

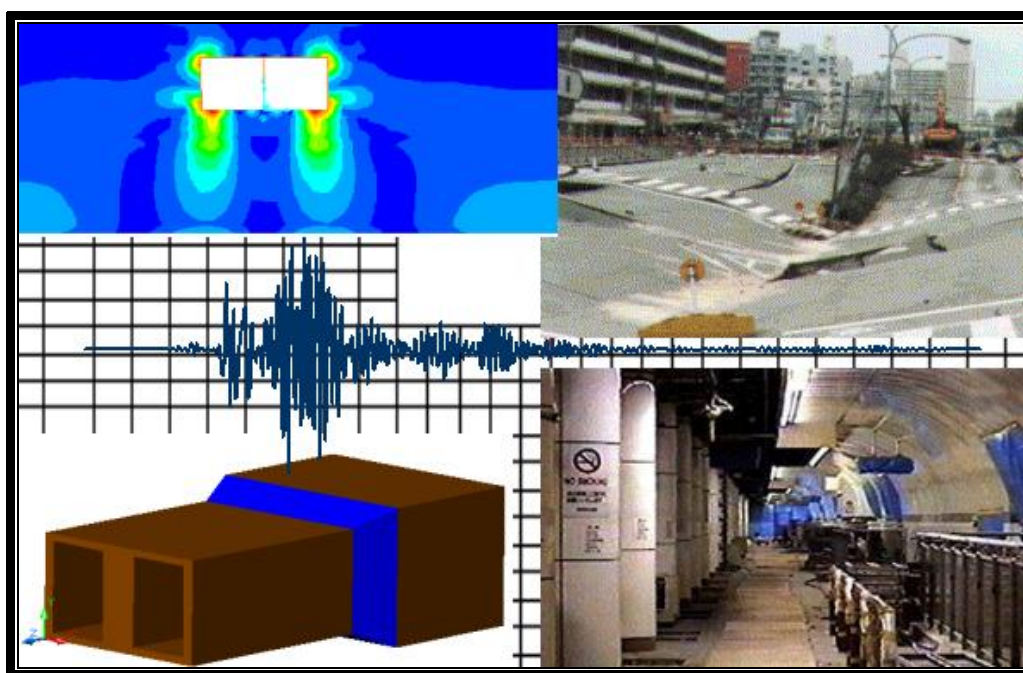


ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΑΠΟ
ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ»**

ΛΙΑΡΑΚΟΣ Β. ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ



ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Δρ. Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής (Επιβλέπων)

Δρ. Κωνσταντίνος Προβιδάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Δρ. Αντώνιος Βαφείδης, Καθηγητής

Χανιά, Ιούνιος 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του τμήματος **Μηχανικών Ορυκτών Πόρων** του **Πολυτεχνείου Κρήτης**.

Για την πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους:

- **κ. Αγιουτάντη Ζαχαρία.** Καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Ορυκτών Πόρων και επιβλέποντα, για την ανάθεση του θέματος, τις συμβουλές που μου παρείχε καθώς και για την διόρθωση της εργασίας αυτής.
- **κ. Προβιδάκη Κωνσταντίνο.** Αναπληρωτή Καθηγητή του Γενικού τμήματος του Πολυτεχνείου Κρήτης και συνεπιβλέποντα, για την επιλογή και ανάθεση του θέματος, την πολύ καλή συνεργασία που είχαμε, τις συμβουλές που μου παρείχε καθώς και την διόρθωση της εργασίας αυτής.
- **κ. Βαφείδη Αντώνιο.** Καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, για το χρόνο που διέθεσε για την ανάγνωση και διόρθωση της εργασίας αυτής, καθώς και για την συμμετοχή του στην εξεταστική επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- Όλο το εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής του Γενικού Τμήματος και ιδιαίτερα την **Δρα Μαρία Σταυρουλάκη** και τον **κ. Ξυρογιάννη Γιάννη** για την βοήθεια που πρόσφεραν πάνω στο SAP2000.
- Τους επιστημονικούς συνεργάτες του εργαστηρίου Μηχανικής Πετρωμάτων **κ. Στέλιο Μαυριγιαννάκη, κα Ειρήνη Καλογήρου** και το μεταπτυχιακό φοιτητή **κ. Σαρρή Ερνέστο**.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως στόχο την μελέτη, ανάλυση και προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς υπογείων τεχνικών έργων από οπλισμένο σκυρόδεμα, όταν αυτά καταπονούνται από έντονα σεισμικά φορτία. Ως αντικείμενο μελέτης χρησιμοποιείται το υπόγειο σιδηροδρομικό δίκτυο της πόλης Kobe της Ιαπωνίας, το οποίο υπέστη εκτεταμένες καταστροφές από το μεγάλο σεισμό που έγινε στις 17 Ιανουαρίου του 1995.

Η κατάρρευση του υπογείου σιδηροδρομικού δικτύου του Kobe, αποτελεί σταθμό στην σύγχρονη αντισεισμική μηχανική καθώς ήταν η πρώτη φορά που υπόγεια τεχνικά έργα από οπλισμένο σκυρόδεμα αστοχούν σε σεισμικά φορτία. Για το γεγονός αυτό έχει δημοσιευθεί πληθώρα επιστημονικών εργασιών και μελετών, καθώς από την καταστροφή του δικτύου απεδείχθη η ανεπάρκεια των μέχρι τότε χρησιμοποιούμενων μεθόδων αντισεισμικού σχεδιασμού.

Για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς της υποστήριξης των σηράγγων του δικτύου, κατασκευάστηκαν δισδιάστατα μοντέλα του συστήματος έδαφος-υποστήριξη και αναλύθηκαν με το λογισμικό Πεπερασμένων Στοιχείων, SAP2000.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1	1
Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 2	3
Αρχές σεισμολογίας	3
2.1 Εισαγωγή	3
2.2 Είδη και χαρακτηριστικά σεισμών	3
2.2.1 Γένεση των σεισμών	3
2.2.2 Χαρακτηριστικά των σεισμών	4
2.3 Σεισμικά Κύματα	7
2.4 Σεισμικές Κλίμακες Μεγέθους	9
2.5 Προσδιορισμός του επικέντρου και του εστιακού βάθους	11
2.6 Αξιολογήσεις μετρήσεων από πλευρά μηχανικού	13
Κεφάλαιο 3	16
Ταλαντώσεις και δυναμική ανάλυση	16
3.1 Εισαγωγή	16
3.2 Περιοδικές κινήσεις	16
3.3 Ταλάντωση διακριτού συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας	17
3.3.1 Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση	20
3.3.2 Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση	23
3.3.3 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση	28
3.3.4 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση	32
3.3.5 Εξαναγκασμένη μη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση	37
3.4 Απόσβεση	42
3.4.1 Ιξώδης απόσβεση	43
3.4.2 Ισοδύναμη ιξώδης απόσβεση	45

3.4.3	Υστερητική απόσβεση	45
3.5	Πολυβάθμια διακριτά συστήματα	47
3.5.1	Η εξίσωση της κίνησης	48
3.5.2	Το πρόβλημα των ιδιομορφών	49
3.6	Η κίνηση του εδάφους	53
3.6.1	Εξίσωση της κίνησης	53
3.6.2	Φάσματα απόκρισης	54
3.6.3	Ανάλυση Fourier του επιταχυνσιογραφήματος	57
 Κεφάλαιο 4		59
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων		59
4.1	Εισαγωγή	59
4.2	Περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων	60
4.2.1	Βασική ιδέα της μεθόδου	60
4.2.2	Διάθρωση της μεθόδου	62
4.3	Διακριτοποίηση	63
4.3.1	Γεωμετρική απλοποίηση και συμμετρία	63
4.3.2	Είδη στοιχείων	65
4.3.3	Χαρακτηριστικά της διαίρεσης πεδίου	67
4.4	Συναρτήσεις παρεμβολής	69
4.5	Καταστατική συμπεριφορά των υλικών	71
4.5.1	Καταστατική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικών υλικών στις τρεις διαστάσεις	72
4.5.2	Καταστατική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικών υλικών στις δύο διαστάσεις	73
4.6	Εξισώσεις ισορροπίας και επίλυση σε επίπεδο στοιχείου	75
4.7	Φόρτιση της κατασκευής και συνοριακές συνθήκες	82
4.8	Πεπερασμένα στοιχεία και δυναμική ανάλυση	86
4.8.1	Διατύπωση του δυναμικού προβλήματος	86
4.8.2	Η εξίσωση της κίνησης	88
4.8.3	Χρόνο-ιστορική ανάλυση και μέθοδοι άμεσης χρονικής ολοκλήρωσης	89
4.8.4	Η μέθοδος εν χρόνο ολοκλήρωσης Newmark	90

4.8.5	Χρόνο-ιστορική ανάλυση με την μέθοδο των ιδιομορφών	93
4.8.6	Απόσβεση κατά Rayleigh	95
 Κεφάλαιο 5		99
Ανάλυση μηχανικής συμπεριφοράς σήραγγας σε συνθήκες έντονης σεισμικής καταπόνησης		99
5.1	Εισαγωγή	99
5.2	Ανάλυση σεισμικής επικινδυνότητας του Kobe	99
5.2.1	Χαρακτηριστικά του σεισμού	100
5.2.2	Καταγραφές της εδαφικής κίνησης	101
5.2.3	Επιπτώσεις στα δομικά έργα του Kobe	104
5.3	Μελέτη εφαρμογής στο σταθμό του Daikai	105
5.3.1	Φυσικές και μηχανικές των εδαφικών στρώσεων	108
5.3.2	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά υποστήριξης	108
5.3.3	Μηχανική συμπεριφορά του κεντρικού στύλου	109
5.3.4	Διακριτοποίηση Μοντέλου	111
5.3.5	Συνοριακές συνθήκες	112
5.3.6	Απόσβεση	114
5.3.7	Περιπτώσεις ανάλυσης (Analysis Cases)	116
5.4	Αποτελέσματα της ανάλυσης	117
5.4.1	Αποτελέσματα ανάλυσης των ιδιομορφών	117
5.4.2	Αποτελέσματα χρόνο-ιστορικής ολοκλήρωσης	117
5.4.3	Αποτελέσματα χρόνο ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών	125
5.4.4	Αποτελέσματα εφαρμογής συνδυασμένης κατακόρυφης και οριζόντιας επιτάχυνσης	132
 Κεφάλαιο 6		134
Συμπεράσματα και Προτάσεις		134
 Βιβλιογραφία		139

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

Τα υπόγεια τεχνικά έργα ανήκουν στη ευρύτερη κατηγορία των τεχνικών έργων υποδομής και ως τέτοια εξυπηρετούν ένα ευρύ φάσμα οικονομικών και κοινωνικών αναγκών. Δραστηριότητες των οποίων αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι είναι οι συγκοινωνίες, στις οποίες εμφανίζονται ως υπόγεια σιδηροδρομικά δίκτυα ή αυτοκινητόδρομοι, η μεταλλευτική βιομηχανία, στην οποία εμφανίζονται ως στοές εξόρυξης στις υπόγειες εκμεταλλεύσεις και ως έργα προσπέλασης κοιτασμάτων, η μεταφορά φυσικών πόρων (νερό), ενεργειακών πόρων (πετρέλαιο, φυσικό αέριο) και αποβλήτων.

Η κατασκευή ενός υπογείου τεχνικού έργου, είναι μια διαδικασία στην οποία εμπλέκονται αρκετά επιστημονικά και τεχνικά πεδία. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος της κατασκευής ενός τέτοιου έργου, πηγάζει από το γεγονός ότι αυτή συνεπάγεται την διάνοιξη υπογείων ανοιγμάτων με την εξόρυξη εδαφικών μαζών ή/και βραχομάζας. Αυτό έχει ως συνέπεια τη διαταραχή του γεωστατικού εντατικού πεδίου και την επαγωγή τάσεων στον περιβάλλοντα γεωλογικό χώρο. Το φαινόμενο της διαταραχής του εντατικού πεδίου γίνεται πιο έντονο και πολύπλοκο όταν μπαίνουν στη μέση και διαταραχές που οφείλονται σε σεισμικές καταπονήσεις. Ιδιαίτερα δε οι σεισμικές καταπονήσεις, επάγουν ένα σύνθετο και χρονικά μεταβαλλόμενο (δυναμικό) εντατικό πεδίο, το οποίο πολλές φορές είναι πολλαπλάσιο του γεωστατικού. Σύμφωνα με όλα αυτά η υλοποίηση ενός υπογείου τεχνικού έργου, επικεντρώνεται στον κατάλληλο σχεδιασμό της υποστήριξη του υπογείου ανοίγματος ώστε η τελευταία να παραλαμβάνει τόσο στατικά όσο και δυναμικά φορτία με τη μεγαλύτερη δυνατή ασφάλεια.

Ιστορικά έχει παρατηρηθεί ότι οι υπόγειες κατασκευές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ανθεκτικότητα στα σεισμικά φορτία από τις επιφανειακές κατασκευές. Ωστόσο έχουν σημειωθεί εκτεταμένες ζημιές σε υπόγεια τεχνικά έργα από έντονα σεισμικά

γεγονότα όπως ο σεισμός του Kobe της Ιαπωνίας το 1995, όπου ένα μεγάλο του τμήμα του αστικού σιδηροδρομικού δικτύου καταστράφηκε, ο σεισμός του Chi-Chi το 1999, ο σεισμός στην Ταϊβάν που προκάλεσε καταστροφές σε οδικές σήραγγες και ο σεισμός του Kocaeli της Τουρκίας.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, έγινε μια προσπάθεια μαθηματικής προσέγγισης και αριθμητικής προσομοίωσης της συμπεριφοράς των υπογείων τεχνικών έργων από οπλισμένο σκυρόδεμα, σε συνθήκες έντονης σεισμικής καταπόνησης. Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε από την οπτική γωνία της δυναμικής των κατασκευών, καθώς μελετήθηκε η απόκριση των υπογείων τεχνικών έργων στο σύνθετο και χρονικά μεταβαλλόμενο φορτίο που δίδει ο σεισμός. Ως αντικείμενο μελέτης χρησιμοποιήθηκε το υπόγειο σιδηροδρομικό δίκτυο της πόλης Kobe της Ιαπωνίας το οποίο υπέστη εκτεταμένες καταστροφές από το μεγάλο σεισμό του 1995.

Όσον αφορά τη δομή της εργασίας, στο *δεύτερο κεφάλαιο* γίνεται μια σύντομη παρουσίαση και ανάπτυξη των βασικών αρχών της επιστήμης της σεισμολογίας από τη σκοπιά του μηχανικού, στο *τρίτο κεφάλαιο* αναπτύσσονται οι θεωρητικές αρχές της δυναμικής των κατασκευών ξεκινώντας από το μονοβάθμιο ταλαντωτή και καταλήγοντας στα πολυβάθμια διακριτά συστήματα, στο *τέταρτο κεφάλαιο* παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΕ), στο *πέμπτο κεφάλαιο* γίνεται μια σύντομη ανάλυση σεισμικής επικινδυνότητας του σεισμού του Kobe και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης που έγινε με τη χρήση του λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων SAP2000.

Κεφάλαιο 2^ο

Αρχές σεισμολογίας

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτυχθούν κάποιες βασικές θεωρητικές αρχές της επιστήμης της σεισμολογίας. Επίσης θα παρουσιαστούν συνοπτικά έννοιες και ορισμοί σχετικά την γένεση, την καταγραφή και την αξιολόγηση των σεισμών από την σκοπιά του μηχανικού.

2.2 Είδη και χαρακτηριστικά σεισμών

2.2.1 Γένεση των σεισμών

Ο στερεός φλοιός της γης, όπως και η ίδια η γη, αποτελεί ένα δυναμικό σύστημα του οποίου η δομή μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Οι περισσότερες μεταβολές του φλοιού λαμβάνουν χώρα σε χρονικά διαστήματα της τάξης των χιλιάδων ή και εκατομμυρίων ετών και προφανώς δεν δύναται να γίνουν αντιληπτές με βάση την ανθρώπινη διαίσθηση και παρατήρηση. Ωστόσο υπάρχουν και γεωμεταβολές ταχύτατες οι οποίες όχι μόνο είναι αισθητές στον ανθρώπινο χρόνο, αλλά η χρονική τους διάρκεια είναι της τάξης των δευτερολέπτων. Τέτοια φαινόμενα είναι οι σεισμοί οι οποίοι παρά τα καταστροφικά αποτελέσματα που προκαλούν αποτελούν σημαντικές πηγές πληροφοριών για την δομή του εσωτερικού του στερεού φλοιού.

Σεισμοί καλούνται οι εδαφικές κινήσεις μικρής περιόδου οι οποίες οφείλονται σε φυσικά αίτια που βρίσκονται στο εσωτερικό της γης (Μιγκίρος, 1996). Ο στερεός φλοιός αλλά και ο ανώτερος μανδύας βρίσκονται σε εντατική κατάσταση λόγω των πεδίων μηχανικών δυνάμεων που υπάρχουν. Οι δυνάμεις αυτές προέρχονται από την κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών στο ανώτερο τμήμα του μανδύα το οποίο επειδή είναι μηχανικά ασθενές(ημίρρευστη κατάσταση) καλείται ασθενόσφαιρα. Οι θερμοδυναμικές και θερμικές συνθήκες που επικρατούν στον ανώτερο μανδύα αποτελούν επίσης, φυσικά αίτια που τείνουν να μεταβάλουν την επικρατούσα

κατάσταση του στερεού φλοιού της γης και συμμετέχουν στις διεργασίες γένεσης των σεισμών.

Ανάλογα με τον τρόπο γένεσης οι σεισμοί ταξινομούνται στις εξής κατηγορίες (Bachmann, 1995):

- Οι **τεκτονικοί σεισμοί**, οι οποίοι οφείλονται σε απότομες διαδικασίες θραύσης του φλοιού της γης. Αρχικά εκδηλώνονται μετατοπίσεις οι οποίες οφείλονται στην κίνηση των τεκτονικών πλακών. Οι μετατοπίσεις στα πρώτα στάδια του φαινομένου, είναι αργές και εμφανίζονται σαν ελαστικές παραμορφώσεις ή παραμορφώσεις λόγω ερπυσμού ή διαρροής. Εξαιτίας των παραμορφώσεων αναπτύσσονται τάσεις οι οποίες παρουσιάζουν υψηλή συγκέντρωση στις περιοχές που θα επακολουθήσει η θραύση. Η θραύση εκδηλώνεται όταν οι τάσεις υπερβούν τις μηχανικές αντοχές των πετρωμάτων και οδηγηθούν σε αστοχία.
- Οι **ηφαιστιογενείς σεισμοί**, οι οποίοι συνοδεύουν την ηφαιστειακή δραστηριότητα μιας περιοχής. Η θραύση των πετρωμάτων στη περίπτωση αυτή, είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού των υψηλών θερμοκρασιών λόγω της προέλασης του μάγματος και των υψηλών πιέσεων λόγω των πτητικών συστατικών του μάγματος που δεν έχουν εκτονωθεί.
- Οι **σεισμοί κατακρημνίσεων**, οι οποίοι είναι αποτέλεσμα της κατάρρευσης της οροφής υπογείων κενών χώρων λόγω του βάρους των υπερκειμένων γεωλογικών σχηματισμών. Τέτοιοι κενοί χώροι είναι τα καρστικά έγκοιλα που αναπτύσσονται σε ανθρακικά πετρώματα ή υπόγεια ανοίγματα λόγω προηγούμενης μεταλλευτικής δραστηριότητας.

2.2.2 Χαρακτηριστικά των σεισμών

Παρακάτω θα αναπτυχθούν συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά τόσο του σεισμού όσο και του χώρου στον οποίο γεννιέται (σχήμα 2.1).

Επιφάνεια διάρρηξης ή εστιακή επιφάνεια

Στους τεκτονικούς σεισμούς η θραύση των πετρωμάτων εμφανίζεται κατά μήκος μιας επιφάνειας η οποία ονομάζεται εστιακή επιφάνεια ή επιφάνεια διάρρηξης. Η επιφάνεια

Ταχύτητα διάρρηξης

Η ταχύτητα διάρρηξης είναι το μέγεθος που περιγράφει την απόσταση που έχει διαδοθεί η θραύση στη μονάδα του χρόνου. Για σκληρά πετρώματα όπως είναι ο γρανίτης, ο γρανοδιορίτης και χαλαζίτης είναι της τάξης των 3km/sec.

Επίκεντρο

Επίκεντρο καλείται η προβολή της σεισμικής εστίας στην επιφάνεια της γης.

Εστιακό βάθος

Εστιακό βάθος, h , καλείται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του επίκεντρου και του υπόκεντρου. Ανάλογα με το εστιακό βάθος οι σεισμοί μπορούν διακριθούν σε **αβαθείς**, όπου $h < 70\text{km}$ και **μεγάλου βάθους**, με $h > 70\text{km}$.

Υποκεντρική απόσταση

Υποκεντρική απόσταση χαρακτηρίζεται η απόσταση μεταξύ του υπόκεντρου και κάποιου παρατηρητή ή κάποιας κατασκευής (Bachmann, 1995).

Επικεντρική απόσταση

Επικεντρική απόσταση χαρακτηρίζεται η απόσταση μεταξύ του επίκεντρου και κάποιου παρατηρητή ή κάποιας κατασκευής (Bachmann, 1995).

Ενέργεια διάρρηξης

Η ενέργεια που εκλύεται από την θραύση των πετρωμάτων μπορεί να διακριθεί σε (Bachmann, 1995):

- απελευθέρωση επί τόπου μέσω διαδικασιών καταστροφής του ιστού του πετρώματος, θερμότητας, τριβής κτλ.
- ακτινοβολία από την εστιακή επιφάνεια με την μορφή σεισμικών κυμάτων (ελαστικά μηχανικά κύματα)

Περιοχή δόνησης

Είναι οι περιοχές όπου ο σεισμός γίνεται αισθητός-αντιληπτός από τον άνθρωπο. Με βάση την ένταση δηλαδή το πόσο αισθητός γίνεται ο σεισμός, χαράσσονται οι **ισόσειστες καμπύλες** δηλαδή χάρτες που απεικονίζουν την κατανομή της δόνησης στο χώρο.

2.3 Σεισμικά κύματα

Η ενέργεια που εκλύεται κατά την διαδικασία της διάρρηξης στη εστία του σεισμού αποδίδεται στο χώρο είτε με την μορφή θερμότητας είτε με την μορφή σεισμικών κυμάτων. Τα σεισμικά κύματα είναι μηχανικά κύματα τα οποία διαδίδονται σε θεωρητικά συνεχές, ομογενές και ελαστικό μέσο. Οι ιδιότητες των κυμάτων αυτών είναι συνάρτηση της φύσης του σεισμού και της φύσης του γεωλογικού χώρου. Πιο συγκεκριμένα, το πλάτος και οι συχνότητες που περιέχει το σεισμικό κύμα εξαρτώνται από την ταλάντωση που πραγματοποιεί η σεισμική εστία και η ταχύτητα όπως και η εξασθένηση που υφίσταται το κύμα, εξαρτάται από τις μηχανικές και φυσικές ιδιότητες του γεωλογικού χώρου.

Τα σεισμικά κύματα διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες, τα **κύματα χώρου** και τα **επιφανειακά**. Τα κύματα χώρου διακρίνονται σε (σχήμα 2.2):

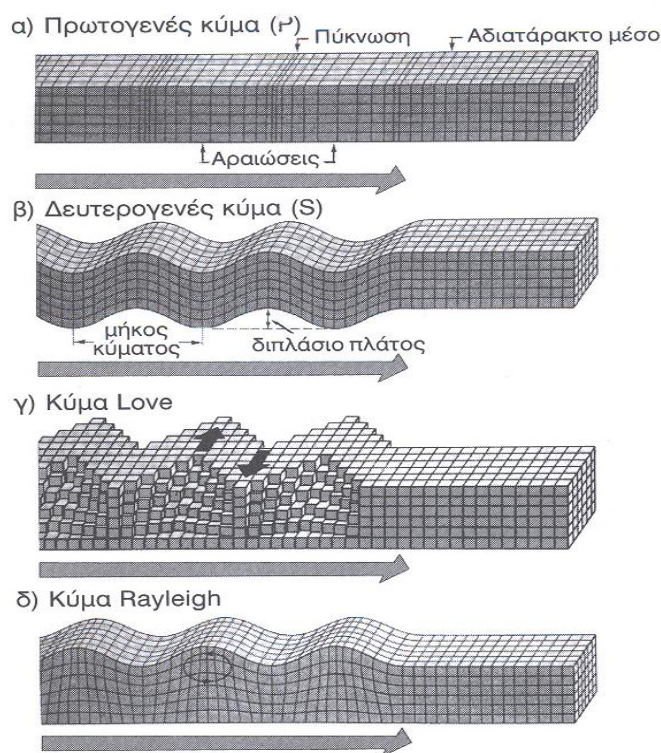
- **Πρωτογενή ή διαμήκη κύματα (P-waves)**, τα οποία είναι κύματα διαστολής-συστολής ή εφελκυσμού-θλίψης ή πύκνωσης-αραίωσης του μέσου. Η διεύθυνση κίνησης των υλικών σημείων είναι παράλληλη με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος ακριβώς όπως τα ηχητικά κύματα. Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται και στις τρεις μορφές της ύλης (στερεά, υγρά και αέρια) ενώ ανακλώνται κατά την πρόσπτωση τους σε διαχωρίστηκες επιφάνειες μεταξύ γεωλογικών στρωμάτων.
- **Δευτερογενή ή εγκάρσια κύματα (S-waves)**, τα οποία είναι κύματα διάτμησης. Ως τέτοια διαδίδονται αποκλειστικά σε μέσο που παρουσιάζει διατμητική αντοχή, δηλαδή μόνο σε στέρεα σώματα. Η αδυναμία διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στον μανδύα είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι αυτός βρίσκεται σε ρευστή κατάσταση. Η διεύθυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, είτε σε οριζόντιο επίπεδο (SH-waves) είτε σε κατακόρυφο επίπεδο (SV-waves).

Τα επιφανειακά κύματα διακρίνονται σε (σχήμα 2.2):

- **Κύματα Rayleigh**, τα οποία είναι σύνθετα κύματα αποτελούμενα από P και SV συνιστώσες με αναλογία πλατών 1 : 1.5. Οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων

πραγματοποιούνται στο κατακόρυφο επίπεδο το οποίο και περιέχει την διεύθυνση διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων (Βαφείδης, 1996). Τα κύματα Rayleigh όπως άλλωστε και όλα τα επιφανειακά κύματα παρουσιάζουν μικρό βάθος διείσδυσης, το οποίο εξαρτάται από τις περιεχόμενες συχνότητες. Οι ταχύτητα διάδοσης τους είναι μικρότερη από τα εγκάρσια κύματα και εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές και την πυκνότητα του συνεχούς μέσου.

- **Κύματα Love**, τα οποία δημιουργούνται από πολλαπλές ανακλάσεις των κυμάτων SH (Βαφείδης, 1996). Η ταλάντωση των υλικών σημείων πραγματοποιείται στο οριζόντιο επίπεδο το οποίο και περιέχει την διεύθυνση διάδοσης του σεισμικού κύματος. Η ταχύτητα τους είναι μικρότερη από την ταχύτητα των εγκάρσιων κυμάτων αν και για υψηλές συχνότητες είναι συγκρίσιμη με αυτή



Σχήμα 2.2: Τα είδη των σεισμικών κυμάτων (Bachmann, 1995)

Οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες του στερεού φλοιού είναι μεταβλητές σε όλη την έκταση του. Δηλαδή, πρόκειται για ένα ανομοιογενές και ανισότροπο μέσο το οποίο είναι πολύ δύσκολο να μοντελοποιηθεί. Για αυτό το λόγο, η μελέτη της

μηχανικής συμπεριφοράς του στερεού φλοιού γίνεται με την παραδοχή του ελαστικού, ομογενούς, ισότροπου και συνεχούς μέσου. Η ταχύτητα των εγκαρσίων σεισμικών κυμάτων για ένα τέτοιο μέσο, δίδεται συναρτήσει των ελαστικών σταθερών του από την σχέση

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.1)$$

και η ταχύτητα των διαμηκών σεισμικών κυμάτων από τη σχέση

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad (2.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα, λ και μ οι σταθερές του Lamé (βλ. παράγραφο 4.5.1).

Πίνακας 2.1: Ταχύτητες διάδοσης κυμάτων χώρου για διάφορα δομικά υλικά (πηγή ελαστικών σταθερών: Αγιουτάντης, 2002)

Υλικά	ρ [kg/m ³]	E[GPa]	ν	λ	μ	V_p [m/sec]	V_s [m/sec]
Ψαμμίτης	2680	22	0,24	8,19	8,87	3110,6	1819,36
Ασβεστόλιθος	2830	48	0,25	19,20	19,20	4511,5	2604,70
Γρανίτης	2680	45	0,23	15,58	18,29	4412,0	2612,59
Σχιστόλιθος	2660	28	0,14	4,78	12,28	3321,0	2148,68
Σκυρόδεμα	2400	24	0,2	6,67	10,00	3333,3	2041,24
Άργιλος	1600	0,2	0,45	0,62	0,07	688,6	207,61

2.4 Σεισμικές κλίμακες μεγέθους

Για την περιγραφή και την ταξινόμηση ενός σεισμικού φαινομένου, είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί ένα μέγεθος το οποίο θα εξαρτάται αποκλειστικά από τα χαρακτηριστικά τη σεισμικής πηγής και θα είναι ανεξάρτητο της απόστασης του παρατηρητή από την εστία. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό της σεισμικής πηγής το οποίο είναι ενδεικτικό του μεγέθους του σεισμού, είναι η ενέργεια που εκλύεται κατά την διαδικασία της θραύσης των πετρωμάτων στην εστιακή επιφάνεια. Με βάση αυτή την παρατήρηση αναπτύχθηκε η παγκοσμίως χρησιμοποιούμενη σεισμική κλίμακα

μεγέθους Richter, η οποία για κάθε σεισμό αποδίδει μία τιμή σε ένα μέγεθος, M , το οποίο είναι συνάρτηση της ενέργειας που εκλύεται. Η εμπειρική εξίσωση που συνδέει το μέγεθος του σεισμού με την εστιακή ενέργεια που εκλύεται έχει τη μορφή (Bachmann, 1995)

$$M = \frac{2}{3} [\log(E) - 11.8] \quad (2.3)$$

ή

$$\log(E) = 11.8 + 1.5M \quad (2.4)$$

όπου E η εκλυόμενη ενέργεια σε [erg]. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό από τις εξισώσεις (2.3) και (2.4) η κλίμακα Richter είναι λογαριθμική. Αυτό σημαίνει ότι η μοναδιαία αύξηση του μεγέθους M , συνεπάγεται αύξηση της εκλυόμενης ενέργειας κατά το συντελεστή $10^{1.5} = 30$. Δηλαδή η ενεργεία που εκλύεται από ένα σεισμό μεγέθους 6 βαθμών της κλίμακας Richter, είναι τριάντα φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια που εκλύεται από ένα σεισμό μεγέθους 5 βαθμών της κλίμακας Richter. Το μέγεθος M υπολογίζεται από τα μέγιστα πλάτη των σειсмоγραφημάτων καταγραφής της ταχύτητας σύμφωνα με την σχέση (Bachmann, 1995):

$$M = \log\left(\frac{A}{T}\right)_{\max} + f(d, h) + C_s + C_r \quad (2.5)$$

όπου:

$A[\mu\text{m}]$: πλάτος της εδαφικής μετατόπισης

$T[\text{sec}]$: περίοδος κύματος με πλάτος A

$d[\text{μίρες γήινου κύκλου}]$: απόσταση από το επίκεντρο

$h[\text{km}]$: εστιακό βάθος

C_s, C_r : διορθωτικές σταθερές για τοπικές και περιφερειακές επιρροές (απόσβεση)

$A/T[\mu\text{m/sec}]$: ταχύτητα εδαφικών κυμάτων

Για το μέγεθος M , μπορούν να δοθούν οι εξής τρεις διαφορετικοί ορισμοί (Bachmann, 1995):

- **Τοπικό μέγεθος M_I (local magnitude)**, ορίσθηκε το 1935 από τον Richter και ισχύει για αποστάσεις από το επίκεντρο μέχρι $d = 500\text{km}$.

- **Μέγεθος επιφανειακών κυμάτων M_s (surface wave magnitude)**, ορίσθηκε το 1945 από τον Gutenberg και υπολογίζεται από τα μέγιστα πλάτη των επιφανειακών κυμάτων σύμφωνα με τη σχέση

$$M_s = \log A + 1.66 \log d + 2 \quad (2.6)$$

- **Μέγεθος κυμάτων χώρου M_b (body wave magnitude)**, ορίσθηκε το 1945 από τον Gutenberg και υπολογίζεται από τα μέγιστα πλάτη των κυμάτων χώρου (καλείται και μέγεθος μακρινού σεισμού) .

$$M_s = \log A - \log T + 0.01d + 5.9 \quad (2.7)$$

2.5 Προσδιορισμός του επίκεντρου και του εστιακού βάθους

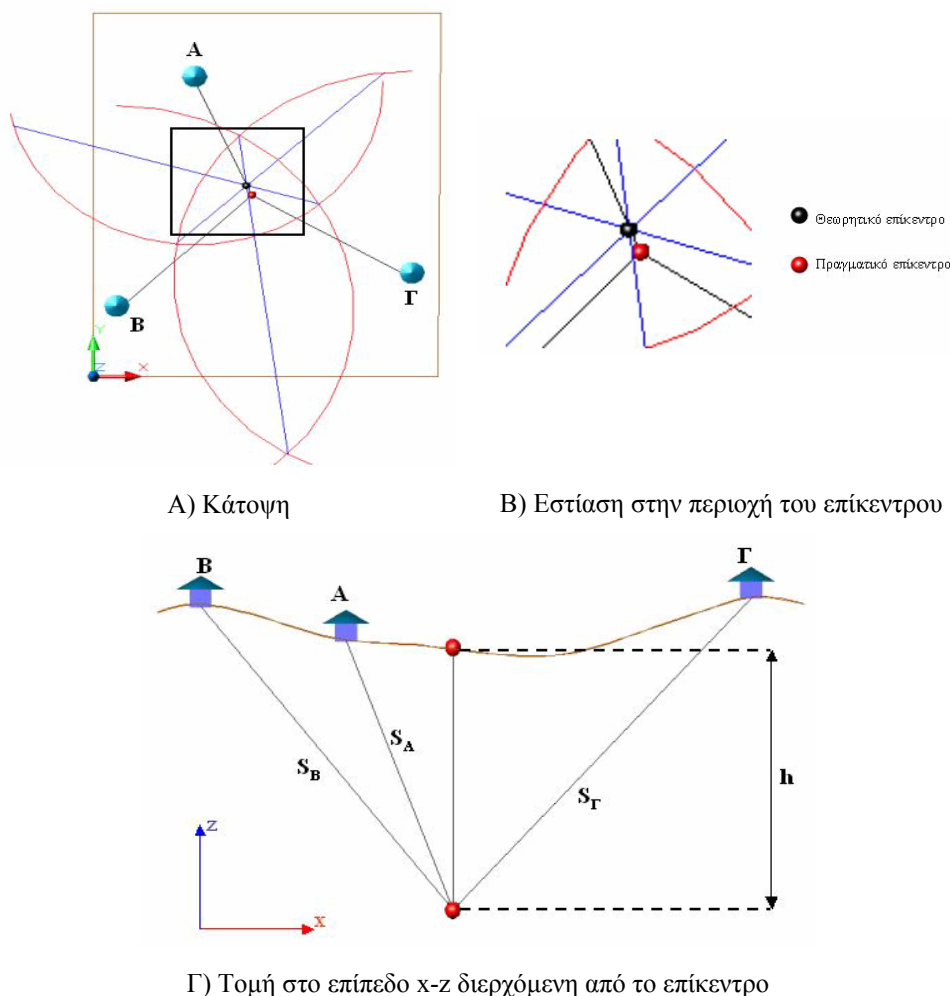
Ο προσδιορισμός του εστιακού βάθους και του επικέντρου είναι αναγκαίος αφενός μεν για την αξιολόγηση ενός σεισμικού γεγονότος αφετέρου δε για τον υπολογισμό του μεγέθους του. Τα μεγέθη αυτά υπολογίζονται γεωμετρικά από τις καταγραφές των σειсмоγραφικών σταθμών, αφού αυτές αξιολογηθούν και εξαχθούν οι εξής πληροφορίες (Bachmann, 1995):

- η χρονική διαφορά μεταξύ της άφιξης των κυμάτων P και S στους σειсмоγραφικούς σταθμούς
- οι χρόνοι άφιξης των κυμάτων P
- οι μετρηθείσες ή υποθετικές ταχύτητες κυμάτων
- τα μοντέλα κατανομής των φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων των πετρωμάτων στο στερεό φλοιό της γης

Η υποκεντρική απόσταση κάθε σειсмоγραφικού σταθμού με την χρήση των παραπάνω δεδομένων υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Bachmann, 1995)

$$s = dt_{p-s} \frac{V_p}{\left(\frac{V_p}{V_s} - 1 \right)} \quad (2.8)$$

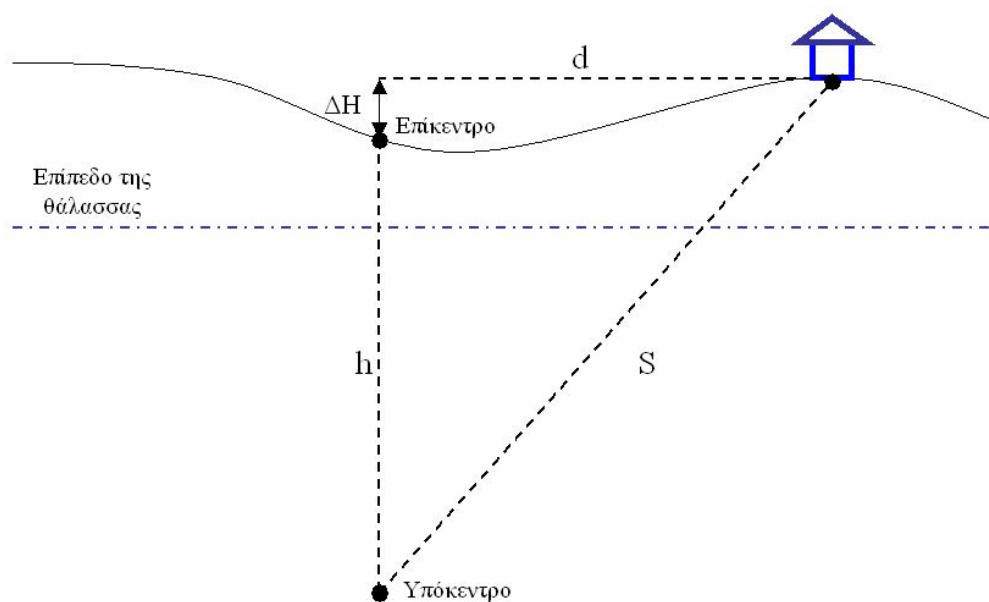
όπου dt_{s-p} χρονική διαφορά άφιξης μεταξύ διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι για τον ακριβή υπολογισμό της υποκεντρικής απόστασης πρέπει να υπάρχουν αντιπροσωπευτικές τιμές των ταχυτήτων των σεισμικών κυμάτων για την περιοχή μελέτης. Είναι αναγκαίο λοιπόν να δημιουργηθεί για κάθε περιοχή ένα γεωλογικό μοντέλο το οποίο θα περιγράφει την κατανομή των φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων.



