1: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα x για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.



Σχήμα 4.2.2: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα y για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.

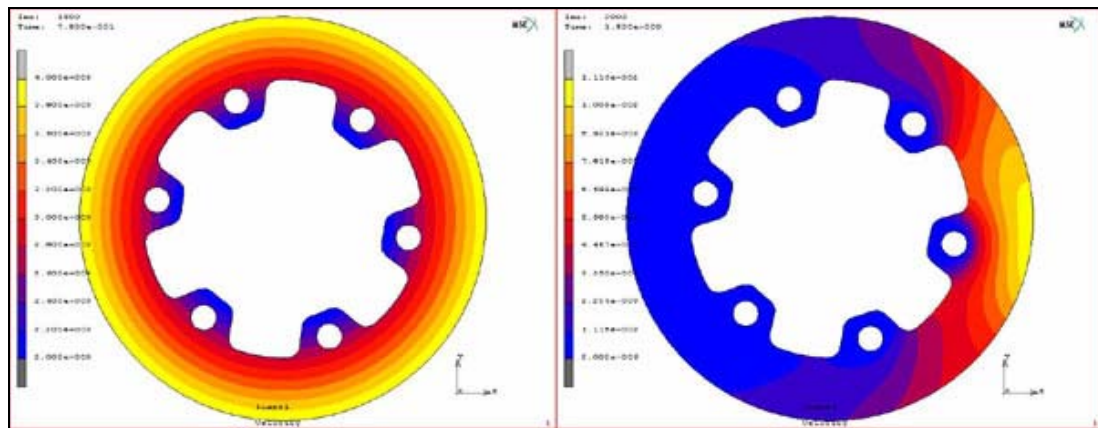


Σχήμα 4.2.3: Η συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα z για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.

Στο Σχήμα 4.2.1 και στο Σχήμα 4.2.2 παρουσιάζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας του δίσκου στους άξονες x και y αντίστοιχα. Παρατηρούμε και στα δύο αυτά σχήματα ότι στο βήμα 1500 η τιμές κατανέμονται ομαλά, ενώ στο τελευταίο βήμα οι τιμές παρουσιάζουν κατανομή η οποία δεν φαίνεται φυσιολογική. Αυτό συμβαίνει επειδή στο βήμα 3000 ο δίσκος ουσιαστικά ακινητοποιείται και η κλίμακα των τιμών προσαρμόζεται σε κάθε βήμα στις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές. Οι διακυμάνσεις που παρατηρούνται στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και για τις δύο συνιστώσες είναι τις τάξεως του χιλιοστού του χιλιοστού ανά δευτερόλεπτο και όπως φαίνεται είναι συγκεντρωμένες στην περιοχή όπου ο δίσκος έρχεται σε επαφή με τα τακάκια.

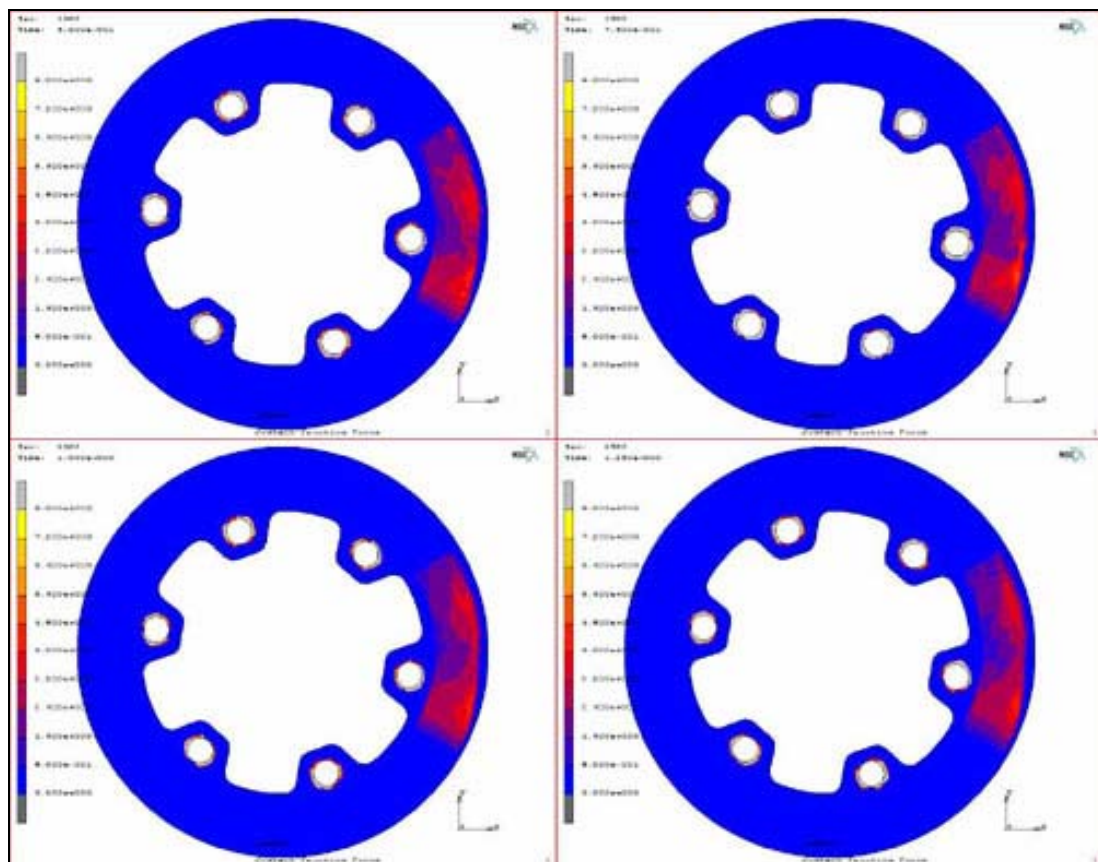
Το φαινόμενο που αναλύεται παραπάνω, είναι πιο εύκολο να κατανοηθεί παρατηρώντας το Σχήμα 4.2.3, όπου παρουσιάζεται γραφικά η συνιστώσα της ταχύτητας στον z άξονα. Σε αυτό το σχήμα παρατηρούνται καλύτερα οι διακυμάνσεις της ταχύτητας οι οποίες συγκεντρώνονται στην περιοχή της επαφής. Αυτές είναι τις τάξεως του χιλιοστού του χιλιοστού ανά δευτερόλεπτο στο βήμα 1500 και του εκατομμυριοστού του χιλιοστού ανά δευτερόλεπτο στο χρονικό βήμα 3000.

Τέλος στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται η συνισταμένη ταχύτητα για το σώμα του δίσκου, για τις αυτές χρονικές στιγμές. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο στην εικόνα του τελευταίου βήματος.



Σχήμα 4.2.4: Η συνισταμένη της ταχύτητας του δίσκου για τα χρονικά βήματα 1500 και 3000.

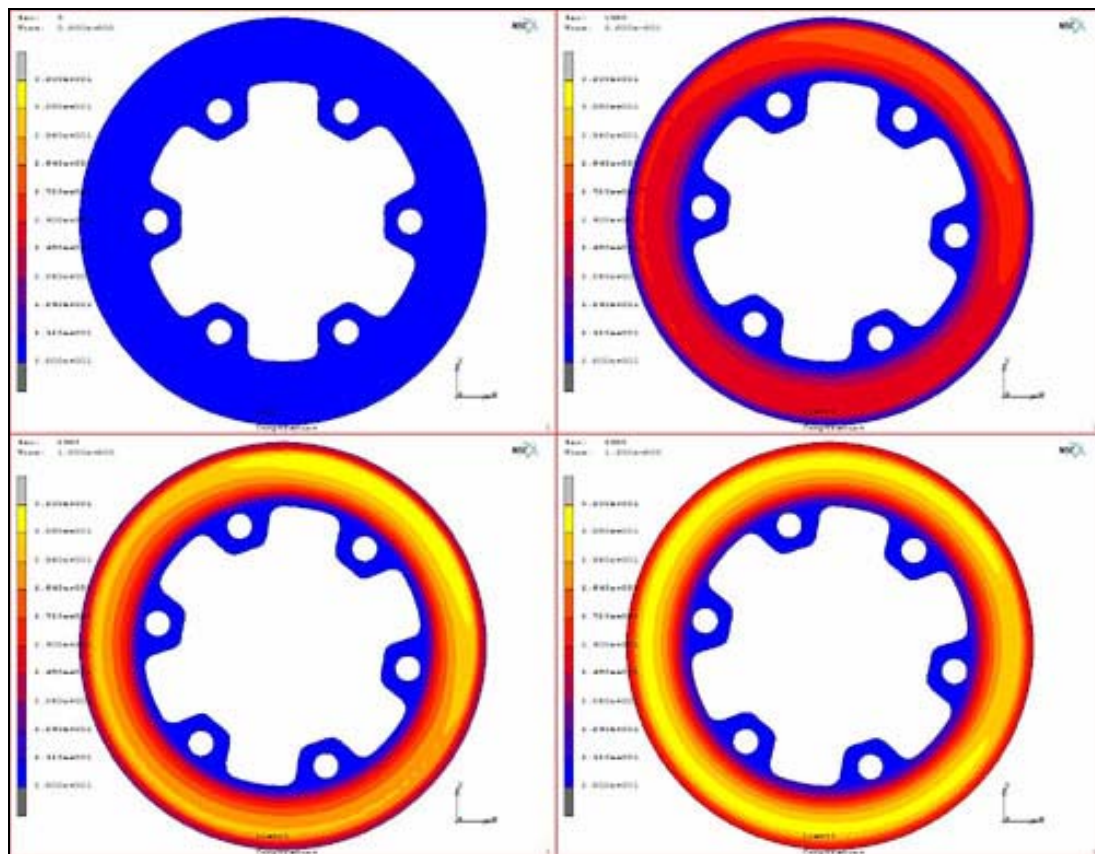
Στη συνέχεια παρουσιάζεται γραφικά η ανάπτυξη της τριβής μεταξύ του δίσκου και του ενός τακακιού. Η σειρά των εικόνων είναι από τα χρονικά βήματα 500, 1000, 1500, 2000 και 2500. Η χρωματική κλίμακα λαμβάνει σταθερές τιμές σε κάθε βήμα.



Σχήμα 4.2.5: Η ανάπτυξη της τριβής μεταξύ του δίσκου και του ενός τακακιού στα βήματα 500, 1000, 1500, 2000 και 2500 με σταθερή κλίμακα.

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρείται ότι εκτός από την τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ του δίσκου και του τακακιού, εμφανίζεται τριβή και μεταξύ του δίσκου και των ήλων έδρασής του. Μάλιστα είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι τιμές αυτής της τριβής είναι εκτός κλίμακας προς τα επάνω. Αυτό δικαιολογείται από την επιλογή *Glue* που έγινε κατά την ανάθεση των συνθηκών επαφής στον πίνακα επαφής – *Contact Table*.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το άμεσο αποτέλεσμα της τριβής μεταξύ του δίσκου και των τακακιών. Αυτό δεν είναι άλλο από την ανάπτυξη θερμοκρασίας στο σώμα του δίσκου. Τα βήματα που έχουν επιλεγεί να απεικονιστούν είναι το 0, το 1000, το 2000 και το 3000, ενώ η κλίμακα είναι σταθερή για να φανεί καλύτερα η σταδιακή άνοδος της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της πέδησης.