Σχήμα 2.3: Γεωμετρικός υπολογισμός επίκεντρου με την βοήθεια των υποκεντρικών αποστάσεων τριών τουλάχιστον σταθμών

Οι πιθανές συντεταγμένες του επίκεντρου υπολογίζονται από τις καταγραφές τουλάχιστον τριών σταθμών των οποίων οι συντεταγμένες είναι γνωστές. Με ακτίνα την υποκεντρική απόσταση, που υπολογίζεται από τη εξίσωση (2.8), και κέντρο τη θέση του σταθμού χαράσσεται μια σφαίρα (σχήμα 2.3). Οι σφαίρες που θα προκύψουν

από τους τρεις σταθμούς θα τέμνονται μεταξύ τους ανά δύο και η τομή τους θα είναι ένας κύκλος σε κατακόρυφο επίπεδο. Οι ευθείες των ιχνών των κύκλων, θα τέμνονται στο επίκεντρο. Επειδή η λύση με τα στοιχεία των τριών σταθμών δεν είναι μονοσήμαντη, με τη χρήση περισσότερων σταθμών επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια (Bachmann, 1995).



Σχήμα 2.4: Γεωμετρικός υπολογισμός του εστιακού βάθους

Το εστιακό βάθος υπολογίζεται γεωμετρικά (σχήμα 2.4) από την υψομετρική διαφορά της θέσης του σταθμού με το επίκεντρο ΔH , την επικεντρική απόσταση d , και την υποκεντρική απόσταση S , σύμφωνα με τη σχέση

$$h = \sqrt{S^2 + d^2} - \Delta H \quad (2.9)$$

2.6 Αξιολογήσεις μετρήσεων από πλευρά μηχανικού

Τα σεισμογραφικά στοιχεία τα οποία ενδιαφέρουν το μηχανικό για την αξιολόγηση και την προσομοίωση της συμπεριφοράς μιας κατασκευής είναι τα εξής (Bachmann, 1995) :

- Διαγράμματα επιτάχυνσης του εδάφους συναρτήσει του χρόνου τα οποία καλούνται και **χρόνο-ιστορίες εδαφικής επιτάχυνσης** ή **επιταχυνσιογραφήματα**. Τα διαγράμματα αυτά προκύπτουν από την απευθείας μέτρηση της

επιτάχυνσης σε κάποιο σειсмоγραφικό σταθμό κατά τη διάρκεια ενός σεισμικού γεγονότος.

- Διαγράμματα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, τα οποία καλούνται **χρόνο-ιστορίες εδαφικής ταχύτητας** και είναι δυνατό να προσδιοριστούν είτε από απευθείας καταγραφές της ταχύτητας, είτε από την αριθμητική ολοκλήρωση του επιταχυνσιογραφήματος.
- Διαγράμματα μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου, τα οποία καλούνται και **χρόνο-ιστορίες εδαφικής μετατόπισης** και είναι δυνατό να προσδιοριστούν είτε με απευθείας καταγραφή του σεισμικού γεγονότος είτε με αριθμητική ολοκλήρωση των χρόνο-ιστοριών εδαφικής ταχύτητας (π.χ. κανόνας του τραπεζίου, αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss, κτλ.)

Η εδαφική μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση καταγράφεται συνήθως στις διευθύνσεις B-N, A-Δ και στην κατακόρυφη διεύθυνση (κάθετα στο επίπεδο της θάλασσας). Από τις παραπάνω καταγραφές για τις τρεις διευθύνσεις προσδιορίζονται τα εξής μεγέθη:

- Μέγιστη απόλυτη εδαφική επιτάχυνση, $|a_g(t)|_{\max} = |\ddot{u}_g(t)|_{\max}$ ή **PGA(Peak Ground Acceleration)**
- Μέγιστη απόλυτη εδαφική ταχύτητα, $|V_g(t)|_{\max} = |\dot{u}_g(t)|_{\max}$ ή **PGV(Peak Ground Velocity)**
- Μέγιστη απόλυτη εδαφική μετατόπιση, $|u_g(t)|_{\max}$ ή **PGD(Peak Ground Displacement)**
- Διάρκεια του σεισμού και χρονική περίοδο ισχυρής δόνησης
- Πρώτες αφίξεις διαμηκών και εγκαρσίων κυμάτων

- Ελαστικά φάσματα απόκρισης (βλ. 3^ο Κεφάλαιο), για τον αντισεισμικό σχεδιασμό των κατασκευών
- Φάσματα Fourier για τον προσδιορισμό του συχνοτικού περιεχομένου
- Θεματικοί χάρτες από τις καταγραφές του σεισμογραφικού δικτύου για την χωρική κατανομή των μεγεθών PGA, PGV, PGD

Πίνακας 2.2: Μέγιστες τιμές οριζόντιας εδαφικής επιτάχυνσης,
 $1g = 9.81\text{m/sec}^2$ (Bachmann, 1995)

Θέση	PGA[g]
Φρίουλι 1976 για d=15km	0.37
Μεξικό 1985	
➤ πάνω σε βράχο στη πόλη του Μεξικό(Mexico City)	0.04
➤ στη περιοχή της πόλη του Μεξικό που υπέστη ζημιές (κραδασμός των πολύ μαλακών εδαφικών στρωμάτων με σημαντικές ιδιοταλαντώσεις, διάρκεια περίπου 1min)	0.17
Lome Prieta-Βόρεια Καλιφόρνια 1989	0.67
Northridge-Νότια Καλιφόρνια 1994	1.82

Κεφάλαιο 3^ο

Ταλαντώσεις και δυναμική ανάλυση

3.1 Εισαγωγή

Ένα φυσικό φαινόμενο το οποίο εκδηλώνεται σε ένα φυσικό ή τεχνητό σύστημα, καλείται δυναμικό όταν οι παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται και περιγράφεται μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Επιπλέον, εάν ανά τακτά χρονικά διαστήματα το δυναμικό σύστημα μέσα από την διαδικασία μεταβολής του επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση, τότε το φαινόμενο καλείται και περιοδικό. Τέτοια συστήματα είναι οι υπαίθριες ή υπόγειες δομικές κατασκευές των οποίων τα χαρακτηριστικά (εντατική κατάσταση, εσωτερικές δυνάμεις, μετατοπίσεις) μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου όταν διεγερθούν από κάποιο εξωτερικό αίτιο (σεισμός).

3.2 Περιοδικές κινήσεις

Θεμελιώδεις έννοιες και ορισμοί

Μια κίνηση που επαναλαμβάνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα κατά τον ίδιο τρόπο, καλείται **περιοδική κίνηση** ή **ταλάντωση**. Ένα σύστημα το οποίο εκτελεί περιοδική κίνηση έχει πάντοτε μία θέση ευσταθούς ισορροπίας. Εάν το σύστημα με κάποιο τρόπο (π.χ. μια δύναμη) εκτραπεί από αυτήν τη θέση και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο, τότε εμφανίζεται μία δύναμη η οποία τείνει να το επαναφέρει στην αρχική του κατάσταση και το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται γύρω από την θέση ισορροπίας του (Young, 1994).

Τα βασικά χαρακτηριστικά μίας περιοδικής κίνησης είναι η **περίοδος, T** , η οποία ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιήσει το σύστημα μια πλήρη περιστροφή γύρω από τη θέση ισορροπίας του και η **συχνότητα, f** , που ορίζεται ως το πλήθος των περιστροφών που πραγματοποιεί το σύστημα στην μονάδα του χρόνου. Η συχνότητα συνδέεται με την περίοδο σύμφωνα με τη σχέση

$$f = \frac{1}{T} [\text{sec}^{-1} \text{ ή Hz}] \quad (3.1)$$

Πολλά από τα συστήματα που πραγματοποιούν ταλαντώσεις, είτε αποτελούνται είτε μπορούν να προσομοιωθούν ικανοποιητικά από ελατήρια, μάζες, μηχανισμούς απόσβεσης και διεγείρονται από περιοδικά αρμονικά ή μη φορτία. Στη δυναμική των κατασκευών, συγκεκριμένα, η συνήθης πρακτική είναι να διαιρείται η κατασκευή σε διακριτές μάζες που συνδέονται μεταξύ τους με ιδεατά ελατήρια ενώ ανάλογα με το πρόβλημα παρεμβάλλεται κάποιος μηχανισμός απόσβεσης, ασθενής ή ισχυρός (Kramer, 1996).

Βαθμοί ελευθερίας συστήματος

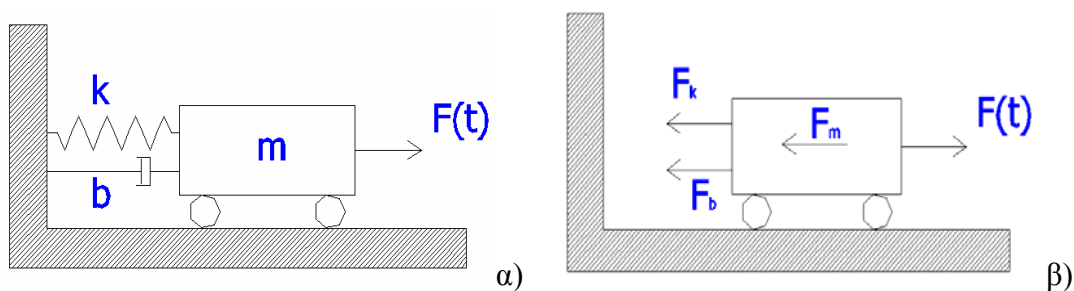
Ως αριθμός των βαθμών ελευθερίας ενός δυναμικού συστήματος, ορίζεται το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που χρειάζονται, για να περιγραφούν οι θέσεις των μαζών που συνιστούν το σύστημα, συναρτήσει του χρόνου. Ως εκ τούτου τα συστήματα, ανάλογα με τους βαθμούς ελευθερίας που τα περιγραφούν είναι δυνατό να διακριθούν σε **μονοβάθμια**, **πολυβάθμια** και **απειροβάθμια** (Kramer, 1996). Τα δυναμικά συστήματα διακρίνονται επίσης σε

- **διακριτά συστήματα**, συστήματα με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας (μονοβάθμια, πολυβάθμια)
- **συνεχή συστήματα**, συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας (απειροβάθμια)

3.3 Ταλάντωση διακριτού συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας

Ο μονοβάθμιος ταλαντωτής μπορεί να προσομοιωθεί από ένα ελατήριο του οποίου το ένα άκρο βρίσκεται πακτωμένο σε σταθερό σημείο ενώ το ελεύθερο άκρο συνδέεται με μία μάζα. Παράλληλα με τον άξονα του ελατηρίου υπάρχει ένας μηχανισμός απόσβεσης και η μάζα επιταχύνεται με την εφαρμογή μίας χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης (σχήμα 3.1). Για τα στοιχεία που συνιστούν το μονοβάθμιο σύστημα είναι απαραίτητο να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις-παραδοχές:

- η μάζα, m , του συστήματος είναι άκαμπτη, δηλαδή δεν υφίσταται παραμορφώσεις από τις δυνάμεις που της ασκούνται
- το ελατήριο έχει το ρόλο του μέτρου ακαμψίας, k , του συστήματος δηλαδή του συντελεστή αναλογίας μεταξύ την εφαρμοζόμενης από τη μάζα στο ελατήριο δύναμης και της μετατόπισης του
- η διεγείρουσα δύναμη, $F(t)$, μπορεί να είναι περιοδική ή απεριοδική, αρμονική ή μη αρμονική
- η μάζα είναι δυνατό να κινηθεί μόνο κατά την διεύθυνση που ταυτίζεται με τον άξονα του ελατηρίου κατά συνέπεια η μοναδική μεταβλητή που θα περιγράψει την κίνηση της μάζας θα είναι η μετατόπιση $u(t)$ που αποτελεί συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 3.1: α) μονοβάθμιο σύστημα β) δυνάμεις που ασκούνται

Για να προσδιοριστεί η συνάρτηση μετατόπισης $u(t)$ που περιγράφει την θέση της μάζας του συστήματος συναρτήσει του χρόνου, εφαρμόζεται ο δεύτερος νόμος του Newton (θεμελιώδης νόμος της μηχανικής) για τις δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα,

$$\sum F = ma \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας τις δυνάμεις προκύπτει

$$F(t) - F_k - F_b = F_m \quad (3.3)$$

ή

$$F_m + F_k + F_b = F(t) \quad (3.4)$$

Η δύναμη F_k , τείνει να επαναφέρει την μάζα στην αρχική θέση ισορροπίας της, ασκείται από το ελατήριο, είναι απευθείας ανάλογη της μετατόπισης με συντελεστή αναλογίας το μέτρο ακαμψίας του ελατηρίου και δίδεται από την σχέση

$$F_k = -ku \quad (3.5)$$

Η δύναμη απόσβεσης F_b είναι απευθείας ανάλογη της ταχύτητας, $V(t)$, και δίδεται από την σχέση

$$F_b = -b \frac{du}{dt} = -bV(t) \quad (3.6)$$

Οι δυνάμεις αδράνειας που ασκούνται στην μάζα λόγω της επιτάχυνσης που υφίσταται από την δύναμη $F(t)$, δίδονται από την σχέση

$$F_m = m \frac{d^2u}{dt^2} = ma(t) \quad (3.7)$$

Το αρνητικό πρόσημο στις εξισώσεις (3.5) και (3.6) δηλώνει την αντίθετη ως προς την μετατόπιση φορά των δυνάμεων.

Ανάλογα με το αν υπάρχουν τριβές που ασκούνται στη μάζα (αποσβέσεις) ή επιβάλλονται εξωτερικές, περιοδικά μεταβαλλόμενες δυνάμεις αρμονικές ή μη, οι ταλαντώσεις ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας είναι δυνατό να διακριθούν στις εξής περιπτώσεις:

- Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση
- Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση
- Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση
- Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση
- Εξαναγκασμένη μη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

3.3.1 Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Εξίσωση της κίνησης

Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση έχει την μορφή

$$F_m + F_k = 0 \quad (3.8)$$

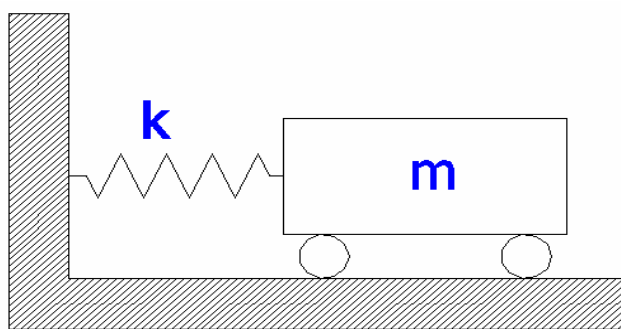
και προκύπτει από την γενικευμένη εξίσωση (3.3) εάν τεθεί όπου $F(t) = 0$ και $b = 0$. Αντικαθιστώντας τώρα τις δυνάμεις F_k και F_m στην εξίσωση (3.8) προκύπτει η διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = 0 \quad (3.9.a)$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σαν

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad (3.9.β)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



σχήμα 3.2: Σύστημα μονοβάθμιου ταλαντωτή που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

Συνάρτηση της μετατόπισης

Η εξίσωση (3.9.β) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές. Η ρίζα της μπορεί να αναζητηθεί σε συναρτήσεις της μορφής

$$u(t) = e^{\rho t} \quad (3.10)$$

για τις οποίες διαπιστώνεται εύκολα, ότι όταν παραγωγίζονται κατεβάζουν από τον εκθέτη τον συντελεστή της μεταβλητής t και δίνουν την ακολουθία

$$\frac{du}{dt} = \rho e^{\rho t}, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \rho^2 e^{\rho t}, \quad \dots, \quad \frac{d^n u}{dt^n} = \rho^n e^{\rho t}$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη παράγωγο της (3.10) στην εξίσωση (3.9.β) προκύπτει η εξίσωση

$$\rho^2 e^{\rho t} + \omega_0^2 e^{\rho t} = 0 \Rightarrow (\rho^2 + \omega_0^2) e^{\rho t} = 0 \quad (3.11)$$

η οποία ικανοποιείται όταν επαληθεύεται η ισότητα

$$\rho^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \rho = \pm i \omega_0 \quad (3.12)$$

Η εξίσωση (3.12) καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** της διαφορικής εξίσωσης (3.9.β). Από τις σχέσεις (3.10) και (3.12) προκύπτει ότι η εξίσωση (3.9.β) θα έχει τις εξής δυο ρίζες

$$u_1(t) = e^{\rho_1 t} \text{ και } u_2(t) = e^{\rho_2 t} \quad (3.13)$$

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των ομογενών και γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι ότι η συνάρτηση που προκύπτει από το γραμμικό συνδυασμό των ριζών μίας εξίσωσης είναι και αυτή ρίζα της διαφορικής εξίσωσης. Σύμφωνα με τα παραπάνω η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.9.β) είναι η συνάρτηση

$$u(t) = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t} \quad (3.14)$$

με c_1 και c_2 σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Για τις μιγαδικές εκθετικές εξισώσεις ισχύει ο τύπος του Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, βάσει του οποίου η εξίσωση (3.14) μπορεί να δοθεί στην ισοδύναμη μορφή

$$u(t) = (c_1 + c_2) \cos \omega_0 t + i(c_1 - c_2) \sin \omega_0 t \quad (3.15)$$

Θεωρώντας ότι οι σταθερές c_1 και c_2 είναι δυο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, οι ποσότητες $\mathbf{D}=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$ και $\mathbf{C}=i(\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2)$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι δυνατό ως ισοδύναμη έκφραση της εξίσωσης (3.15) να χρησιμοποιηθεί η

$$u(t) = D \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t \quad (3.16.\alpha)$$

ή

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3.16.\beta)$$

όπου $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ το πλάτος της ταλάντωσης και $\phi = \arctan\left(\frac{D}{C}\right)$ η φάση. Οι συντελεστές C και D είναι δυνατό να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες που λαμβάνονται για τις τιμές της μετατόπισης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης (Τραχανάς, 1999). Η συνάρτηση (3.16.β) καλείται συνάρτηση της μετατόπισης. Παρατηρώντας την εξίσωση (3.16.β), διαπιστώνεται ότι το σύστημα ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Η γωνιακή συχνότητα συνδέεται με την συχνότητα σύμφωνα με την σχέση

$$\omega = 2\pi f \quad (3.17)$$

και έχει ως μονάδα το rad/sec.

Συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης

Οι εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της μάζας είναι δυνατό να υπολογιστούν από την διαδοχική παραγωγή της εξίσωσης της μετατόπισης. Η ταχύτητα δίδεται από την σχέση

$$V(t) = -D\omega_0 \sin \omega_0 t + C\omega_0 \cos \omega_0 t \quad (3.18.\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή

$$V(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.18.\beta)$$

και η επιτάχυνση από την σχέση

$$a(t) = -D\omega_0^2 \cos \omega_0 t - C\omega_0^2 \sin \omega_0 t \quad (3.19.\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή

$$a(t) = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3.19.\beta)$$

ή

$$a(t) = -\omega_0^2 u(t) \quad (3.19.\gamma)$$

Προσδιορισμός συντελεστών C και D

Το πλάτος και η φάση της ταλάντωσης αποτελούν εξισώσεις των σταθερών C και D . Για να υπολογιστούν γίνεται χρήση των αρχικών συνθηκών $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$ και $\mathbf{V}(0)=\mathbf{V}_0$ τη χρονική στιγμή $t=0$. Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.16.α) και (3.18.α) δίνει $D = u_0$ και $C = V_0 / \omega_0$

3.3.2 Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Εξίσωση της κίνησης

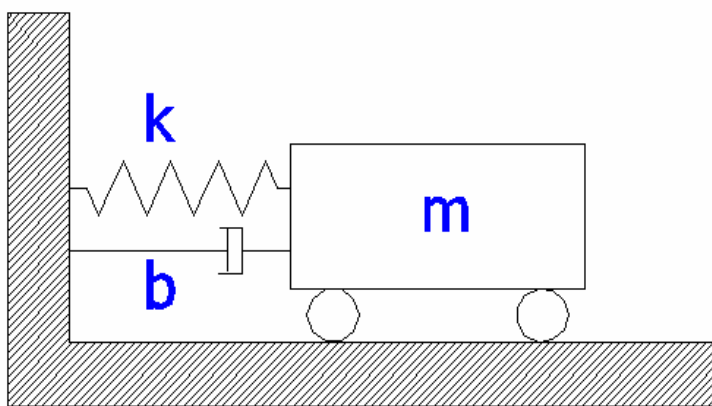
Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση έχει την μορφή

$$F_m + F_b + F_k = 0 \quad (3.20)$$

και προκύπτει από την γενικευμένη εξίσωση (3.3) εάν τεθεί όπου $F(t) = 0$. Αντικαθιστώντας τώρα τις δυνάμεις F_k , F_b και F_m στην εξίσωση (3.20) προκύπτει η διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + b \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (3.21.\alpha)$$

η οποία μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή



Σχήμα 3.3: Σύστημα ελατηρίου, μάζας και μηχανισμού απόσβεσης σε μονοβάθμιο ταλαντωτή

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad (3.21.\beta)$$

όπου $\gamma = b/2m$ και $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ η φυσική γωνιακή συχνότητα .

Συνάρτηση της μετατόπισης

Η εξίσωση (3.21.β) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού με σταθερούς συντελεστές. Για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης, υπολογίζεται η χαρακτηριστική της εξίσωση

$$(\rho^2 + 2\gamma\rho + \omega_0^2) = 0 \quad (3.22)$$

η οποία έχει ρίζες

$$\rho_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \rho_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3.23)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.21.β) είναι η συνάρτηση

$$u(t) = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t} \quad (3.24)$$

με c_1 και c_2 σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ) της χαρακτηριστικής εξίσωσης μπορούν να διακριθούν οι εξής περιπτώσεις:

- $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow b > 2\sqrt{km}$ (**ισχυρή απόσβεση**). Οι ρίζες της εξίσωσης (3.22) θα είναι πραγματικοί και μάλιστα αρνητικοί αριθμοί. Η γενική λύση της εξίσωσης (3.21.β) μπορεί να γραφτεί $u(t) = c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t}$ με $\gamma_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ και $\gamma_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.
- $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{km}$ (**κρίσιμη απόσβεση**). Η εξίσωση (3.22) θα έχει μία διπλή ρίζα με τιμή $\rho = -\gamma$. Η μία λύση της διαφορικής εξίσωσης θα έχει τη μορφή $u_1(t) = c_1 e^{-\gamma t}$. Από την θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι όταν η χαρακτηριστική εξίσωση μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές έχει διπλή ρίζα η δεύτερη λύση της εξίσωσης είναι της μορφής $u_2(t) = c_2 t e^{-\gamma t}$. Η γενική λύση της εξίσωσης (3.21.β) θα είναι $u(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$.
- $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) < 0 \Rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow b < 2\sqrt{km}$ (**ασθενής απόσβεση**). Η εξίσωση (3.22) έχει τις δύο μιγαδικές ρίζες, $\rho = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Η γενική λύση της εξίσωσης (3.9.β) στην περίπτωση αυτή είναι η συνάρτηση

$$u(t) = e^{-\gamma t} [(c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t] \quad (3.25)$$

$$\text{όπου } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί με την προϋπόθεση όμως ότι οι ποσότητες $\mathbf{D} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ και $\mathbf{C} = i(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι δυνατό ως ισοδύναμη έκφραση της εξίσωσης (3.25) να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση

$$u(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad (3.26)$$

$$\text{όπου } A = \sqrt{C^2 + D^2} \text{ και } \phi = \arctan\left(\frac{D}{C}\right).$$

Ο συντελεστής b μπορεί να συνδεθεί με την μάζα του ταλαντωτή και το μέτρο ακαμψίας του ελατηρίου σύμφωνα με την εξίσωση

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (3.27)$$

όπου ζ ο **λόγος απόσβεσης**. Εάν ο λόγος απόσβεσης είναι μεγαλύτερος της μονάδας η απόσβεση είναι ισχυρή, εάν είναι μικρότερος η απόσβεση είναι ασθενής και εάν είναι ίσος με τη μονάδα η απόσβεση είναι κρίσιμη. Τόσο ο συντελεστής γ όσο και η γωνιακή συχνότητα ω είναι δυνατό να δοθούν ως συναρτήσεις της θεμελιώδους ή φυσικής γωνιακής συχνότητας του συστήματος ω_0 και του λόγου απόσβεσης ζ . Οι σχέσεις που προκύπτουν είναι

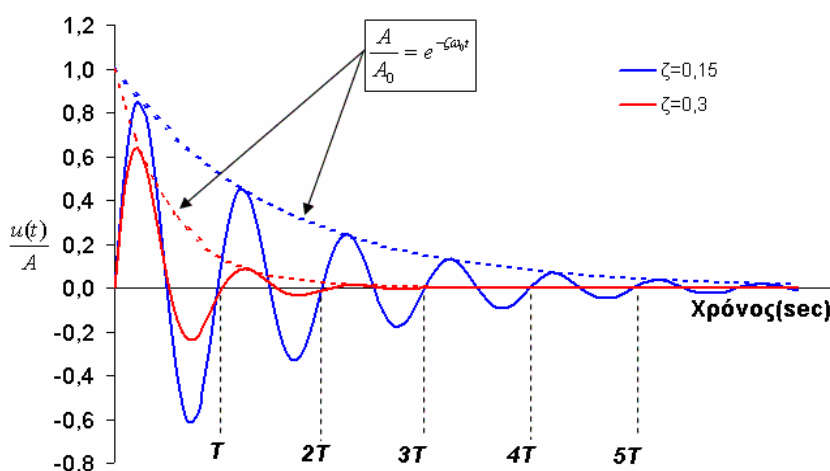
$$\gamma = \zeta \sqrt{\frac{k}{m}} = \zeta \omega_0 \quad (3.28)$$

και

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.29)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.26), (3.28) και (3.29) η συνάρτηση της μετατόπισης μπορεί να δοθεί στην ισοδύναμη μορφή

$$u(t) = A e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \quad (3.30)$$



Σχήμα 3.4: Καμπύλες πλάτους και μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου στην ελεύθερη αποσβένουσα ταλάντωση

Συνάρτηση της ταχύτητας V(t)

Η εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει εάν παραγωγιστεί η εξίσωση της μετατόπισης ως προς το χρόνο. Ανάλογα με την τιμή του λόγου απόσβεσης μπορούν να διακριθούν οι εξής περιπτώσεις

- ($\zeta > 1$) $V(t) = -c_1\gamma_1 e^{-\gamma_1 t} - c_2\gamma_2 e^{-\gamma_2 t}$
- ($\zeta = 1$) $V(t) = [c_2 - \gamma(c_1 + c_2 t)]e^{-\gamma t}$
- ($\zeta < 1$) $V(t) = e^{-\gamma t}[(\omega C - \gamma D)\cos \omega t - (\gamma C + \omega D)\sin \omega t]$

Συνάρτηση της επιτάχυνσης a(t)

Η εξίσωση της επιτάχυνσης προκύπτει εάν παραγωγιστεί η εξίσωση της ταχύτητας ως προς το χρόνο. Ανάλογα με την τιμή του λόγου απόσβεσης διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις

- ($\zeta > 1$) $a(t) = c_1\gamma_1^2 e^{-\gamma_1 t} + c_2\gamma_2^2 e^{-\gamma_2 t}$
- ($\zeta = 1$) $a(t) = [\gamma^2(c_1 + c_2 t) - 2\gamma c_2]e^{-\gamma t}$
- ($\zeta < 1$) $a(t) = e^{-\gamma t}[(\gamma^2 D - 2\omega\gamma C - \omega^2 D)\cos \omega t + (\gamma^2 C + 2\gamma\omega D - \omega^2 C)\sin \omega t]$

Προσδιορισμός συντελεστών C και D

Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα είδη των αρχικών συνθηκών που επιλέγονται για τον προσδιορισμό των συντελεστών C και D, είναι

- για $\mathbf{u(0)=u_0}$ και $\mathbf{V(0)=V_0}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ προκύπτει ότι $D = u_0$ και

$$C = \frac{V_0 + \gamma u_0}{\omega}$$

- για $\mathbf{u(0)=u_0}$ και $\mathbf{a(0)=a_0}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ προκύπτει ότι $D = u_0$ και

$$C = \frac{(\gamma^2 + \omega^2)u_0 - a_0}{2\omega\gamma}$$

3.3.3 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Εξίσωση της κίνησης

Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση έχει την μορφή

$$F_m + F_k = F(t) \quad (3.31)$$

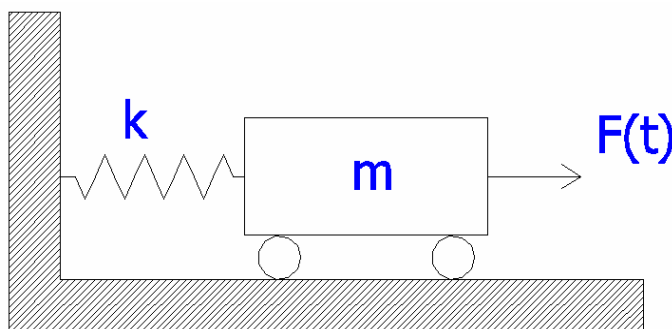
και προκύπτει από την γενικευμένη εξίσωση (3.3) εάν τεθεί όπου $b = 0$. Αντικαθιστώντας τώρα τις δυνάμεις F_k , F_m και $F(t)$ στην εξίσωση (3.31) προκύπτει η διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = F(t) \quad (3.32.a)$$

η οποία μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \frac{1}{m} F(t) \quad (3.32.β)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ η φυσική γωνιακή συχνότητα .



Σχήμα 3.5: μονοβάθμιο σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

Η χρονικά μεταβαλλόμενη περιοδική δύναμη παρουσιάζει μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον όταν είναι μια ημιτονοειδής (αρμονική) συνάρτηση του χρόνου, της μορφής

$$F = F_0 \sin(\omega_f t) \quad (3.33)$$

όπου F_0 η μέγιστη τιμή της δύναμης (πλάτος) και ω_f η κυκλική συχνότητα της περιοδικά μεταβαλλόμενης δύναμης. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση (3.33) στην εξίσωση της κίνησης (3.32.β) προκύπτει η σχέση

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = f_0 \sin(\omega_f t) \quad (3.34)$$

όπου $f_0 = F_0 / m$.

Συνάρτηση της μετατόπισης

Η εξίσωση (3.34) είναι μια γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού με σχετικά απλό δεύτερο μέλος. Η μεθοδολογία επίλυσης τέτοιου είδους συνήθων διαφορικών εξισώσεων συνίσταται αρχικά στην εύρεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, στην εύρεση μιας οποιανδήποτε μερικής λύσης της μη ομογενούς και τέλος στην πρόσθεση των δύο προηγούμενων λύσεων για την εύρεση της γενικής. Η ομογενής διαφορική εξίσωση προκύπτει εάν τεθεί το δεξιό μέλος της μη ομογενούς ίσο με μηδέν (Τραχανάς, 1999). Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ομογενής διαφορική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (3.34) είναι η εξίσωση (3.9.β), που περιγράφει την κίνηση στην απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή, η οποία έχει γενική λύση την συνάρτηση (3.16.α). Μια μερική λύση της (3.34) είναι η συνάρτηση

$$u_f(t) = A_f \sin(\omega_f t) \quad (3.35)$$

όπου $A_f = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$ το πλάτος της μετατόπισης (Τραχανάς, 1999). Σύμφωνα με τα

παραπάνω η γενική λύση της εξίσωσης (3.34) είναι η συνάρτηση

$$u(t) = u_h(t) + u_f(t) \quad (3.36)$$

όπου $u_h(t)$ η συνάρτηση (3.16.α).

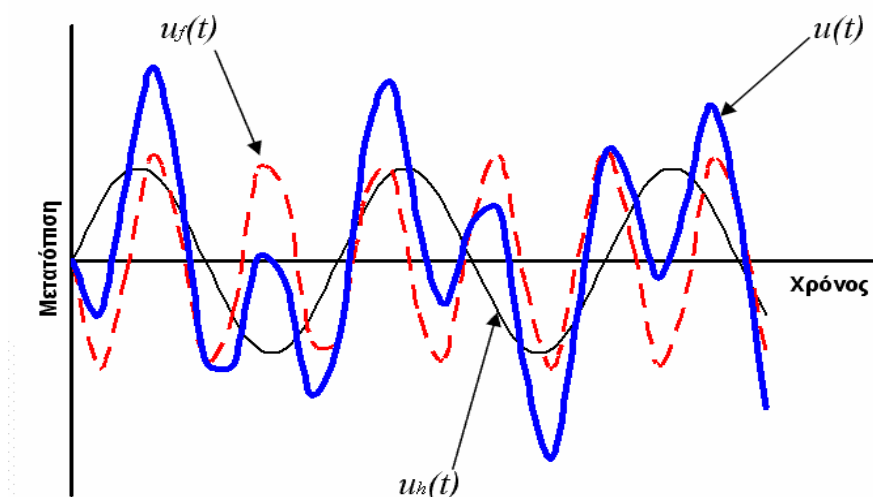
Αντικαθιστώντας τώρα τις συναρτήσεις (3.16.α) και (3.35) στην ισότητα (3.36) προκύπτει η συνάρτηση

$$u(t) = [C \sin(\omega_0 t) + D \cos(\omega_0 t)] + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \sin(\omega_f t) \quad (3.37)$$

η οποία μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) + A_f \sin(\omega_f t) \quad (3.38)$$

όπου $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ και $\phi = \arctan\left(\frac{D}{C}\right)$.



Σχήμα 3.6: χρονική μεταβολή της μετατόπισης στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Συναρτήσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης

Οι συναρτήσεις της επιτάχυνσης και της ταχύτητας προκύπτουν από την διαδοχική παραγωγή της εξίσωσης (3.37). Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$V(t) = [\omega_0 C \cos \omega_0 t - \omega_0 D \sin \omega_0 t] + \omega_f A_f \cos \omega_f t \quad (3.39)$$

και η επιτάχυνση από την σχέση

$$a(t) = -\left\{\omega_0^2 C \sin \omega_0 t + \omega_0^2 D \cos \omega_0 t\right\} + \omega_f^2 A_f \sin \omega_f t \quad (3.40)$$

Προσδιορισμός συντελεστών C και D

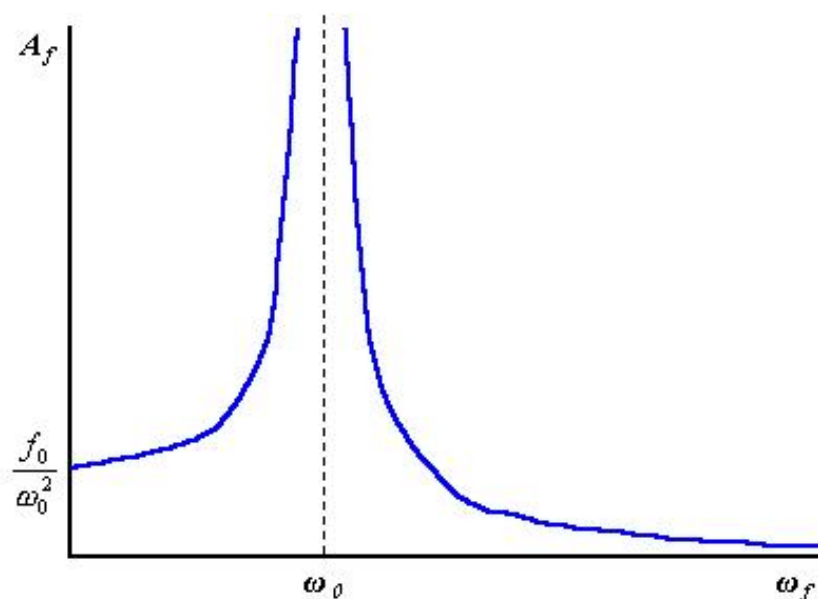
Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα είδη των αρχικών συνθηκών που επιλέγονται για τον προσδιορισμό των συντελεστών C και D, είναι

➤ για $\mathbf{u(0)=u_0}$ και $\mathbf{V(0)=V_0}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ προκύπτει ότι $D = u_0$ και

$$C = \frac{V_0 - \omega_f A_f}{\omega_0}$$

Συντονισμός

Παρατηρώντας το πλάτος της δύναμης, A_f , διαπιστώνεται ότι όσο η γωνιακή συχνότητα της δύναμης πλησιάζει την φυσική γωνιακή συχνότητα του συστήματος το πλάτος αυξάνεται τείνοντας στο άπειρο. Για $\omega_0 = \omega_f$ το πλάτος της δύναμης γίνεται άπειρο και το φαινόμενο αυτό καλείται **συντονισμός** (σχήμα 3.7). Για τις συνήθεις εφαρμογές της δυναμικής των κατασκευών το πλάτος δεν απειρίζεται ποτέ διότι υπάρχουν τριβές έστω και αμελητέες. Είναι δυνατό όμως, ανάλογα με τον λόγο απόσβεσης (ζ), το πλάτος της μετατόπισης να λάβει πολύ μεγάλες τιμές με καταστροφικά αποτελέσματα για τις κατασκευές.



Σχήμα 3.7: Καμπύλη συντονισμού

3.3.4 Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Εξίσωση της κίνησης

Η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση αποτελεί την γενικότερη περίπτωση αρμονικής κίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή. Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση έχει την μορφή

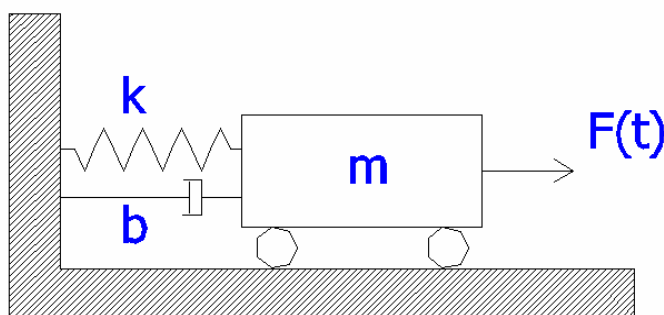
$$F_m + F_b + F_k = F(t) \quad (3.41)$$

Αντικαθιστώντας τις δυνάμεις F_m , F_b , F_k και $F(t)$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + b \frac{du}{dt} + ku = F_0 \sin(\omega_f t) \quad (3.42)$$

η οποία πραγματοποιώντας τις αντικαταστάσεις $\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ και $f_0 = F_0/m$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = f_0 \sin(\omega_f t) \quad (3.43)$$



Σχήμα 3.8 σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Συνάρτηση της μετατόπισης

Η εξίσωση (3.43) είναι μια γραμμική μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού με απλό δεύτερο μέλος. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η συνάρτηση (3.25), η οποία θα συμβολίζεται στην συγκεκριμένη παράγραφο σαν $u_h(t)$ ενώ μία μερική λύση της μη ομογενούς είναι η συνάρτηση

$$u_f(t) = a \sin \omega_f t + b \cos \omega_f t \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας την μερική λύση $u_f(t)$ στην εξίσωση (3.43) προκύπτει η εξίσωση

$$\{a(\omega_0^2 - \omega_f^2) - 2\omega_f b\} \sin \omega_f t + \{2\omega_f a + b(\omega_0^2 - \omega_f^2)\} \cos \omega_f t = f_0 \sin \omega_f t \quad (3.45)$$

η οποία για να ικανοποιείται πρέπει να ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{cases} a(\omega_0^2 - \omega_f^2) - 2\omega_f b = f_0 \\ 2\omega_f a + b(\omega_0^2 - \omega_f^2) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς τους συντελεστές a και b προκύπτουν οι ισότητες

$$a = \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_f^2 \gamma^2} f_0 \quad \text{και} \quad b = -\frac{2\omega_f \gamma}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_f^2 \gamma^2} f_0 \quad (3.47)$$

(Τραχανάς, 1999). Η μερική λύση της εξίσωσης (3.43) μπορεί να δοθεί ισοδύναμα ως

$$u_f(t) = A_f \sin(\omega_f t + \phi_f) \quad (3.48)$$

όπου

$$A_f = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_f^2 \gamma^2}} \quad (3.49)$$

και

$$\phi_f = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{2\omega_f \gamma}{\omega_f^2 - \omega_0^2}\right) \quad (3.50)$$

Η συνάρτηση (3.49) με τις αντικαταστάσεις $f_0 = F_0 / m$ και $\beta = \omega_f / \omega_0$, μπορεί να γραφεί ως

$$A_f = \frac{F_0 \omega_0^2}{m} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\zeta)^2}} \quad (3.51)$$

ενώ με την αντικατάσταση $m = k / \omega_0^2$ και τις κατάλληλες πράξεις προκύπτει η ισότητα

$$D = \frac{A_f}{F_0 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\zeta)^2}} \quad (3.52)$$

Το μέγεθος D καλείται **δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης** και μπορεί να εκφραστεί ως

$$D = \frac{A_f}{u_{fst}} \quad (3.53)$$

όπου $u_{fst} = \frac{F_0}{k}$ η στατική μετατόπιση του συστήματος εξαιτίας της εφαρμοζόμενης στατικής δύναμης F_0 . Θεωρώντας τη συνάρτηση $g(\beta) = (1 - \beta^2)^2 + (2\beta\zeta)^2$, η σχέση που δίνει το δυναμικό συντελεστή μεγέθυνσης γίνεται $D = (\sqrt{g(\beta)})^{-1}$. Ο δυναμικός συντελεστής λαμβάνει τη μέγιστη τιμή ($D = D_{MAX}$ άρα και $A_f = A_{fMAX}$, εφόσον το πλάτος της δύναμης F_0 παραμένει σταθερό) όταν ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $g(\beta)$ δηλαδή όταν $\frac{dg}{d\beta} = 0$. Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα ελάχιστων τιμών προκύπτει ότι $D = D_{MAX}$ για

$$\beta^{MAX} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (3.54)$$

και

$$\omega_f = \beta^{MAX} \omega_0 \quad (3.55)$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνεται ότι η κυκλική συχνότητα ω_f^{MAX} για την οποία το πλάτος γίνεται μέγιστο (συχνότητα συντονισμού), εξαρτάται αποκλειστικά από την φυσική γωνιακή συχνότητα του συστήματος και το λόγο απόσβεσης. Στο σχήμα 3.9 παρουσιάζονται οι καμπύλες του δυναμικού συντελεστή συναρτήσει του λόγου β για διάφορες τιμές του λόγου απόσβεσης. Όσο αυξάνεται ο λόγος απόσβεσης τόσο το φαινόμενο του συντονισμού εξασθενεί μέχρι που εξαλείφεται πλήρως για υψηλές τιμές.

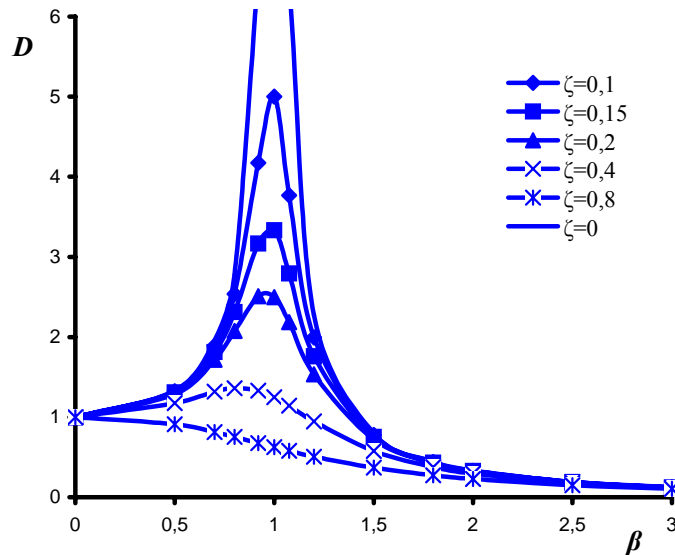
Η ομογενής διαφορική εξίσωση που αντιστοιχεί στην εξίσωση (3.43), όπως αναφερθεί προηγουμένως, έχει λύση τη συνάρτηση

$$u_h(t) = e^{-\gamma t} [D \cos \omega t + C \sin \omega t] \quad (3.56)$$

Η γενικευμένη εξίσωση της μετατόπισης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με τριβή για την περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, προκύπτει από το άθροισμα των συναρτήσεων (3.56) και (3.48). Συνεπώς η γενική λύση της (3.43) είναι η συνάρτηση

$$u(t) = e^{-\gamma t} [D \cos \omega t + C \sin \omega t] + A_f \sin(\omega_f t + \phi) \quad (3.57)$$

όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.



Σχήμα 3.9: Δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης συναρτήσει του λόγου β

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.28), ως ισοδύναμη έκφραση της (3.57) μπορεί να δοθεί η συνάρτηση

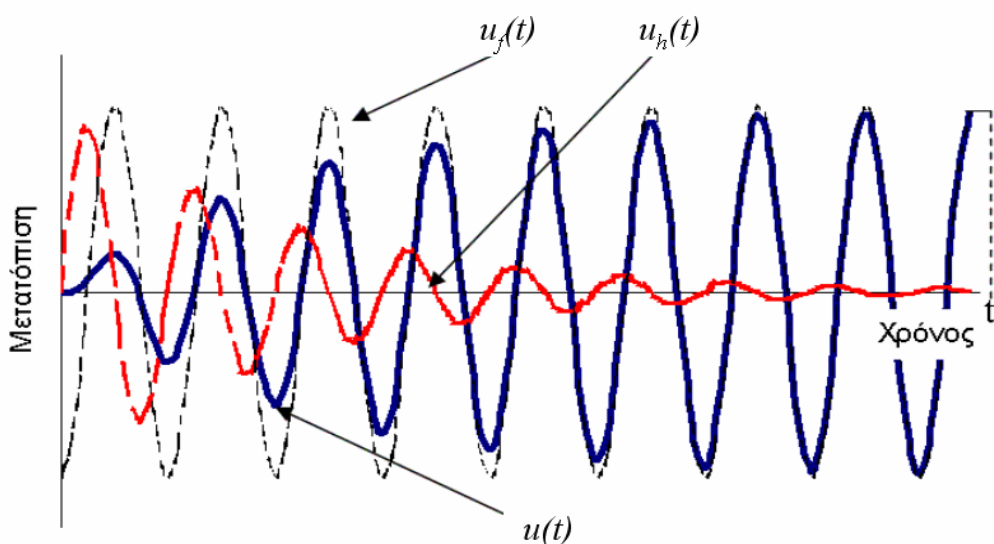
$$u(t) = \left\{ A e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \right\} + \left\{ A_f \sin(\omega_f t + \phi_f) \right\} \quad (3.58)$$

όπου $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ και $\phi = \arctan \frac{D}{C}$.

Απ' όλα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω αλλά και από την συνάρτηση (3.58), προκύπτει ότι η γενικευμένη συνάρτηση που περιγράφει την μετατόπιση στην

συγκεκριμένη περίπτωση ταλάντωσης, αποτελεί το άθροισμα δύο συναρτήσεων. Κατά την μαθηματική ανάλυση της συγκεκριμένης κίνησης, οι δύο αυτές συναρτήσεις εμφανίστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν ως μερική και γενική λύση μίας μη ομογενούς και της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Η φυσική σημασία του αθροίσματος αυτού είναι ότι η κίνηση που δίνει το δυναμικό σύστημα του σχήματος 3.8, είναι η συνισταμένη δύο κινήσεων, μιας απλής αρμονικής αποσβένουσας ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα ω και λόγο απόσβεσης ζ (γενική λύση ομογενούς-επίδραση απόσβεσης στο σύστημα) και μίας απλής αρμονικής ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα ω_f (μερική λύση μη ομογενούς-επίδραση διεγείρουσας δύναμης στο σύστημα).

Στο σχήμα 3.10, παρουσιάζονται οι δύο συνιστώσες κινήσεις ($u_h(t)$ και $u_f(t)$) και η συνισταμένη κίνηση του μονοβάθμιού ταλαντωτή που εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση. Παρατηρείται εύκολα ότι, κατά την έναρξή της κίνησης καθώς και για ένα χρονικό διάστημα t_i , επιδρούν στο σύστημα τόσο οι δυνάμεις απόσβεσης όσο και η αρμονικά μεταβαλλόμενη διεγείρουσα δύναμη. Από μια χρονική στιγμή και μετά το πλάτος της αποσβένουσας κίνησης πρακτικά μηδενίζεται και το σύστημα αποκρίνεται αποκλειστικά στην κίνηση που του επιβάλλει το εξωτερικό φορτίο. Το χρονικό διάστημα στο οποίο υφίσταται η αποσβένουσα κίνηση καλείται **μεταβατικό στάδιο** ενώ το στάδιο που ακολουθεί και υφίσταται μόνο η κίνηση που οφείλεται στην διεγείρουσα δύναμη καλείται **στάδιο μόνιμης αποκρίσεως**.



Σχήμα 3.10: Καμπύλες μετατόπισης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

Εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης

Οι εξισώσεις της επιτάχυνσης και της ταχύτητας προκύπτουν από διαδοχική παραγωγή της εξίσωσης (3.57). Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$V(t) = e^{-\gamma t} [(\omega C - \gamma D) \cos \omega t - (\gamma C + \omega D) \sin \omega t] + \omega_f A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \quad (3.59)$$

και η επιτάχυνση από την σχέση

$$a(t) = e^{-\gamma t} [(\gamma^2 D - 2\gamma\omega C - \omega^2 D) \cos \omega t + (\gamma^2 C + 2\gamma\omega D - \omega^2 C) \sin \omega t] - \omega_f^2 A_f \sin(\omega_f t + \phi_f) \quad (3.60)$$

Προσδιορισμός συντελεστών C και D

Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα είδη των αρχικών συνθηκών που επιλέγονται για τον προσδιορισμό των συντελεστών C και D, είναι

- για $\mathbf{u(0)=u_0}$ και $\mathbf{V(0)=V_0}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ προκύπτει ότι

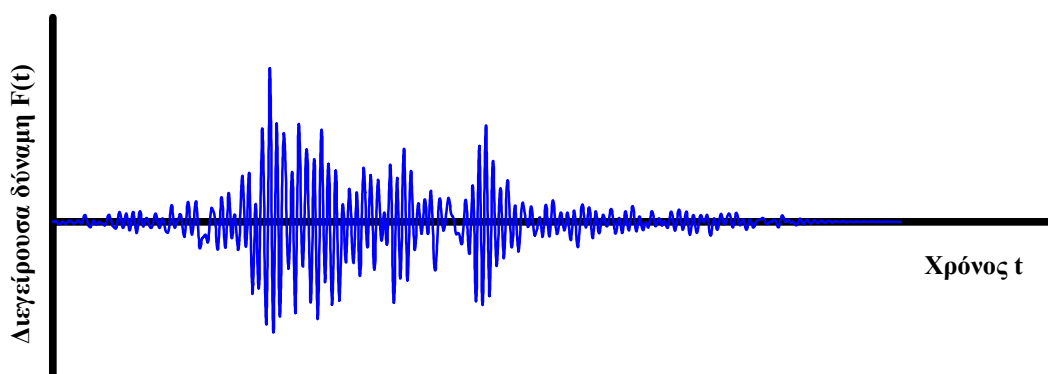
$$D = u_0 - A_f \sin \phi_f \quad \text{και} \quad C = \frac{V_0 - \omega_f A_f \cos \phi_f + \gamma D}{\omega}$$

- για $\mathbf{u(0)=u_0}$ και $\mathbf{a(0)=a_0}$ τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ προκύπτει ότι

$$D = u_0 - A_f \sin \phi_f \quad \text{και} \quad C = \frac{(\gamma^2 - \omega^2)D - a_0 - \omega_f^2 A_f \sin \phi_f}{2\gamma\omega}$$

3.3.5 Εξαναγκασμένη μη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Οι περιπτώσεις εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που έχουν αναλυθεί μέχρι τώρα, προϋποθέτουν ότι η διεγείρουσα δύναμη αποτελεί αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Στην παρούσα παράγραφο θα αναλυθεί η περίπτωση όπου η διεγείρουσα δύναμη δεν είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου και αποτελεί η γενικότερη όλων των περιπτώσεων ανάλυσης του μονοβάθμιου ταλαντωτή. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο φυσικό αλλά και πρακτικό ενδιαφέρον διότι μη αρμονικά περιοδικά φορτία είναι αυτά που δίδουν οι σεισμοί.



Σχήμα 3.11: Τυχούσα, μη αρμονικά μεταβαλλόμενη χρονικά δύναμη

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $u(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \quad (3.61)$$

και συμβολίζεται ως

$$L[u(t)] = U(s) \text{ ή } L^{-1}[U(s)] = u(t) \quad (3.62)$$

όπου $L^{-1}[U(s)]$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός (Κατσικαδέλης, 1999)

Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι ακόλουθες

$$\text{➤ } L[u^{(n)}(t)] = s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0) \quad (3.63)$$

$$\text{➤ } L[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t)] = a_1 U_1(s) + a_2 U_2(s) + \dots + a_n U_n(s) \quad (3.64)$$

➤ το θεώρημα της συνέλιξης δύο συναρτήσεων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ το οποίο συμβολίζεται $u_1 * u_2$ και ορίζεται ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του γινόμενου των αντιστοιχών μετασχηματισμένων συναρτήσεων $U_1(s)$ και $U_2(s)$. Η μαθηματική έκφραση του θεωρήματος είναι

$$L^{-1}[U_1(s)U_2(s)] = u_1 * u_2 = \int_0^t u_1(\tau)u_2(t-\tau)d\tau \quad (3.65)$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει μια γραμμική διαφορική εξίσωση της συνάρτησης $u(t)$, σε γραμμική αλγεβρική εξίσωση της μετασχηματισμένης συνάρτησης $U(s)$ (Τραχανάς, 1999).

Η εξίσωση της κίνησης

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.28) και (3.29), η διαφορική εξίσωση της κίνησης μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{m} F(t)$$

ή

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{1}{m} F(t) \quad (3.66)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης (3.66) προκύπτει

$$L[\ddot{u} + 2\zeta\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u] = \frac{1}{m} L[F(t)] = \frac{1}{m} P(s) \quad (3.67)$$

όπου $P(s)$ η μετασχηματισμένη συνάρτηση του δυναμικού φορτίου. Σύμφωνα με την σχέση (3.64) η εξίσωση (3.67) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$L[\ddot{u}] + 2\zeta\omega_0 L[\dot{u}] + \omega_0^2 L[u] = \frac{1}{m} P(s) \quad (3.68)$$

ενώ εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.63) στις παραγώγους της εξίσωσης της μετατόπισης $u(t)$ προκύπτουν οι ισότητες

$$L[\ddot{u}(t)] = s^2 U(s) - su_0 - \dot{u}_0 \quad (3.69)$$

και

$$L[\dot{u}(t)] = sU(s) - u_0 \quad (3.70)$$

όπου $V_0 = \dot{u}(0)$ και $u_0 = u(0)$. Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (3.69) και (3.70) στην εξίσωση (3.68) εξάγεται η τελική μετασχηματισμένη εξίσωση της κίνησης

$$(s^2 U(s) - s u_0 - V_0) + 2\zeta \omega_0 (s U(s) - u_0) + \omega_0^2 U s = \frac{1}{m} P(s) \quad (3.71)$$

η οποία είναι μια γραμμική αλγεβρική εξίσωση ως προς την συνάρτηση $U(s)$. Επιλύοντας την (3.71) ως προς $U(s)$ προκύπτει η εξίσωση

$$U(s) = \frac{u_0(s + 2\zeta \omega_0) + V_0}{s^2 + 2s\zeta \omega_0 + \omega_0^2} + \frac{1}{m} \frac{P(s)}{s^2 + 2s\zeta \omega_0 + \omega_0^2} \quad (3.72)$$

για την οποία μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι προκύπτει από το άθροισμα των συναρτήσεων

$$U_h(s) = \frac{u_0(s + 2\zeta \omega_0) + V_0}{s^2 + 2s\zeta \omega_0 + \omega_0^2} \quad (3.73)$$

και

$$U_f(s) = \frac{1}{m} \frac{P(s)}{s^2 + 2s\zeta \omega_0 + \omega_0^2} \quad (3.74)$$

όπου:

$U_h(s)$: η μετασχηματισμένη γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη μη ομογενή (3.66)

$U_f(s)$: μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3.66).

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση $u_h(t)$ (ή $U_h(s)$) περιγράφει μια ελεύθερη αρμονική αποσβένουσα ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω και η συνάρτηση $u_f(t)$ (ή $U_f(s)$) την κίνηση που προκύπτει από την επιβολή του δυναμικού φορτίου (Τραχανάς, 1999).

Ο παρανομαστής των όρων της μετασχηματισμένης συνάρτησης (3.72) μετά από πράξεις και κάνοντας την αντικατάσταση $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$s^2 + 2s\zeta \omega_0 + \omega_0^2 = (s + \zeta \omega_0)^2 + \omega^2 \quad (3.75)$$

ενώ εάν οριστεί μηδενική αρχική μετατόπιση, $u_0 = 0$, η συνάρτηση (3.73) παίρνει τη μορφή

$$U_h(s) = \frac{V_0}{(s + \omega_0 \zeta)^2 + \omega^2} \quad (3.76)$$

Από τους τυποποιημένους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιείται η ισότητα

$$L[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad (3.77)$$

οποία συνδέει αρχική και μετασχηματισμένη συνάρτηση (Τραχανάς, 1999). Θέτοντας στην σχέση (3.77) όπου $a = \omega_0 \zeta$ και $b = \omega$ προκύπτει η αρχική συνάρτηση της μετατόπισης για απλή αρμονική αποσβένουσα ταλάντωση

$$L^{-1}[U_h(s)] = u_h(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\zeta \omega_0 t} \sin \omega t \quad (3.78)$$

Για την εύρεση τώρα, της αρχικής συνάρτησης του όρου που περιγράφει τη μετατόπιση λόγω του εξωτερικού φορτίου $F(t)$ γίνεται χρήση του θεωρήματος της συνέλιξης. Η συνάρτηση (3.74) μπορεί να εκφραστεί με την μορφή γινομένου συναρτήσεων ως εξής

$$U_f(s) = P(s)h(s) \quad (3.79)$$

όπου

$$h(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \zeta \omega_0)^2 + \omega^2} \quad (3.80)$$

Η αρχική συνάρτηση συνδέεται με την μετασχηματισμένη σύμφωνα με την ισότητα

$$u_f(t) = L^{-1}[U_f(s)] = L^{-1}[P(s)h(s)] \quad (3.81)$$

ενώ κάνοντας χρήση παράλληλα της εξίσωσης (3.65) προκύπτει η μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.66)

$$u_f(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (3.82)$$

Γενική λύση της εξίσωσης της κίνησης είναι η συνάρτηση

$$u_f(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (3.83)$$

η οποία προκύπτει από τις εξισώσεις (3.36), (3.78) και (3.82) για αρχική μετατόπιση $u(0) = 0$ (Τραχανάς, 1999).

Η συνάρτηση (3.83) για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες έχει τη μορφή

$$u_f(t) = \left[\frac{V_0 + u_0 \zeta \omega_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t \right] e^{-\zeta\omega_0 t} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (3.84)$$

Το ολοκλήρωμα

$$I(t) = \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \quad (3.85)$$

καλείται ολοκλήρωμα **Duhamel** και εκφράζει την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)$ όταν το δυναμικό σύστημα έχει απόσβεση. Το ολοκλήρωμα του Duhamel είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά ή αριθμητικά ανάλογα με την μορφή που έχει η διεγείρουσα δύναμη $F(t)$ (Κατσιαδέλης, 1999).

3.4 Απόσβεση

Η απόσβεση εμφανίζεται σε κάθε μηχανικό σύστημα που εκτελεί ταλάντωση. Συνέπεια της απόσβεσης είναι η απώλεια ενέργειας από το σύστημα και έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του εύρους της ταλάντωσης (πλάτος). Η μηχανική ενεργεία που χάνεται από το σύστημα αποδίδεται στο περιβάλλον είτε με την μορφή θερμότητας είτε με την μορφή μηχανικού κύματος που στον αέρα εκδηλώνεται σαν ήχος (Κατσιαδέλης, 1999).

Ποιοτικά η απόσβεση διακρίνεται σε **εσωτερική** και **εξωτερική**. Η πρώτη οφείλεται στην εσωτερική μοριακή τριβή, μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις-ανελαστικότητα, και εξαρτάται από τη φύση του υλικού, ενώ η δεύτερη οφείλεται στις τριβές που αναπτύσσονται μεταξύ του συστήματος και του αέρα, μεταξύ θεμελιώσεων και εδάφους, μεταξύ των δομικών στοιχείων μίας κατασκευής (Αναστασιάδης, 1983).

Κατά την μελέτη των ταλαντώσεων το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην απόσβεση που έχει σχέση με την συμπεριφορά μιας κατασκευής. Η μελέτη της απόσβεσης ενός συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση γίνεται στο στάδιο την μόνιμης απόκρισης στο οποίο η απώλεια της ενέργειας είναι ίση με την ενεργεία που αποδίδεται στο σύστημα από την διεγείρουσα δύναμη (Κατσικαδέλης, 1999).

3.4.1 Ιξώδης απόσβεση

Η δύναμη ιξώδους απόσβεσης σε ένα μονοβάθμιο σύστημα δίδεται από τη εξίσωση (3.6) ενώ η συνάρτηση της μετατόπισης στο στάδιο της μόνιμης απόκρισης θα έχει τη μορφή

$$u(t) = A_f \sin(\omega_f t + \phi_f) \quad (3.86)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης (3.86) στην εξίσωση (3.6) προκύπτει η συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή της δύναμης απόσβεσης, F_b , και έχει τη μορφή

$$F_b(t) = bV(t) = b\omega_f A_f \cos(\omega_f t + \phi_f) \quad (3.87)$$

Υψώνοντας τώρα στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των συναρτήσεων (3.86) και (3.87) και προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, προκύπτει η σχέση

$$\left(\frac{F_b}{b\omega_f A_f} \right)^2 + \left(\frac{u}{A_f} \right)^2 = 1 \quad (3.88)$$

που συνδέει την δύναμη απόσβεσης με την μετατόπιση της μάζας. Η σχέση (3.88) εάν παρασταθεί σε άξονες u , F_b για μία περίοδο, $T = 2\pi / \omega_f$, δίνει μία έλλειψη με μήκος μικρού ημιάξονα το μέγεθος $b\omega_f A_f$ και μήκος μεγάλου ημιάξονα το πλάτος της

μετατόπισης, A_f , στο στάδιο της μόνιμης απόκρισης (σχήμα 3.12). Η έλλειψη αυτή καλείται **βρόχος υστέρησης** και το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από το βρόχο, ισούται με την μηχανική ενέργεια που χάνει το σύστημα λόγω ιξώδους απόσβεσης.

Η μηχανική ενέργεια που χάνεται λόγω απόσβεσης σε μία περίοδο ισούται με το έργο που παράγει η δύναμη απόσβεσης και μπορεί να προσδιοριστεί από την σχέση

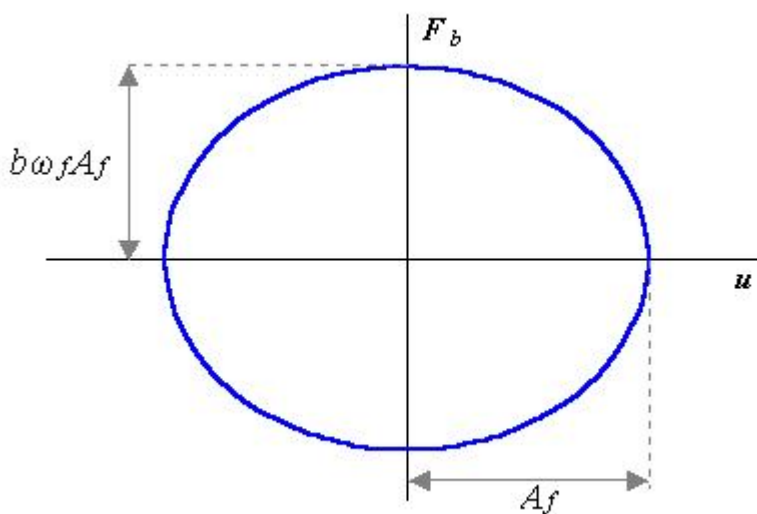
$$W_b = \int_0^{A_f} F_b du \quad (3.89)$$

ή

$$W_b = \int_0^T F_b V(t) dt \quad (3.90)$$

ενώ με αντικατάσταση της δύναμης F_b και της μετατόπισης $u(t)$ προκύπτει η σχέση

$$W_b = b(\omega_f A_f)^2 \int_0^T \cos^2(\omega_f t + \phi_f) dt = \pi b \omega_f A_f^2 \quad (3.91)$$



Σχήμα 3.12: Βρόχος υστερήσεως συστήματος με ιξώδη απόσβεση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η απώλεια ενέργειας στο συντονισμό. Όταν η γωνιακή συχνότητα δίνεται από τη σχέση (3.55), το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση του συντονισμού και το έργο που παράγει η αποσβένουσα δύναμη θα δίνεται από την εξίσωση

$$W_b = \pi b \omega_0 \beta^{\text{MAX}} A_f^2 \quad (3.91)$$

όπου $\beta^{\text{MAX}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$.

3.4.2 Ισοδύναμη ιξώδης απόσβεση

Όταν η απόσβεση δεν είναι φύσει ιξώδης, η καμπύλη $F_b(u)$ (διάγραμμα 3.12) γενικώς δεν αποτελεί έλλειψη. Παρόλα αυτά είναι δυνατό να προσδιοριστεί ένας **ισοδύναμος συντελεστής ιξώδους απόσβεσης** b_{eq} , εξισώνοντας το εμβαδόν W_b^E του πειραματικώς λαμβανόμενου βρόχου αποσβέσεως με την θεωρητική τιμή της απώλειας ενέργειας λόγο ιξώδους αποσβέσεως με συντελεστή b_{eq} (Κατσικαδέλης, 1999). Από την σχέση (3.91) υπολογίζεται το θεωρητικό έργο για $b=b_{eq}$ και εξισώνεται με το πειραματικό δίνοντας τη σχέση

$$b_{eq} = \frac{W_b^E}{\pi \omega_f A_f^2} \quad (3.92)$$

ενώ ο ισοδύναμος λόγος απόσβεσης θα δίδεται από τη σχέση

$$\zeta_{eq} = \frac{b_{eq}}{2\sqrt{km}} \quad (3.93)$$

3.4.3 Υστερητική απόσβεση

Στην πραγματικότητα όταν μια κατασκευή υποβάλλεται σε δυναμική καταπόνηση, η ενεργεία που αποδίδεται σε αυτή από την διεγείρουσα δύναμη, $F(t)$, μεταδίδεται μέσα στα δομικά υλικά της κατασκευής με την μορφή μηχανικών κυμάτων. Η σταδιακή μείωση του εύρους της ταλάντωσης οφείλεται στην απόσβεση που υφίσταται το κύμα λόγο των εσωτερικών τριβών σε μοριακό επίπεδο. Πειράματα που πραγματοποιήθηκαν από πολλούς ερευνητές έδειξαν ότι στα περισσότερα δομικά υλικά, όπως π.χ. ο χάλυβας, το αλουμίνιο και το σκυρόδεμα, η απώλεια ενέργειας ανά κύκλο δεν εξαρτάται από την συχνότητα της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης, αλλά είναι ανάλογη του τετραγώνου του εύρους της ταλαντώσεως. Η απόσβεση αυτή ονομάζεται **δομική ή υστερητική απόσβεση**. Η εξίσωση της κίνησης για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με υστερητική απόσβεση είναι της μορφής

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + f(u) = F(t) \quad (3.94)$$

όπου $f(u)$ μια μη γραμμική συνάρτηση της μετατόπισης, η οποία εκφράζει τη συνδυασμένη δύναμη επαναφοράς και απόσβεσης του συστήματος και έχει αναλυτικό τύπο

$$f(u) = \left(\frac{nk}{\omega_f} \right) \frac{du}{dt} + ku \quad (3.95)$$

με n τη **σταθερά αποσβέσεως**. Κάνοντας την παραδοχή ότι η διεγείρουσα δύναμη είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (3.94) και (3.95) προκύπτει η εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{nk}{\omega_f} \right) \frac{du}{dt} + ku = F_0 \sin \omega_f t \quad (3.96)$$

η οποία στο στάδιο της μόνιμης απόκρισης έχει λύση τη συνάρτηση

$$u(t) = A_{\phi} \sin(\omega_f t + \phi_{\phi}) \quad (3.97)$$

με

$$A_{\phi} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 - n^2}} \quad (3.98)$$

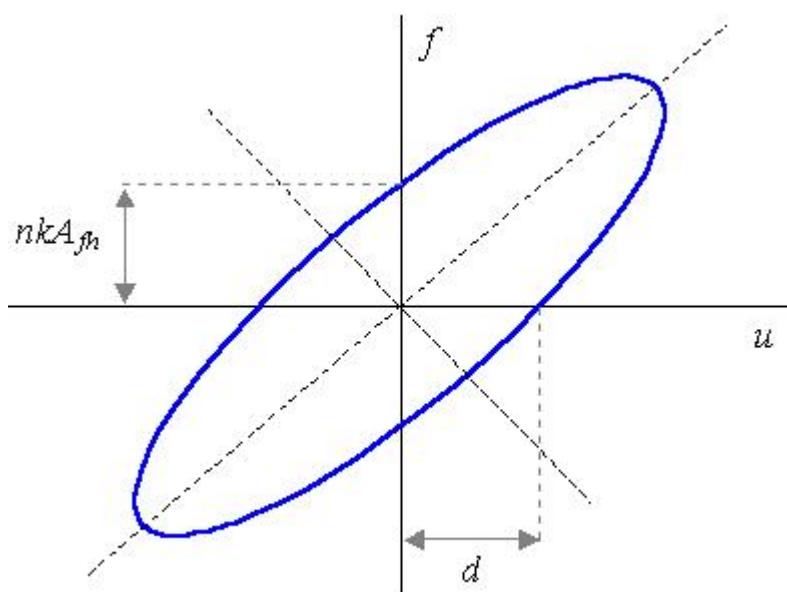
και

$$\phi_{\phi} = \arctan\left(\frac{n}{1 - \beta^2}\right) \quad (3.99)$$

Η διαδικασία προσδιορισμού της συνάρτησης που περιγράφει μαθηματικά το βρόχο υστέρησης είναι ίδια με εκείνη που ακολουθήθηκε στην ιξώδη απόσβεση. Η αναλυτική συνάρτηση της δύναμης $f(u)$ έχει τη μορφή

$$\left(\frac{f - ku}{nkA_{fn}} \right)^2 + \left(\frac{u}{A_{fn}} \right)^2 = 1 \quad (3.100)$$

και παριστά μια λοξή έλλειψη με τετμημένη στον άξονα των μετατοπίσεων , $d = nA_{fn} / \sqrt{1 + n^2}$ (Κατσικαδέλης, 1999).



Σχήμα 3.13: Βρόχος υστέρησης στην υστερητική ή δομική απόσβεση

3.5 Πολυβάθμια διακριτά συστήματα

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο (3.2) ως πολυβάθμια δυναμικά συστήματα ή πολυβάθμιοι ταλαντωτές, χαρακτηρίζονται τα συστήματα των οποίων η κίνηση για περιγραφεί πλήρως απαιτείται ο ορισμός N ανεξάρτητων μεταβλητών. Ο αριθμός των μεταβλητών αυτών εξαρτάται από τη δομή του συστήματος (κατανομή μαζών και ελαστικών ιδιοτήτων), από τον τρόπο διεγέρσεως του συστήματος και από την απαιτούμενη ακρίβεια. Γενικά, αυξανόμενου του αριθμού των ανεξαρτήτων μεταβλητών, αυξάνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Έτσι οι περιπτώσεις αναγωγής ενός πραγματικά απειροβάθμιου συστήματος σε μονοβάθμιο είναι σχετικά περιορισμένες, όταν με την κατάλληλη επιλογή ενός μικρού αριθμού ανεξαρτήτων

μεταβλητών, η αναγωγή του απειροβάθμιου συστήματος σε πολυβάθμιο γίνεται με ανεκτή ακρίβεια (Αναστασιάδης, 1983).