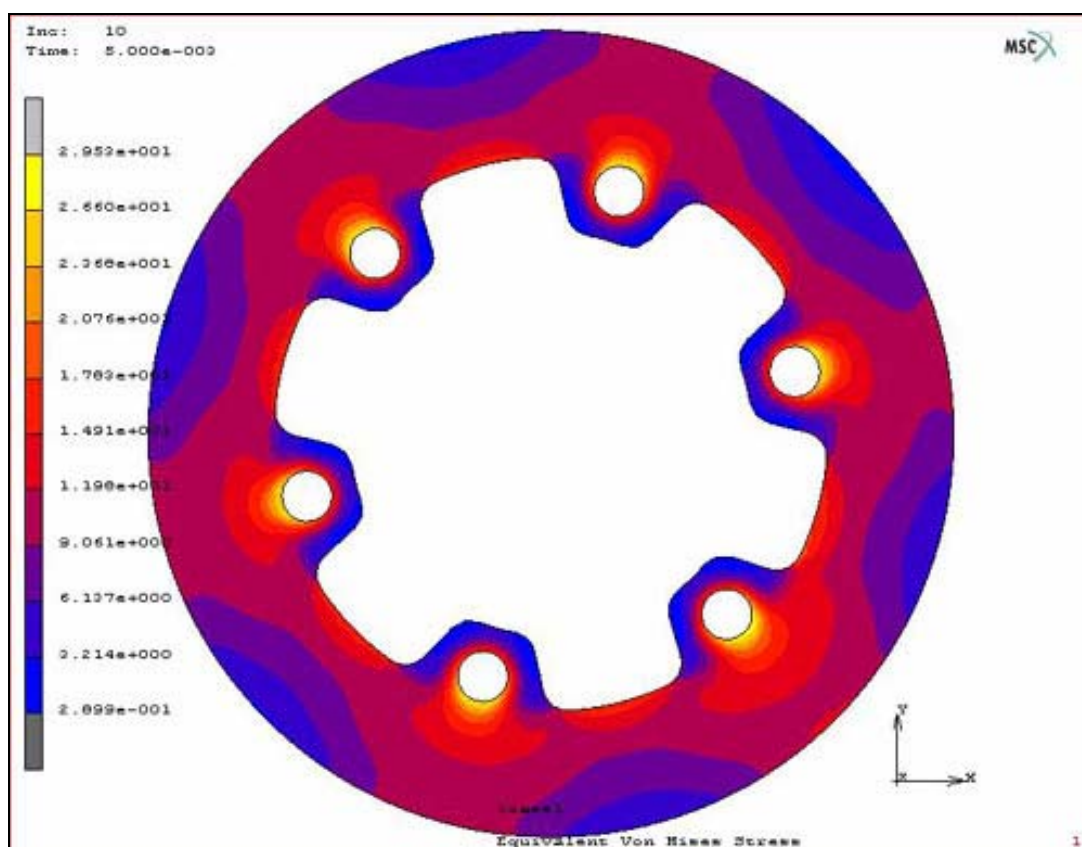


Σχήμα 4.2.6: : Η ανάπτυξη της θερμοκρασίας στο σώμα του δίσκου στα βήματα 0, 1000, 2000 και 3000 με σταθερή κλίμακα.

Παρατηρείται στο παραπάνω σχήμα, εκτός από τη σταδιακή ανάπτυξη της θερμοκρασίας και σταδιακή διάχυσή της πέρα από τη ζώνη επαφής με το τακάκι, ιδιαίτερα προς την περιφέρεια του δίσκου, αλλά και προς την εσωτερική του

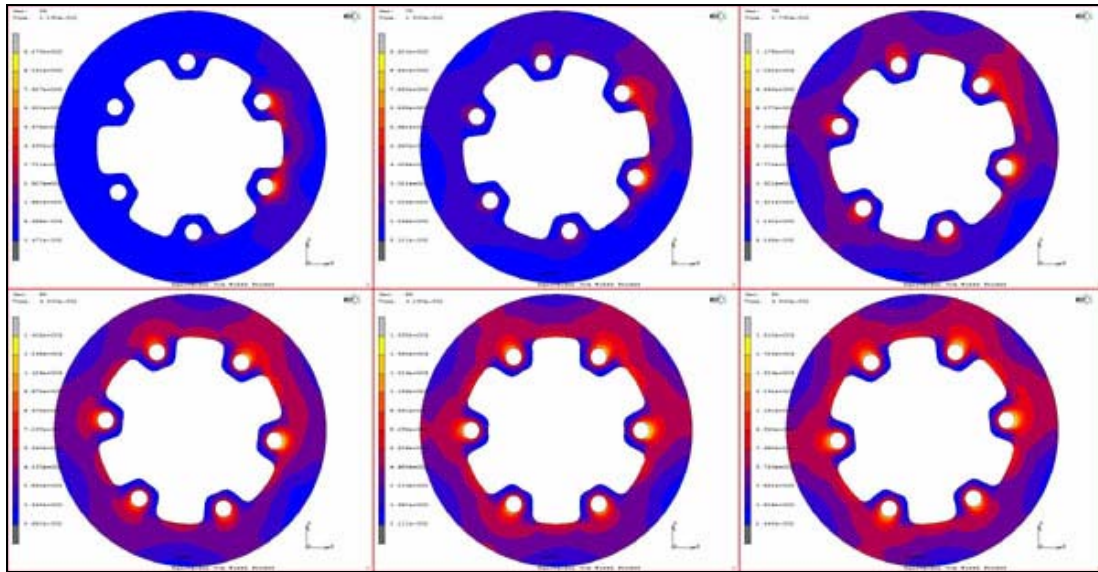
διαμόρφωση, χωρίς ωστόσο να φτάνει σε ολόκληρο το σώμα του δίσκου, στη συγκεκριμένη χρονική διάρκεια της πέδησης.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάπτυξη των ισοδύναμων τάσεων Von Misses στο σώμα του δίσκου. Στο Σχήμα 4.2.7 φαίνονται οι τάσεις για το χρονικό βήμα 10 της ανάλυσης, ενώ στο Σχήμα 4.2.8 παρουσιάζονται έξι διαδοχικές εικόνες από το βήμα 65 έως το βήμα 90.



Σχήμα 4.2.7: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10.

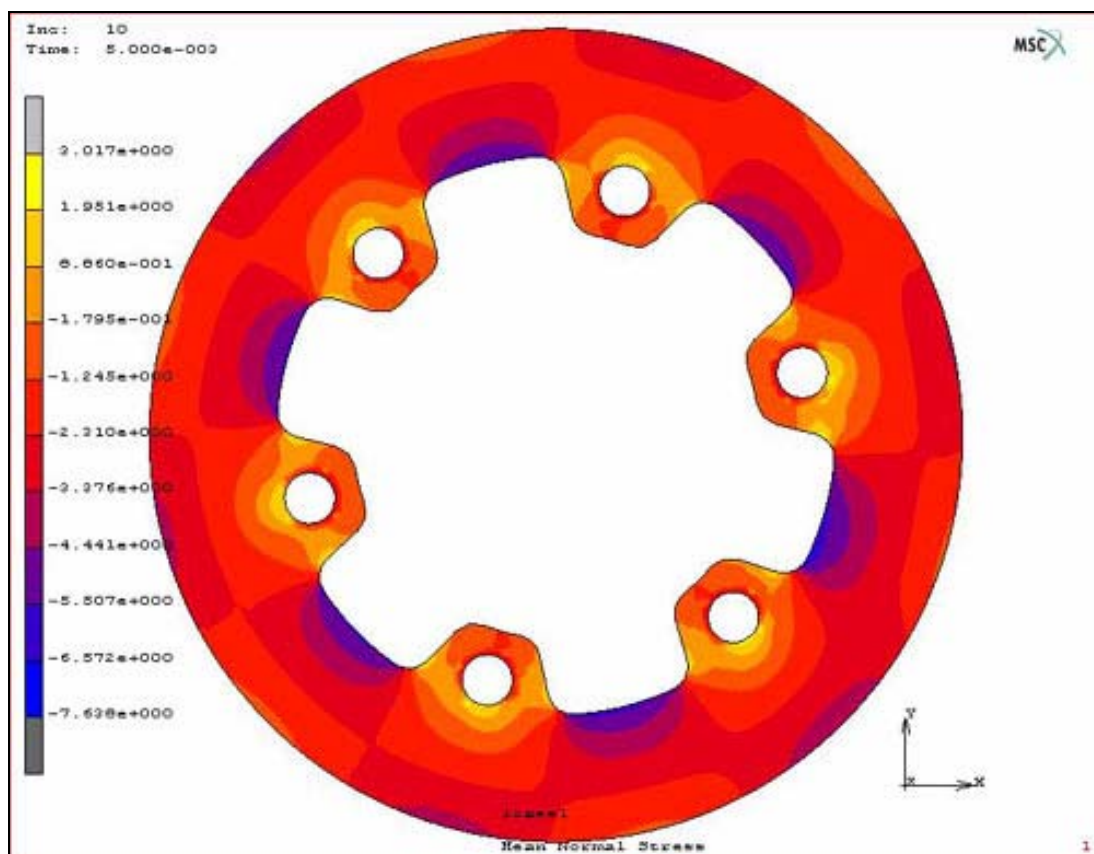
Στο παραπάνω σχήμα παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων στα σημεία έδρασης του δίσκου. Αυτό βέβαια είναι φυσιολογικό λόγω της απόδοσης της ταχύτητας στους ήλους έδρασης. Έτσι από τη μια οι ήλοι τείνουν να περιστρέψουν το δίσκο, ενώ τα τακάκια τείνουν να τον σταματήσουν πιέζοντάς τον. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο επόμενο σχήμα.