3.5.1 Η εξίσωση της κίνησης

Στο σχήμα 3.14 παρουσιάζεται σχηματικά ένας πολυβάθμιος ταλαντωτής του οποίου οι μάζες μπορούν να κινηθούν μόνο κατά την οριζόντια διεύθυνση. Εάν το σύστημα αποτελείται από N μάζες όπου η κάθε μια έχει ένα βαθμό ελευθερίας τότε οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος θα δίδονται από την σχέση

$$\{\text{Βαθμοί ελευθερίας του συστήματος}\} = \{\text{βαθμοί ελευθερίας της κάθε μάζας}\} \times \{\text{πλήθος μαζών}\} \quad (3.101)$$

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός πολυβάθμιου ταλαντωτή με N βαθμούς ελευθερίας έχει την μορφή

$$[m]\{\ddot{u}\} + [b]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{F\} \quad (3.102)$$

όπου:

$[m]$: το $N \times N$ **μητρώο μάζας** της κατασκευής

$[b]$: το $N \times N$ **μητρώο απόσβεσης** της κατασκευής

$[k]$: το $N \times N$ **μητρώο ακαμψίας** της κατασκευής

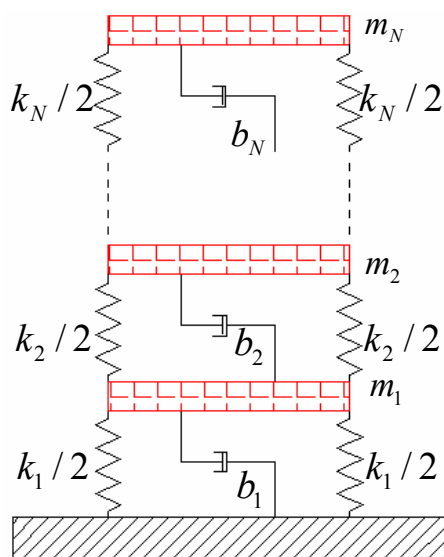
$\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$: τα $N \times 1$ διανύσματα της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της μετατόπισης κάθε βαθμού ελευθερίας του ταλαντωτή

$\{F\}$: το $N \times 1$ διάνυσμα της εφαρμοζόμενης διεγείρουσας δύναμης στο δυναμικό σύστημα

Για τα μητρώα ακαμψίας, μάζας και απόσβεσης στην παρούσα παράγραφο αναφέρεται απλά ότι

- το κάθε στοιχείο m_{ij} του μητρώου μάζας εκφράζει την αναπτυσσόμενη αδρανειακή δύναμη στον βαθμό ελευθερίας i λόγω της μοναδιαίας επιταχύνσεως κατά το βαθμό ελευθερίας j

- το κάθε στοιχείο b_{ij} του μητρώου απόσβεσης εκφράζει την αναπτυσσόμενη δύναμη απόσβεσης στον βαθμό ελευθερίας i λόγω της μοναδιαίας ταχύτητας κατά το βαθμό ελευθερίας j
- το κάθε στοιχείο k_{ij} του μητρώου ακαμψίας εκφράζει την αναπτυσσόμενη ελαστική δύναμη στον βαθμό ελευθερίας i λόγω της μοναδιαίας μετατοπίσεως κατά το βαθμό ελευθερίας j



Σχήμα 3.14: Απλουστευμένο μοντέλο πολυβάθμιου ταλαντωτή

Στη δυναμική των κατασκευών, ο υπολογισμός των παραπάνω μητρώων είναι μια σύνθετη διαδικασία η οποία έχει σχέση με την γεωμετρία της κατασκευής, την γεωμετρία των δομικών στοιχείων, τον τρόπο σύνδεσης μεταξύ τους και το είδος της καταπόνησης που υφίσταται το καθένα από αυτά. Συνήθεις πρακτική είναι η προσομοίωση της κατασκευής με ένα ισοδύναμο σύστημα σαν αυτό του σχήματος 3.14 και η μελέτη της συμπεριφοράς του ομοιώματος. Αποτελεί αποκλειστική ευθύνη του μελετητή το πλήθος των βαθμών ελευθερίας που θα επιλέξει για το ισοδύναμο ομοίωμα.

3.5.2 Το πρόβλημα των ιδιομορφών

Η μελέτη της κινήσεως των πολυβάθμιων συστημάτων μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά τον απλούστερο και συστηματικότερο τρόπο με την βοήθεια ορισμένων απλών κινήσεων, ανεξαρτήτων από οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση του συστήματος. Οι κινήσεις αυτές προδιαγράφονται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος, είναι

θεωρητικού χαρακτήρα και υπολογίζονται με καθαρά μαθηματική ανάλυση του εξιδανικευμένου ομοιώματος του πραγματικού συστήματος (Αναστασίαδης, 1983).

Για τον προσδιορισμό τους θεωρείται το τυχόν πολυβάθμιο μηχανικό σύστημα του σχήματος 3.6, με N βαθμούς ελευθερίας, μηδενική εξωτερική διέγερση και απουσία μηχανισμών απόσβεσης. Σαν αιτία της κινήσεως του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί μια τυχούσα παροδική δύναμη η οποία επιτάχυνε το σύστημα κάποια προγενέστερη χρονική στιγμή και τα χαρακτηριστικά της δεν ενδιαφέρουν την παρούσα ανάλυση. Η εξίσωση της κίνησης στην περίπτωση αυτή παίρνει την μορφή:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = 0 \quad (3.103)$$

και περιγράφει την κίνηση ενός πολυβάθμιου ταλαντωτή που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.3.1 η ρίζα της εξίσωσης (3.103) θα είναι μια περιοδική συνάρτηση της μορφής

$$\{u\} = \{U\}q(t) \quad (3.104)$$

όπου $\{U\}$ το $N \times 1$ διάνυσμα των μεγίστων τιμών της μετατόπισης(πλάτη) για κάθε βαθμό ελευθερίας και $q(t)$ μια περιοδική συνάρτηση της μορφής

$$q(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.105)$$

με φ το διάνυσμα των φάσεων για κάθε βαθμό ελευθερίας. Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης (3.104) θα δίδεται από την σχέση

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{U\}q(t) \quad (3.106)$$

ενώ αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.103) προκύπτει ότι

$$([k] - \lambda[m])\{U\}q(t) = 0 \quad (3.107)$$

όπου $\lambda = \omega^2$. Η εξίσωση (3.107) ικανοποιείται όταν

$$q(t) = 0 \quad (3.108)$$

όποτε δεν υφίσταται κίνηση του συστήματος ή όταν

$$([k] - \lambda[m])\{U\} = 0 \quad (3.109)$$

Η περίπτωση που ενδιαφέρει τη συγκεκριμένη ανάλυση περιγράφεται από την σχέση (3.109), η οποία αποτελεί ένα ομογενές γραμμικό σύστημα βαθμού N . Από την θεωρία της γραμμικής άλγεβρας είναι γνωστό ότι το παραπάνω σύστημα για

$$\det([k] - \lambda[m]) \neq 0 \quad (3.110)$$

έχει την τετριμμένη λύση $\{U\} = 0$, η οποία ικανοποιείται όταν ο ταλαντωτής ηρεμεί στην θέση ισορροπίας του, ενώ για

$$\det([k] - \lambda[m]) = 0 \quad (3.111)$$

το σύστημα επαληθεύεται από N διανύσματα $\{U\}_j \neq 0$ με $j=1:N$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα της σχέσης (3.111) προκύπτει ένα πολυώνυμο της μεταβλητής λ , N -οστού βαθμού το οποίο έχει ρίζες τις τιμές λ_j με $j=1:N$. Το πολυώνυμο αυτό καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος**. Κάθε ρίζα λ_j , αντιστοιχεί σε μία γωνιακή συχνότητα του ταλαντωτή, ω_j με $j=1:N$, η οποία καλείται **j γωνιακή ιδιοσυχνότητα ή φυσική συχνότητα του συστήματος** και αποτελεί χαρακτηριστικό μέγεθος του συστήματος, εφόσον εξαρτάται αποκλειστικά από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις μηχανικές του ιδιότητες. Στην γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_j αντιστοιχεί η **ιδιοσυχνότητα f_j** και η **ιδιοπερίοδος T_j** . Τέλος για κάθε ιδιοτιμή λ_j προκύπτει από την εξίσωση (3.109) το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\{U\}_j$ όπου το κάθε στοιχείο του διανύσματος εκφράζει το πλάτος της μετατόπισης του συγκεκριμένου βαθμού ελευθερίας. Το ιδιοδιάνυσμα $\{U\}_j$ καλείται **ιδιομορφή του j βαθμού ελευθερίας του συστήματος**. Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι δυνατό να σχηματιστεί το $N \times N$ μητρώο

$$[U] = [\{U\}_1 \quad \{U\}_2 \quad \cdots \quad \{U\}_N]$$

ή

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix}$$

όπου το στοιχείο U_{ij} είναι η μέγιστη μετατόπιση του βαθμού ελευθερίας i όταν το σύστημα ταλαντώνεται με κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_j . Ο πίνακας $[U]$ καλείται **modal** πίνακας του πολυβάθμιου ταλαντωτή. Αντίστοιχα με τον πίνακα $[U]$ μπορεί να οριστεί το μητρώο $[\omega^2]$ το οποίο, **φασματικός πίνακας (spectral matrix)** και έχει τη μορφή

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τα μητρώα που ορίστηκαν παραπάνω η εξίσωση (3.109) είναι δυνατό να γραφεί στη συμπαγή μορφή

$$[k][U] - [m][U][\omega^2] = 0 \quad (3.112)$$

Αλγεβρικές ιδιότητες των ιδιομορφών

Τα ιδιοδιανύσματα έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $\{U\}_i^T [m] \{U\}_j = 0$ για $i \neq j$ ορθογωνικότητα ως προς το μητρώο μαζών
2. $\{U\}_i^T [k] \{U\}_j = 0$ για $i \neq j$ ορθογωνικότητα ως προς το μητρώο ακαμψίας
3. λόγω των ιδιοτήτων 1 και 2 το μητρώο $[U]$ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή $[U][U]^T = [I]$ ή $[U]^{-1} = [U]^T$

4. εάν το μητρώο μάζας είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $[m]=[m]^T$ τότε ο πίνακας $[M]=[U]^T[m][U]$, λόγω και της ιδιότητας 3, είναι ένας διαγώνιος πίνακας και καλείται **γενικευμένο μητρώο μάζας του συστήματος**
5. εάν το μητρώο ακαμψίας είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $[k]=[k]^T$ τότε ο πίνακας $[K]=[U]^T[k][U]$, λόγω και της ιδιότητας 3, είναι ένας διαγώνιος πίνακας και καλείται **γενικευμένο μητρώο ακαμψίας του συστήματος**
6. οι ιδιοτιμές λ_j ταξινομούνται με φθίνουσα σειρά, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ και η γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 καλείται **θεμελιώδης γωνιακή ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα)** του συστήματος.

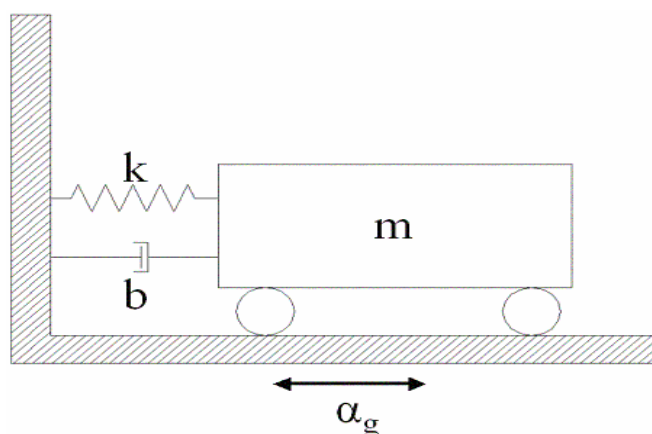
3.6 Η κίνηση του εδάφους

Τα δυναμικά συστήματα συχνά διεγείρονται από την κίνηση της στηρίξεως τους. Η κίνηση της στηρίξεως προκαλεί δυναμική καταπόνηση στην κατασκευή ακόμη και εάν δεν επιδρούν σε αυτή εξωτερικά δυναμικά φορτία (Κατσικαδέλης, 1999). Μια τυπική και πολύ συνηθισμένη περίπτωση κίνησης της στηρίξεως μίας κατασκευής, αποτελεί η επιτάχυνση του εδάφους που προκαλείται από ένα σεισμό. Στην παρούσα παράγραφο θα αναλυθεί συνοπτικά η κίνηση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή ο οποίος διεγείρεται από ένα σεισμό (σχήμα 3.15).

3.6.1 Εξίσωση της κίνησης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα σεισμικά φορτία είναι τυχαία φορτία τα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν από μια αναλυτική συνάρτηση του χρόνου. Η διεγείρουσα χρονικά μεταβαλλόμενη σεισμική δύναμη που εφαρμόζεται στο σύστημα του σχήματος 3.15, συνδέεται με την επιτάχυνση του εδάφους σύμφωνα με την σχέση

$$F(t) = m a_g(t) \quad (3.113)$$



Σχήμα 3.15: Μονοβάθμιος ταλαντωτής που διεγείρεται από εδαφική επιτάχυνση

η οποία εάν αντικατασταθεί στην εξίσωση (3.66) δίδει την διαφορική εξίσωση της κίνησης του συστήματος

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = a_g(t) \quad (3.114)$$

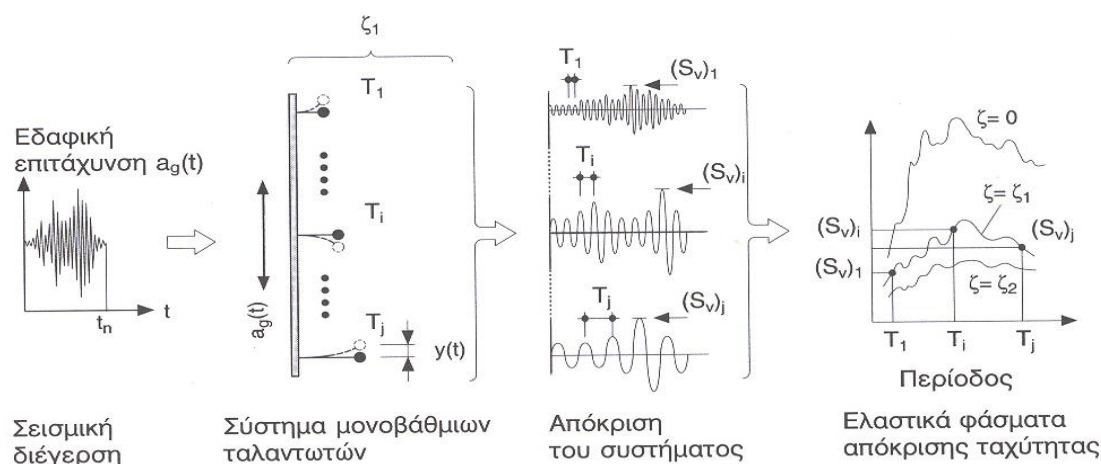
Η λύση τη εξίσωσης (3.114) στο στάδιο της μονίμου αποκρίσεως έχει τη μορφή

$$u(t) = \frac{1}{\omega} U(t) \quad (3.115)$$

όπου $U(t) = \int_0^t a_g(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau$, το γνωστό ολοκλήρωμα του Duhamel.

3.6.2 Φάσματα απόκρισης

Για μια δεδομένη κίνηση του εδάφους είναι δυνατό να υπολογιστούν οι απολύτως μέγιστες τιμές της συνάρτησης $u(t)$, για ένα εύρος τιμών της ιδιοπεριόδου T_0 και για συγκεκριμένες τιμές του λόγου απόσβεσης του μονοβάθμιου συστήματος. Η γραφική απεικόνιση των τιμών της συνάρτησης $S_u(\zeta, T_0) = \max_t |u(t, \zeta, T_0)|$ καλείται **φάσμα απόκρισης** του συστήματος ως προς την **μέγιστη σχετική μετατόπιση**. Εκτός από την μέγιστη σχετική μετατόπιση, είναι δυνατό να υπολογιστούν και να παρασταθούν γραφικά συναρτήσει της περιόδου και άλλα μεγέθη όπως η **μέγιστη σχετική ταχύτητα** και η **μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση**.



Σχήμα 3.16: Σχηματική απεικόνιση του υπολογισμού του φάσματος απόκρισης για την μέγιστη σχετική ταχύτητα (Bachmann, 1995)

Τα μεγέθη αυτά, τα οποία καλούνται και φασματικές τιμές, είναι δυνατό να περιγραφούν μαθηματικά από τις παρακάτω σχέσεις:

➤ **μέγιστη σχετική μετατόπιση $S_u(\zeta, T_0)$:**

$$S_u(\zeta, T_0) = \max_t |u(t, \zeta, T_0)| = \max_t \left\{ \frac{1}{\omega} \int_0^t a_g(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \right\}$$

➤ **μέγιστη σχετική ταχύτητα $S_v(\zeta, T_0)$:**

$$S_v(\zeta, T_0) = \max_t |V(t, \zeta, T_0)| = \max_t \left\{ - \int_0^t a_g(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \cos[\omega(t-\tau)] d\tau \right\}$$

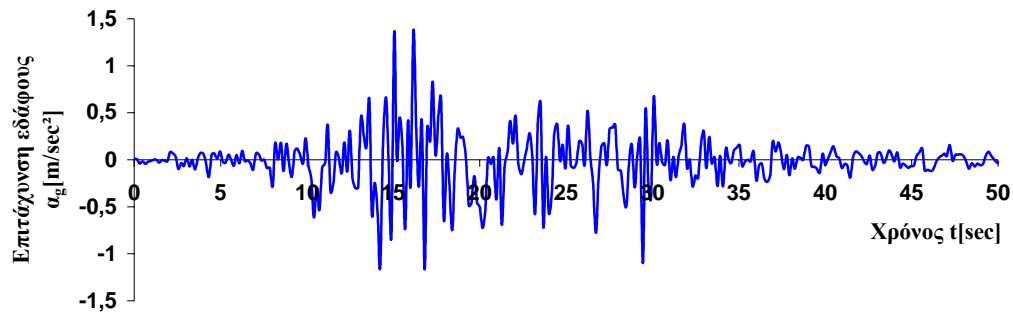
➤ **μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση $S_a(\zeta, T_0)$:**

$$S_a(\zeta, T_0) = \max_t |a(t, \zeta, T_0)| = \max_t \left\{ \int_0^t a_g(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)] d\tau \right\}$$

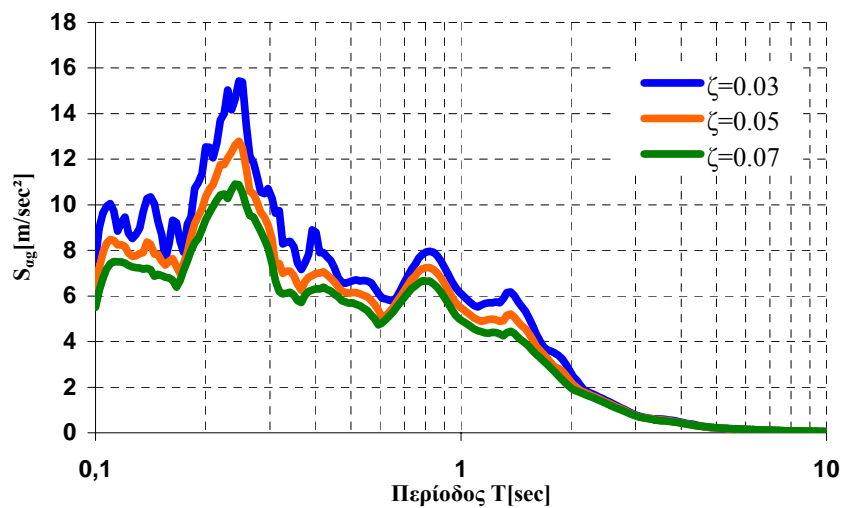
Για το επιταχυνσιογράφημα του σχήματος 3.17 υπολογίζονται το φάσμα απόκρισης της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης (σχήμα 3.18), η χρονική εξέλιξη της δύναμης ιξώδους απόσβεσης (σχήμα 3.19) και οι βρόχοι υστέρησης (σχήμα 3.20) μονοβάθμιου ταλαντωτή με τα χαρακτηριστικά του πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1: Χαρακτηριστικά μονοβάθμιου συστήματος

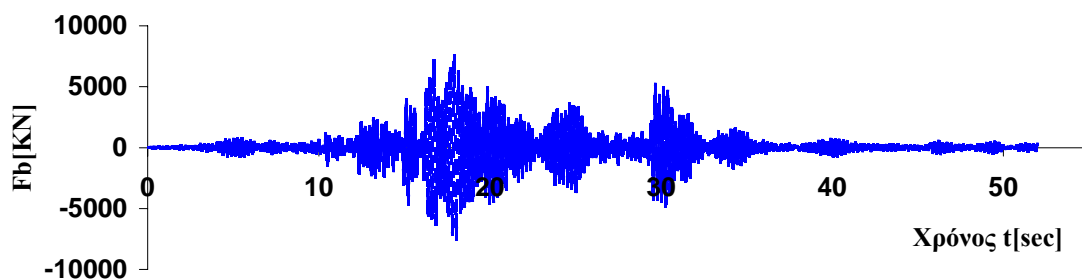
Ιδιοπερίοδος T_0 [sec]	0,23
Μάζα m [Kg]	450
Λόγος απόσβεσης ζ	0,03

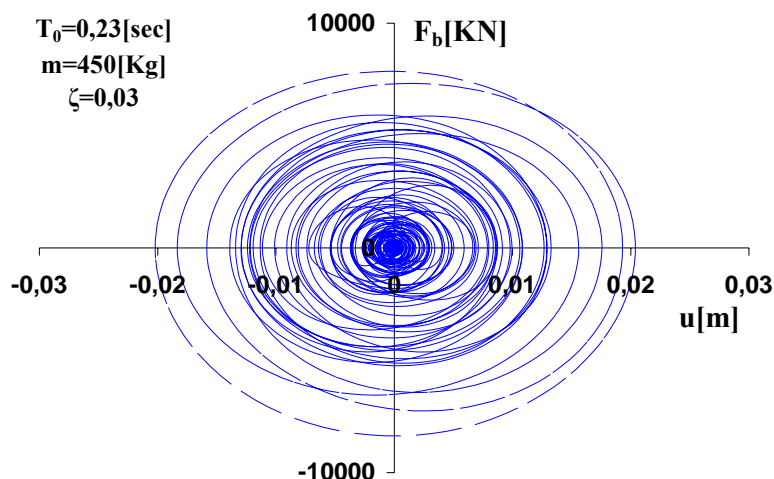


Σχήμα 3.17: Επιταχυνσιογράφημα



Σχήμα 3.18: Φάσμα απόκρισης της εδαφικής επιτάχυνσης του σχήματος 3.17

Σχήμα 3.19: Δύναμη ιξώδους απόσβεσης F_b συναρτήσει του χρόνου για το μονοβάθμιο σύστημα του πίνακα 3.1



Σχήμα 3.20: Βρόχοι υστέρησης για το μονοβάθμιο σύστημα του πίνακα 3.1

3.6.3 Ανάλυση Fourier του επιταχυνσιογραφήματος

Η επιτάχυνση του εδάφους μπορεί να θεωρηθεί ως μια διακριτή συνάρτηση του χρόνου. Ως τέτοια μπορεί να μετασχηματισθεί σε μια μιγαδική συνάρτηση της περιόδου, ή της γωνιακής συχνότητας, με την χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Η μαθηματική έκφραση του μετασχηματισμού δίδεται από την σχέση

$$A_g(\omega_j) = dt \sum_{k=1}^n a_g(t_k) e^{-i\omega_j t_k} \quad (3.116)$$

όπου dt το χρονικό βήμα δειγματοληψίας, $\omega_j = 2\pi j / (ndt)$ η γωνιακή συχνότητα, $t_k = kdt$, n το πλήθος των τιμών που λήφθηκαν και $j = 1:n$ (Krammer, 1996). Με την χρήση του τύπου του Euler η συνάρτηση (3.116) μπορεί να δοθεί στην ισοδύναμη μορφή

$$A_g(\omega_j) = |A_g(\omega_j)| \{ \cos \omega_j t_k + i \sin \omega_j t_k \} \quad (3.117)$$

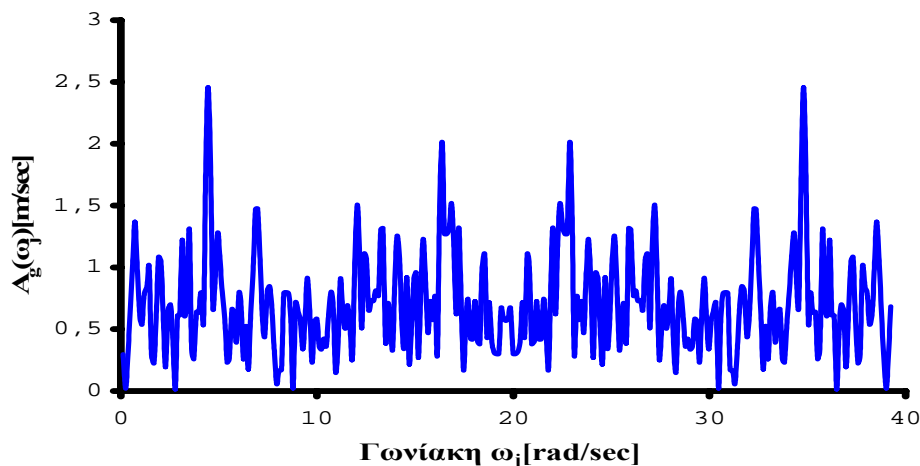
με

$$|A_g(\omega_j)| = \sqrt{\text{Real}[A_g(\omega_j)]^2 + \text{Imag}[A_g(\omega_j)]^2} \quad (3.118)$$

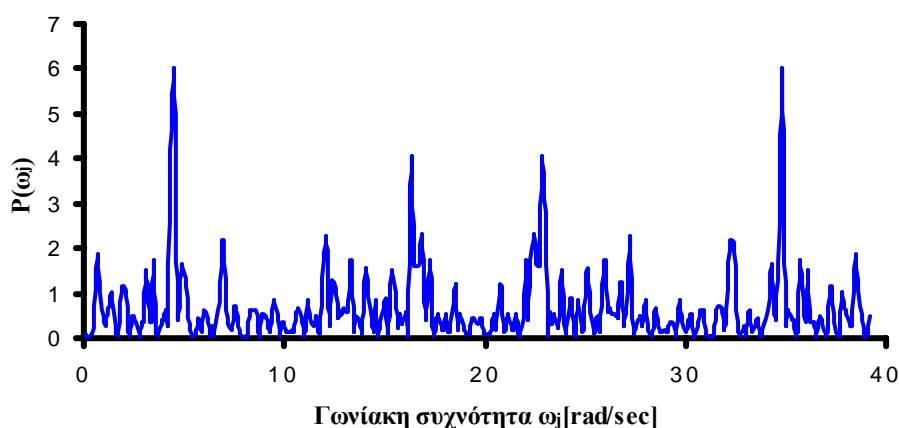
το πλάτος ή μέτρο της συνάρτησης $A_g(\omega_j)$. Η συνάρτηση 3.118 καλείται **φάσμα Fourier** της συνάρτησης $a_g(t)$ και έχει διαστάσεις επιτάχυνσης επί χρόνο. Το τετράγωνο του φάσματος

$$P(\omega_j) = |A_g(\omega_j)|^2 \quad (3.119)$$

καλείται **φάσμα ισχύος** της $a_g(t_k)$ ή **συνάρτηση φασματικής πυκνότητας**.



Σχήμα 3.21: Φάσμα Fourier του επιταχυνσιογραφήματος του σχήματος 3.17



Σχήμα 3.22: Φάσμα ισχύος Fourier του επιταχυνσιογραφήματος του σχήματος 3.17

Τόσο τα φάσματα απόκρισης που προκύπτουν από την χρονική ολοκλήρωση της εξίσωσης της κίνησης (φασματικές τιμές) όσο και τα φάσματα Fourier, επιτρέπουν τον προσδιορισμό του συχνотικού περιεχομένου ενός σεισμικού φορτίου. Επειδή όμως τα φάσματα απόκρισης που προκύπτουν από το σχηματισμό fourier αναφέρονται σε αρμονικές ταλαντώσεις με μηδενική απόσβεση, είναι απλά ενδεικτικά των περιεχομένων συχνοτήτων της σεισμικής διέγερσης και όχι της μεγίστης απόλυτης επιτάχυνσης μιας κατασκευής με συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα. Οι πληροφορίες που δίδουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για στατιστική επεξεργασία των περιεχομένων συχνοτήτων.

Κεφάλαιο 4^ο

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

4.1 Εισαγωγή

Η μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας θεμελιώθηκε πλήρως στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Εντούτοις το φάσμα των προβλημάτων μηχανικής για οποία ήταν δυνατό να αναπτυχθούν αναλυτικές λύσεις ήταν εξαιρετικά περιορισμένο. Έτσι οι μηχανικοί στις αρχές του 20^{ου} αιώνα στράφηκαν ερευνητικά στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μαθηματικών μεθόδων για την επίλυση των προβλημάτων μηχανικής. Η έλλειψη όμως υπολογιστικών μέσων την εποχή εκείνη καθήλωσε την διάδοση των αριθμητικών μεθόδων ως παραγωγικό εργαλείο ανάλυσης και περιόρισε την μελέτη αυτών σε ερευνητικά πλαίσια.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) είναι μια αριθμητική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων μηχανικής, και όχι μόνο πλέον, η οποία αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1950. Από τότε και μέχρι σήμερα αναπτύσσεται και επεκτείνεται συνεχώς λόγω της ραγδαίας τεχνολογικής ανάπτυξης και διάδοσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ΜΠΣ αναπτύχθηκε αρχικά για την επίλυση ιδιαίτερα πολύπλοκων προβλημάτων αεροναυπηγικής, αντοχής των υλικών και στη συνέχεια επεκτάθηκε στην ανάλυση προβλημάτων Εδαφομηχανικής και Βραχομηχανικής (Αγιουτάντης, 2002). Για την εφαρμογή όμως της μεθόδου στην ανάλυση προβλημάτων που έχουν να κάνουν με την διαταραχή του εντατικού πεδίου στο εσωτερικό του εδάφους ή της βραχομάζας εξαιτίας της κατασκευής κάποιου γεωτεχνικού έργου (π.χ. σήραγγες, φράγματα, θεμελιώσεις), είναι αναγκαίο να ληφθούν υπόψη κάποιοι παράγοντες οι οποίοι δεν εμφανίζονται ή εμφανίζονται σπάνια στην ανάλυση προβλημάτων αντοχής των υλικών. Αυτοί οι παράγοντες είναι συνοπτικά οι παρακάτω:

- το έδαφος και τα πετρώματα, γενικότερα τα γεωυλικά, δεν είναι δυνατό να περιγραφούν απόλυτα από κάποιο συγκεκριμένο πρότυπο

καταστατικής συμπεριφοράς (ελαστικό, πλαστικό, ελαστοπλαστικό κτλ) εξαιτίας της ανομοιογένειας και της ανισοτροπίας που εμφανίζουν από την φύση τους

- η ακανόνιστη γεωμετρία τους και συγκρότηση τους στον χώρο (εδafικά στρώματα οριζόντια ή κεκλιμένα, φλεβικά πετρώματα) καθώς και ο τεκτονισμός τους (ρήγματα, διακλάσεις) κάνουν την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του γεωλογικού μέσου ιδιαίτερα περίπλοκη

Εξαιτίας λοιπόν της ύπαρξης των παραπάνω παραγόντων, καθίσταται αναγκαία η χρήση παραδοχών που απλοποιούν την καταστατική συμπεριφορά του μέσου έτσι ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος. Παρόλα αυτά η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για των προσεγγιστικό προσδιορισμό των εντατικών μεγεθών στο εσωτερικό του υπεδάφους(Αγιουτάντης, 2002).

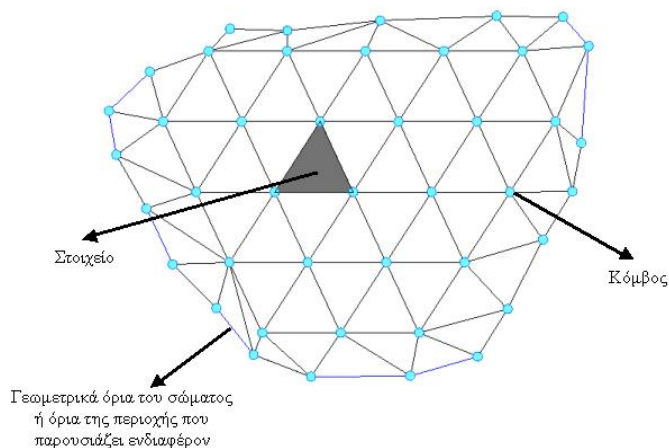
4.2 Περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

4.2.1 Βασική ιδέα της μεθόδου

Οι βασικές θεωρητικές αρχές που διέπουν την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι σχετικά απλές. Για να αναπτυχθούν ικανοποιητικά αυτές οι αρχές, γίνεται η θεώρηση ενός σώματος για το οποίο ζητείται ο υπολογισμός της κατανομής των τιμών μίας άγνωστης μεταβλητής (π.χ. μετατοπίσεις λόγω εφαρμογής δυνάμεων). Αρχικά το σώμα διαιρείται σε ένα σύνολο μικρότερων γεωμετρικών μονάδων με γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, **τα στοιχεία**. Τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους σημειακά με τους **κόμβους** (σχήμα 4.1). Η όλη διαδικασία διαίρεσης του σώματος σε πεπερασμένο αριθμό διακριτών μονάδων καλείται **διακριτοποίηση** (Fagan, 1992).

Η άγνωστη μεταβλητή που ζητείται να προσδιοριστεί, μεταβάλλεται με ένα προκαθορισμένο τρόπο που εξαρτάται από το πλήθος και την μορφή των στοιχείων που συγκροτούν το σώμα. Αυτό έχει ως συνέπεια τα αποτελέσματα της μεθόδου να εξαρτώνται σημαντικά από την διακριτοποίηση και η κατανομή της άγνωστης μεταβλητής στην έκταση του σώματος να προσδιορίζεται ικανοποιητικά μόνο εάν

αυτό έχει διακριτοποιηθεί σωστά. Η κατανομή της ζητούμενης μεταβλητής σε κάθε στοιχείο, προσεγγίζεται με την χρήση κατά κύριο λόγο πολυωνυμικών συναρτήσεων παρεμβολής (Fagan, 1992).



Σχήμα 4.1: Διακριτοποίηση σώματος

Το επόμενο βήμα μετά την διαδικασία διακριτοποίησης του σώματος είναι ο υπολογισμός των εξισώσεων ισορροπίας σε κάθε στοιχείο και τελικά από την κατάλληλη υπέρθεση αυτών, ο σχηματισμός της εξίσωσης ισορροπίας όλου του σώματος. Οι εξίσωση ισορροπίας για την περίπτωση των στατικών προβλημάτων έχει τη γενική μορφή

$$\{F_b\} = [k_b]\{q_b\} \quad (4.1)$$

όπου $[k_b]$ το μητρώο ακαμψίας του σώματος, $\{F_b\}$ το διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων και $\{q_b\}$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους των στοιχείων (Fagan, 1992). Παρατηρώντας την γενικευμένη εξίσωση ισορροπίας (σχέση 4.1) γίνεται εύκολα αντιληπτή η ομοιότητα της με την εξίσωση ισορροπίας ενός ελαστικού ελατηρίου, του οποίου η μετατόπιση είναι απευθείας ανάλογη της εφαρμοζόμενης δύναμης με συντελεστή αναλογίας το μέτρο ακαμψίας του. Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι η εξίσωση 4.1 αποτελεί μια καταστατική εξίσωση που συνδέει το αίτιο (δύναμη) με το αποτέλεσμα (μετατόπιση).

Το μητρώο ακαμψίας εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία των στοιχείων, τη διάταξη τους στο χώρο και τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού. Για να επιλυθεί το σύστημα 4.1 και να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις στους κόμβους, είναι αναγκαίο να

αντιστραφεί το μητρώο ακαμψίας εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι συνοριακές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες αποτελούν προκαθορισμένες τιμές της δύναμης ή της μετατόπισης σε κάποιον ή κάποιους κόμβους. Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας μπορεί να γίνει μια εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία εάν το πλήθος των στοιχείων είναι μεγάλο ή εάν χρειάζεται να μοντελοποιηθούν σώματα με απότομες μεταβολές στην γεωμετρία τους (π.χ. ρωγμές). Ο αριθμός των εξισώσεων σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να φτάσει τις δεκάδες χιλιάδες και η χρήση τόσο των υπολογιστών όσο και της εφαρμογής σύγχρονων μεθόδων γραμμικής άλγεβρας είναι απολύτως αναγκαία για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Εφόσον το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας επιλυθεί, οι παραμορφώσεις στους κόμβους είναι δυνατό να προσδιοριστούν από τις υπολογισμένες μετατοπίσεις και οι τάσεις από τις παραμορφώσεις μέσω καταστατικών εξισώσεων.

4.2.2 Διάθρωση της μεθόδου

Όπως έχει είδη αναφερθεί, η ανάλυση της εντατικής κατάστασης ενός σώματος με την ΜΠΣ είναι δυνατό να απαιτεί την επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων και την πραγματοποίηση ίσος και δεκάδων χιλιάδων πράξεων, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για την μελέτη προβλημάτων γεωμηχανικής. Είναι λοιπόν προφανές ότι η ανάλυση αυτή γίνεται κατά κύριο λόγο με την χρήση κατάλληλων λογισμικών πακέτων και μάλιστα εξειδικευμένων για κάθε επιστημονικό πεδίο (αντοχή υλικών, εδαφομηχανική, ρευστομηχανική κτλ.). Η τυπική διαδικασία που ακολουθείται από ένα τέτοιο λογισμικό κατά την εφαρμογή της μεθόδου είναι η παρακάτω (Fagan, 1992):

- Στάδιο **προ-επεξεργασίας (pre-processing phase)** των δεδομένων
 - I. Διακριτοποίηση του προς μελέτη πεδίου ή σώματος σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων
 - II. Επιλογή των συναρτήσεων παρεμβολής για κάθε τύπο στοιχείου
 - III. Εισαγωγή των φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών καθώς και των μοντέλων της καταστατικής τους συμπεριφοράς (γραμμικά ελαστικό, ελαστοπλαστικό κτλ.)
- Στάδιο **ανάλυσης (analysis phase)** των δεδομένων
 - I. Υπολογισμός των εξισώσεων ισορροπίας σε επίπεδο στοιχείων

- II. Κατασκευή του τελικού συστήματος εξισώσεων με κατάλληλη υπέρθεση των εξισώσεων ισορροπίας κάθε στοιχείου
 - III. Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών
 - IV. Επίλυση του τελικού συστήματος εξισώσεων με αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας(π.χ. μέθοδος απαλοιφής του Gauss)
- Στάδιο **μετά-επεξεργασίας (post processing)** των αποτελεσμάτων
- I. Υπολογισμός των παραμορφώσεων από τις υπολογισμένες μετατοπίσεις
 - II. Υπολογισμός των τάσεων από τις παραμορφώσεις με την χρήση των καταστατικών εξισώσεων
 - III. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων είτε με την αναγραφή των υπολογιζόμενων τιμών στους κόμβους είτε με την χρήση χαρτών χρωματικού κώδικά

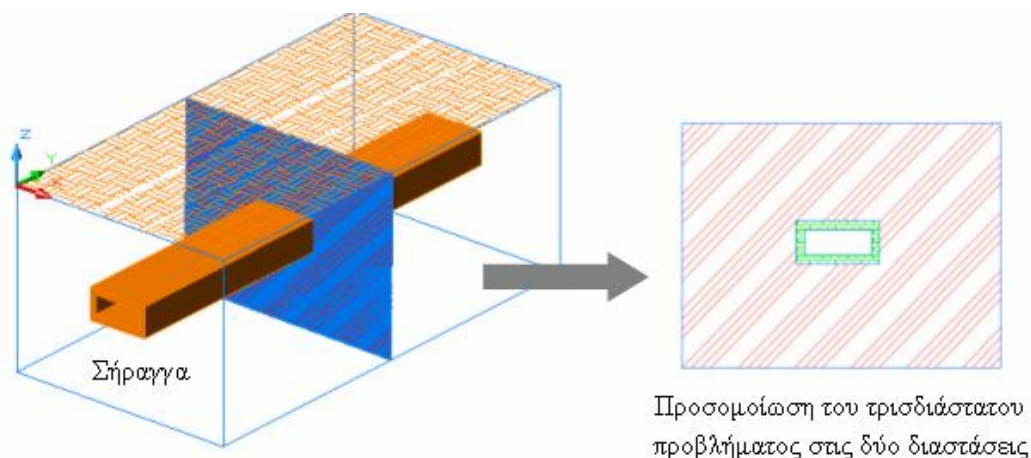
4.3 Διακριτοποίηση

Η διακριτοποίηση αποτελεί το πρώτο και ίσως το σημαντικότερο στάδιο της επίλυσης ενός προβλήματος με την ΜΠΣ. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι η διαδικασία κατά την οποία το προς ανάλυση σώμα (π.χ. ένα δοκίμιο πετρώματος) ή πεδίο (π.χ. εντατική κατάσταση του περιβάλλοντος πετρώματος λόγω υπογείου ανοίγματος) διαιρείται σε ένα πεπερασμένο αριθμό γεωμετρικών μορφών με γνωστά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Στη παρούσα παράγραφο λοιπόν θα αναλυθούν κάποιες βασικές αρχές και εργαλεία τα οποία είναι απαραίτητα για να επιτευχθεί αφενός μεν μια διακριτοποίηση που προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο την γεωμετρία και τις ιδιότητες του στερεού σώματος (χρήση κατάλληλων στοιχείων, αριθμός στοιχείων, διάταξη κτλ.), αφετέρου δε απλοποιεί ικανοποιητικά το σώμα ή το πεδίο με την χρήση κατάλληλων συμμετριών. Ιδιαίτερα δε η εκμετάλλευση των συμμετριών στην ανάλυση, μπορεί μειώσει αρκετά το πλήθος των αριθμητικών πράξεων.

4.3.1 Γεωμετρική απλοποίηση και συμμετρία

Όλες οι κατασκευές στη πραγματικότητα αποτελούν τρισδιάστατα σώματα. Αρκετές φορές όμως η μορφή τους είναι τέτοια, που επιτρέπει να γίνουν ορισμένες γεωμετρικές απλοποιήσεις οι οποίες διευκολύνουν την ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα,

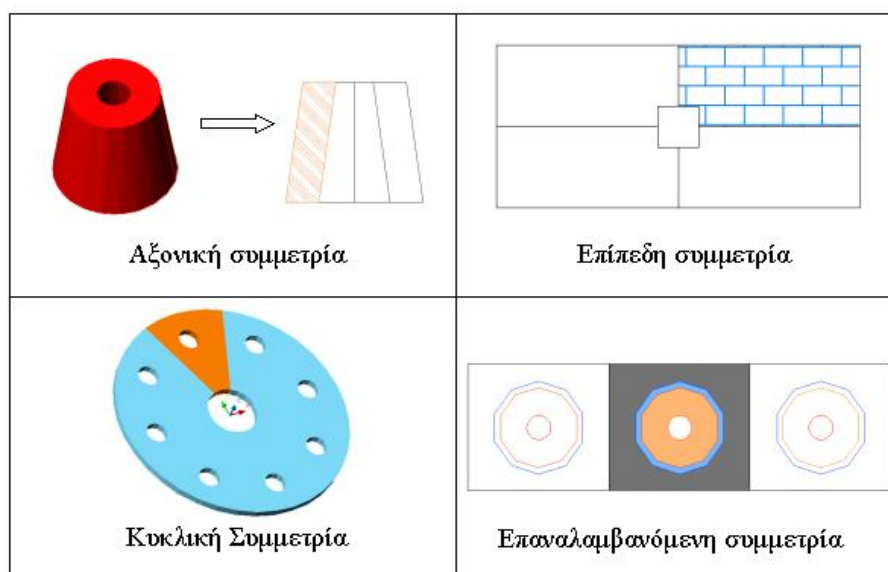
σώματα των οποίων η ανάπτυξη σε μία διάσταση είναι πολύ μεγαλύτερη από την ανάπτυξη στις άλλες δύο (π.χ. σήραγγες) είναι δυνατό να μελετηθούν στις δύο διαστάσεις με την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης χωρίς σημαντικά σφάλματα (σχήμα 4.2). Η παραδοχή αυτή επίσης προϋποθέτει ότι τα εντατικά μεγέθη στην κατεύθυνση της τρίτης διάστασης που δεν μοντελοποιείται είτε μπορούν να προσδιοριστούν πολύ πιο εύκολα με απλές αναλυτικές μεθόδους, είτε είναι γνωστή εκ των προτέρων η κατανομή τους προς τη διάσταση αυτή. Η προσομοίωση στις δύο διαστάσεις εφαρμόζεται αντίστοιχα και για σώματα τα οποία εμφανίζουν πολύ πιο μικρή ανάπτυξη σε μία διάσταση απ' ότι στις άλλες δύο με την θεώρηση επίπεδης τάσης (Fagan, 1992).



Σχήμα 4.2: Για την μελέτη της εντατικής κατάστασης μίας σήραγγας, λαμβάνεται μία τομή σε επίπεδο κάθετο στον άξονα της και προσομοιώνεται στις δύο διαστάσεις με την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης

Μια άλλη κατηγορία προσεγγίσεων που είναι δυνατό να γίνει κατά τη διακριτοποίηση και την ανάλυση στηρίζεται στη συμμετρία που είναι δυνατό να εμφανίζει το στερεό σώμα. Η σπουδαιότητα των συμμετριών στην ΜΠΣ οφείλεται στο ότι η χρήση αυτών μπορεί να διευκολύνει σημαντικά την διακριτοποίηση και να μειώσει τον πλήθος των υπολογισμών. Τα κυριότερα είδη συμμετριών που εμφανίζονται στα προβλήματα μηχανικής είναι η **αξονική**, η **επίπεδη**, η **κυκλική** και η **επαναλαμβανόμενη** συμμετρία (σχήμα 4.3). Λόγω της ύπαρξης κάποιας από αυτές τις συμμετρίες είναι δυνατό να μην διακριτοποιηθεί όλο το σώμα αλλά τμήμα αυτού. Τέλος είναι πολύ σημαντικό να αναφερθεί ότι στην επίλυση ενός προβλήματος που γίνεται αξιοποίηση των εμφανιζόμενων συμμετριών, πρέπει να μεταβληθούν

κατάλληλα οι συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε να η ανάλυση να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.



Σχήμα 4.3: Βασικοί τύποι συμμετριών(πηγή: Fagan, 1992)





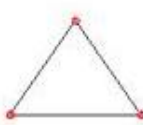



4.3.2 Είδη στοιχείων

Τα είδη των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την διακριτοποίηση ενός στερεού σώματος ή ενός πεδίου, ποικίλουν ανάλογα με την γεωμετρία του πεδίου ή του σώματος, την απαιτούμενη ακρίβεια της αριθμητικής λύσης, την ύπαρξη απότομων μεταβολών της γεωμετρίας (ασυνέχειες ή ρωγμές) και το είδος της ανάλυσης που εφαρμόζεται.

Χαρακτηριστικές μορφές στοιχείων αποτελούν τα γραμμικά ή μονοδιάστατα με δύο ή περισσότερους κόμβους, τετραπλευρικά ή τριγωνικά τα οποία χρησιμοποιούνται για δισδιάστατη ανάλυση και τα πυραμιδοειδή και πρισματικά για ανάλυση στις τρεις διαστάσεις (σχήμα 4.4). Οι απλούστερες μορφές στοιχείων είναι αυτές που χαρακτηρίζονται από το ότι ο αριθμός των κόμβων του στοιχείου είναι ίσος με τον αριθμό των πλευρών, όπως για παράδειγμα το τετραπλευρικό τετρακομβικό στοιχείο (Αγιουτάντης, 2002).

Κατά την εφαρμογή της ΜΠΣ, στους κόμβους των στοιχείων εμφανίζονται κάποια φυσικά μεγέθη τα οποία εξαρτώνται από το είδος του προβλήματος που μελετάται. Τα μεγέθη αυτά σε ένα κλασικό πρόβλημα μηχανικής είναι οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις που εμφανίζονται σε κάθε κόμβο. Στην περίπτωση ανάλυσης ενός στατικού προβλήματος τα μεγέθη αυτά συνδέονται με την εξίσωση 4.1. Οι διαστάσεις των

διανυσμάτων και των πινάκων που εμφανίζονται στην εν λόγω εξίσωση, εξαρτώνται από τους βαθμούς ελευθερίας του κάθε κόμβου. Οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου εκφράζουν τον πλήθος των ανεξάρτητων κινήσεων που μπορεί να πραγματοποιήσει ο κάθε κόμβος και ποικίλουν ανάλογα με το είδος της ανάλυσης (δισδιάστατη, τρισδιάστατη) που εφαρμόζεται και τη δομή του σώματος που μελετάται. Έτσι για την ανάλυση επίπεδων δικτυωμάτων, χρησιμοποιούνται γραμμικά στοιχεία με ένα βαθμό ελευθερίας σε κάθε κόμβο διότι το κάθε στοιχείο του δικτυώματος παραλαμβάνει μόνο αξονικές δυνάμεις και ως εκ τούτου οι κόμβοι του μπορούν να κινηθούν μόνο κατά την διεύθυνση του άξονα του στοιχείου. Αντίστοιχα τα γραμμικά στοιχεία ενός επίπεδου πλαισίου παραλαμβάνουν αξονικές δυνάμεις, διατμητικές δυνάμεις κάθετες στον άξονα του στοιχείου και καμπτικές ροπές. Στη περίπτωση αυτή ο κάθε κόμβος του στοιχείου επίπεδου πλαισίου έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας διότι μπορεί να κινηθεί είτε κατακόρυφα (κάθετα στον άξονα του στοιχείου), είτε οριζόντια (παράλληλα στον άξονα του στοιχείου), είτε να στραφεί με άξονα κάθετο στο επίπεδο του στοιχείου.

1D	 Γραμμικό δικομβικό  Γραμμικό τριομβικό	 Ράβδος
2D	 Τετραπλευρικό τετρακομβικό  Τριγωνικό τριομβικό	  Πλάκες
3D	 Τετρακομβική πυραμίδα	Τρισδιάστατη ανάλυση του στερεού σώματος

Σχήμα 4.4: Βασικοί τύποι στοιχείων

Τα επίπεδα στοιχεία μπορεί να παριστάνουν επιφάνειες σε δισδιάστατα (π.χ. πλάκες) ή τρισδιάστατα (π.χ. κελύφη) προβλήματα (Αγιουτάντης, 2002). Σε αυτές τις περιπτώσεις τα επίπεδα στοιχεία που χρησιμοποιούνται για ανάλυση στις δύο διαστάσεις μπορούν να έχουν από δύο έως τρεις βαθμούς ελευθερίας, εάν εφαρμόζονται και ροπές, ανά κόμβο. Αντίστοιχα τα επίπεδα στοιχεία που χρησιμοποιούνται σε τρισδιάστατα προβλήματα έχουν από τρεις έως έξι βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Στις γεωτεχνικές εφαρμογές είναι συνήθης η χρήση τριγωνικών ή τετραπλευρικών επιπέδων στοιχείων τα οποία προσομοιώνουν το γεωυλικό (Αγιουτάντης, 2002). Είναι όμως δυνατό, ειδικά για την επίπεδη ανάλυση των κατασκευών υποστήριξης υπογείων έργων όπως οι σήραγγες, η υποστήριξη να προσομοιώνεται με την χρήση γραμμικών στοιχείων επίπεδου πλαισίου.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε στοιχείου, εφόσον όλοι οι κόμβοι που ανήκουν στο στοιχείο έχουν του ίδιους βαθμούς ελευθερίας, αποτελούν το γινόμενο των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου με το πλήθος των κόμβων του στοιχείου.

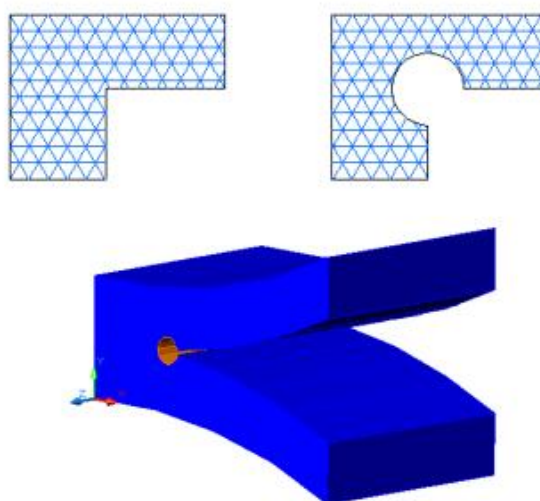
4.3.3 Χαρακτηριστικά της διαίρεσης πεδίου

Η διαδικασία διαίρεσης του στερεού σώματος σε στοιχεία, μαζί με την επιβολή των συνοριακών συνθηκών, αποτελούν τους πιο σημαντικούς παράγοντες για την επιτυχημένη προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του σώματος με την ΜΠΣ. Η διαδικασία διαίρεσης του πεδίου συνοπτικά περιλαμβάνει τις ακόλουθες παραμέτρους (Αγιουτάντης, 2002):

- την επιλογή της γεωμετρικής μορφής του στοιχείου
- την επιλογή του αριθμού των κόμβων του στοιχείου και κατ' επέκταση των βαθμών ελευθερίας κάθε στοιχείου
- την επιλογή των συναρτήσεων μορφής κάθε στοιχείου
- την επιλογή της πυκνότητας του καννάβου

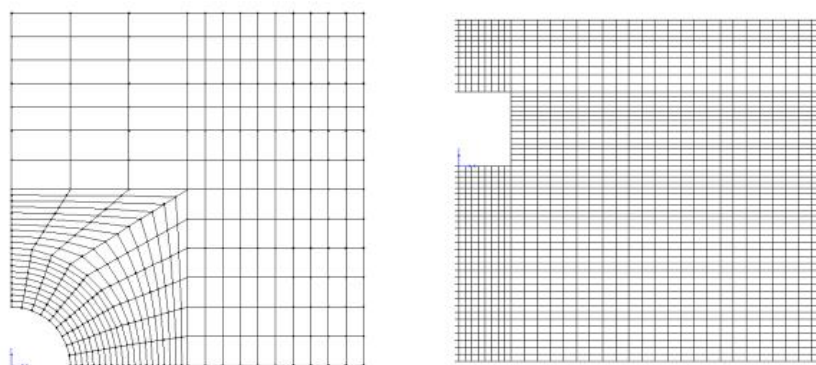
Η βασική αρχή που διέπει την επιλογή της γεωμετρικής μορφής και του μεγέθους του κάθε στοιχείου είναι το κατά πόσο απότομα μεταβάλλεται η κατανομή των ζητούμενων μεταβλητών σε κάθε περιοχή του σώματος. Στις περιοχές που αναμένεται απότομη μεταβολή των τάσεων ή υψηλή συγκέντρωση τάσεων, η διακριτοποίηση θα πρέπει να είναι πιο λεπτομερής και κατά συνέπεια το μέγεθος των

στοιχείων να μειωθεί. Το φαινόμενο αυτό είναι δυνατό να εμφανιστεί σε περιοχές που υπάρχει απότομη μεταβολή της γεωμετρίας του σώματος όπως γωνίες, κοιλότητες, ρωγμές και ασυνέχειες (σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6: Παραδείγματα απότομης μεταβολής της γεωμετρίας

Η μείωση του μεγέθους των στοιχείων καθώς και η μεταβολή της γεωμετρίας τους κοντά στην περιοχή μεταβολής της γεωμετρίας του πεδίου (σχήμα 4.7), έχει ως στόχο την αύξηση της ακρίβειας των υπολογισμών στις περιοχές αυτές. Επειδή η μετατοπίσεις στο εσωτερικό των στοιχείων συνδέονται με τις μετατοπίσεις που εμφανίζονται στους κόμβους τους με την χρήση συναρτήσεων παρεμβολής, η ακρίβεια των τιμών που υπολογίζονται στο εσωτερικό κάθε στοιχείου εξαρτάται άμεσα από το μέγεθος αυτού. Γενικά θα μπορούσε να αναφερθεί, ότι όσο πιο μικρό είναι το στοιχείο και όσο πιο κανονικό γεωμετρικά είναι το σχήμα του (π.χ. κανονικό πολύγωνο), τόσο αυξάνεται η αξιοπιστία των συναρτήσεων παρεμβολής.



Σχήμα 4.7: Διαίρεση πεδίου με μεταβαλλόμενη γεωμετρία στοιχείων

4.4 Συναρτήσεις παρεμβολής

Ο σχηματισμός των εξισώσεων ισορροπίας κάθε στοιχείου, προϋποθέτει ότι η κατανομή της άγνωστης μεταβλητής στο εσωτερικό του γίνεται με κάποιο προκαθορισμένο τρόπο, ο οποίος περιγράφεται μαθηματικά από μια συνάρτηση. Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται συναρτήσεις μορφής και η μαθηματική τους έκφραση εξαρτάται από τις γεωμετρικές ιδιότητες του στοιχείου (γραμμικά, τριγωνικά, τετραγωνικά κτλ) και από το πλήθος των κόμβων που διαθέτουν. Οι συναρτήσεις μορφής μπορούν να παρομοιαστούν με συναρτήσεις επιρροής κάθε κόμβου προς το περιβάλλον του, δηλαδή ως συναρτήσεις παρεμβολής οι οποίες συνδέουν τις μετατοπίσεις σε κάποιο τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του στοιχείου, με τις μετατοπίσεις που εμφανίζονται στους κόμβους του. Ως προς την μαθηματική τους μορφή μπορούν να διακριθούν σε γραμμικές και μη γραμμικές. Στις περιπτώσεις στοιχείων με ίσο αριθμό ακμών και κόμβων, οι συναρτήσεις μορφής που επιλέγονται είναι συνήθως γραμμικές ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση επιλέγονται μη γραμμικές συναρτήσεις (Αγιουτάντης, 2002).

Συναρτήσεις μορφής σε μια διάσταση

Για την προσομοίωση μιας δοκού με την ΜΠΣ χρησιμοποιούνται συνήθως γραμμικά στοιχεία με δύο ή και περισσότερους κόμβους. Οι συναρτήσεις παρεμβολής που συνδέουν τη μετατόπιση σε κάθε σημείο του στοιχείου με την μετατόπιση στους κόμβους του είναι πολυώνυμα και έχουν τη γενική μορφή

$$u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1} \quad (4.2)$$

η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως

$$\{u(x)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

ή

$$\{q\} = [\Phi]\{a\} \quad (4.4)$$

Εφόσον η συνάρτηση παρεμβολής περιγράφει τις μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στοιχείου, θα επαληθεύεται και στους κόμβους του. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των κόμβων στην συνάρτηση 4.3 προκύπτει η σχέση

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\{q_e\} = [A]\{a\} \quad (4.6)$$

Από τις εξισώσεις 4.4 και 4.6 προκύπτει η τελική μορφή των συναρτήσεων παρεμβολής

$$\{q\} = [N]\{q_e\} \quad (4.7)$$

όπου $[N] = [\Phi][A]^{-1}$.

Πίνακας 4.1: Γραμμικά στοιχεία (Fagan, 1992)

Συνάρτηση Παρεμβολής	Πλήθος Κόμβων [n]	Στοιχείο
$u(x) = a_1 + a_2 x$	2	
$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$	3	
$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$	4	

Συναρτήσεις μορφής στις δύο διαστάσεις

Για την επίλυση προβλημάτων στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιούνται επίπεδα στοιχεία των οποίων οι κόμβοι μπορούν να κινηθούν είτε οριζόντια είτε κατακόρυφα (δύο βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο). Οι συναρτήσεις παρεμβολής που δίνουν την κατανομή των μετατοπίσεων στο εσωτερικό ενός δισδιάστατου στοιχείου είναι της μορφής

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 \dots + a_my^n \quad (4.8)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5x^2 + b_6y^2 \dots + b_my^n$$

όπου $u(x, y)$ η οριζόντια μετατόπιση και $v(x, y)$ η κατακόρυφη. Οι συναρτήσεις 4.8 μπορούν να γραφούν με τη χρήση πινάκων και διανυσμάτων στη συμπαγή μορφή

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi] & [0] \\ [0] & [\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\alpha]^T \\ [b]^T \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$


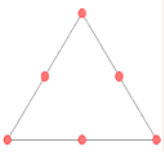

όπου

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & \dots & y^n \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

Πίνακας 4.2: Δισδιάστατα επίπεδα στοιχεία (Fagan, 1992)

Συνάρτηση Παρεμβολής	Πλήθος Κόμβων [n]	Στοιχείο
$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$	3	
$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$	6	
$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$	4	

4.5 Καταστατική συμπεριφορά των υλικών

Στη παρούσα παράγραφο θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση της καταστατικής συμπεριφοράς των γραμμικά ελαστικών υλικών. Με τον όρο καταστατική συμπεριφορά ενός υλικού, εννοείται η μεταβολή της εξωτερικής του μορφής αλλά και οι αλλαγές που είναι δυνατό να υπάρξουν στην μικροδομή του (π.χ. πλαστική παραμόρφωση σαν συνέπεια της διαρροής υλικού και ανακατανομής της μάζας εντός

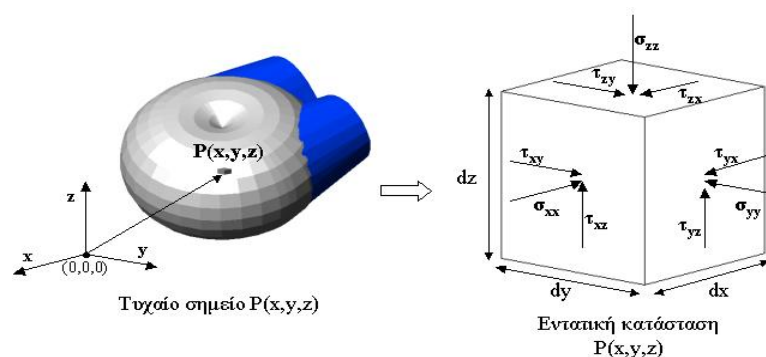
των γεωμετρικών ορίων του σώματος) από την επίδραση ενός πεδίου δυνάμεων που παράγουν μηχανικό έργο. Η συμπεριφορά αυτή είναι δυνατό να περιγραφεί με την χρήση μαθηματικών μοντέλων που συνδέουν τις εμφανιζόμενες παραμορφώσεις με τις εφαρμοζόμενες τάσεις και καλούνται μαθηματικά μοντέλα συμπεριφοράς υλικών ή **καταστατικές εξισώσεις**.

4.5.1 Καταστατική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικών υλικών στις τρεις διαστάσεις

Η εντατική κατάσταση σε κάθε σημείο ενός στερεού σώματος (σχήμα 4.5), περιγράφεται από τον τανυστή δευτέρας τάξεως

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ο οποίος καλείται **τανυστής των τάσεων**. Αντίστοιχα με τον τανυστή των τάσεων



Σχήμα 4.8: Τρισδιάστατη εντατική κατάσταση στερεού σώματος

ορίζεται και ο **τανυστής των παραμορφώσεων**

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

ο οποίος περιγράφει την παραμορφωσιακή κατάσταση λόγω των τάσεων που εφαρμόζονται. Λαμβάνοντας ισορροπία των ροπών προκύπτει ότι οι τανυστές τάσεων

και παραμορφώσεων αποτελούν συμμετρικά μητρώα, δηλαδή $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Έτσι, οι άγνωστες ποσότητες για κάθε τανυστή μειώνονται από εννιά σε έξι. Η καταστατική εξίσωση του γραμμικά ελαστικού υλικού, εάν εκφραστεί με την μορφή πινάκων, δίδεται από την σχέση

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

όπου $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ και $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ οι σταθερές του Lamé, E το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος Poisson.

4.5.2 Καταστατική συμπεριφορά γραμμικά ελαστικών υλικών στις δύο διαστάσεις

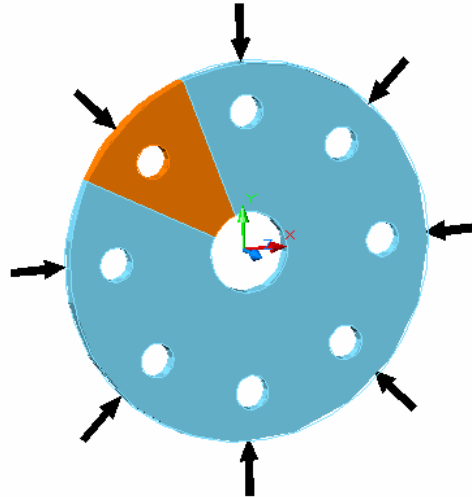
Όπως έχει ήδη αναφερθεί (παράγραφος 4.3.1), οι πραγματικές κατασκευές αποτελούν τρισδιάστατα σώματα. Ωστόσο αρκετές φορές η γεωμετρία τους είναι τέτοια που επιτρέπει την μελέτη αυτών στις δύο διαστάσεις, χωρίς σημαντικά σφάλματα σε σχέση με την ακρίβεια της ανάλυσης που είναι επιθυμητό να γίνει. Παρακάτω θα αναπτυχθούν τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την καταστατική συμπεριφορά των γραμμικά ελαστικών υλικών στις δύο διαστάσεις.

Θεώρηση Επίπεδης Τάσης

Η θεώρηση επίπεδης τάσης γίνεται στην περίπτωση που η ανάπτυξη ενός σώματος κατά την διεύθυνση μιας διάστασης είναι πολύ μικρότερη σχετικά με την ανάπτυξη στις άλλες δύο. Στη περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι οι εμφανιζόμενες σε αυτή τη διάσταση τάσεις, είναι μηδενικές σχετικά με αυτές που εμφανίζονται στο επίπεδο των άλλων δύο διαστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 4.9 απεικονίζεται ένας κυκλικός δίσκος του οποίου η ανάπτυξη ως προς την διεύθυνση του άξονα z είναι αμελητέα σε σχέση με την ανάπτυξη στις διευθύνσεις x και y. Η καταπόνηση

του δίσκου γίνεται στο επίπεδο x-y, οπότε οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ως προς την διεύθυνση z είναι

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (4.11)$$



Σχήμα 4.9: Θεώρηση επίπεδης τάσης

Από τον συνδυασμό της σχέσης 4.10 και της ισότητας 4.11, προκύπτουν οι καταστατικές εξισώσεις του γραμμικά ελαστικού υλικού για την θεώρηση επίπεδης τάσης

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

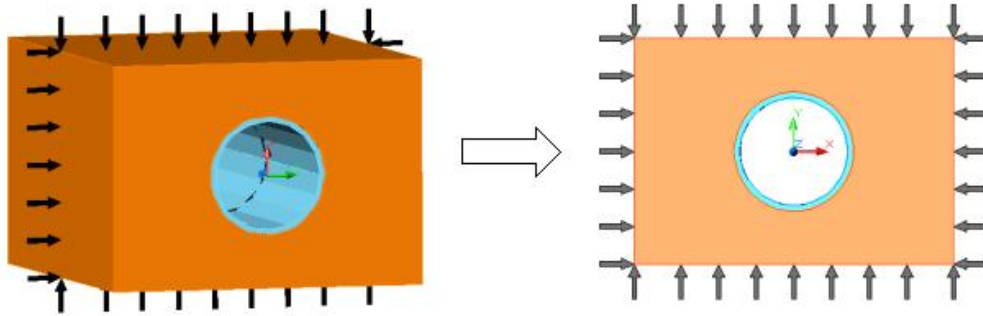
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.12)$$

Θεώρηση Επίπεδης Παραμόρφωσης

Αντίστοιχα με την παραδοχή της επίπεδης τάσης, μπορεί να γίνει και η θεώρηση της επίπεδης παραμόρφωσης για σώματα των οποίων η ανάπτυξη στην τρίτη διάσταση είτε δεν είναι αμελητέα, είτε είναι πολύ μεγαλύτερη από την ανάπτυξη στις άλλες δύο (σχήμα 4.10). Στη περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι οι μετατοπίσεις

στην τρίτη διάσταση, κατά συνέπεια και οι παραμορφώσεις, θα είναι αμελητέες. Για τις αντίστοιχες συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων θα ισχύει η ισότητα

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.13)$$



Σχήμα 4.10: Θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης

Από τον συνδυασμό της σχέσης 4.10 και της ισότητας 4.13, προκύπτουν οι καταστατικές εξισώσεις του γραμμικά ελαστικού υλικού για την θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.15)$$

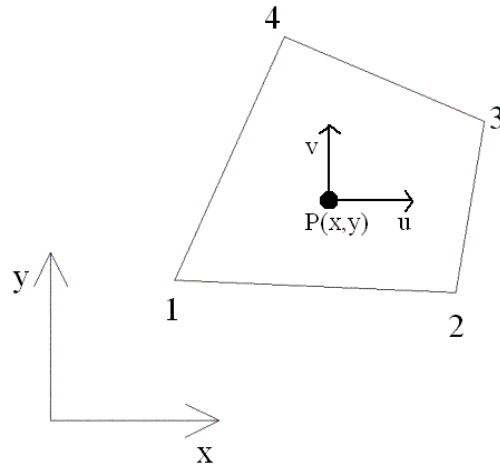
4.6 Εξισώσεις ισορροπίας και επίλυση σε επίπεδο στοιχείου

Ένας τύπος στοιχείου που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην ελαστική ανάλυση επίπεδων προβλημάτων είναι το τετραπλευρικό τετρακομβικό στοιχείο (σχήμα, 4.11). Ο κάθε κόμβος του συγκεκριμένου στοιχείου έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή μπορεί να μετατοπισθεί κατακόρυφα, $v(x,y)$ και οριζόντια, $u(x,y)$. Οι συναρτήσεις παρεμβολής που θα περιγράψουν την κατανομή της οριζόντιας και της κατακόρυφης μετατόπισης σε κάθε σημείο του στοιχείου, $P(x,y)$, θα είναι της μορφής

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

(4.16)

$$v(x, y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy$$



Σχήμα 4.11: Τετραπλευρικό τετρακομβικό στοιχείο

οι οποίες με τη χρήση πινάκων και διανυσμάτων μπορούν να γραφούν στη συμπαγή μορφή

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

ή

$$\{q\} = [\Phi] \{\alpha\} \quad (4.17)$$

όπου $[\Phi]$ ο πίνακας των καθολικών συντεταγμένων κάθε σημείου και $\{\alpha\}$ το διάνυσμα των συντελεστών. Εφόσον οι συναρτήσεις παρεμβολής επαληθεύονται σε κάθε σημείο του στοιχείου θα επαληθεύονται και στους κόμβους του. Εάν στη συνάρτηση 4.16 αντικατασταθούν οι συντεταγμένες και οι μετατοπίσεις του κάθε κόμβου θα προκύψει η σχέση

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

η οποία μπορεί να γραφεί συμβολικά ως

$$\{q_e\} = [A]\{a\} \quad (4.19)$$

όπου $\{q_e\}$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους, $[A]$ ο πίνακας συντεταγμένων των κόμβων και $\{a\}$ το διάνυσμα των συντελεστών της συνάρτησης παρεμβολής. Από τις σχέσεις 4.17 και 4.19 προκύπτει η εξίσωση

$$\{q\} = [N]\{q_e\} \quad (4.20)$$

όπου $[N] = [\Phi][A]^{-1}$.

Σχέσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Οι συνιστώσες του διανύσματος των παραμορφώσεων στις δύο διαστάσεις συνδέονται με τις μετατοπίσεις του κάθε κόμβου με τις σχέσεις

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.21)$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν ισοδύναμα στη συμπαγή μορφή

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

ή

$$\{\varepsilon\} = [X]\{q\} \quad (4.23)$$

όπου $\{\varepsilon\}$ το διάνυσμα των παραμορφώσεων, $[X]$ ο πίνακας των μερικών παραγώγων και $\{q\}$ το διάνυσμα των μετατοπίσεων. Από τις σχέσεις 4.20 και 4.23 προκύπτει η εξίσωση

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q_e\} \quad (4.24)$$

όπου $[B]=[X][N]$. Η εξίσωση 4.24 συνδέει τις παραμορφώσεις σε ένα τυχαίο σημείο, $P(x,y)$, στο εσωτερικό του στοιχείου με τις μετατοπίσεις των κόμβων.

Σύνθεση του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου

Η τεχνική σύνθεσης του μητρώου ακαμψίας του κάθε στοιχείου, βασίζεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια κάθε στοιχείου προκύπτει με την αφαίρεση του μηχανικού έργου που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις που επιδρούν στο στοιχείο από την εσωτερική ενέργεια του στοιχείου. Η μαθηματική έκφραση του παραπάνω ισοζυγίου ενέργειας μπορεί να δοθεί ως

$$\Pi = U - W_F \quad (4.25)$$

όπου Π η δυναμική ενέργεια του στοιχείου, U η εσωτερική ενέργεια του στοιχείου και W_F το μηχανικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις. Οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες (Αγιουτάντης, 2002):

- δυνάμεις πεδίου (π.χ. βαρυτικές)
- τάσεις (π.χ. υδροστατικές)
- σημειακές δυνάμεις

Η εσωτερική ενέργεια του στοιχείου δίδεται από την σχέση

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (4.26)$$



Σχήμα 4.12: Είδη εξωτερικών δυνάμεων που εφαρμόζονται σε ένα στοιχείο

όπου $\{\sigma\}$ το διάνυσμα των τάσεων και $\{\varepsilon\}$ το διάνυσμα των παραμορφώσεων. Οι τάσεις με τις παραμορφώσεις συνδέονται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, με μια καταστατική εξίσωση της μορφής

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.27)$$

όπου $[D]$ το μητρώο των ελαστικών σταθερών. Εάν αντικατασταθεί το διάνυσμα της τάσης στην εξίσωση 4.26, η εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας γίνεται

$$\begin{aligned} U &= \frac{h}{2} \iint \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy \xrightarrow{4.26} \\ U &= \frac{h}{2} \iint \{q_e\}^T [B]^T [D] [B] \{q_e\} dx dy \Rightarrow \\ U &= \frac{1}{2} \{q_e\}^T [k_e] \{q_e\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

όπου

$$[k_e] = h \int \int [B]^T [D] [B] dx dy \quad (4.29)$$

το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου και h το πάχος του στοιχείου (Αγιουτάντης, 2002).

Κάθε μεταβολή στη κατανομή της μάζας ενός στερεού σώματος προκαλεί διαταραχή στο εντατικό του πεδίο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα διατάραξης εντατικού πεδίου αποτελεί η όρυξη σήραγγας σε κάποιο γεωυλικό (βράχο ή έδαφος). Η αφαίρεση μάζας επάγει τάσεις στο περιβάλλον γεωυλικό και έχει ως αποτέλεσμα την παραμόρφωση του ανοίγματος μέχρι να μηδενιστούν οι επαγόμενες τάσεις. Η διεργασία μηδενισμού των τάσεων και παραμόρφωσης του ανοίγματος μέχρι την

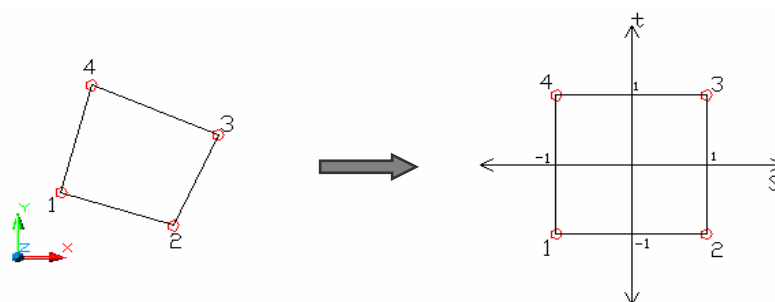
τελική κατάσταση ισορροπίας, διέπεται από την αρχή ελαχιστοποίησης της ενέργειας. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κατάσταση ισορροπίας θα χαρακτηρίζεται από την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας συναρτήσει των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο του στερεού σώματος ή σε κάθε σημείο του στοιχείου. Η μαθηματική έκφραση της διεργασίας δίδεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{q_e\}} = 0 \quad (4.30)$$

Με τη χρήση αυτού του κριτηρίου εξάγεται η σχέση 4.1 για κάθε στοιχείο, που συνδέει τις εφαρμοζόμενες στους κόμβους δυνάμεις με τις μετατοπίσεις (Αγιουτάντης, 2002).

Γεωμετρικός μετασχηματισμός στοιχείου

Ο υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας πραγματοποιείται με την χρήση τεχνικών αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η διαδικασία αυτή απλοποιείται σημαντικά με τον γεωμετρικό μετασχηματισμό του στοιχείου από το καθολικό σύστημα αναφοράς (x-y) σε ένα τοπικό σύστημα αναφοράς (s-t). Ένας πρακτικός γεωμετρικός μετασχηματισμός που μπορεί να αξιοποιηθεί κατάλληλα από τις τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης του Gauss (Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev), είναι αυτός που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.13.