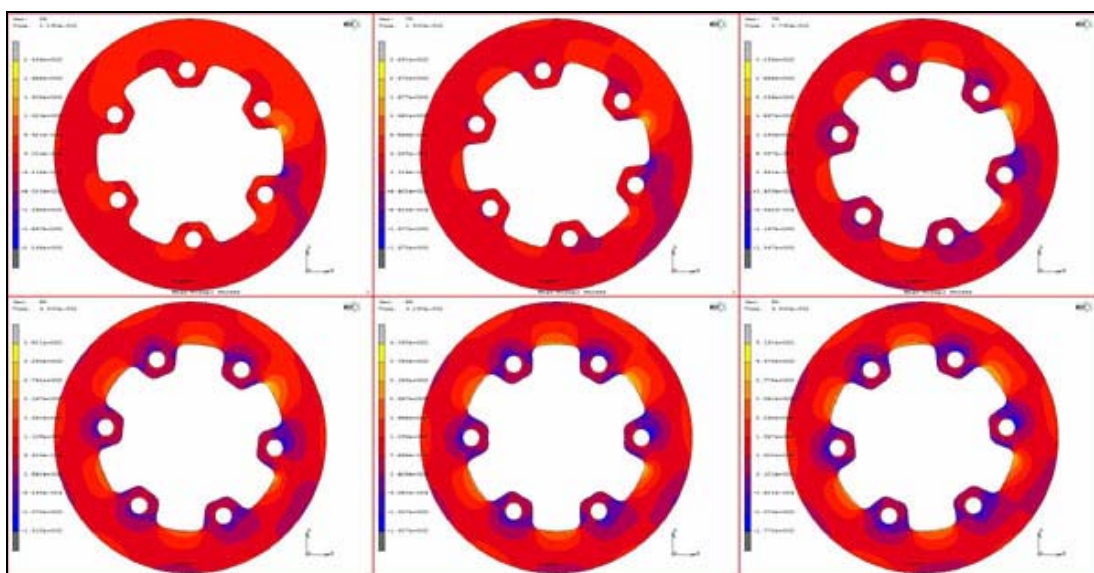
Σχήμα 4.2.8: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται πολύ καλά η πορεία της ανάπτυξης των ισοδύναμων τάσεων Von Misses στο σώμα του δίσκου. Παρατηρείται ότι όπως ελέχθη παραπάνω, οι τάσεις ξεκινούν από την περιοχή της τριβής του δίσκου με τα τακάκια, συγκεντρωμένες στα σημεία έδρασης και στη συνέχεια, σταδιακά αναπτύσσονται για να δώσουν εικόνα παρόμοια με του Σχήματος 4.2.7. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζει μια περιοδικότητα η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι ο δίσκος περιστρέφεται σε σχέση με τα τακάκια, τα οποία μένουν ουσιαστικά αμετακίνητα. Έτσι καθώς η ανάλυση είναι μεταβατική παρουσιάζεται αυτή η εικόνα, που θα γίνει σαφέστερη στην επόμενη παράγραφο της ανάλυσης των αποτελεσμάτων.

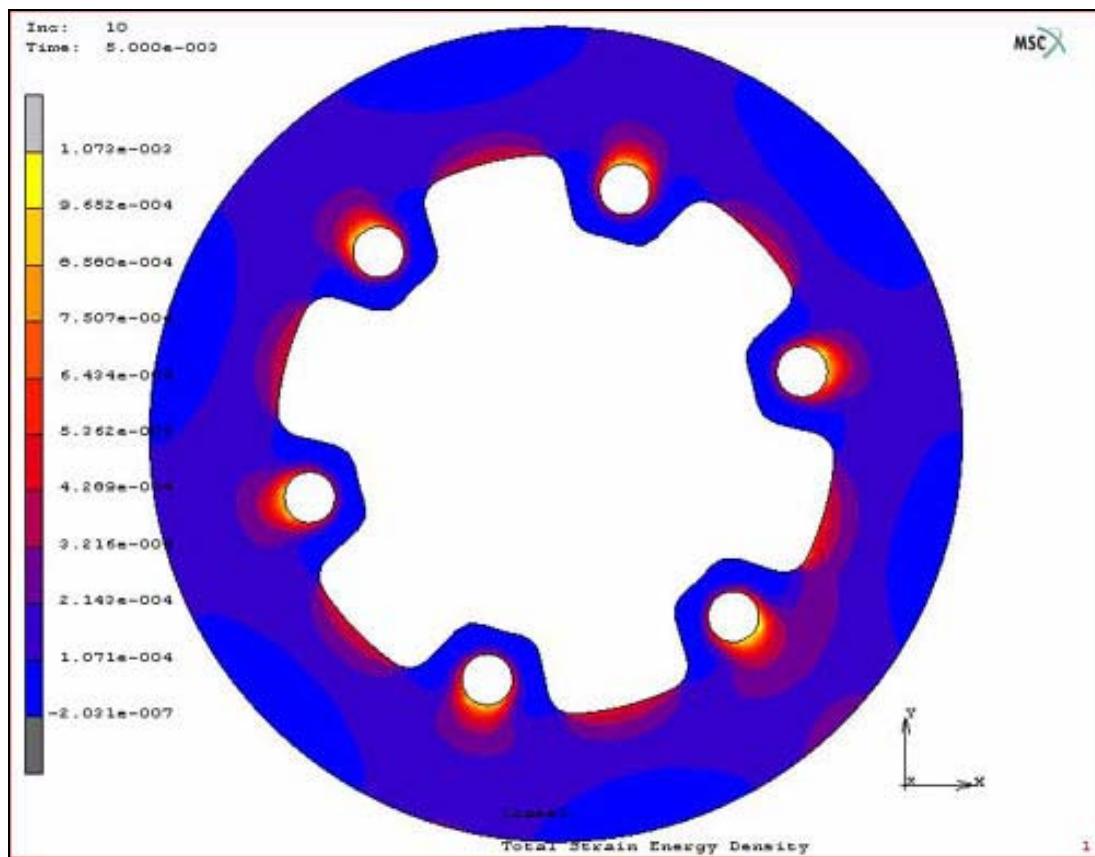
Παρακάτω παρουσιάζονται οι απεικονίσεις των μέσων κάθετων τάσεων και της πυκνότητας της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του δίσκου για τα ίδια χρονικά βήματα της ανάλυσης. Παρατηρείται αντιστοιχία στα αποτελέσματα κι αυτών των απεικονίσεων με τα παραπάνω όπως ήταν αναμενόμενο.



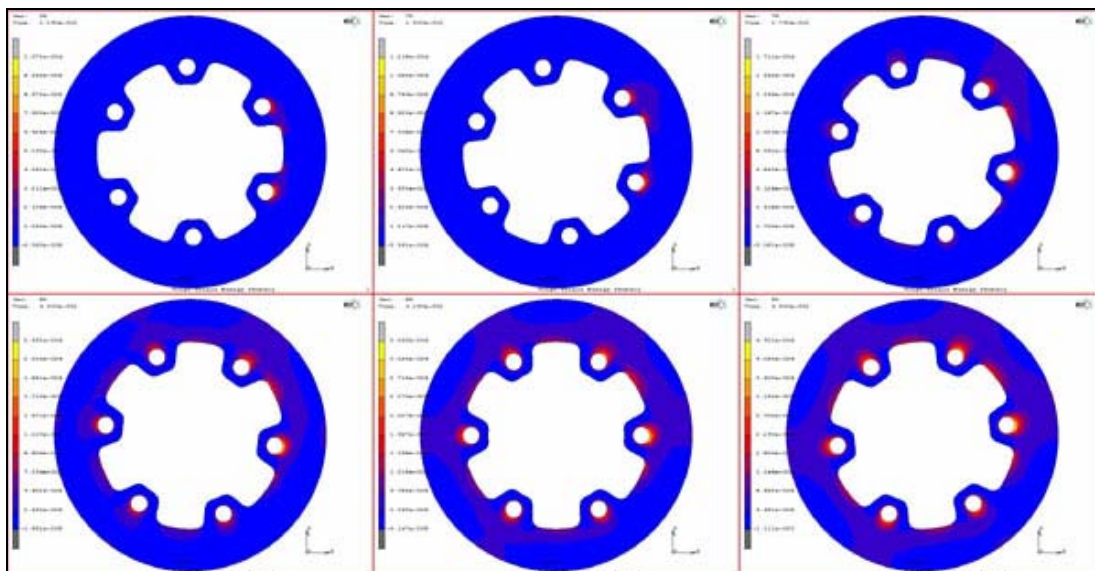
Σχήμα 4.2.9: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10.



Σχήμα 4.2.10: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90.



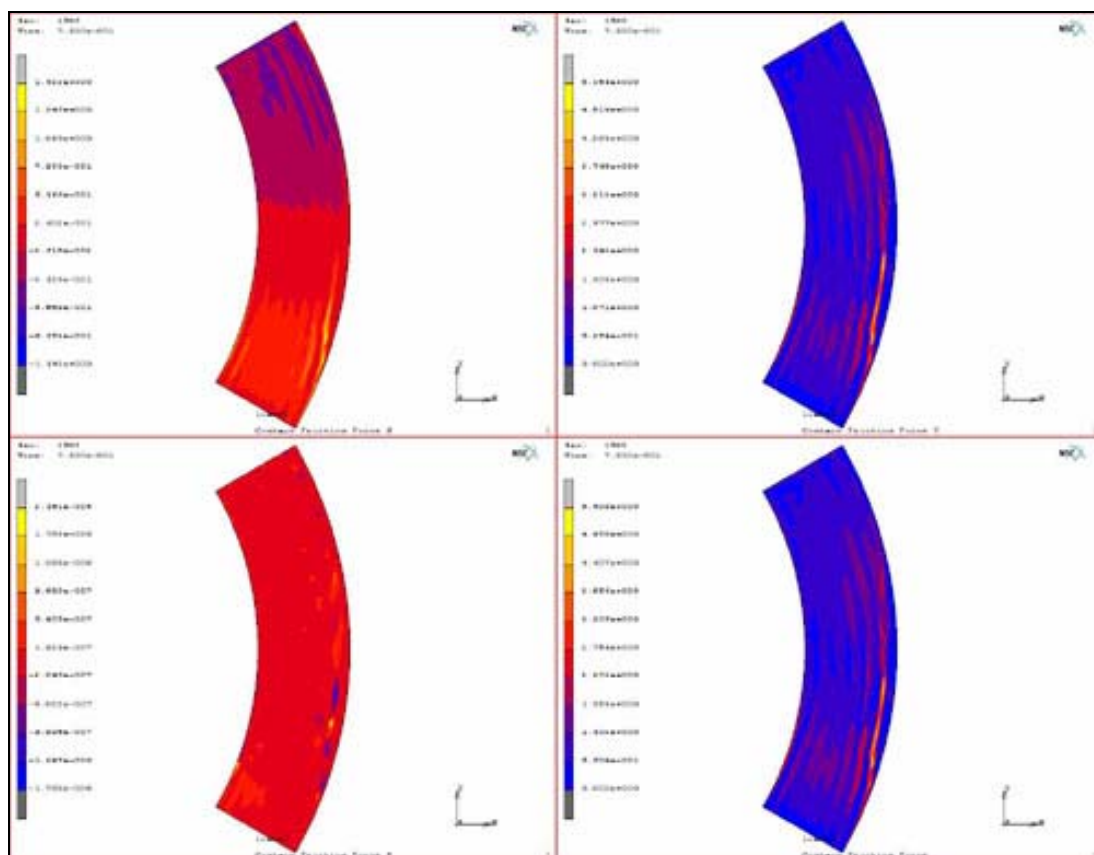
Σχήμα 4.2.11: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του δίσκου για το βήμα 10.



Σχήμα 4.2.12: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του δίσκου για τα βήματα 65 - 90.

4.3 Τα αποτελέσματα για τα τακάκια

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά το πέρας της ανάλυσης από το MSC.MARC 2003, για τα τακάκια. Επειδή τα αποτελέσματα είναι κοινά και για τα δύο τακάκια, παρακάτω θα δοθούν σχηματικά μόνο για το ένα τακάκι. Στο πρώτο σχήμα παρουσιάζονται οι συνιστώσες της δύναμης τριβής, από την επαφή του τακακιού με το δίσκο, καθώς και η συνισταμένη τριβή, για το χρονικό βήμα 1500 της ανάλυσης.