Σχήμα 4.13 Μετασχηματισμός στοιχείου από το καθολικό σύστημα αναφοράς (x-y), στο τοπικό σύστημα αναφοράς του στοιχείου (s-t)

Για την μαθηματική διατύπωση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού, γίνεται παραδοχή ότι οι συντεταγμένες του τοπικού συστήματος αναφοράς συνδέονται με τις συντεταγμένες του καθολικού με τις πολυωνυμικές σχέσεις

$$x(s,t) = c_1 + c_2 s + c_3 t + c_4 st \quad (4.31)$$

$$y(s,t) = d_1 + d_2 s + d_3 t + d_4 st$$

όπου c_i και d_i , με $i=1:4$, οι συντελεστές των πολωνύμων. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (MET). Με αντικατάσταση των συντεταγμένων των κόμβων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αναφοράς, στις εξισώσεις 4.30, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & t_1 & s_1 t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & s_2 t_2 \\ 1 & s_3 & t_3 & s_3 t_3 \\ 1 & s_4 & t_4 & s_4 t_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & t_1 & s_1 t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & s_2 t_2 \\ 1 & s_3 & t_3 & s_3 t_3 \\ 1 & s_4 & t_4 & s_4 t_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

ή

$$\{x\} = [st]\{c\} \quad \text{και} \quad \{y\} = [st]\{d\} \quad (4.33)$$

όπου $\{x\}$ και $\{y\}$ τα διανύσματα συντεταγμένων των κόμβων στο καθολικό σύστημα αναφοράς, $\{c\}$ και $\{d\}$ τα διανύσματα των συντελεστών των πολωνύμων και $[st]$ το μητρώο συντεταγμένων των κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς. Εφαρμόζοντας την MET οι συντελεστές των πολωνύμων θα δίδονται από τις εξισώσεις

$$\{c\} = ([st]^T [st])^{-1} [st]^T \{x\} \quad \text{και} \quad \{d\} = ([st]^T [st])^{-1} [st]^T \{y\} \quad (4.34)$$

Κάθε στοιχείο του μητρώου ακαμψίας είναι συνάρτηση των καθολικών συντεταγμένων (x,y) , δηλαδή $k_{ij}^e = f_m(x,y)$ με $m=1:2n$ και n το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου. Με αντικατάσταση των μεταβλητών x και y από τις μεταβλητές s και t σύμφωνα με τις σχέσεις 4.31, το κάθε στοιχείο του μητρώου ακαμψίας μετασχηματίζεται σε συνάρτηση των τοπικών συντεταγμένων (s,t) , δηλαδή $k_{ij}^e = g_m(s,t)$. Τελικά, το μητρώο ακαμψίας μετά το γεωμετρικό μετασχηματισμό θα δίδεται από τη σχέση

$$[k_e] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] J |dsdt| \quad (4.35)$$

όπου $|J|$ η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (4.36)$$

Με αντικατάσταση των μερικών παραγώγων στην Ιακωβιανή ορίζουσα προκύπτει η τελική σχέση

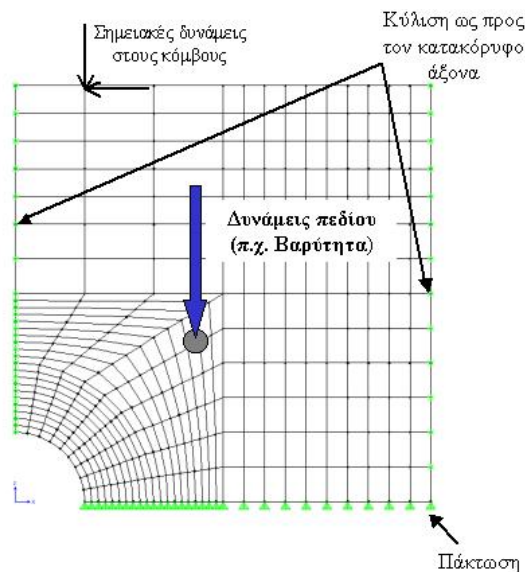
$$|J| = (c_2 + c_4 t)(d_3 + d_4 t) - (c_3 + c_4 s)(d_2 + d_4 t) \quad (4.37)$$

4.7 Φόρτιση της κατασκευής και συνοριακές συνθήκες

Εφόσον το σώμα διακριτοποιηθεί, σχηματίζονται τα μητρώα ακαμψίας κάθε στοιχείου και από κατάλληλη υπέρθεση αυτών το καθολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, το μόνο που μένει για την επίλυση του προβλήματος είναι ο ορισμός των συνοριακών συνθηκών. Οι συνοριακές συνθήκες εκφράζουν αφενός μεν τους γεωμετρικούς περιορισμούς που υπάρχουν από την μορφή του σώματος και την έκταση που καταλαμβάνει στο χώρο, αφετέρου δε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Από την θεωρητική ανάπτυξη των προβλημάτων ελαστικότητας (βλέπε παράγραφο 4.5.1 και σχήμα 4.12) προκύπτει ότι η φόρτιση του υλικού ή αντίστοιχα η φόρτιση του διαιρεμένου πεδίου που αντιπροσωπεύει το υλικό, είναι δυνατό να επιτευχθεί με έναν από του ακόλουθους τρόπους (Αγιουτάντης, 2002):

- επιβολή δυνάμεων πεδίου στη μάζα του στοιχείου ή του σώματος
- επιβολή σημειακών δυνάμεων στους κόμβους του στοιχείου ή του σώματος
- επιβολή τάσεων στις ακμές των στοιχείων
- επιβολή μετατοπίσεων τους κόμβους του στοιχείου ή του σώματος

Επειδή όμως η εξίσωση 4.1 συνδέει τις μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο με τις κομβικές δυνάμεις, πρέπει όλα τα παραπάνω είδη εξωτερικών δυνάμεων να αντικατασταθούν από κομβικές δυνάμεις οι οποίες θα επιβάλλουν ισοδύναμη εντατική κατάσταση σε κάθε σημείο του στοιχείου και κατά συνέπεια του υλικού.



Σχήμα 4.14: Συνοριακές συνθήκες για την μελέτη του εντατικού πεδίου κατά την όρυξη κυκλικής σήραγγας

Με βάση τα προηγούμενα είναι δυνατό να οριστούν τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών (Αγιουτάντης, 2002):

- Οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες **Dirichlet** οι οποίες ορίζονται ως ο προσδιορισμός των τιμών της ζητούμενης μεταβλητής σε κάποιον ή κάποιους κόμβους. Πιο συγκεκριμένα για προβλήματα ελαστικότητας οι συνθήκες αυτές δίδονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 \\ v_i &= v_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

όπου i ο κόμβος του στοιχείου.

- Οι φυσικές συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες **Newmann** οι οποίες ορίζονται ως ο προσδιορισμός των τιμών της παραγώγου της ζητούμενης μεταβλητής σε κάποιον ή κάποιους κόμβους. Πιο συγκεκριμένα για προβλήματα ελαστικότητας οι συνθήκες αυτές δίδονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} F_{Xi} &= f_0 \\ F_{Yi} &= w_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

όπου i ο κόμβος του στοιχείου.

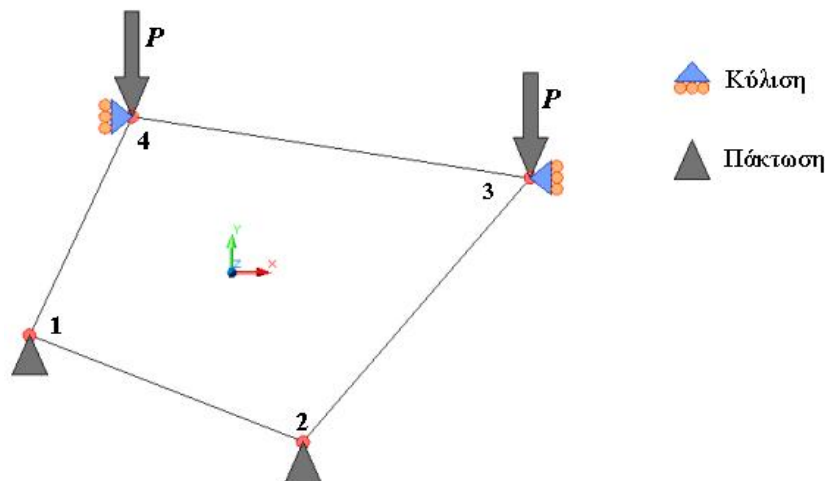
- Οι μικτές συνοριακές συνθήκες οι οποίες ορίζονται ως ο προσδιορισμός και των δύο παραπάνω παραμέτρων σε κάποιον ή κάποιους κόμβους.

Για να γίνει πιο κατανοητή η φυσική σημασία των συνοριακών συνθηκών αλλά και του μητρώου ακαμψίας ενός σώματος, θα χρησιμοποιηθεί η δομική μονάδα του διακριτοποιημένου σώματος, το στοιχείο και πιο συγκεκριμένα το τετραπλευρικό τετρακομβικό στοιχείο. Η καταστατική συμπεριφορά του εν λόγω στοιχείου θα δίδεται από τη μητρική σχέση 4.1 η οποία εάν αναπτυχθεί έχει τη μορφή (βλέπε παράλληλα και εξισώσεις 4.16 και 4.18)

$$\{F_e\} = [k_e]\{q_e\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

όπου F_{ij} η δύναμη που ασκείται στον κόμβο $i = 1:4$ με διεύθυνση $j = x$ ή y . Στο σχήμα 4.15 απεικονίζεται ένα στοιχείο το οποίο στους κόμβους 3 και 4 φορτίζεται από δύο κατακόρυφες κομβικές δυνάμεις με μέτρο P , δηλαδή:

$$F_{4y} = F_{3y} = P$$



Σχήμα 4.15: Παράδειγμα ορισμού συνοριακών συνθηκών σε προβλήματα επίπεδης ελαστικότητας

Οι συνοριακές συνθήκες που έχουν εφαρμοστεί στο στοιχείο είναι αναλυτικά για κάθε κόμβο οι παρακάτω:

I. Κόμβος 1: πάκτωση για την οποία ισχύει η ισότητα

$$u_1 = v_1 = 0$$

II. Κόμβος 2: πάκτωση για την οποία ισχύει η ισότητα

$$u_2 = v_2 = 0$$

III. Κόμβος 3: κύλιση ως προς τον κατακόρυφο άξονα για την οποία ισχύει η ισότητα

$$u_3 = 0$$

IV. Κόμβος 4: κύλιση ως προς τον κατακόρυφο άξονα για την οποία ισχύει η ισότητα

$$u_4 = 0$$

Αντικαθιστώντας δυνάμεις και μετατοπίσεις στην εξίσωση 4.38 προκύπτει το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ P \\ F_{4x} \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προσδιορίζονται αρχικά οι άγνωστες μετατοπίσεις v_3 και v_4 και στη συνέχεια οι άγνωστες κομβικές δυνάμεις.

Ένα ερώτημα που είναι δυνατό να τεθεί σε σχέση με αυτά που αναφέρθηκαν, είναι τι θα συμβεί εάν στους κόμβους 3 και 4 εφαρμοσθούν μόνο οι κομβικές δυνάμεις και καμία συνοριακή συνθήκη (δηλαδή κύλιση ως προς τον κατακόρυφο άξονα). Σε αυτή την περίπτωση οι μετατοπίσεις u_3 και u_4 είναι άγνωστες, και το σύστημα δεν είναι δυνατό να επιλυθεί διότι οι άγνωστες μεταβλητές είναι περισσότερες από τις

εξισώσεις. Η λύση στο πρόβλημα αυτό δίδεται από την σχέση 4.30 η οποία για την περίπτωση της εσωτερικής ενέργειας γράφεται

$$\frac{\partial U}{\partial \{q_e\}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \{q_e\}^T [k_e] \{q_e\} \right)}{\partial \{q_e\}} \quad (4.42)$$

Όπως γίνεται αντιληπτό από την εξίσωση 4.42, η εσωτερική ενέργεια πρέπει να παραγωγιστεί ως προς κάθε άγνωστη συνιστώσα του διανύσματος $\{q_e\}$ και στη συνέχεια να εξισωθεί το μηδέν. Από την ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας προκύπτουν οι υπόλοιπες εξισώσεις, ως προς τις άγνωστες μετατοπίσεις, που απαιτούνται για να λυθεί το σύστημα 4.38.

4.8 Πεπερασμένα στοιχεία και δυναμική ανάλυση

Στη παρούσα παράγραφο θα γίνει μία συνοπτική περιγραφή των δυναμικών προβλημάτων από τη σκοπιά των αριθμητικών μεθόδων και θα αναπτυχθούν κάποιες βασικές τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης. Επειδή η βασική μαθηματική ανάλυση της ΜΠΣ έγινε σε επίπεδο στοιχείου, η ανάπτυξη των μεθόδων επίλυσης δυναμικών προβλημάτων θα γίνει επίσης και αυτή σε επίπεδο στοιχείου. Η ανάλυση σε επίπεδο σώματος, κατασκευής ή πεδίου προκύπτει εάν αντικατασταθούν, όπου εμφανίζονται, τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας του στοιχείου από τα αντίστοιχα καθολικά μητρώα του σώματος και τα διανύσματα κομβικών δυνάμεων, μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων του στοιχείου από τα αντίστοιχα διανύσματα του διακριτοποιημένου σώματος.

4.8.1 Διατύπωση του δυναμικού προβλήματος

Εάν η γωνιακή συχνότητα της δύναμης που διεγείρει ένα δυναμικό σύστημα είναι μικρότερη από το ένα τρίτο της θεμελιώδους γωνιακής ιδιοσυχνότητας, η επίδραση των δυνάμεων αδράνειας είναι αμελητέες (Cook et al., 1988). Η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς ενός τέτοιου συστήματος είναι ένα **ψευδοστατικό** πρόβλημα και η επίλυση του ανάγεται στο σχηματισμό και την επίλυση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση 4.1. Σε αντίθετη περίπτωση το πρόβλημα είναι **δυναμικό** και η μεθοδολογία ανάλυσης αν και γίνεται αρκετά πιο

πολύπλοκη, δεν διαφέρει σημαντικά ως προς τη φιλοσοφία από την ανάλυση ενός πολυβάθμιου ταλαντωτή (βλέπε παράγραφο 3.5).

Τα δυναμικά προβλήματα είναι δυνατό να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες, τα προβλήματα **διάδοσης κυμάτων** και τα προβλήματα **δυναμικής των κατασκευών**. Στα προβλήματα διάδοσης κυμάτων, τα δυναμικά φορτία που επιβάλλονται στο σώμα έχουν μικρή χρονική διάρκεια και είναι δυνατό να προέρχονται από κρούση ή από έκρηξη. Η διέγερση και κατά συνέπεια η απόκριση κάθε σημείου του σώματος που μελετάται, περιέχει μεγάλο ποσοστό υψηλών συχνοτήτων (πολλαπλάσια της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας), δηλαδή υψηλό ενεργειακό περιεχόμενο. Σε τέτοια προβλήματα το ενδιαφέρον εστιάζεται στα αποτελέσματα που έχει η εφαρμογή και διάδοση του τασικού παλμού στο προς μελέτη σώμα και ο χρόνος ανάλυσης είναι σχετικά μικρός (Cook et al., 1988).

Στα προβλήματα δυναμικής των κατασκευών η γωνιακή συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι παραπλήσια της θεμελιώδους γωνιακής ιδιοσυχνότητας του σώματος ή της κατασκευής. Τα προβλήματα αυτά είναι δυνατό με την σειρά τους να ταξινομηθούν σε δύο υποκατηγορίες, στα προβλήματα προσδιορισμού των ιδιοσυχνοτήτων της κατασκευής ή του σώματος και στα προβλήματα χρόνο-ιστορικής ανάλυσης (Cook et al., 1988). Όσον αφορά την πρώτη υποκατηγορία, για κάθε μία από τις υπολογιζόμενες ιδιοσυχνότητες (natural frequencies) προσδιορίζονται οι ιδιομορφές (mode shapes) του σώματος, δηλαδή η κατανομή των μέγιστων τιμών της μετατόπισης (πλάτη) σε κάθε σημείο του σώματος όταν αυτό πραγματοποιεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η χρόνο-ιστορική ανάλυση χρησιμοποιείται όταν είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί η απόκριση της κατασκευής ή του κάθε σημείου του σώματος σε ένα δυναμικό φορτίο (π.χ. σεισμικά φορτία).

Εάν το σώμα ή η κατασκευή διεγείρεται από σεισμικά φορτία, τα οποία κατά κανόνα χαρακτηρίζονται από ένα ευρύ φάσμα περιεχομένων συχνοτήτων, η ένταξη τους σε μία από τις δύο βασικές κατηγορίες δυναμικών προβλημάτων γίνεται με την χρήση της φασματικής ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, για το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού υπολογίζονται τα φάσματα απόκρισης (βλέπε παραγράφους 3.6.2 και 3.6.3) και εντοπίζονται τα διαστήματα περιόδων ή συχνοτήτων στα οποία η φασματική επιτάχυνση έχει σχετικά υψηλές τιμές. Εάν η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα βρίσκεται εντός των ορίων των διαστημάτων αυτών τότε πρόκειται για ένα πρόβλημα δυναμικής των κατασκευών. Στην αντίθετη περίπτωση όπου η θεμελιώδης

ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί σε χαμηλές φασματικές επιταχύνσεις το πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ψευδοστατικό.

4.8.2 Η εξίσωση της κίνησης

Η κατανομή των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο του σώματος για κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης, η οποία σε επίπεδο στοιχείου γράφεται ως

$$[m_e]\{\ddot{q}_e\} + [c_e]\{\dot{q}_e\} + [k_e]\{q_e\} = \{F_e\} \quad (4.43)$$

όπου:

$[m_e]$: το μητρώο μάζας του στοιχείου

$[c_e]$: το μητρώο απόσβεσης του στοιχείου

$[k_e]$: το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου

$\{F_e\}$: το διάνυσμα των κομβικών χρονικά μεταβαλλόμενων δυνάμεων

$\{\ddot{q}_e\}$: το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων

$\{\dot{q}_e\}$: το διάνυσμα των κομβικών ταχυτήτων

$\{q_e\}$: το διάνυσμα των κομβικών επιταχύνσεων

Τα μητρώα μάζας και απόσβεσης σε επίπεδο στοιχείου υπολογίζονται από τις σχέσεις (Kramer, 1996):

$$[m_e] = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] J |dsdt| \quad (4.44)$$

και

$$[c_e] = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [\eta] [B] J |dsdt| \quad (4.45)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού και $[\eta]$ ο πίνακας με τις παραμέτρους απόσβεσης του υλικού οι οποίες έχουν χαρακτηριστικά ιξώδους απόσβεσης.

4.8.3 Χρόνο-ιστορική ανάλυση και μέθοδοι άμεσης χρονικής ολοκλήρωσης

Στις μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης ή μεθόδους βήμα προς βήμα, οι παράγωγοι του διανύσματος των μετατοπίσεων ως προς το χρόνο προσδιορίζονται με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών, δηλαδή διαφορών των μετατοπίσεων σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι επιλύουν προβλήματα αρχικών συνθηκών καθώς σε κάθε βήμα τα ζητούμενα μεγέθη προσδιορίζονται με την χρήση των τιμών προηγούμενων βημάτων (Cook et al., 1988). Για την επίλυση ενός μεγάλου ποσοστού προβλημάτων δυναμικής των κατασκευών και διάδοσης κυμάτων, γραμμικών και μη γραμμικών, οι μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης είναι η πλέον κατάλληλες, διότι επιτρέπουν τον υπολογισμό της απόκρισης του σώματος ή της κατασκευής σε κάποιο δυναμικό φορτίο κάθε χρονική στιγμή. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται αποκλειστικά από την φύση του προβλήματος που μελετάται (Cook et al., 1988).

Η εξίσωση κίνησης του στοιχείου τη χρονική στιγμή $t_n = ndt$, θα δίδεται από τη σχέση

$$[m_e]\{\ddot{q}_e\}_n + [c_e]\{\dot{q}_e\}_n + [k_e]\{q_e\}_n = \{F_e\}_n \quad (4.46)$$

όπου dt το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης. Όπως γίνεται αντιληπτό οι κομβικές δυνάμεις στην παραπάνω εξίσωση είναι διακριτές συναρτήσεις του χρόνου και λαμβάνουν τιμές ανά τακτά χρονικά διαστήματα dt . Εάν η καταστατική συμπεριφορά του υλικού που συνιστά το σώμα είναι γραμμική τότε το κάθε στοιχείο του μητρώου ακαμψίας, k_{eij} , θα είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Η μη γραμμική συμπεριφορά εμφανίζεται όταν τα στοιχεία του μητρώου ακαμψίας είναι συναρτήσεις της μετατόπισης και κατά συνέπεια και του χρόνου.

Οι μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης είναι δυνατό να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις εξισώσεις διαφορών που χρησιμοποιούνται στις **έμμεσες** και τις **άμεσες**. Για τις έμμεσες μεθόδους, οι εξισώσεις των διαφορών θα είναι της μορφής

$$\{q_e\}_{n+1} = f(\{q_e\}_n, \{\dot{q}_e\}_n, \{\ddot{q}_e\}_n, \{q_e\}_{n-1}, \dots) \quad (4.47)$$

όπου το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = (n+1)dt$, υπολογίζεται αποκλειστικά με την χρήση της ιστορικής πληροφορίας. Με τον όρο

ιστορική πληροφορία εννοούνται τα διανύσματα των κομβικών μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων προγενέστερων βημάτων που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές t_n , t_{n-1} , κτλ. Για τις άμεσες μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης, οι εξισώσεις των διαφορών θα είναι της μορφής

$$\{q_e\}_{n+1} = f(\{\dot{q}_e\}_{n+1}, \{\ddot{q}_e\}_{n+1}, \{q_e\}_n, \dots) \quad (4.48)$$

όπου το διάνυσμα κομβικών μετατοπίσεων τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = (n+1)dt$, υπολογίζεται με την χρήση των τιμών των παραγώγων της μετατόπισης την ίδια χρονική στιγμή (Cook et al., 1988).

4.8.4 Η μέθοδος εν χρόνο ολοκλήρωσης Newmark

Μια από τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος **Newmark**. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, τα διανύσματα των κομβικών μετατοπίσεων και ταχυτήτων του στοιχείου τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = (n+1) dt$, θα δίδονται από τις σχέσεις

$$\{q_e\}_{n+1} = \{q_e\}_n + dt\{\dot{q}_e\}_n + \frac{dt^2}{2}[(1-2\beta)\{\ddot{q}_e\}_n + 2\beta\{\ddot{q}_e\}_{n+1}] \quad (4.49)$$

$$\{\dot{q}_e\}_{n+1} = \{\dot{q}_e\}_n + dt[(1-\gamma)\{\ddot{q}_e\}_n + \gamma\{\ddot{q}_e\}_{n+1}] \quad (4.50)$$

όπου dt το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης και γ , β συντελεστές οι οποίοι επιλέγονται κατάλληλα ανάλογα με την απαιτούμενη ευστάθεια και ακρίβεια της μεθόδου (Cook et al., 1988). Με αντικατάσταση των εξισώσεων 4.49 και 4.50 στην εξίσωση 4.46 προκύπτει η γενικευμένη αριθμητική εξίσωση της κίνησης σε επίπεδο στοιχείου

$$\begin{aligned} & \left([m_e] + dt\gamma[b_e] + \frac{dt^2}{2}2\beta[k_e] \right) \{\ddot{q}_e\}_{n+1} + \left(dt(1-\gamma)[b_e] + \frac{dt^2}{2}(1-2\beta)[k_e] \right) \{\ddot{q}_e\}_n + \\ & \left([b_e] + dt[k_e] \right) \{\dot{q}_e\}_n + [k_e]\{q_e\}_n = \{F_e\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ανάλογα με τις τιμές του συντελεστή β οι μέθοδοι Newmark διακρίνονται και αυτές με τη σειρά τους σε άμεσες ($\beta > 0$) και έμμεσες ($\beta = 0$). Όσον αφορά την ευστάθεια των μεθόδων Newmark μπορεί να αποδειχτεί ότι

- Για $\gamma < \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι **ασταθής σε κάθε περίπτωση**
- για $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι **ευσταθής σε κάθε περίπτωση**
- για $\gamma \geq \frac{1}{2}$ κα $\beta < \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι **ευσταθής υπό συνθήκες** όταν $dt \leq \frac{\omega_{crit}}{\omega_{max}}$

όπου

$$\omega_{crit} = \frac{\zeta(\gamma - 1/2) + \sqrt{\gamma/2 - \beta + \zeta^2(\gamma - 1/2)^2}}{(\gamma/2 - \beta)} \quad (4.52)$$

και ω_{max} η μέγιστη γωνιακή ιδιοσυχνότητα του σώματος ή της κατασκευής (Cook et al., 1988). Σε επίπεδο στοιχείου η ω_{max} υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$\omega_{max} = \max_{j=1:N}(\omega_j) \quad (4.53)$$

όπου ω_j οι ρίζες της εξίσωσης

$$\det([k_e] - \omega^2[m_e]) = 0 \quad (4.54)$$

και N οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου.

Πίνακας 4.3: Οικογένεια μεθόδων Newmark (Cook et al., 1988)

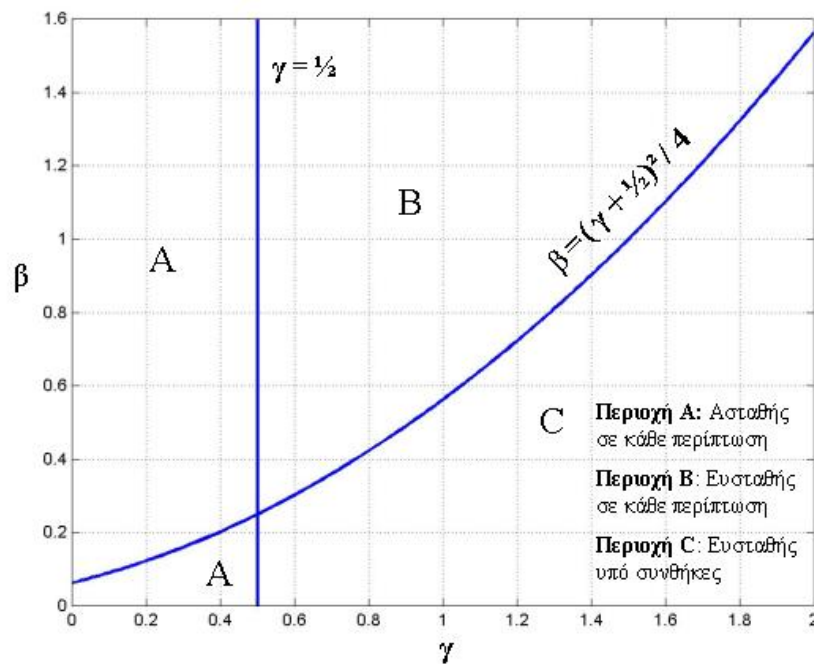
	Μέθοδος	β	γ
Άμεσες Μέθοδοι	Τεχνητής Απόσβεσης	$>\gamma/2$	$>1/2$
	Μέσης Επιτάχυνσης (Κανόνας Τραπεζίου)	$1/4$	$1/2$
	Γραμμικής Επιτάχυνσης	$1/6$	$1/2$
	Fox-Goodwin	$1/12$	$1/2$
Έμμεσες Μέθοδοι	Κεντρικών διαφορών [m _e] , [c _e] διαγώνιοι	0	$1/2$
	Τεχνητής Απόσβεσης [m _e] , [c _e] διαγώνιοι	0	$>1/2$

Ένα μειονέκτημα των μεθόδων Newmark είναι η αλγοριθμική αριθμητική απόσβεση που προκαλεί η εφαρμογή τους και η οποία είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί, εις βάρος όμως της ακρίβειας. Η **μέθοδος-α** που αναπτύχθηκε από του **Hilber, Hughes** και **Taylor** δεν παρουσιάζει αυτή την αδυναμία και με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων δίδει ακρίβεια δευτέρας τάξης. Ακρίβεια δευτέρας τάξης, $O(dt^2)$, υφίσταται όταν με υποδιπλασιασμό του χρονικού βήματος το σφάλμα τεταρτοδιαίρεται. Η αλγοριθμική έκφραση της μεθόδου-α σε επίπεδο στοιχείου είναι (Cook et al., 1988):

$$[m_e]\{\ddot{q}_e\}_{n+1} + (1+\alpha)[b_e]\{\dot{q}_e\}_{n+1} - a[b_e]\{\dot{q}_e\}_n + (1+\alpha)[k_e]\{q_e\}_{n+1} - a[k_e]\{q_e\}_n = (1+a)\{F_e\}_{n+1} - a\{F_e\}_n \quad (4.55)$$

Ένα οι παράμετροι επιλεγούν έτσι ώστε $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$, $\gamma = \frac{(1-2a)}{2}$ και $\beta = \frac{(1-a)^2}{4}$,

η μέθοδος είναι άμεση, ευσταθής σε κάθε περίπτωση και με ακρίβεια δευτέρας τάξης. Για $a = 0$ η μέθοδος υποβιβάζεται σε κανόνα του τραπεζίου (μέθοδος μέσης επιτάχυνσης, βλέπε πίνακα 4.3), ενώ εάν μειωθεί το a επιτυγχάνεται τεχνητή αριθμητική απόσβεση (Cook et al., 1988).



Σχήμα 4.16: Νομόγραμμα των συντελεστών β και γ για την ευστάθεια των αμέσων μεθόδων Newmark

4.8.5 Χρόνο-ιστορική ανάλυση με την μέθοδο των ιδιομορφών

Κάθε στοιχείο ενός διακριτοποιημένου σώματος αποτελεί ένα πολυβάθμιο δυναμικό σύστημα εφόσον έχει περισσότερους από έναν βαθμούς ελευθερίας. Ως εκ τούτου και σύμφωνα με αυτά που έχουν αναπτυχθεί στην παράγραφο 3.5.2, η εξίσωση υπολογισμού των ιδιομορφών και των ιδιοσυχνοτήτων ενός τέτοιου στοιχείου(π.χ. το τετραπλευρικό τετρακομβικό επίπεδο στοιχείο) γράφεται

$$\left([k_e] - \omega^2 [m_e] \right) \{U_e\} = 0 \quad (4.56)$$

όπου $\{U_e\}$ το διάνυσμα με τα πλάτη των μετατοπίσεων των κόμβων του στοιχείου για κάθε βαθμό ελευθερίας. Οι ιδιοσυχνότητες είναι κατά τα γνωστά, οι ρίζες του πολωνύμου που προκύπτει από την εξίσωση 4.54 και για κάθε μία ιδιοσυχνότητα ω_j , υπολογίζεται και ένα ιδιοδιάνυσμα $\{U_e\}_j$.

Η εξίσωση της κίνησης του στοιχείου(εξίσωση 4.43) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$[m_e]\{\ddot{q}_e\} + [c_e]\{\dot{q}_e\} + [k_e]\{q_e\} = [m_e]\{\ddot{q}_e\}_g \quad (4.57)$$

όπου $\{\ddot{q}_e\}_g$ το διάνυσμα των επιταχύνσεων που εφαρμόζονται σε κάθε κόμβο ανά βαθμό ελευθερίας. Εάν θεωρηθεί ότι η λύση της εξίσωσης 4.57 είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$\{q_e\} = \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j g_j \quad (4.58)$$

όπου g_j μια αρμονική συνάρτηση του χρόνου που εξαρτάται από το πόσο συνεισφέρει η κάθε ιδιομορφή στην απόκριση του συστήματος και N οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, τότε η ταχύτητα και η επιτάχυνση των κόμβων για κάθε βαθμό ελευθερίας θα δίδονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\{\dot{q}_e\} = \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j \dot{g}_j \quad \text{και} \quad \{\ddot{q}_e\} = \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j \ddot{g}_j \quad (4.59)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εξισώσεις 4.58 και 4.59 στην εξίσωση 4.57 προκύπτει η σχέση

$$[m_e] \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j \ddot{g}_j + [c_e] \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j \dot{g}_j + [k_e] \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j g_j = [m_e] \{\ddot{q}_e\}_g \quad (4.60)$$

η οποία εάν πολλαπλασιαστεί από αριστερά με το ανάστροφο ιδιοδιάνυσμα κάθε ιδιομορφής γράφεται

$$\sum_{j=1}^N \bar{M}_j \ddot{g}_j + \sum_{j=1}^N \bar{C}_j \dot{g}_j + \sum_{j=1}^N \bar{K}_j g_j = \sum_{j=1}^N \{U_e\}_j^T [m_e] \{\ddot{q}_e\}_g \quad (4.61)$$

όπου :

$\bar{M}_j = \{U_e\}_j^T [m_e] \{U_e\}_j$: η γενικευμένη μάζα του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιομορφή j

$\bar{C}_j = \{U_e\}_j^T [c_e] \{U_e\}_j$: η γενικευμένη απόσβεση του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιομορφή j

$\bar{K}_j = \{U_e\}_j^T [k_e] \{U_e\}_j$: η γενικευμένη ακαμψία του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιομορφή j

Σύμφωνα με τα παραπάνω σε κάθε μία από τις ιδιομορφές αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\ddot{g}_j + 2\omega_j \zeta_j \dot{g}_j + \omega_j^2 g_j = \frac{1}{\bar{M}_j} \{U_e\}_j^T [m_e] \{\ddot{q}_e\}_g \quad (4.62)$$

όπου $\frac{\bar{C}_j}{\bar{M}_j} = 2\zeta_j \omega_j$ και $\frac{\bar{K}_j}{\bar{M}_j} = \omega_j^2$ και της οποίας η λύση είναι η αρμονική συνάρτηση

g_j .

Γίνεται λοιπόν ξεκάθαρο ότι με την μέθοδο χρόνο-ιστορικής ανάλυσης που μόλις περιγράφηκε είναι δυνατό η απόκριση ενός συνεχούς σώματος σε ένα δυναμικό φορτίο να προκύψει ως συνδυασμός ανεξάρτητων αρμονικών κινήσεων με απόσβεση ή μη, οι οποίες είναι συναρτήσεις των ιδιομορφών. Από την εξίσωση 4.62 προκύπτει

ότι είναι δυνατό να εφαρμοστεί ενιαία απόσβεση για όλες τις ιδιομορφές ή ξεχωριστή για κάθε μία από αυτές.

4.8.6 Απόσβεση κατά Rayleigh

Η απόσβεση κατά Rayleigh ή αναλογική απόσβεση αποτελεί μια εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού του μητρώου απόσβεσης από αυτή που περιγράφεται στην εξίσωση 4.45. Το μητρώο απόσβεσης είναι δυνατό να υπολογιστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και ακαμψίας από μία σχέση της μορφής

$$[c_e] = a[k_e] + \beta[m_e] \quad (4.63)$$

όπου a ο συντελεστής αναλογικής απόσβεσης του μητρώου ακαμψίας και β ο συντελεστής αναλογικής απόσβεσης του μητρώου μάζας. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά την εξίσωση 4.63 με το ιδιοδιάνυσμα της j ιδιομορφής και από αριστερά με το ανάστροφο αυτού, προκύπτει η σχέση

$$\bar{C}_j = a\bar{K}_j + \beta\bar{M}_j \quad (4.64)$$

η οποία με τις αντικαταστάσεις $\bar{C}_j/\bar{M}_j = 2\zeta_j\omega_j$ και $\bar{K}_j/\bar{M}_j = \omega_j^2$ γράφεται ισοδύναμα ως

$$\zeta_j = \frac{a\omega_j}{2} + \frac{\beta}{2\omega_j} \quad (4.65)$$

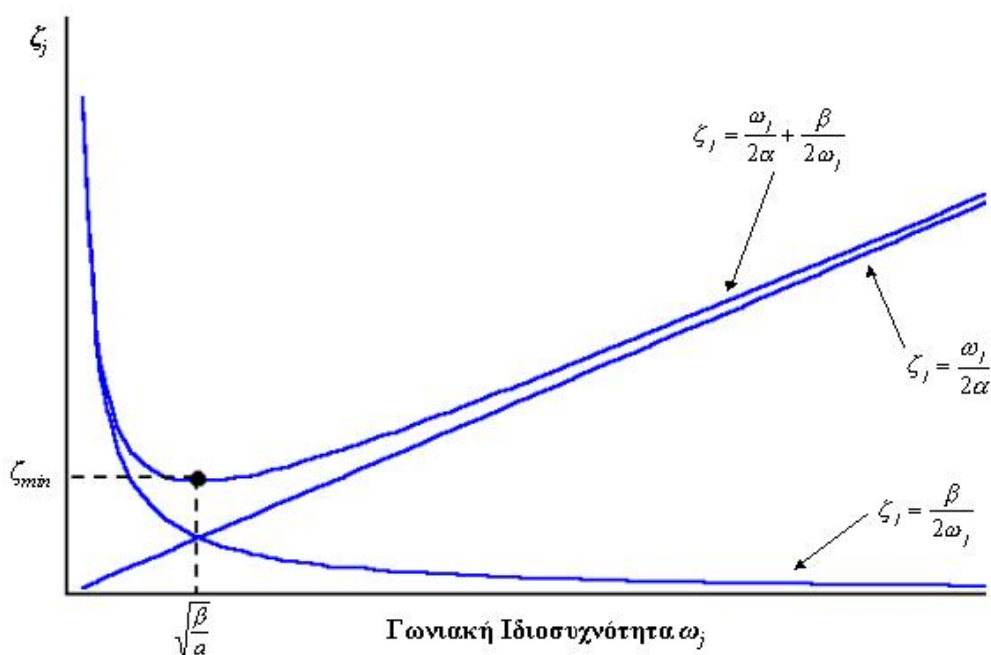
Εφόσον ο λόγος απόσβεσης του υλικού ενός σώματος είναι γνωστός, οι συντελεστές a και β είναι δυνατό να υπολογιστούν με την χρήση δύο κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων ω_k και ω_l από τη σχέση

$$\begin{Bmatrix} \zeta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_k & 1/\omega_k \\ \omega_l & 1/\omega_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/a \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

όπου $1 \leq k, l \leq N$ και $k \neq l$.