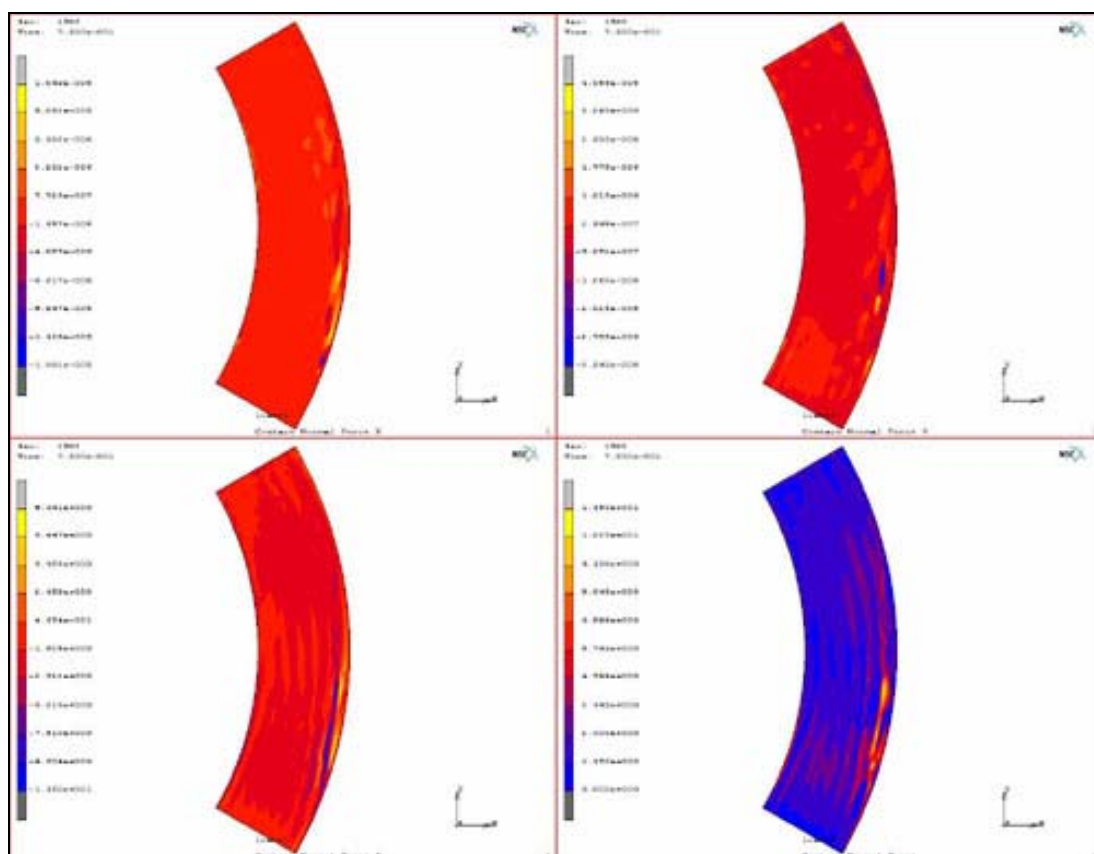


Σχήμα 4.3.1: Οι συνιστώσες της τριβής στους άξονες x, y, z και η συνισταμένη τριβή για το βήμα 1500.

Παρατηρείται στο σχήμα ότι τη μεγαλύτερη συνεισφορά στη συνισταμένη της τριβής, την έχει η συνιστώσα στον άξονα y. Αυτό είναι φυσιολογικό, διότι η γραμμική ταχύτητα του δίσκου είναι σχεδόν παράλληλη με τον άξονα y στην περιοχή της επαφής. Παρατηρείται και κάτι ακόμη όμως. Η δύναμη της τριβής δεν είναι

ομοιόμορφα κατανεμημένη, αλλά παρουσιάζει συγκέντρωση στην περιφέρεια και στο κάτω μέρος του τακακιού.

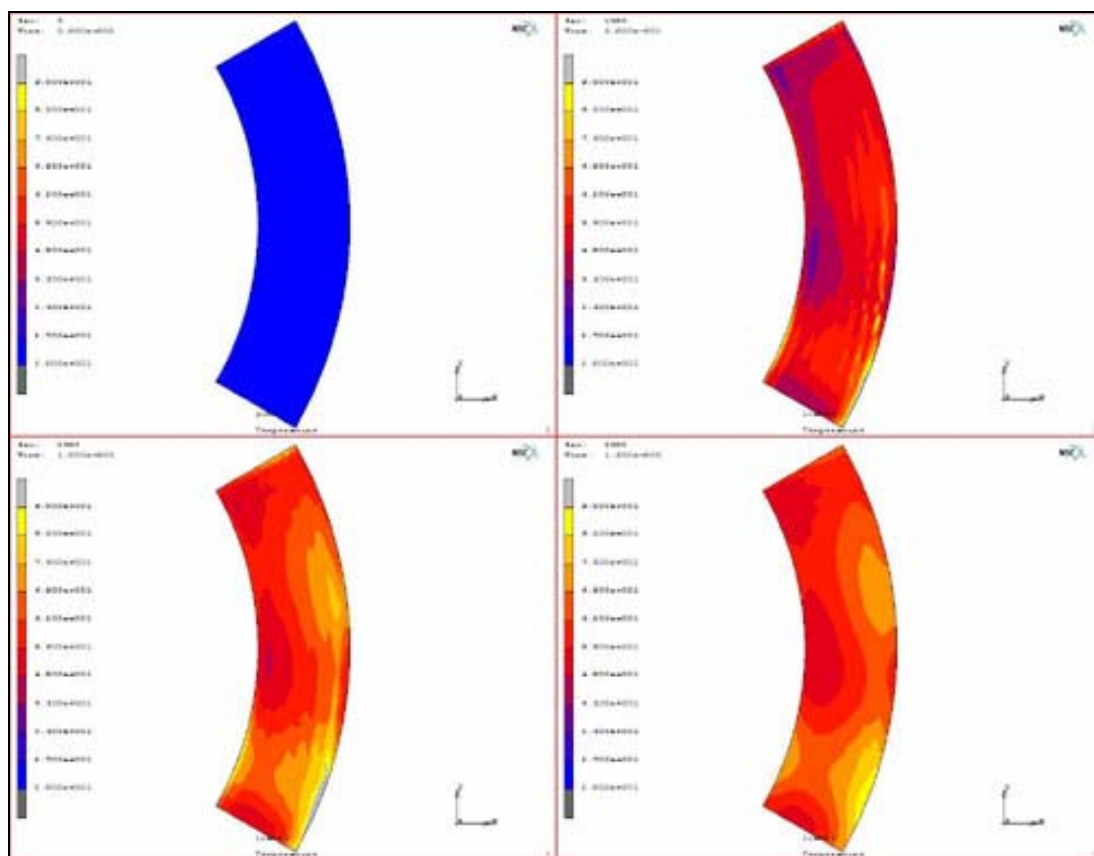
Στο Σχήμα 4.3.2 παρουσιάζονται οι συνιστώσες της κάθετης δύναμης, από την επαφή του τακακιού με το δίσκο, καθώς και η συνισταμένη κάθετη δύναμη, για το χρονικό βήμα 1500 της ανάλυσης.



Σχήμα 4.3.2: Οι συνιστώσες της κάθετης δύναμης επαφής στους άξονες x, y, z και η συνισταμένη κάθετη δύναμη για το βήμα 1500.

Όπως ήταν αναμενόμενο, τη μεγαλύτερη συνεισφορά στη συνισταμένη κάθετη δύναμη, λόγω επαφής, την έχει η συνιστώσα στον άξονα z. Βέβαια και πάλι παρατηρείται ανομοιομορφία στην κατανομή της κάθετης δύναμης, με υψηλότερες συγκεντρώσεις στην περιφέρεια και στο κάτω μέρος του τακακιού.

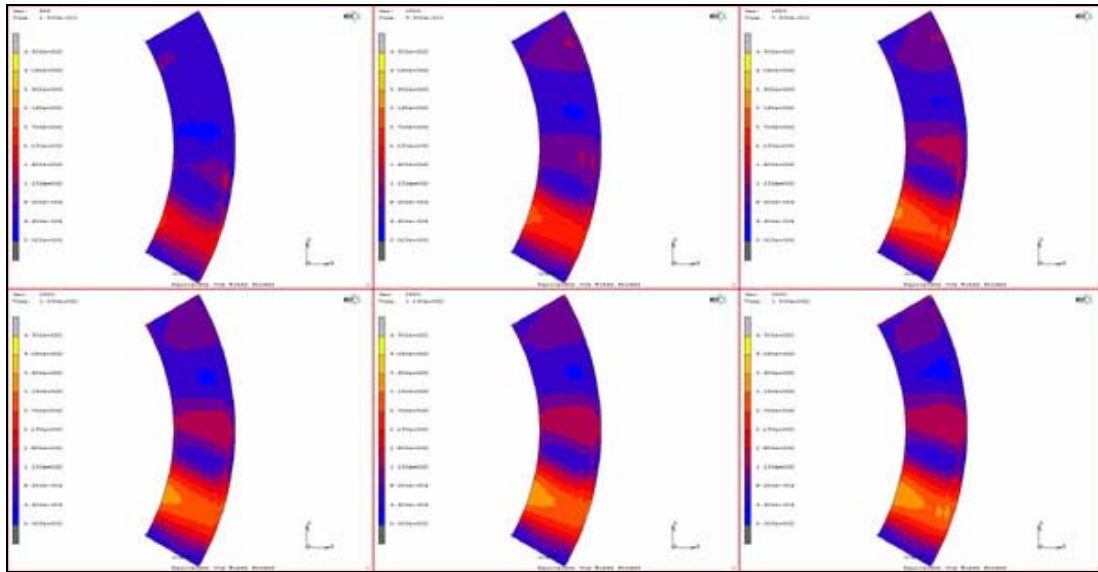
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η άμεση συνέπεια της τριβής μεταξύ δίσκου και τακακιών, δηλαδή η άνοδος της θερμοκρασίας στο σώμα του τακακιού λόγω της θερμότητας που παράγεται εξαιτίας της τριβής. Η απεικόνιση είναι από την πλευρά της επαφής, όπως σε όλα τα αποτελέσματα για το σώμα του τακακιού και τα χρονικά βήματα που παρουσιάζονται είναι τα 0, 1000, 2000 και 3000.



Σχήμα 4.3.3: Η ανάπτυξη της θερμοκρασίας στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 0, 1000, 2000 και 3000.

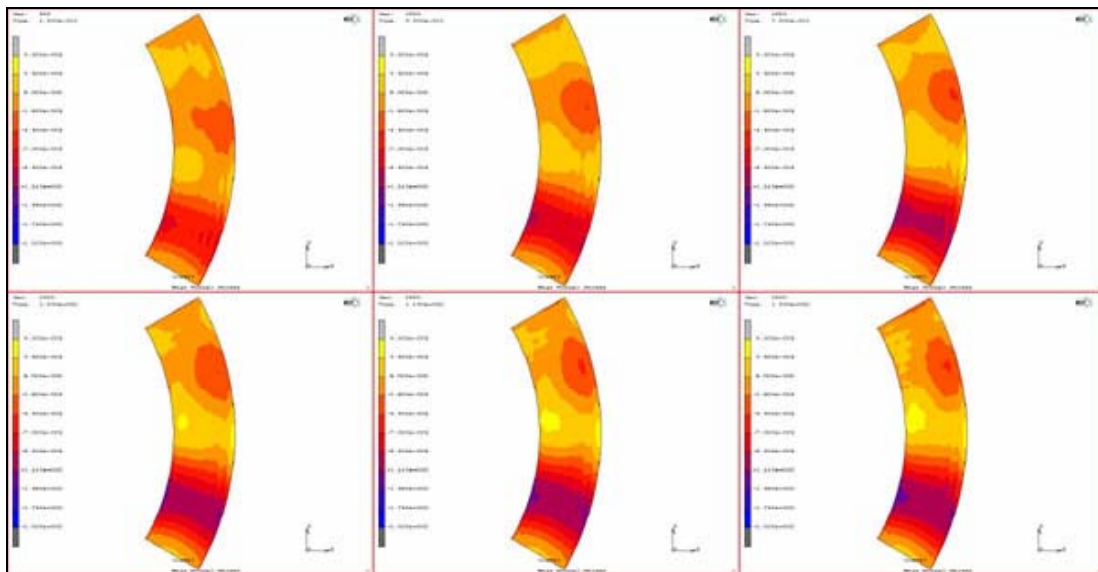
Στο παραπάνω σχήμα η θερμοκρασιακή κλίμακα είναι σταθερή για όλα τα βήματα με ελάχιστη τιμή την αρχική θερμοκρασία και μέγιστη, τη μέγιστη θερμοκρασία του τελευταίου βήματος. Παρατηρείται καθαρά στο βήμα 2000, ότι στο κάτω εξωτερικό μέρος του τακακιού η θερμοκρασία έχει βγει εκτός κλίμακας προς τα πάνω. Αυτό σημαίνει ότι σε εκείνη την περιοχή αναπτύσσεται μεγαλύτερη θερμοκρασία και καθώς η ταχύτητα του δίσκου μειώνεται και μαζί της μειώνεται και η τριβή, σιγά – σιγά το τακάκι κρυώνει.

Στο Σχήμα 4.3.4 απεικονίζονται οι ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο τακάκι για τα χρονικά βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000 με σταθερή κλίμακα, για να φανεί καλύτερα το γεγονός ότι οι τάσεις αυτές οφείλονται στη θερμική καταπόνηση του τακακιού. Το γεγονός αυτό φαίνεται από την αντιστοιχία του παρακάτω σχήματος με το παραπάνω Σχήμα 4.3.3.

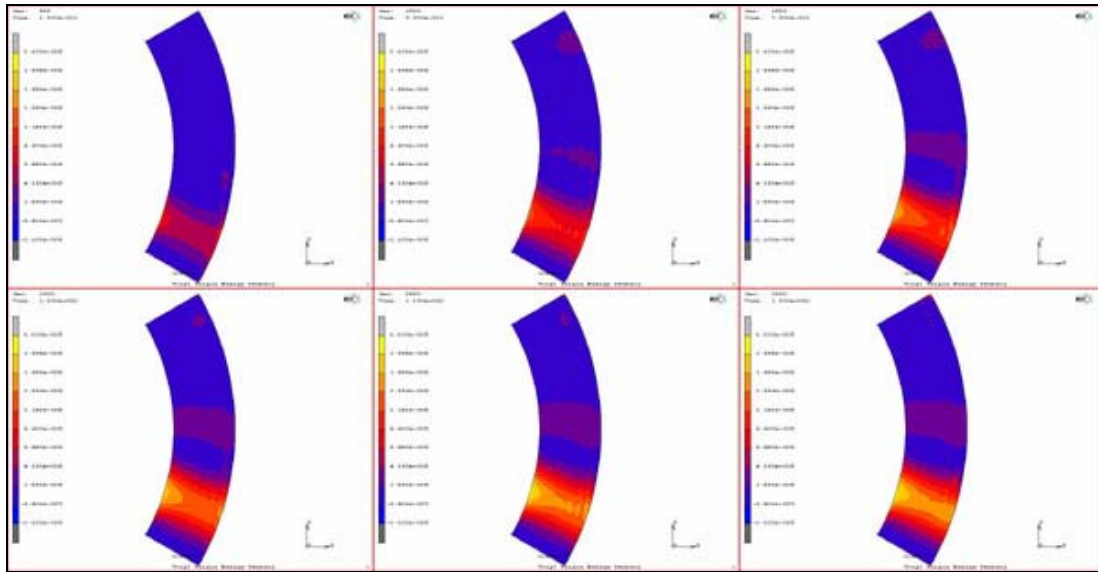


Σχήμα 4.3.4: Ισοδύναμες τάσεις Von Misses στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.

Όπως φαίνεται εύκολα σε αυτό το σχήμα, οι ισοδύναμες τάσεις παρουσιάζουν εικόνα παρόμοια με εκείνη της θερμοκρασίας. Εκτός αυτού είναι προφανές ότι ακολουθούν αύξουσα πορεία στη διάρκεια της πέδησης καθώς αυξάνεται το θερμικό φορτίο. Παρόμοια εικόνα παρουσιάζουν τόσο οι μέσες κάθετες τάσεις στο τακάκι, όσο και η πυκνότητα της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης για το σώμα του τακακιού όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.5 και στο Σχήμα 4.3.6 αντίστοιχα.

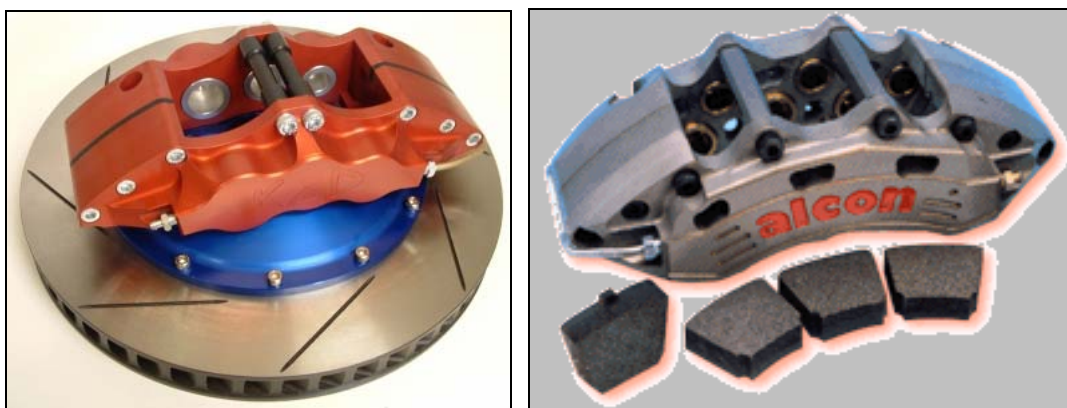


Σχήμα 4.3.5: Μέσες κάθετες τάσεις στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.



Σχήμα 4.3.6: Πυκνότητα συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης στο σώμα του τακακιού για τα βήματα 500, 1000, 1500, 2000, 2500 και 3000.

Όλα τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα τακάκια από την ανάλυση, δείχνουν ότι αν και το φορτίο της πίεσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω στα τακάκια, αυτά παρουσιάζουν ανομοιόμορφη καταπόνηση. Αυτό παρατηρείται και στην πραγματικότητα, σε πολλές περιπτώσεις όπου η φθορά των τακακιών είναι ανομοιόμορφη. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το φαινόμενο, πολλοί κατασκευαστές συστημάτων πέδησης χρησιμοποιούν ανισομεγέθη έμβολα ή ξεχωριστά τακάκια μικρού μήκους, για κάθε έμβολο της δαγκάνας (βλ. Σχήμα 4.3.7).



Σχήμα 4.3.7: Τυπικά παραδείγματα τρόπων αποφυγής της ανομοιόμορφης φθοράς των τακακιών στα συστήματα πέδησης με πολυπίστονες δαγκάνες.

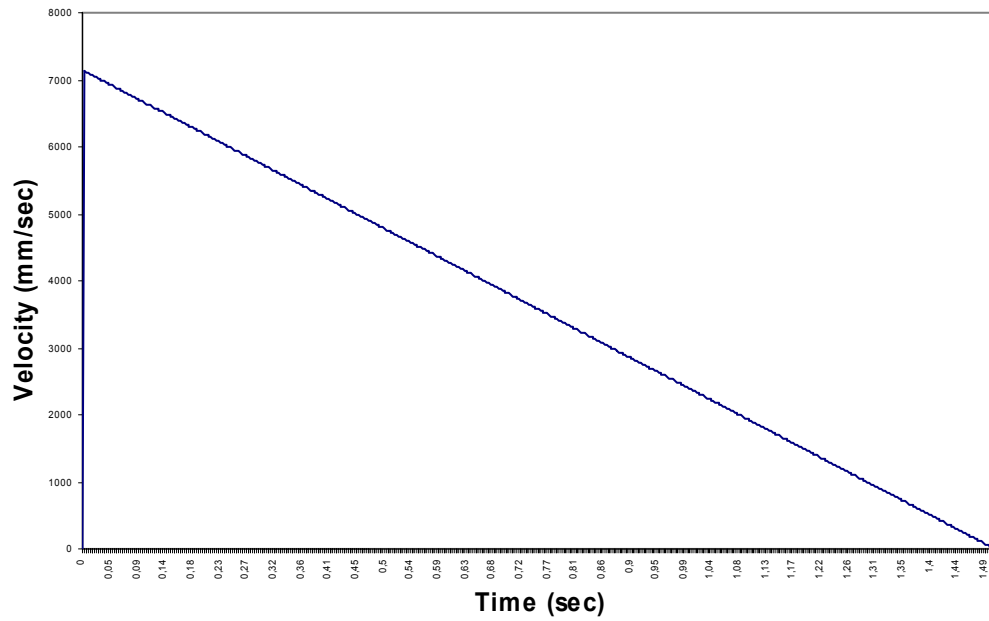
4.4 Επεξεργασία των αποτελεσμάτων

Στην συγκεκριμένη παράγραφο θα παρουσιαστούν κάποια γραφήματα τα οποία θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση και ερμηνεία των όσων παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Αυτά τα γραφήματα προέκυψαν από τα δεδομένα της ανάλυσης με τη βοήθεια του λογισμικού προγράμματος Excel της Microsoft. Τα δεδομένα αυτά αφορούν συγκεκριμένους κόμβους του δίσκου και του ενός τακακιού για όλη τη διάρκεια της πέδησης (βλ. Σχήμα 4.4.1).