Οι ιδιοσυχνότητες που επιλέγονται συνήθως είναι η θεμελιώδης γωνιακή ιδιοσυχνότητα του σώματος και εκείνη στην οποία εμφανίζεται η μεγίστη φασματική

επιτάχυνση, εάν πρόκειται για σεισμική διέγερση γνωστής χρόνο-ιστορίας, διαφορετικά αυτή που αντιστοιχεί την μέγιστη επιτάχυνση στο φάσμα σχεδιασμού. Εναλλακτικά ως δεύτερη συχνότητα μπορεί να επιλεγεί η συχνότητα που αντιστοιχεί στη μέγιστη φασματική επιτάχυνση ακόμη και αν αυτή δεν αποτελεί ιδιοσυχνότητα του σώματος .



Σχήμα 4.17 : Νομόγραμμα κατανομής του λόγου απόσβεσης συναρτήσει της γωνιακής ιδιοσυχνότητας

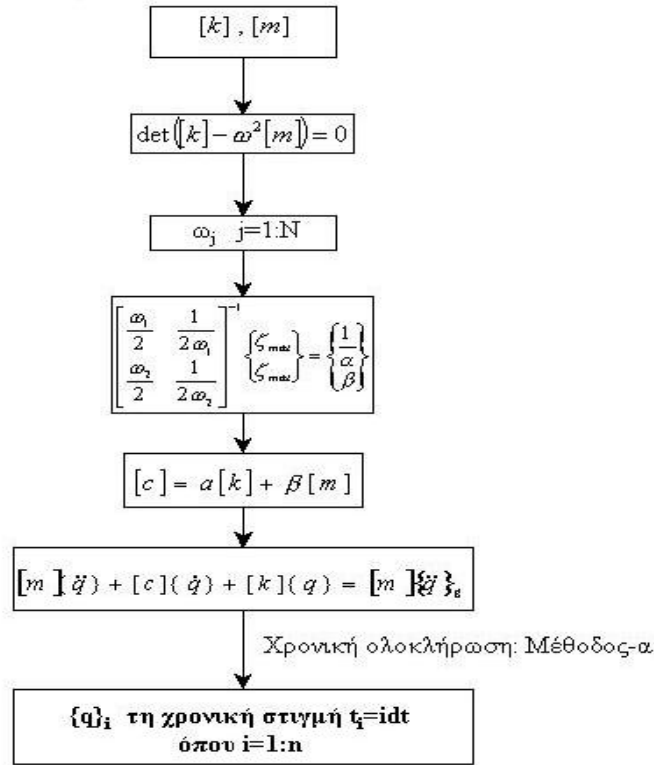
Με την μέθοδο της αναλογικής αποσβέσεως, ο προσδιορισμός του μητρώου απόσβεσης ενός σώματος ανάγεται στον υπολογισμό των συντελεστών α και β . Οι παράμετροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις των συντελεστών αυτών είναι οι ιδιοσυχνότητες ή οι συχνότητες που περιέχονται σε μια δεδομένη χρόνο-ιστορία επιτάχυνσης και ο λόγος απόσβεσης.

Ο προσδιορισμός του λόγου απόσβεσης είναι δυνατό να γίνει μόνο πειραματικά από μετρήσεις. Οι μετρήσεις αυτές πραγματοποιούνται είτε με εργαστηριακές δοκιμές είτε με την επί τόπου παρατήρηση της συμπεριφοράς μίας κατασκευής ή ενός σώματος σε δυναμικά φορτία. Για τον πειραματικό προσδιορισμό του λόγου απόσβεσης ενός υλικού (π.χ. σκυρόδεμα, χάλυβας κτλ) κατασκευάζονται δοκίμια τα οποία εξαναγκάζονται σε ταλάντωση και μετράται η μείωση του πλάτους της κίνησης συναρτήσει του χρόνου. Ο λόγος απόσβεσης μίας κατασκευής είναι δυνατό να

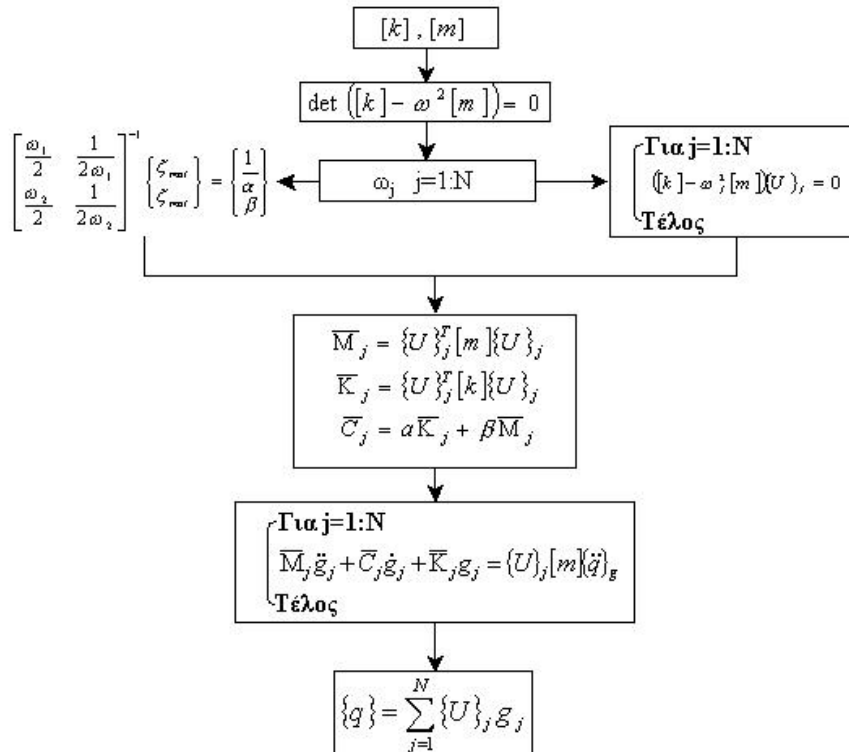
προσδιοριστεί πειραματικά είτε με την δημιουργία ενός υπό κλίμακα ομοιώματος στο εργαστήριο είτε με απευθείας μετρήσεις της απόκρισης της πραγματικής κατασκευής σε κάποια σεισμική διέγερση. Κατά αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται βάσεις δεδομένων με τις αποκρίσεις διαφόρων τύπων κατασκευών για ένα αριθμό σεισμικών γεγονότων από τις οποίες αντλούνται πληροφορίες για τον λόγο απόσβεσης μιας νέας κατασκευής η οποία βρίσκεται στο στάδιο του σχεδιασμού. Στον πίνακα 4.4 παρουσιάζονται οι προτεινόμενες τιμές του λόγου απόσβεσης τόσο για υλικά όσο και είδη κατασκευών

Πίνακας 4.4: Προτεινόμενες τιμές του λόγου απόσβεσης (Chopra, 1995)

Επίπεδο τάσης	Τύπος και κατάσταση της κατασκευής	Λόγος απόσβεσης ζ [%]
Τάση λειτουργίας όχι παραπάνω από το $\frac{1}{2}$ του ορίου διαρροής	- Συγκολλητικός χάλυβας - Προεντεταμένο σκυρόδεμα - Οπλισμένο σκυρόδεμα με μικρή ρωγμάτωση	2-3
	- Οπλισμένο σκυρόδεμα με αρκετή ρωγμάτωση	3-5
	- Χάλυβας με κοχλιώσεις ή υλώσεις - Ξύλινες κατασκευές με συνδέσεις από κοχλίες ή καρφιά	5-7
Τάση λειτουργίας στο όριο διαρροής ή λίγο παραπάνω	- Συγκολλητικός χάλυβας - Προεντεταμένο σκυρόδεμα χωρίς ολική απώλεια προέντασης	5-7
	- Προεντεταμένο σκυρόδεμα με ολική απώλεια προέντασης	7-10
	- Οπλισμένο σκυρόδεμα	7-10
	- Χάλυβας με κοχλιώσεις ή υλώσεις - Ξύλινες κατασκευές με συνδέσεις από κοχλίες	10-15
	- Ξύλινες κατασκευές με συνδέσεις από καρφιά	15-20



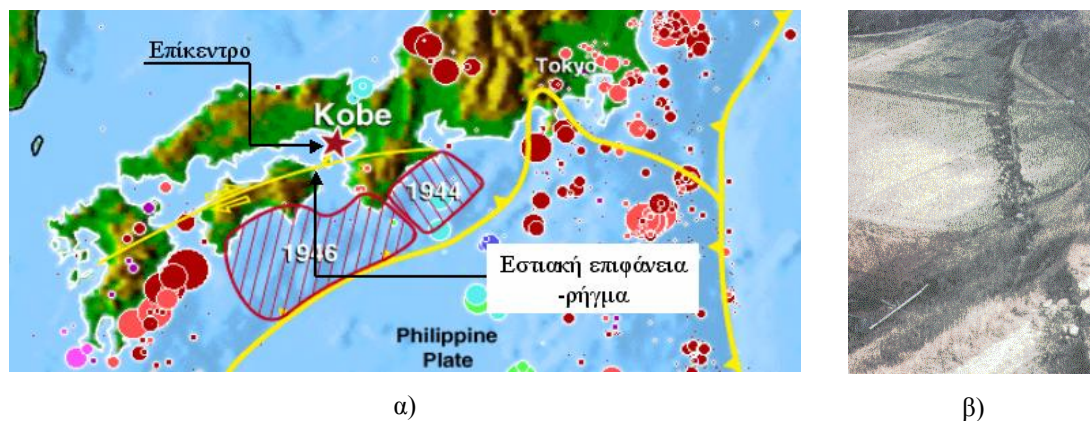
Σχήμα 4.18: Χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση με την παραδοχή της αναλογικής αποσβέσεως για υλικό με λόγο απόσβεσης ζ_{mat}



Σχήμα 4.18: Χρόνο-ιστορική ανάλυση των ιδιομορφών με την παραδοχή της αναλογικής αποσβέσεως για υλικό με λόγο απόσβεσης ζ_{mat}

5.2.1 Χαρακτηριστικά του σεισμού

Το επίκεντρο του σεισμού εντοπίστηκε περίπου 20 km νοτιοδυτικά του Kobe στο νησί Awaji με εστιακή επιφάνεια το ρήγμα του σχήματος 5.2 β). Η γένεση του σεισμού έλαβε χώρα σε μια περιοχή όπου υπήρχε ένα σύμπλεγμα από ενεργά ρήγματα. Ο εστιακός μηχανισμός υποδηλώνει παράλληλη και προς τα δεξιά διάρρηξη ως προς τις παρειές ενός κατάκορφου ρήγματος (σχήμα 5.2 α). Το ρήγμα εκτείνεται σε διεύθυνση βορειοανατολική και η μέση οριζόντια μετατόπιση της επιφανειακής διάρρηξης που δημιουργήθηκε κατά την διάρκεια του σεισμού, είναι περίπου από 1 έως 1.5 μέτρα. Τέλος από την υποθαλάσσια σεισμική χαρτογράφηση της περιοχής διαπιστώθηκε ότι περίπου 300 μέτρα του ρήγματος εκτείνονται παραλιακά των νησιών Awaji και Shikoku (Somerville, 1995).

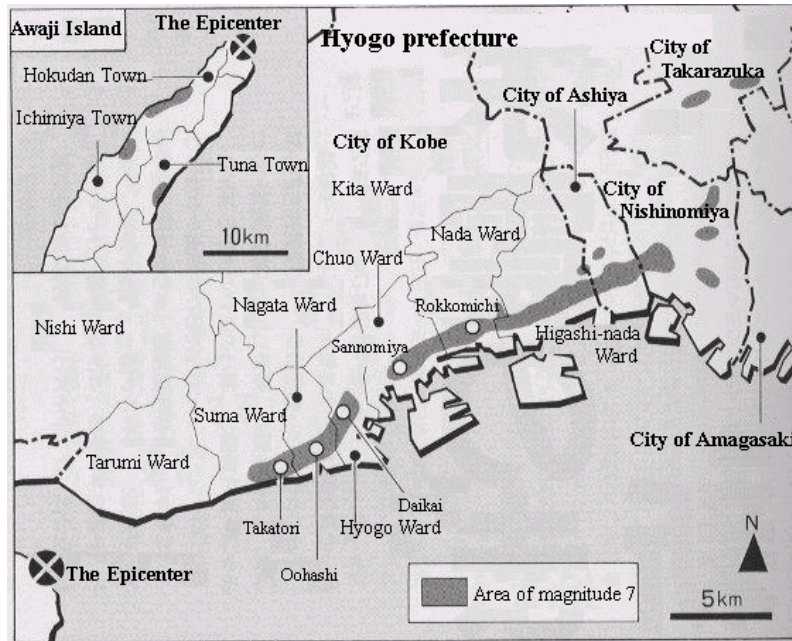


Σχήμα 5.2: α) Τεκτονικός χάρτης της νοτιοδυτικής Ιαπωνίας, β) Άποψη του ρήγματος στο Awaji (πηγή: www.seismo.unr.edu)

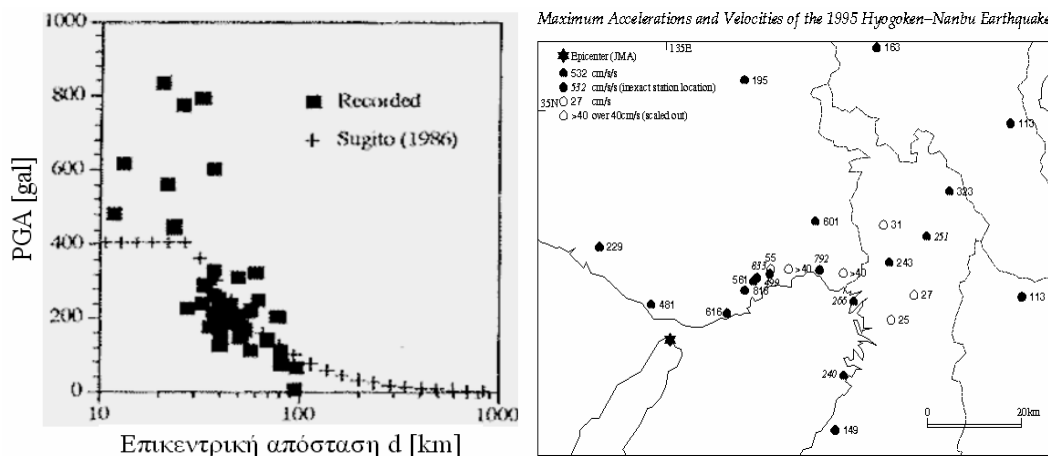
Γεωδαιτικές συντεταγμένες επικέντρου	34.6 N, 135.0 E
Εστιακό Βάθος h [km]	10
Μέγεθος M_L [κλίμακα Richter]	7.2
Ενέργεια διάρρηξης E [dynes-cm]	$3 \cdot 10^{26}$

Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά γένεσης του σεισμού (Somerville, 1995)

Στα σχήματα 5.3 και 5.4 απεικονίζονται με την μορφή θεματικών χαρτών, η κατανομή του τοπικού μεγέθους M_L (Local magnitude) και των μεγίστων απόλυτων τιμών της επιτάχυνσης και της ταχύτητας, όπως αυτά καταγράφηκαν στην ευρύτερη περιοχή του Kobe.



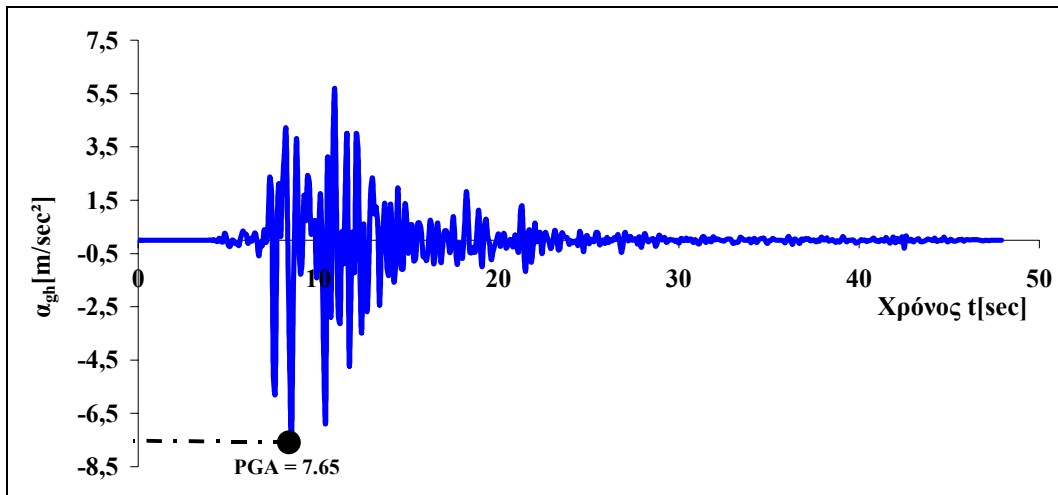
Σχήμα 5.3: Θεματικός χάρτης κατανομής του τοπικού μεγέθους του σεισμού στην ευρύτερη περιοχή του Kobe (πηγή: www.seismo.unr.edu)



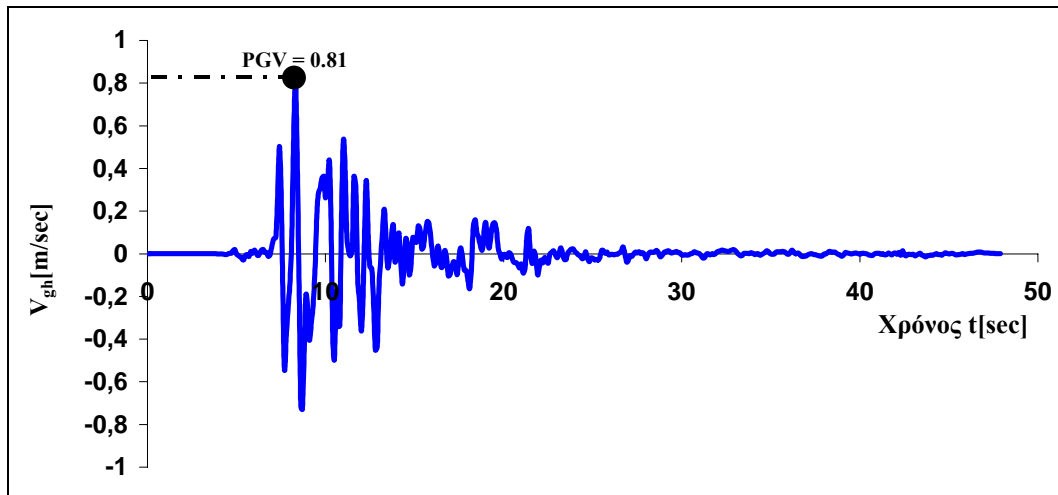
Σχήμα 5.4: Κατανομή της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης συναρτήσει της επικεντρικής απόστασης, $1g = 1000 \text{ gal}$ και των τιμών της μέγιστης ταχύτητας και επιτάχυνσης στην ευρύτερη περιοχή του Kobe (πηγή: www.seismo.unr.edu)

5.2.2 Καταγραφές της εδαφικής κίνησης

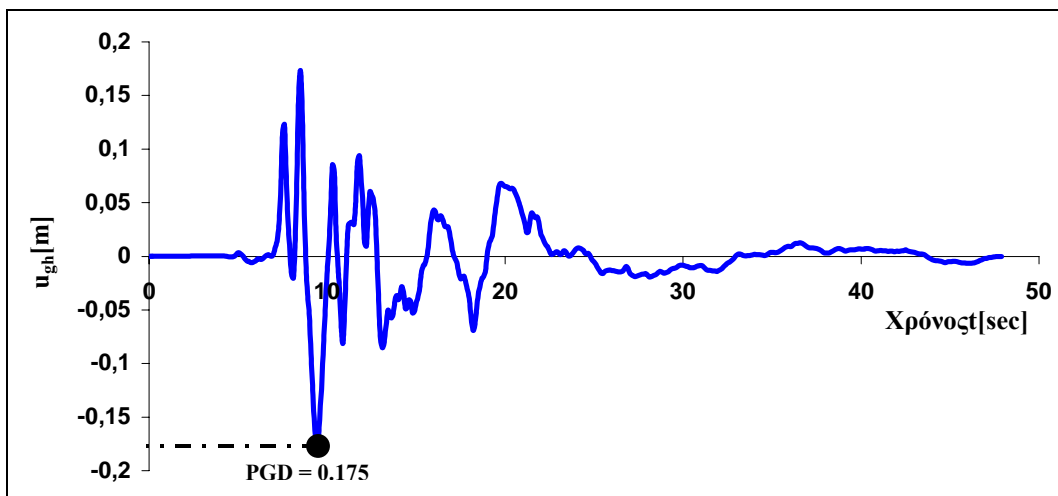
Από τις καταγραφές της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της μετατόπισης του εδάφους για την οριζόντια κίνηση στην διεύθυνση B-N και για την κατακόρυφη κίνηση προκύπτουν οι χρόνο-ιστορίες του σεισμού. Στα σχήματα 5.5 έως 5.10 απεικονίζονται οι χρόνο-ιστορίες που καταγράφηκαν από ένα σταθμό στο λιμάνι του Kobe, περίπου 30km βορειοανατολικά του epicέντρου.



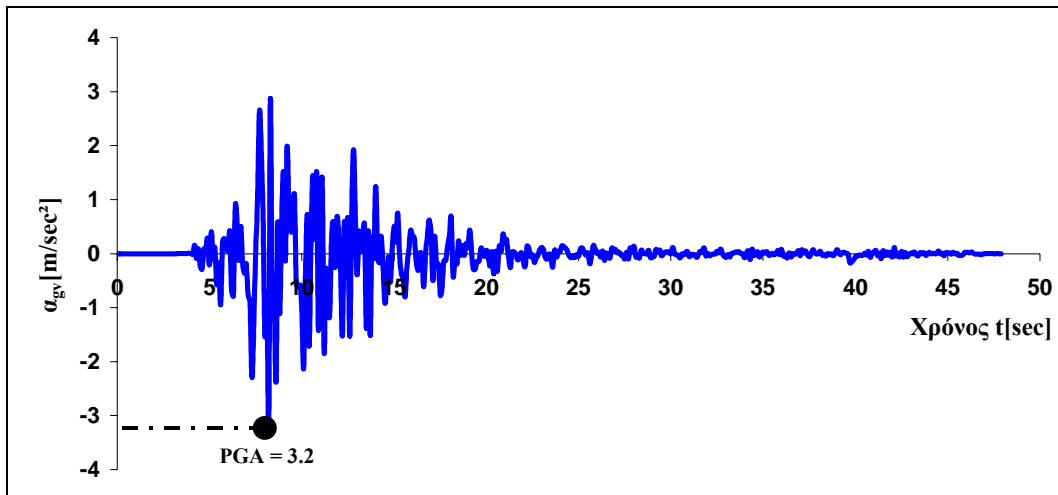
Σχήμα 5.5: Οριζόντια εδαφική επιτάχυνση, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)



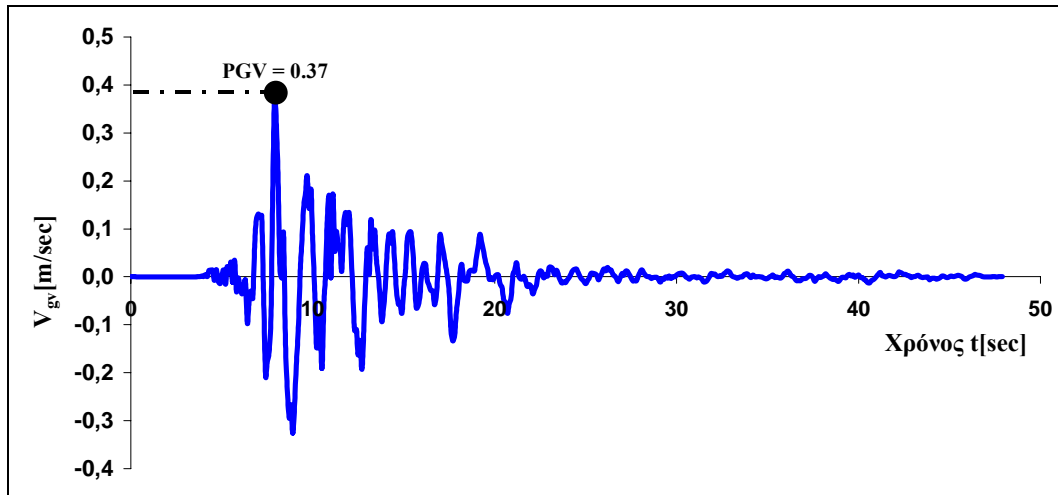
Σχήμα 5.6: Οριζόντια εδαφική ταχύτητα, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)



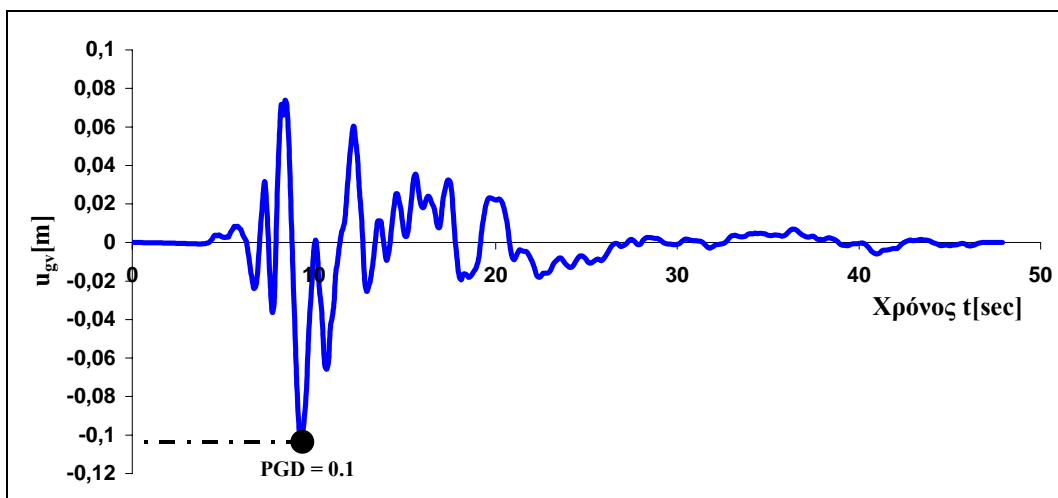
Σχήμα 5.7: Οριζόντια εδαφική μετατόπιση, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)



Σχήμα 5.8: Κατακόρυφη εδαφική επιτάχυνση, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)



Σχήμα 5.9: Κατακόρυφη εδαφική ταχύτητα, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)

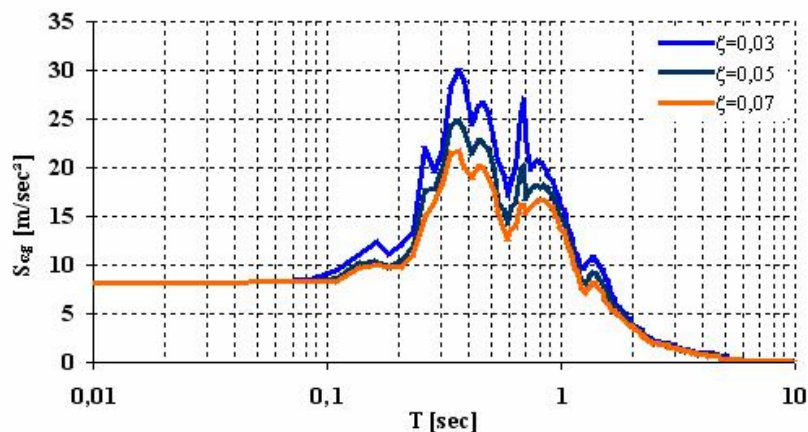


Σχήμα 5.10: Κατακόρυφη εδαφική μετατόπιση, βήμα δειγματοληψίας $dt=0.1\text{sec}$ (Kobe 17/01/1995)

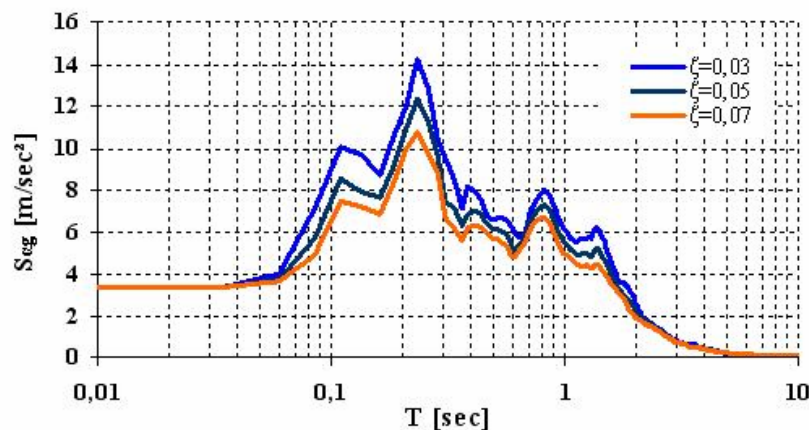
5.2.3 Επιπτώσεις στα δομικά έργα του Kobe

Τα καταστροφικά αποτελέσματα στα δομικά έργα από το σεισμό του Kobe, οφείλονται κυρίως στα εξής δυναμικά χαρακτηριστικά της κίνησης του εδάφους:

- Μεγάλη χρονική διάρκεια της ισχυρής επιτάχυνσης. Για περίπου 10 δευτερόλεπτα η απόλυτη επιτάχυνση του εδάφους κυμαινόταν από 4-8 m/sec² ή 0.4-0.8g
- Το συχνοτικό περιεχόμενο του σεισμού κάλυπτε ένα ευρύ φάσμα τιμών από 10-0.5 Hz και φασματικές επιταχύνσεις από 10-30m/sec². Αυτό είχε ως συνέπεια οι ιδιοσυχνότητες πολλών κατασκευών να εμπίπτουν στο φάσμα του σεισμού και τα φαινόμενα καταστροφής από συντονισμό να είναι εκτεταμένα (σχήματα 5.11 και 5.12).



Σχήμα 5.11: Φάσμα απόκρισης οριζόντιας επιτάχυνσης



Σχήμα 5.12: Φάσμα απόκρισης κατακόρυφης επιτάχυνσης

Από την αποτίμηση των καταστροφών προκύπτει ότι περισσότερα από 100000 κτίρια καταστράφηκαν ολοσχερώς, περίπου το ένα πέμπτο του πληθυσμού έμεινε άστεγο και το κόστος των ζημιών ανερχόταν σε 200 δις δολάρια.



α)



β)



γ)



δ)

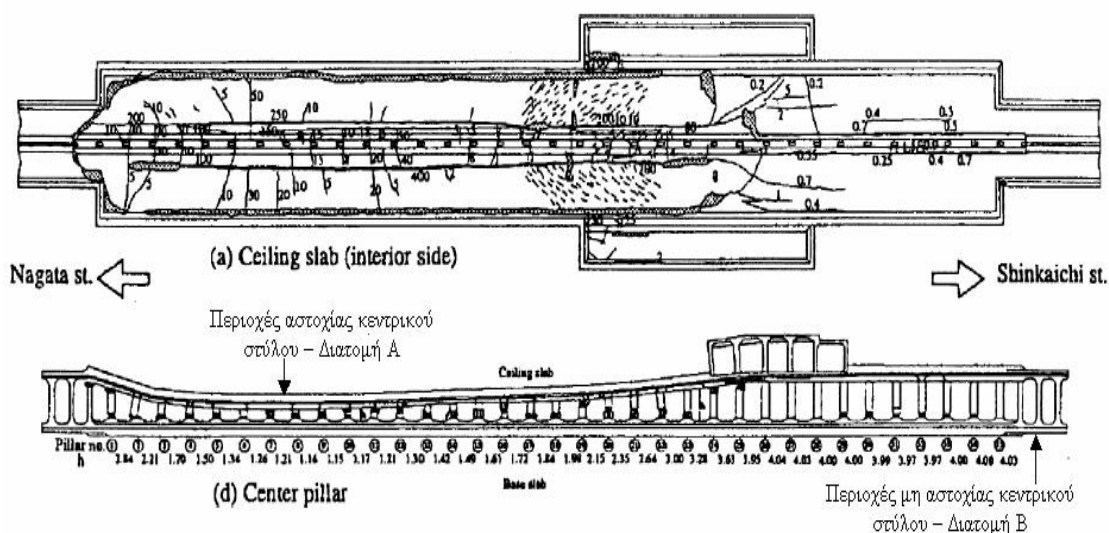
Σχήμα 5.13: α) Αστοχία σε βάθρο υπέργειου αυτοκινητόδρομου β) Αστοχία καταστρώματος υπέργειου αυτοκινητόδρομου γ) Επιφανειακή καθίζηση οδοστρώματος λόγω της κατάρρευσης υπόγειου σιδηροδρομικού σταθμού δ) Μεγάλη μετατόπιση και κλίση κτιρίου
(πηγή: www.seismo.unr.edu)

5.3 Μελέτη εφαρμογής στο σταθμό του Daikai

Το υπόγειο σιδηροδρομικό δίκτυο του Kobe υπέστη εκτεταμένες καταστροφές από το σεισμό καθώς πολλά τμήματα της υποστήριξης των σηράγγων αστόχησαν από τα έντονα σεισμικά φορτία. Ήταν η πρώτη φορά που σύγχρονες υπόγειες κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα αστοχούν υπό την επίδραση σεισμικών φορτίων.

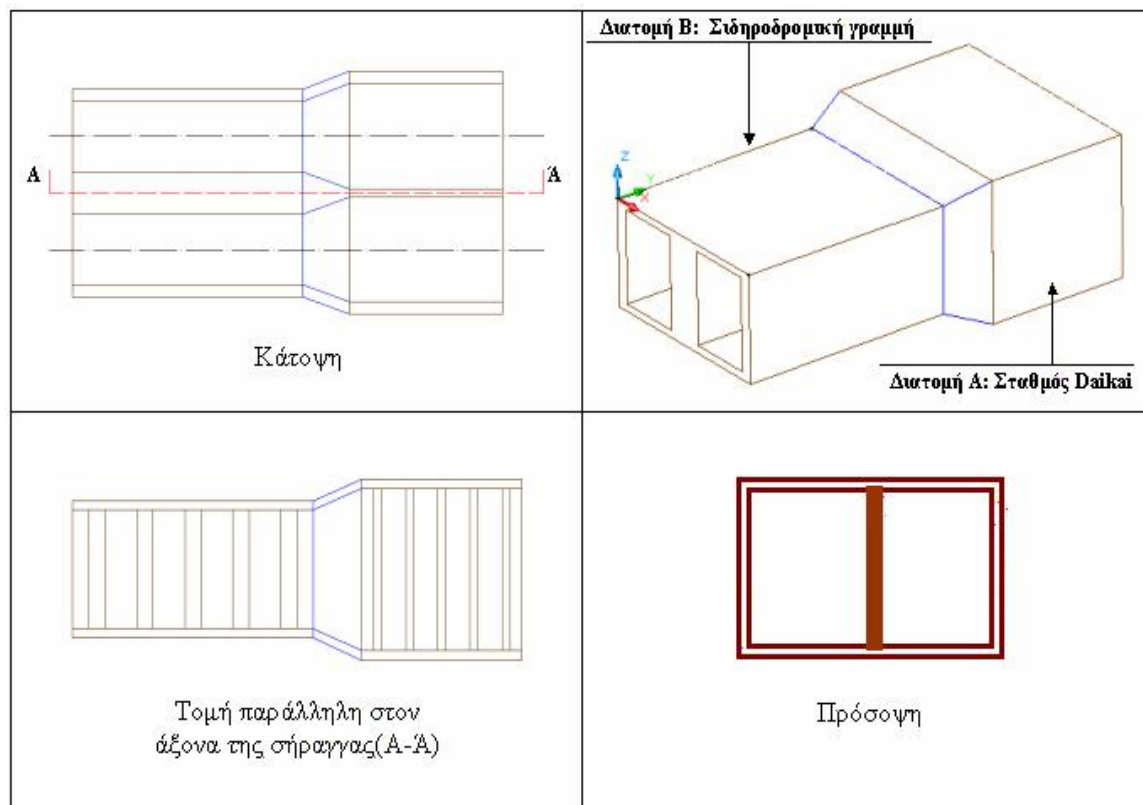
Η κατάρρευση του σταθμού του Daikai αποτελεί μια χαρακτηριστική περίπτωση καταστροφής του σιδηροδρομικού δικτύου, η οποία οφείλεται στην αστοχία του κεντρικού στύλου της υποστήριξης (σχήμα 5.14). Η υποστήριξη του δικτύου συνίσταται από ορθογωνικά πλαίσια από οπλισμένο σκυρόδεμα με ένα κεντρικό στύλο.

Η επιφάνεια της διατομής μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα, από τους σταθμούς του δικτύου στην σιδηροδρομική γραμμή (σχήμα 5.15). Κατά την διάρκεια του σεισμού, τα κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα στο τέλος του σταθμού και στις περιοχές όπου υπάρχει μεταβολή της επιφάνειας διατομής, λειτούργησαν ως τοίχοι διάτμησης οι οποίοι παρουσίασαν αντοχή στα διατμητικά φορτία που προέκυψαν από την οριζόντια κίνηση του εδάφους (Hashash et al., 2001). Στην κεντρική όμως περιοχή του σταθμού η οποία είχε αρκετά μεγαλύτερη διατομή, τα διατμητικά φορτία δεν μοιράστηκαν επαρκώς στα πλευρικά τοιχώματα με αποτέλεσμα την αστοχία σε διάτμηση του κεντρικού στύλου. Αποτέλεσμα της αστοχίας αυτής, ήταν η κατάρρευση της οροφής της υποστήριξης και η εμφάνιση επιφανειακών καθιζήσεων.