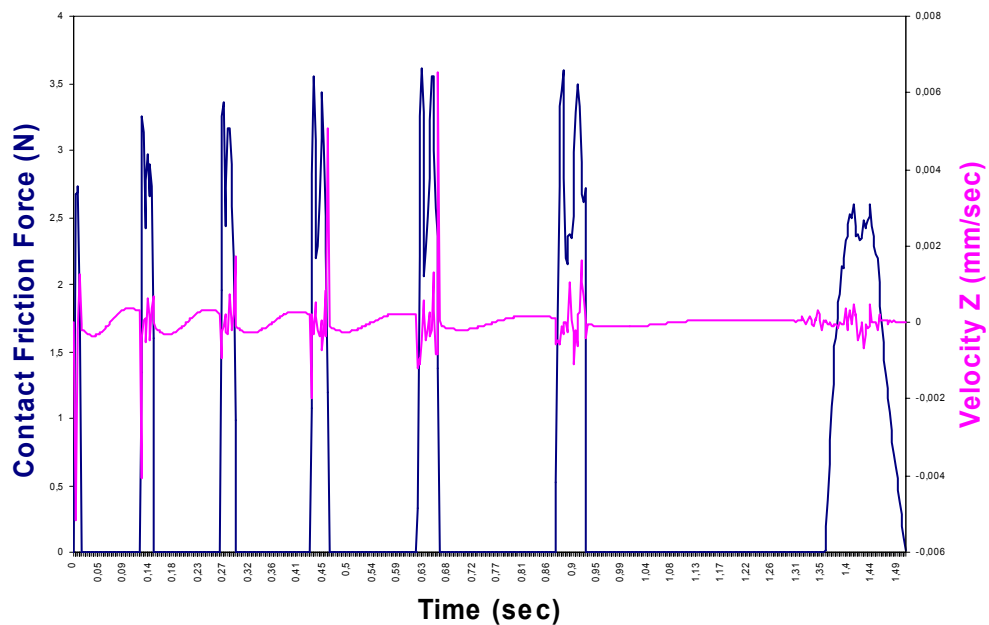
Σχήμα 4.4.1: Οι κόμβοι τους οποίους αφορούν τα διαγράμματα της ανάλυσης των αποτελεσμάτων.

Αρχικά, όσον αφορά στον δίσκο, παρουσιάζεται το διάγραμμα της γραμμικής του ταχύτητας. Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται καθαρά η γραμμικότητα της επιβράδυνσης, η οποία επελέγη για λόγους απλότητας. Ο κόμβος στον οποίο αναφέρεται το διάγραμμα είναι ο 7582, ο οποίος όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, βρίσκεται μέσα στη ζώνη επαφής του δίσκου με το τακάκι.



Σχήμα 4.4.2: Η γραμμική ταχύτητα του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

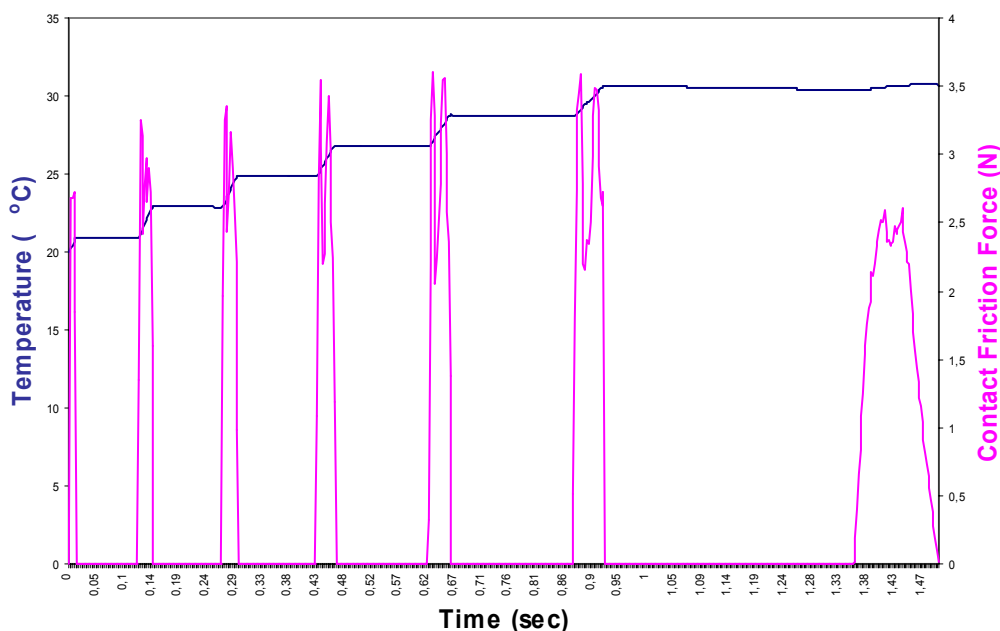
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ταχύτητα του ίδιου κόμβου στον z άξονα σε συνδυασμό με την τριβή που αναπτύσσεται σε αυτόν τον κόμβο.



Σχήμα 4.4.3: Συνδυασμένο διάγραμμα της τριβής και της ταχύτητας στον άξονα z του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται καθαρά ότι αναπτύσσονται ταχύτητες στον z άξονα ταυτόχρονα με την τριβή. Η εικόνα αυτή είναι απολύτως φυσιολογική, καθώς απεικονίζει τις επαφές του συγκεκριμένου κόμβου με το τακάκι καθώς ο δίσκος περιστρέφεται. Έτσι σε κάθε περιστροφή του δίσκου ο κόμβος αυτός έρχεται σε επαφή με το τακάκι αναπτύσσοντας τριβή και παρουσιάζοντας μικρές μετατοπίσεις στο κάθετο επίπεδο της περιστροφής.

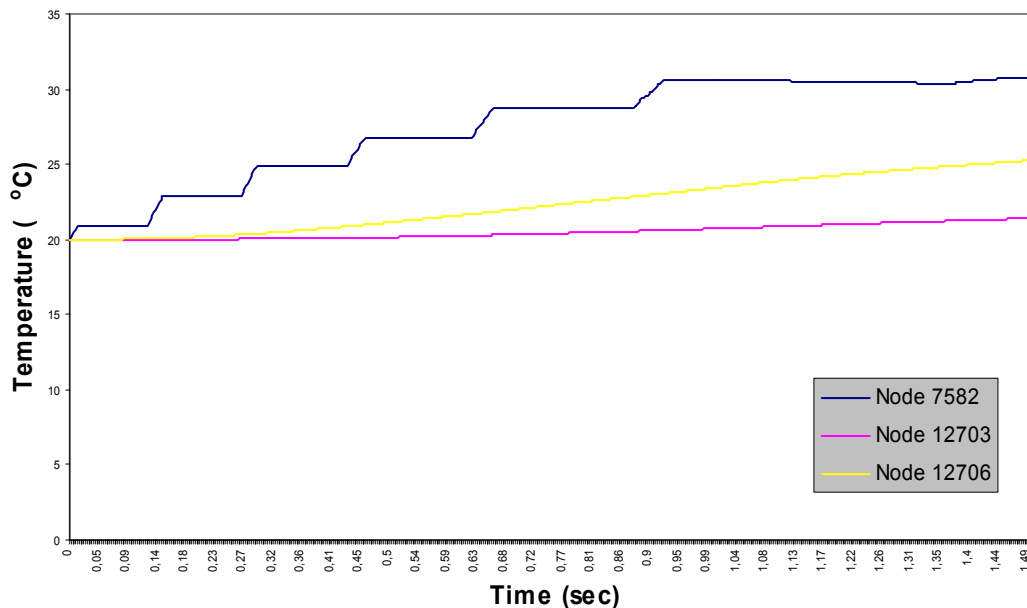
Αντίστοιχη είναι και η εικόνα στο Σχήμα 4.4.4 το οποίο απεικονίζει την θερμοκρασία του ίδιου κόμβου σε συνδυασμό με την τριβή.



Σχήμα 4.4.4: Συνδυασμένο διάγραμμα της τριβής και της θερμοκρασίας του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Και σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται καθαρά ότι η άνοδος της θερμοκρασίας στον κόμβο 7582, ο οποίος βρίσκεται στη ζώνη επαφής, γίνεται ταυτόχρονα με τις διελεύσεις του από το τακάκι, ενώ στα μεσοδιαστήματα η θερμοκρασία του παραμένει σχετικά σταθερή, εκτός από τα δύο τελευταία που είναι μεγαλύτερης διάρκειας και φαίνεται καθαρά ότι προλαβαίνει να κρυώσει λίγο.

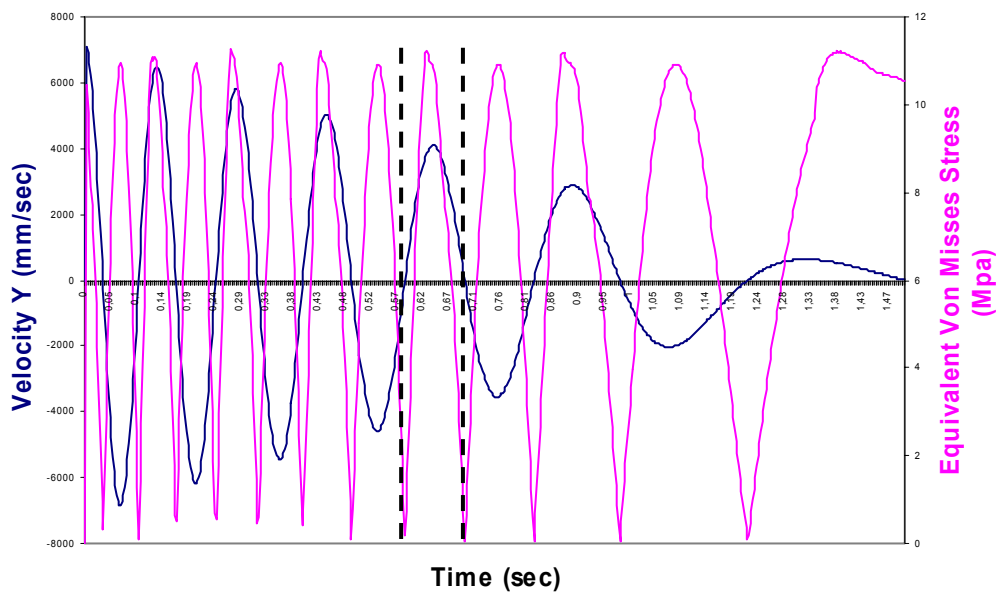
Στη συνέχεια δίνεται ένα συγκριτικό διάγραμμα των θερμοκρασιών των τριών επιλεγμένων κόμβων του δίσκου.



Σχήμα 4.4.5: Συγκριτικό διάγραμμα της θερμοκρασίας των κόμβων 7582, 12703 και 12706 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Στο Σχήμα 4.4.5 παρατηρείται ότι όσο πιο μακριά από τη ζώνη επαφής βρίσκεται ένας κόμβος, τόσο περισσότερο αργεί να ανέβει η θερμοκρασία του και τόσο λιγότερο ανεβαίνει. Άλλο ένα ενδιαφέρον σημείο αυτού του διαγράμματος είναι και το ότι η θερμοκρασία των δύο κόμβων, που βρίσκονται εκτός της ζώνης επαφής, ανεβαίνει ομαλά, εν αντιθέσει με τον κόμβο 7582 του οποίου το διάγραμμα παρουσιάζει εικόνα σκάλας λόγω των διελεύσεων από το τακάκι.

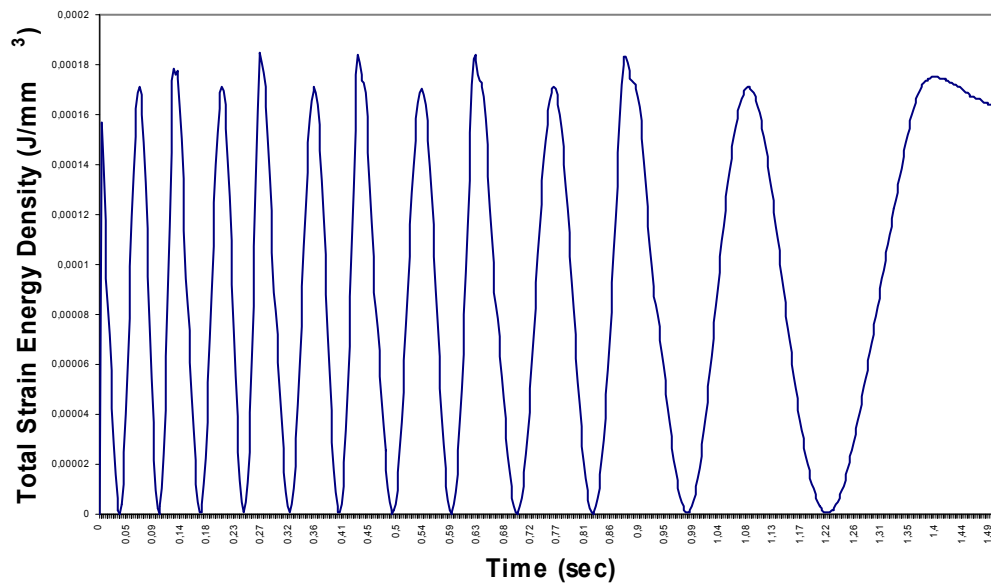
Στη συνέχεια παρουσιάζεται το διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων Von Misses για τον κόμβο 7582 σε συνδυασμό με τη συνιστώσα της ταχύτητάς του στον y άξονα για να φανεί καλύτερα η περιοδικότητα του φαινομένου, η οποία αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4.6 οι ισοδύναμες τάσεις αναπτύσσονται και σχεδόν μηδενίζονται κάθε μισή στροφή του δίσκου. Αυτό συμβαίνει λόγω της περιστροφής του, της σταθερής θέσης των τακακιών και της μεταβατικότητας της ανάλυσης.



Σχήμα 4.4.6: Συνδυασμένο διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων Von Mises και της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα y του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

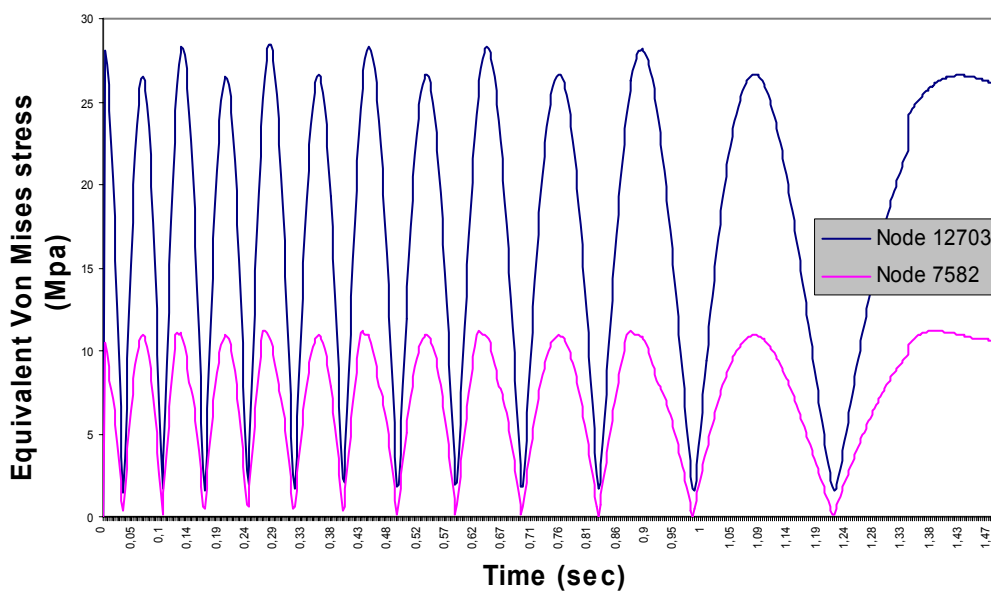
Το μέτωπο των τάσεων ξεκινά από την επαπτόμενη – κάθε φορά – με το τακάκι περιοχή. Επειδή, όμως, ο δίσκος περιστρέφεται και το τακάκι βρίσκεται στην ίδια θέση συνεχώς, οι τάσεις αλληλοεξουδετερώνονται κάθε μισή στροφή του δίσκου, παρουσιάζοντας αυτή την εικόνα περιοδικότητας.

Όπως είναι φυσικό, αντίστοιχη είναι και η εικόνα για την πυκνότητα της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης.



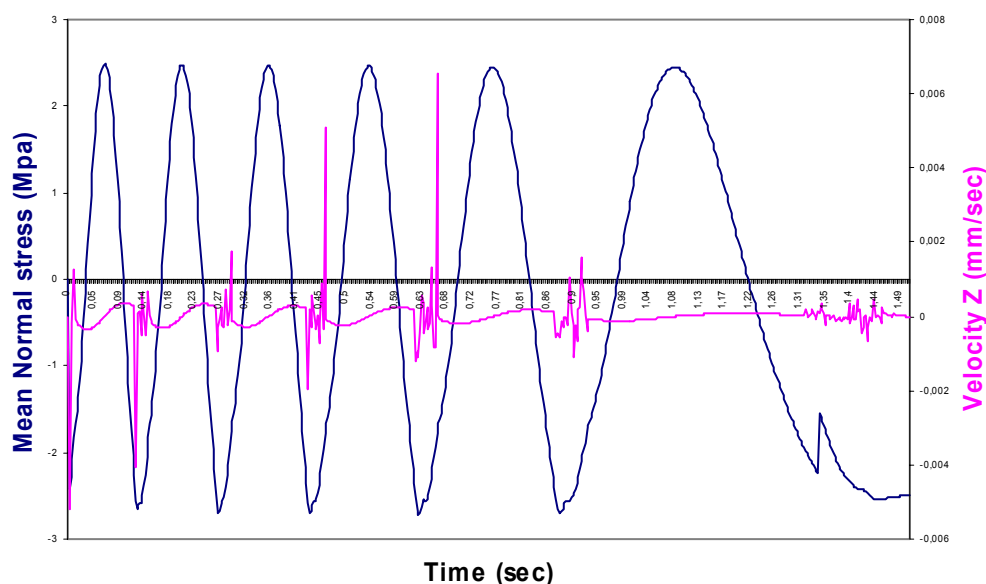
Σχήμα 4.4.8: Διάγραμμα της πυκνότητας της συνολικής ενέργειας παραμόρφωσης του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Το επόμενο διάγραμμα παρουσιάζει καθαρά τη συγκέντρωση των τάσεων κοντά στους ήλους έδρασης του δίσκου, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3.



Σχήμα 4.4.9: Συγκριτικό διάγραμμα των ισοδύναμων τάσεων Von Mises των κόμβων 7582 και 12703 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

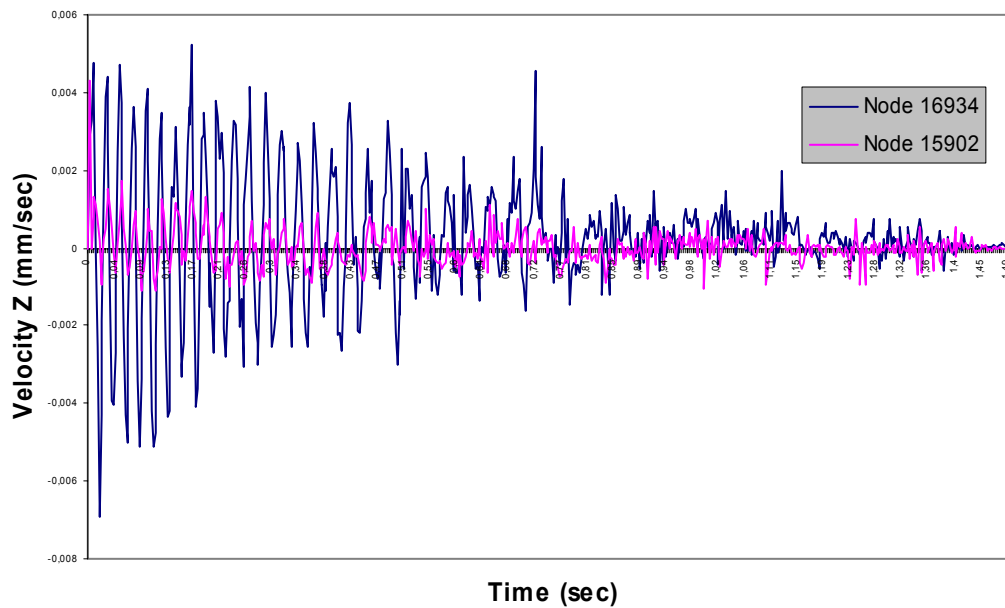
Οι μέσες κάθετες τάσεις ακολουθούν τα περάσματα του δίσκου από τα τακάκια όπως ήταν αναμενόμενο. Στο Σχήμα 4.4.10 φαίνεται η πορεία των μέσων κάθετων τάσεων σε σχέση με τη συνιστώσα της ταχύτητας του δίσκου στον άξονα z.



Σχήμα 4.4.10: Συνδυασμένο διάγραμμα της μέσης κάθετης τάσης και της ταχύτητας στον άξονα z του κόμβου 7582 του δίσκου, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

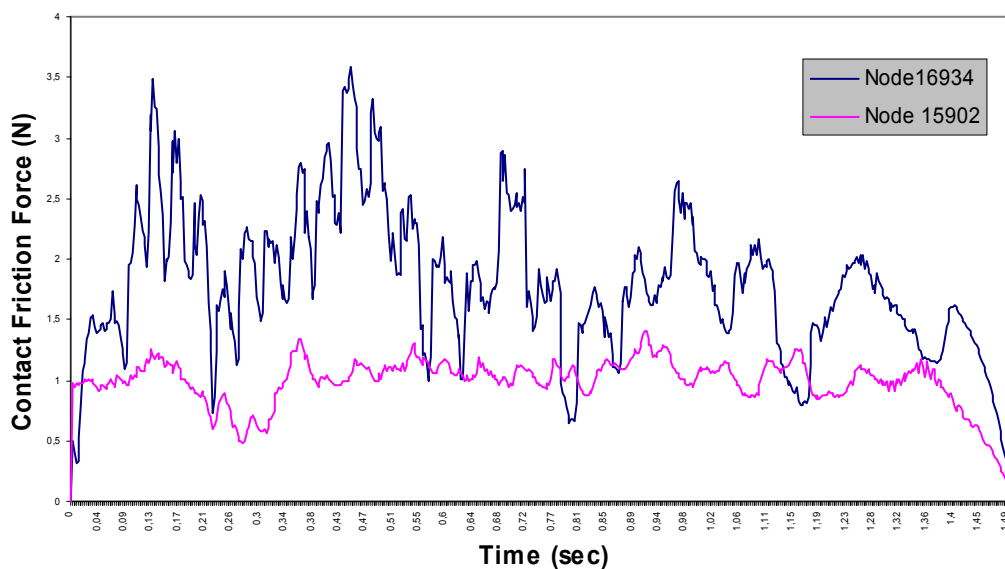
Στη συνέχεια παρουσιάζονται αντίστοιχα διαγράμματα για τους επιλεγμένους κόμβους του ενός από τα δύο τακάκια. Τα διαγράμματα αυτά είναι συγκριτικά και σκοπό έχουν να αναδείξουν την ανομοιομορφία της καταπόνησής τους η οποία επισημάνθηκε στην παράγραφο 4.3.

Αρχικά παρουσιάζεται το διάγραμμα της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα z των δύο κόμβων του τακακιού. Στο Σχήμα 4.4.11 φαίνεται καθαρά η διαφορά στο μέγεθος της ταχύτητας και κατά συνέπεια των μετατοπίσεων ανάμεσα στους δύο κόμβους.



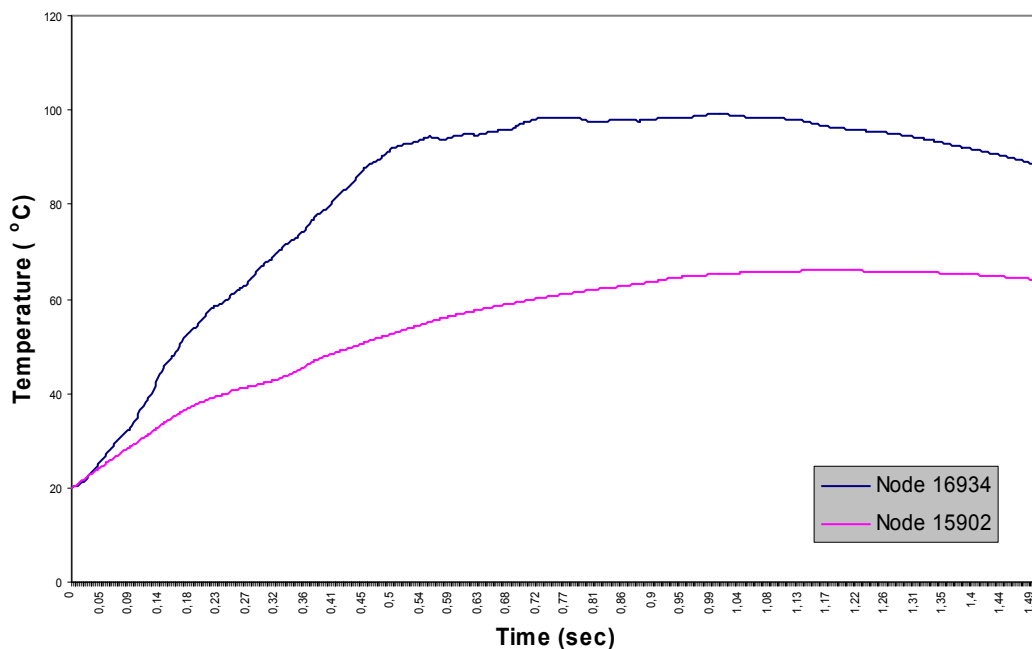
Σχήμα 4.4.11: Συγκριτικό διάγραμμα της συνιστώσας της ταχύτητας στον άξονα z για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα της δύναμης τριβής λόγω της επαφής του τακακιού με το δίσκο, για τους δύο κόμβους. Παρατηρείται ότι η δύναμη που αναπτύσσεται στον κόμβο 15902 είναι περίπου η μισή από τη δύναμη τριβής που αναπτύσσεται στον κόμβο 16934.



Σχήμα 4.4.12: Συγκριτικό διάγραμμα της τριβής λόγω επαφής για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

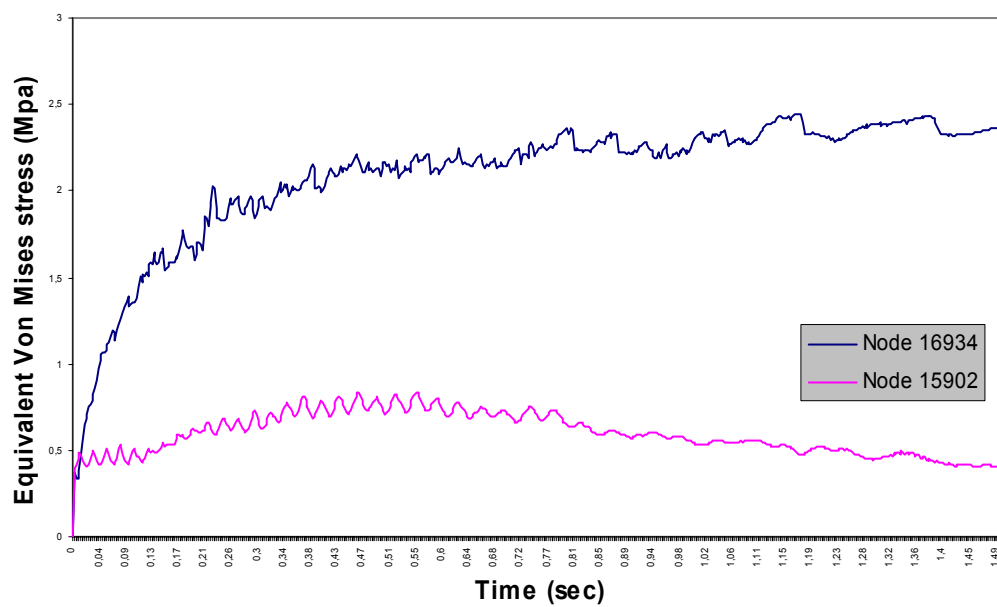
Στη συνέχεια παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα της θερμοκρασίας που αναπτύσσεται στους δύο κόμβους του τακακιού.



Σχήμα 4.4.13: Συγκριτικό διάγραμμα της θερμοκρασίας για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Όπως ήταν αναμενόμενο, η εικόνα είναι αντίστοιχη με εκείνη της τριβής. Η θερμοκρασία στον κόμβο 15902 είναι περίπου η μισή από αυτή στον κόμβο 16934 κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Τέλος παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα της ισοδύναμης τάσης Von Misses για τους δύο αυτούς κόμβους. Όπως ήταν αναμενόμενο η εικόνα που παρουσιάζει η ισοδύναμη τάση είναι παρόμοια με αυτή των προηγούμενων αποτελεσμάτων.



Σχήμα 4.4.14: Συγκριτικό διάγραμμα της ισοδύναμης τάσης Von Mises για τους κόμβους 16934 και 15902 του ενός τακακιού, κατά τη διάρκεια της πέδησης.

Γενικά συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η μελέτη της θερμό – μηχανικής συμπεριφοράς ενός τυπικού συστήματος πέδησης μιας μοτοσυκλέτας, αποτελούμενου από έναν κεραμικό δίσκο ινοπλισμένο με ίνες άνθρακα και δύο τακάκια από αντίστοιχο υλικό. Γενικά τέτοιου είδους μελέτες είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν ακολουθώντας συμβατικές πειραματικές μεθόδους (με χρήση ειδικών δυναμομέτρων) ή με τη βοήθεια ειδικών υπολογιστικών προγραμμάτων. Η συγκεκριμένη ανάλυση πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος MSC.MARC 2003. Η εργασία αφορούσε στην ανάλυση αυτού του συστήματος για μία πέδηση από αρχική ταχύτητα 50 km/h περίπου μέχρι να φτάσει σε στάση το σύστημα. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν κρίνονται ιδιαίτερα ικανοποιητικά μιας και αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα σε μεγάλο βαθμό.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ήταν η εικόνα των ισοδύναμων τάσεων και η κατανομή τους, η οποία θα μπορούσε να αποτελέσει αφετηρία για μια ανάλυση βελτιστοποίησης του σχεδιασμού του δίσκου, όσον αφορά τα σημεία έδρασής του. Ακόμη, ιδιαίτερα ενδιαφέρον ήταν το γεγονός της ανομοιόμορφης καταπόνησης των τακακίων. Θα μπορούσε να γίνει μια μελέτη η οποία θα περιελάμβανε και τα έμβολα της δαγκάνας, η οποία θα είχε σκοπό την εύρεση του βέλτιστου μεγέθους αυτών για να είναι ομοιόμορφη τριβή σε όλη την επιφάνεια του τακακιού. Επιπροσθέτως ξεκινώντας από την παρούσα εργασία και με τη χρήση ισχυρότερων ηλεκτρονικών υπολογιστών, θα ήταν ενδιαφέρον να γίνουν αντίστοιχες μελέτες με μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα που θα μπορούσαν να προσεγγίσουν τα όρια αστοχίας των συγκεκριμένων ή άλλων υλικών κατασκευής. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζουν, ιδιαίτερα για τους εμπλεκόμενους στους αγώνες ταχύτητας, μελέτες των περιφερειακών μερών ενός συστήματος πέδησης και ιδιαίτερα των υδραυλικών υγρών τα οποία έχουν μικρότερη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας (Maximum Operational Temperature) από τα συνθετικά υλικά τριβής, σαν αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Βιβλιογραφία

1. Στεφανουδάκης, 2004. Μελέτη μηχανικής συμπεριφοράς κράνους μοτοσυκλετιστή σε σύγκρουση, Πολυτεχνείο Κρήτης
2. Blanco C. Bermejo J., Marsh H., Menendez R., 1997, Chemical and physical properties of carbon as related to brake performance, *Wear* 213 (1997) 1-12.
3. Chargin M. L., Dunne L. W., Herting D. N., 1997, Non linear dynamics of brake squeal, NASA Research Center, *Finite Elements In Analysis And Design* 28 (1997) 69 – 82.
4. Choi J. H. and Lee I., 2003, Finite element analysis of transient thermoelastic behaviors in disk brakes, Korea Advanced Institute of Science and Technology.
5. Gao C.H. and Lin X. Z., 2002, Transient temperature field analysis of a brake in a non-axisymmetric three-dimensional model, Fuzhuo University, *Journal of Materials Processing Technology* 129 (2002) 513–517
6. Hohmann C. Schiffner K., Oerter K., Reese H., 1999, Contact analysis for drum brakes and disk brakes using ADINA, University of Siegen, *Computers and Structures* 72 (1999) 185±198.
7. Mackin T. J., Noe S. C., Ball K. J., Bedell B. C., 2002, Thermal cracking in disk brakes, University of Illinois, *Engineering Failure Analysis* 9 (2002) 63 – 76.
8. MARC Analysis Research Corporation, 1998, MARC® Volume A: Theory and User Information, Version 7.3.
9. Panier S., Dufrénoy P., Weichert D., 2004, An experimental investigation of hot spots in railway disc brakes, Polytechnique Universitaire de Lille, *Wear* 256 (2004) 764–773.
10. Rodriguez J, Martin A. and Llorca J., 2000, Modeling the effect of temperature on the wear resistance of metals reinforced with ceramic particles, Polytechnic University of Madrid, *Acta mater.* 48 (2000) 993±1003.
11. SGL BRAKES GmbH, 2002, Preliminary data sheet SIGRASIC 6010 GNJ.
12. SGL BRAKES GmbH, 2002, Vortrag_Standard_Rev04_280103_englisch.

13. Strang G., 1988, Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
14. Yamabe T., Takagia M., Matsuia T., Kimurab T., Sasakib M., 2002, Development of disc brake rotors for trucks with high thermal fatigue strength, Mitsubishi Fuso Truck & Bus Company, JSAE Review 23 (2002) 105–112.
15. Yevtushenko A. and Ivanyk E., 1995, Determination of heat and thermal distortion in braking systems, Lviv State University, Wear 185 (1995) 159-165.

Διαδικτυακοί τόποι:

1. www.google.com/images
2. www.moto-live.com