Σχήμα 5.14: Άποψη του κατεστραμμένου σταθμού του Daikai, σε τομή παράλληλη στον άξονα της σήραγγας (Hashash, et al., 2001)

Σύμφωνα με μελέτες που έχουν γίνει για το συγκεκριμένο γεγονός (Hashash et al., 2001), είναι πιθανό η σχετική μετατόπιση μεταξύ της βάσης και της οροφής του στύλου, εξαιτίας της οριζόντιας κίνησης του υπεδάφους, να προκάλεσε την διατμητική δύναμη αστοχίας. Η εντατική κατάσταση που προκαλείται από αυτόν τον τύπο κίνησης έχει αμελητέα αποτελέσματα σε μικρές κατασκευές, σε μεγαλύτερες όμως όπως ο σταθμός του Daikai, οι επιδράσεις της συγκεκριμένης κίνησης είναι σημαντικές. Γι αυτό το λόγο τα πλαίσια υποστήριξης της σιδηροδρομικής γραμμής επιβίωσαν με αρκετές όμως διατμητικές ρωγμές. Ένας άλλος παράγοντας που δύναται να συντέλεσε στην κατάρρευση του σταθμού είναι η μη γραμμική συμπεριφορά των εδαφικών στρωμάτων.



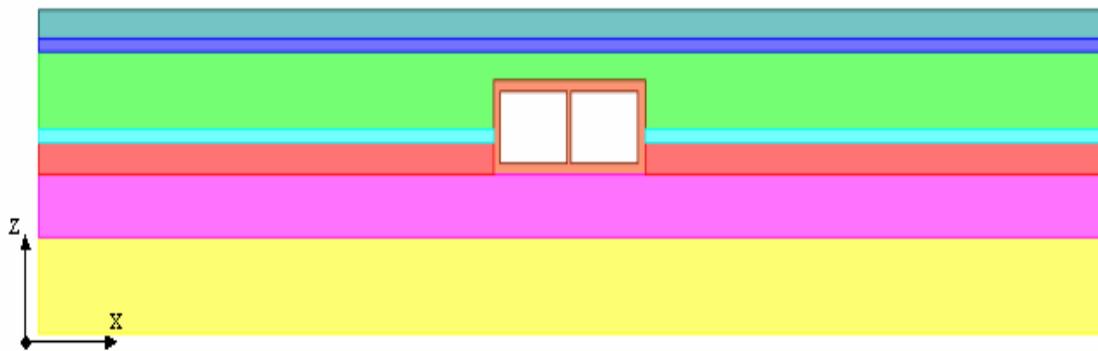
Σχήμα 5.15: Σχηματική αναπαράσταση της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας της σήραγγας από τον σταθμό στη κύρια σιδηροδρομική γραμμή

Στη παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται η προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του σταθμού Daikai με την ΜΠΣ και η διερεύνηση των αιτίων καταστροφής του. Για την ανάλυση χρησιμοποιείται το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων SAP2000. Οι περιπτώσεις που προσομοιώνονται είναι οι εξής:

- **Σύστημα εδάφους – υποστήριξης για το σταθμό του Daikai.** Λαμβάνεται μια τομή κάθετη στον άξονα της σήραγγας στην οποία περιλαμβάνεται το προφίλ του γεωλογικού χώρου και η διατομή της υποστήριξης στο σταθμό του Daikai. Από εδώ και στο εξής το μοντέλο αυτό θα αναφέρεται ως **Διατομή Α**.
- **Σύστημα εδάφους – υποστήριξης για τη σιδηροδρομική γραμμή του δικτύου.** Λαμβάνεται μια τομή κάθετη στον άξονα της σήραγγας στην οποία περιλαμβάνεται το προφίλ του γεωλογικού χώρου και η διατομή της υποστήριξης στην περιοχή των σιδηροδρομικών γραμμών του δικτύου. Η απόσταση των δύο τομών είναι περίπου 10m. Από εδώ και στο εξής το μοντέλο αυτό θα αναφέρεται ως **Διατομή Β**.

5.3.1 Φυσικές και μηχανικές των εδαφικών στρώσεων

Για την μοντελοποίηση της μηχανικής συμπεριφοράς του συστήματος σήραγγας-υποστήριξης, γίνεται η παραδοχή ότι το γεωλογικό περιβάλλον της περιοχής γύρω από τη σήραγγα, συνίσταται από έξι οριζόντια εδαφικά στρώματα τα οποία υπέρκεινται ενός βραχώδους στρώματος (σχήμα 5.16). Οι φυσικές και μηχανικές ιδιότητες των στρωμάτων παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2. Η απόσταση της στέψης του ανοίγματος από την επιφάνεια είναι περίπου 5m για τη διατομή Α και 6.2 m για τη διατομή Β. Και στις δύο περιπτώσεις το δάπεδο του ανοίγματος ταυτίζεται υψομετρικά με την οροφή του έκτου εδαφικού στρώματος.



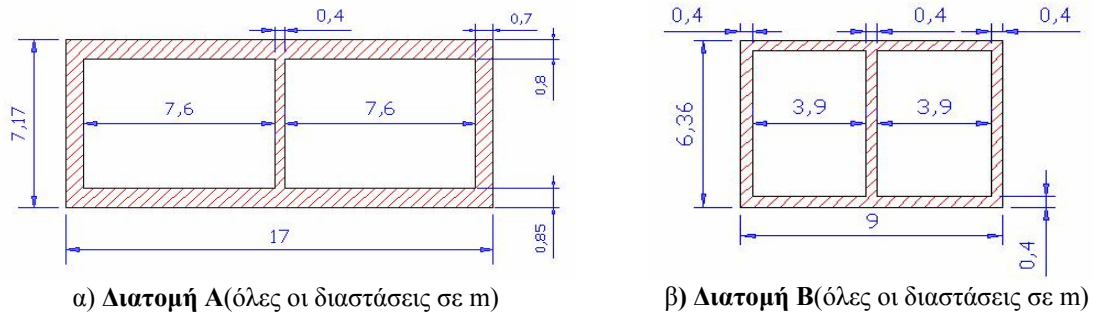
Σχήμα 5.16: Εδαφικά στρώματα και υποστήριξη σε τομή κάθετη στον άξονα της σήραγγας

Πίνακας 5.2: Φυσικές και μηχανικές ιδιότητες εδαφικών στρωμάτων, όπου D το πάχος των εδαφικών στρωμάτων, z το βάθος της οροφής του κάθε στρώματος, γ το ειδικό βάρος και λ η σταθερά του Lamé (πηγή: Xuehui et al., 1997)

Στρώμα	z[m]	D[m]	ρ [Kg/m ³]	γ [N/m ³]	E[GPa]	G[GPa]	λ [GPa]	ν	ζ %	V_p [m/sec]	V_s [m/sec]
1	0	2,20	1800	17658	0,18	0,062	0,559	0,45	3	615,88	185,70
2	-2,20	1,00	1600	15696	0,18	0,062	0,559	0,45	3	653,24	196,96
3	-3,20	5,80	1800	17658	0,18	0,062	0,559	0,45	3	615,88	185,70
4	-9,00	1,10	1800	17658	0,198	0,068	0,614	0,45	3	645,94	194,76
5	-10,10	2,40	2100	20601	0,345	0,119	1,071	0,45	3	789,40	238,01
6	-12,50	4,75	1800	17658	0,265	0,091	0,822	0,45	3	747,28	225,31
7	-17,25	12,00	2100	20601	1,248	0,430	3,873	0,45	3	1501,40	452,69

5.3.2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά υποστήριξης

Οι διαστάσεις και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της υποστήριξης των δύο διατομών απεικονίζονται στο σχήμα 5.17. Πρόκειται για δύο πλαίσια, με στοιχεία δοκούς πρισματικής διατομής από οπλισμένο σκυρόδεμα. Οι φυσικές και μηχανικές ιδιότητες του σκυροδέματος παρουσιάζονται στον πίνακα 5.3.



Σχήμα 5.17: Γεωμετρία και διαστάσεις των πλαισίων υποστήριξης των διατομών

(πηγή: Xuehui et al., 1997)

Πίνακας 5.3: Φυσικές και μηχανικές ιδιότητες σκυροδέματος, με T_0 την διατμητική αντοχή του στύλου και C_0 την αντοχή σε αξονική θλίψη (πηγή: Xuehui et al., 1997)

E [GPa]	24.82
ν	0.2
G [GPa]	10.35
ρ [Kg/m ³]	2402
γ [N/m ³]	23563
C_0 [MPa]	20.6
T_0 [MPa]	1.5
ζ_{RC} [%]	7

5.3.3 Μηχανική συμπεριφορά του κεντρικού στύλου

Ο κεντρικός στύλος της υποστήριξης μπορεί να θεωρηθεί ως μία ράβδος επίπεδου πλαισίου με τρεις βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο. Πιο συγκεκριμένα τα φορτία που δύναται να παραλάβει ο στύλος είναι ορθές ή αξονικές δυνάμεις, P , διατμητικές δυνάμεις, V και καμπτικές ροπές M . Οι τάσεις που εμφανίζονται λόγω των δυνάμεων θα δίδονται από τις σχέσεις

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5.1)$$

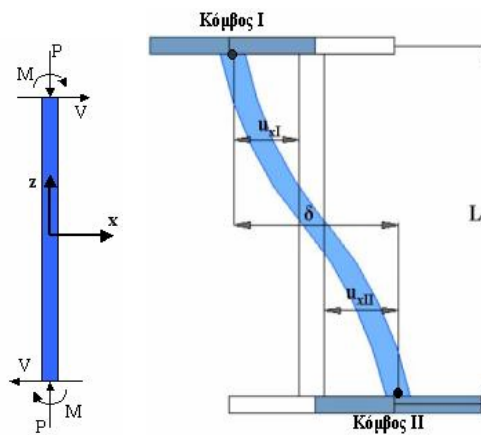
και

$$\tau = \frac{V}{A} \quad (5.2)$$

όπου A η επιφάνεια διατομής για την ορθή και την διατμητική δύναμη αντίστοιχα. Η ορθή τάση λόγω της καμπτικής ροπής δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x \quad (5.3)$$

όπου M_y η καμπτική ροπή, x η απόσταση από τον ουδέτερο άξονα και I_y η ροπή αδράνειας της διατομής του στύλου.



Σχήμα 5.18: Εντατικά μεγέθη και μετατοπίσεις που υφίσταται ο στύλος

Ορίζοντας το ανώτερο σημείο του στύλου το οποίο βρίσκεται πάνω στον ουδέτερο άξονα ως **Κόμβο Ι** και το αντίστοιχο κατώτερο ως **Κόμβο ΙΙ**, η σχετική οριζόντια μετατόπιση θα δίδεται από τη σχέση

$$\delta = u_{Ix} - u_{IIx} \quad (5.4)$$

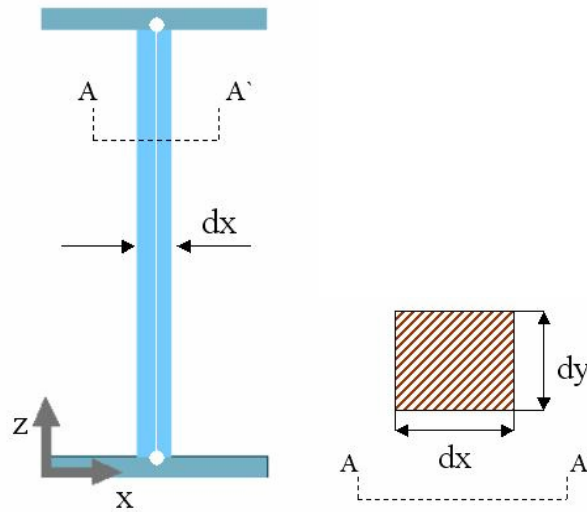
Η παραμόρφωση στον άξονα x δίδεται από τη σχέση

$$\varepsilon_x [\%] = \frac{\delta}{dx} 100 \quad (5.5)$$

και η εγκάρσια παραμόρφωση από τη σχέση

$$\gamma [\%] = \frac{\delta}{L} 100 \quad (5.6)$$

Τα χαρακτηριστικά της διατομής του στύλου για τις δύο περιπτώσεις που μελετούνται παρουσιάζονται τον πίνακα 5.4.



Σχήμα 5.19: Γεωμετρία διατομής του στύλου

Πίνακας 5.4: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στύλου (πηγή: Xuehui et al., 1997)

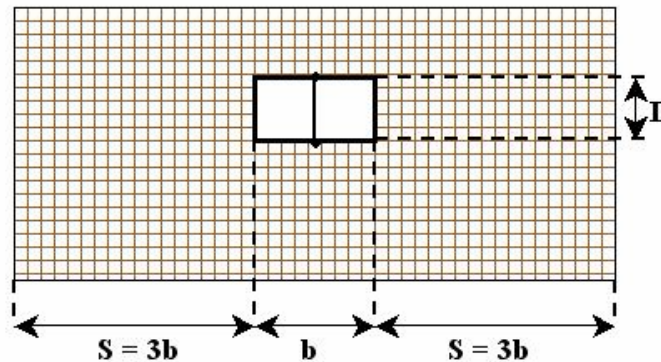
	Διατομή A	Διατομή B
dx[m]	0.4	0.4
dy[m]	1	0.6
A[m²]	0.4	0.24
L[m]	7.17	6.36
I_y[m⁴]	0.033	0.007

5.3.4 Διακριτοποίηση Μοντέλου

Κατά την διακριτοποίηση του εδαφικού μέσου αλλά και της υποστήριξης έγιναν οι εξής παραδοχές και για τις δύο περιπτώσεις:

- Για πλάτος υπογείου ανοίγματος b , διακριτοποιείται το συνεχές μέσο σε απόσταση $S=3b$ από τα πλευρικά τοιχώματα του ανοίγματος (σχήμα 5.20)
- Τα εδαφικά στρώματα προσομοιώνονται με την χρήση επίπεδων τετρακομβικών τετραπλευρικών στοιχείων, με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο και θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain).

- Η υποστήριξη προσομοιώνεται με τη χρήση γραμμικών δικομβικών στοιχείων (δοκούς) με τρεις βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Οι κινήσεις που επιτρέπεται να κάνει ο κάθε κόμβος είναι η οριζόντια μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση και η στροφή σε άξονα κάθετο στο επίπεδο του μοντέλου. Τα στοιχεία αυτά καλούνται και στοιχεία επίπεδου πλαισίου.
- Η διακριτοποίηση της υποστήριξης ακολουθεί το ίχνος της διακριτοποίησης των εδαφικών στρωμάτων με την χρήση κοινών κόμβων μεταξύ τετραπλευρικών και γραμμικών στοιχείων. Με την τεχνική αυτή γίνεται η παραδοχή ότι η υποστήριξη έρχεται σε επαφή με το εδαφικό μέσο στα σημεία που αντιπροσωπεύουν τους κοινούς κόμβους.



Σχήμα 5. 20: Μεθοδολογία διακριτοποίησης πεδίου, ανοίγματος και υποστήριξης

Πίνακας 5.5: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά υπογείου ανοίγματος

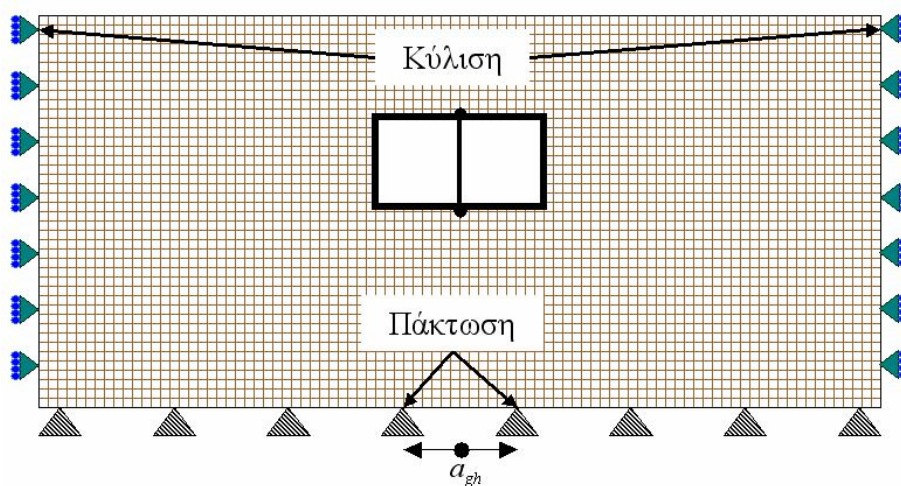
	Διατομή Α	Διατομή Β
b[m]	17	9
S[m]	51	27
$\lambda = b / L$	2.4	1.4

5.3.5 Συνοριακές συνθήκες

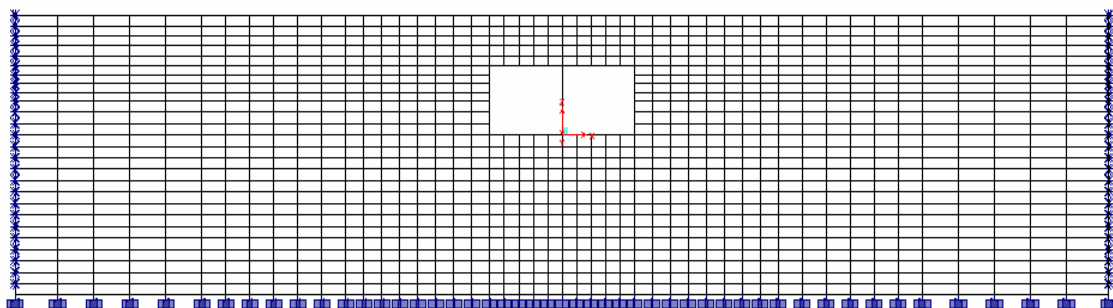
Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο μοντέλο είναι οι εξής

- Κύλιση ως προς τον άξονα z στα πλευρικά όρια του μοντέλου. Παραδοχή που η οποία παριστάνει τον εγκιβωτισμό του μοντέλου μεταξύ των γεωμετρικών του ορίων.

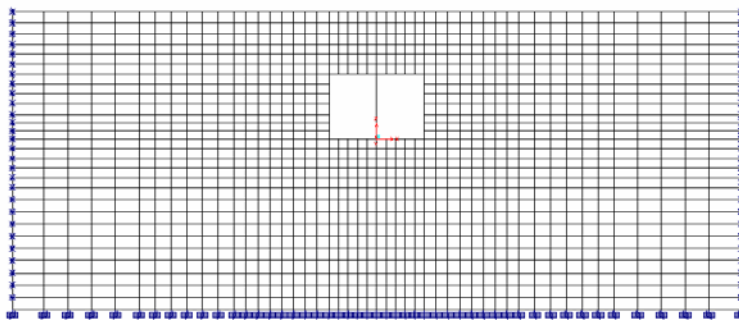
- Πάκτωση στη βάση του μοντέλου αρχικά και στη συνέχεια μέσα από τις επιλογές του λογισμικού, οριζόντια επιτάχυνση ως προς τον άξονα x. Η οριζόντια επιτάχυνση που επιβλήθηκε είναι η χρόνο-ιστορία του σχήματος 5.5.
- Τα βαρυτικά φορτία που παραλαμβάνει η υποστήριξη λόγω των υπερκείμενων εδαφικών στρωμάτων αγνοούνται διότι είναι αμελητέα σε σχέση με τα σεισμικά φορτία λόγω της επιτάχυνσης που επιβάλλεται.
- Η κατακόρυφη επιτάχυνση αγνοείται καθώς, όπως θα αποδειχθεί και από την ανάλυση, τα φορτία που επάγει στην υποστήριξη σε καμία περίπτωση δεν υπερβαίνουν τη θλιπτική αντοχή του στύλου.



Σχήμα 5.21: Τύποι συνοριακών συνθηκών που εφαρμόζονται στα δύο μοντέλα



Σχήμα 5.22: Διακριτοποίηση και συνοριακές συνθήκες για την διατομή Α (SAP2000)



Σχήμα 5.23: Διακριτοποίηση και συνοριακές συνθήκες για την διατομή B (SAP2000)

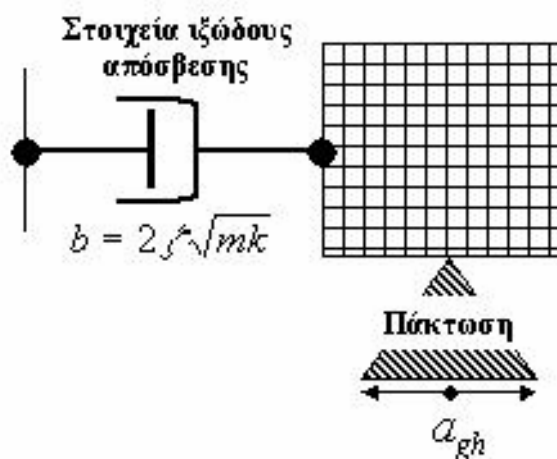
5.3.6 Απόσβεση

Από την θεωρία διάδοσης των ελαστικών κυμάτων είναι γνωστό ότι κατά την πρόσπτωση ενός κύματος σε μια διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών, ένα τμήμα αυτού διαθλάται και συνεχίζει την πορεία του στο επόμενο μέσο και το άλλο τμήμα ανακλάται και επιστρέφει στην πηγή. Τα φαινόμενα ανάκλασης δημιουργούν προβλήματα στην ανάλυση καθώς η υπόγεια κατασκευή καταπονείται τόσο από το πρωτογενές κύμα όσο και από τα δευτερογενή που προκαλούνται από τις ανακλάσεις. Οι συνοριακές συνθήκες κύλισης ως προς τον κατακόρυφο άξονα, που έχουν εφαρμοστεί στα πλευρικά όρια των μοντέλων, λειτουργούν ως κάτοπτρα των σεισμικών ακτινών και ανακλούν ολικά το προσπίπτων σεισμικό κύμα. Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφοντας καταπονεί δευτερογενώς την κατασκευή κάτι το οποίο δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα.

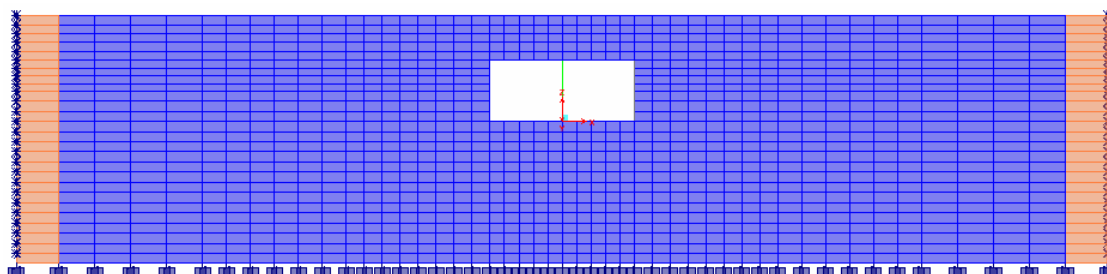
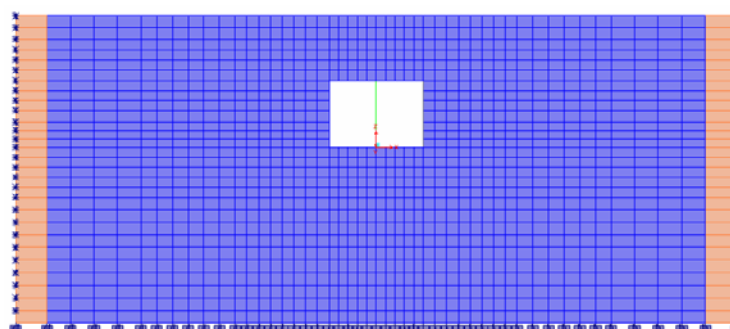
Τα προβλήματα ανάκλασης είναι δυνατό να αντιμετωπισθούν με δύο τρόπους, όσον αφορά τις εφαρμογές της ΜΠΣ:

- Συνοριακές συνθήκες απόσβεσης στα πλευρικά όρια, με την χρήση στοιχείων ιξώδους απόσβεσης (σχήμα 5.24)
- Ορισμός υλικών στα πλευρικά όρια των μοντέλων τα οποία διατηρούν τις φυσικές και μηχανικές ιδιότητες των εδαφικών στρωμάτων αλλά έχουν λόγο απόσβεσης ίσο με ένα ($\zeta=1$ ή 100%). Τα στοιχεία που τοποθετούνται στα πλευρικά όρια, έχουν τις ιδιότητες των υλικών αυτών και οι συνοριακές συνθήκες κατακόρυφης κύλισης θα τοποθετηθούν στους κόμβους τους.

Για την ανάλυση με το SAP2000 επιλέγεται ο ορισμός υλικών με υψηλό λόγο απόσβεσης στα πλευρικά όρια του κάθε μοντέλου, για λόγους συμβατότητας με την επίπεδη ανάλυση (σχήματα 5.25 και 5.26).



Σχήμα 5.24: Στοιχεία ιξώδους απόσβεσης (Damper Link Elements)

Σχήμα 5.25: Συνθήκες απόσβεσης για την διατομή Α, με καφέ χρώμα τα στοιχεία με λόγο απόσβεσης $\zeta = 100\%$ Σχήμα 5.26: Συνθήκες απόσβεσης για την διατομή Β, με καφέ χρώμα τα στοιχεία με λόγο απόσβεσης $\zeta = 100\%$

5.3.7 Περιπτώσεις ανάλυσης (Analysis Cases)

Οι αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν για κάθε μοντέλο είναι οι εξής:

- **Ανάλυση των ιδιομορφών (modal analysis)** και προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων, των ιδιοπεριόδων και των γενικευμένων ακαμψιών και μαζών του μοντέλου. Υπολογίζονται οι πρώτες 5 ιδιοτιμές.
- **Χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση**, για την οποία εφαρμόζονται τα εξής βήματα
 1. Εφαρμογή της οριζόντιας επιτάχυνσης στους κόμβους με πάκτωση
 2. Χρήση αναλογικής απόσβεσης (Rayleigh Damping) με ενιαίο λόγο απόσβεσης για όλο το μοντέλο
 3. Χρονική ολοκλήρωση με την μέθοδο **Hilber, Hughes και Taylor** ή **μέθοδο-α**, με $\alpha=0$ (κανόνας του τραπεζίου)
- **Χρόνο-ιστορική ανάλυση των ιδιομορφών**, για την οποία εφαρμόζονται τα εξής βήματα
 1. Υπολογισμός των ιδιομορφών
 2. Υπολογισμός των γενικευμένων ακαμψιών και μαζών
 3. Εφαρμογή της οριζόντιας επιτάχυνσης στους κόμβους με πάκτωση
 4. Χρήση του λόγου απόσβεσης του κάθε υλικού και υπολογισμός του μητρώου απόσβεσης του κάθε στοιχείου
 5. Υπέρθωση των μητρώων απόσβεσης του κάθε στοιχείου και υπολογισμός του καθολικού μητρώου και της γενικευμένης απόσβεσης
 6. Χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση των ιδιομορφών με την χρήση των γενικευμένων ακαμψιών, μαζών και αποσβέσεων

5.4 Αποτελέσματα της ανάλυσης

5.4.1 Αποτελέσματα ανάλυσης των ιδιομορφών

Η ανάλυση των ιδιομορφών έχει ως στόχο τον υπολογισμό των δυναμικών χαρακτηριστικών του συστήματος. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τις πέντε πρώτες ιδιομορφές του κάθε μοντέλου παρουσιάζονται στους πίνακες 5.6 και 5.7.

Πίνακας 5.6: Δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος, Διατομή A (M_j και K_j , οι γενικευμένες μάζες και ακαμψίες του συστήματος)

Διατομή A					
$j=1:N$	T_j [sec]	ω_j [sec]	f_j [Hz]	M_j [Kg]	K_j [N/m]
1	0,320	19,644	3,126	112,9	43598,8
2	0,238	26,448	4,209	112,9	79031,3
3	0,202	31,151	4,958	112,9	109637,6
4	0,173	36,399	5,793	112,9	149690,5
5	0,167	37,549	5,976	112,9	159301,7

Πίνακας 5.7: Δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος, Διατομή B (M_j και K_j , οι γενικευμένες μάζες και ακαμψίες του συστήματος)

Διατομή B					
$j=1:N$	T_j [sec]	ω_j [sec]	f_j [Hz]	M_j [Kg]	K_j [N/m]
1	0,253	24,824	3,951	112,9	69625
2	0,174	36,076	5,742	112,9	147049
3	0,161	38,915	6,194	112,9	171098
4	0,153	41,145	6,548	112,9	191271
5	0,144	43,728	6,960	112,9	216044

5.4.2 Αποτελέσματα χρόνο-ιστορικής ολοκλήρωσης

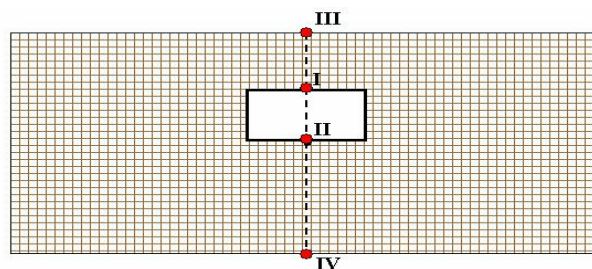
Η συγκεκριμένη ανάλυση γίνεται με την εφαρμογή της χρόνο-ιστορίας της οριζόντιας επιτάχυνσης που απεικονίζεται στο σχήμα 5.5. Το μητρώο απόσβεσης, εφόσον αυτή πρόκειται για απόσβεση Rayleigh, υπολογίζεται από τη σχέση 4.63. Οι συντελεστές α και β προσδιορίζονται από την σχέση 4.66 για :

- εννιο λόγο απόσβεσης $\zeta = 0.05$

- $\omega_k = \omega_I$ και $\omega_l = \omega_2$, τις δύο πρώτες κυκλικές ιδιοσυχνότητες του κάθε μοντέλου (βλ. πίνακες 5.6 και 5.7)

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων για κάθε μοντέλο επιλέγονται τέσσερις κόμβοι μελέτης, οι οποίοι είναι οι εξής (σχήμα 5.27):

- οι κόμβοι I και II πάνω στην υποστήριξη (βλ. παράγραφο 5.3.3)
- ο κόμβος III, ο οποίος είναι η προβολή του κόμβου I στην επιφάνεια του μοντέλου.
- ο κόμβος IV, ο οποίος είναι η προβολή του κόμβου II στη βάση του μοντέλου.

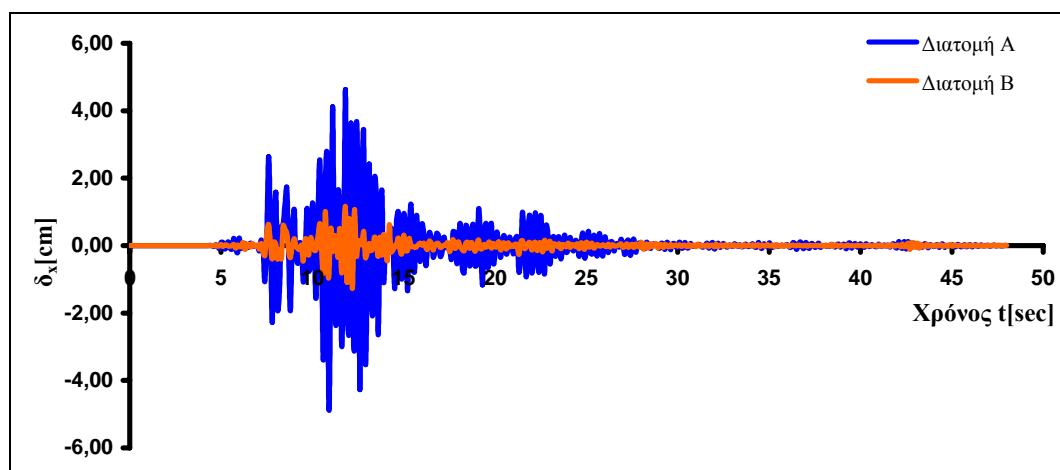


Σχήμα 5.27: Κόμβοι μελέτης

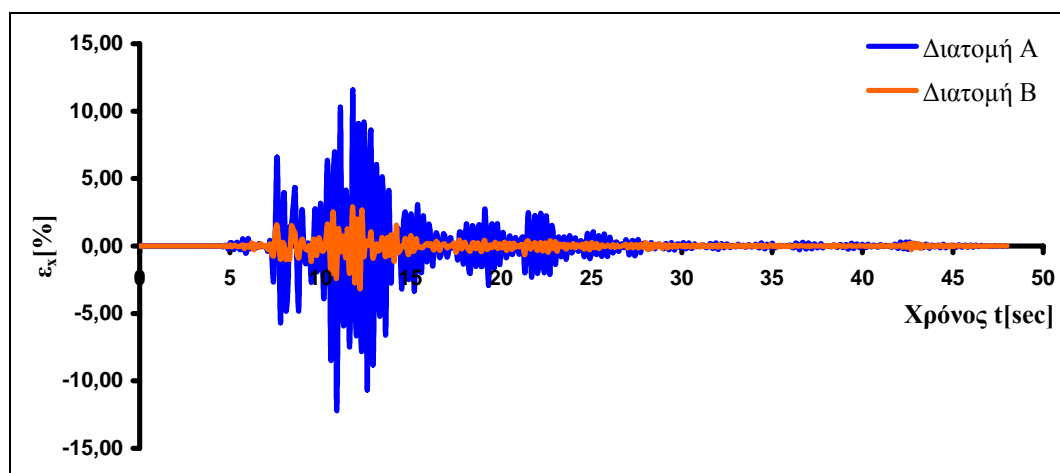
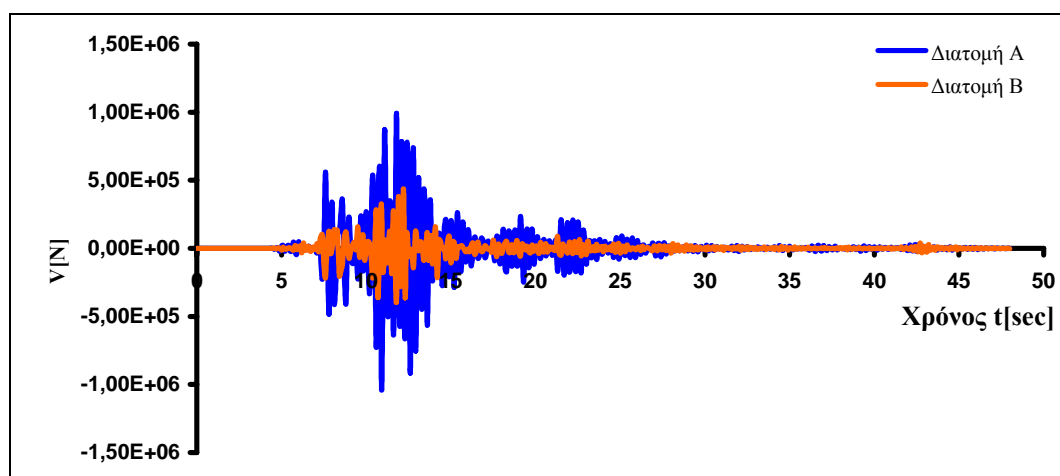
Πίνακας 5.8: Υπολογισμός των συντελεστών αναλογικής απόσβεσης

	Διατομή Α	Διατομή Β
$\omega_1[\text{rad/sec}]$	19,644	24,824
$\omega_2[\text{rad/sec}]$	26,448	36,076
ζ	0,05	0,05
α	0.00213	0.00164
β	1,1374	1,4708

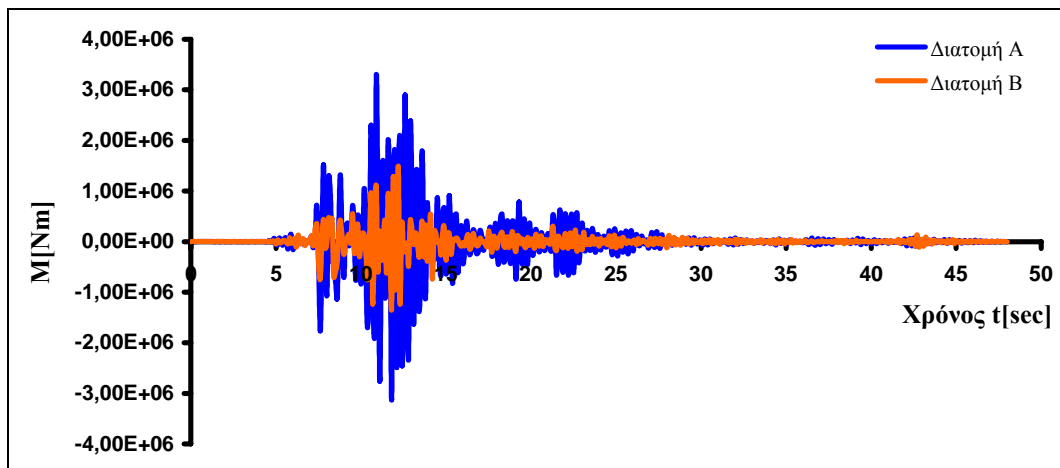
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την χρόνο ιστορική ολοκλήρωση, αξιολογούνται στους κόμβους μελέτης που έχουν ορισθεί (σχήμα 5.27) και παρουσιάζονται στα διαγράμματα που ακολουθούν. Στα σχήματα 5.37 και 5.38 απεικονίζονται με την μορφή χαρτών χρωματικού κώδικά, οι μέγιστες και ελάχιστες αλγεβρικές τιμές των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων.



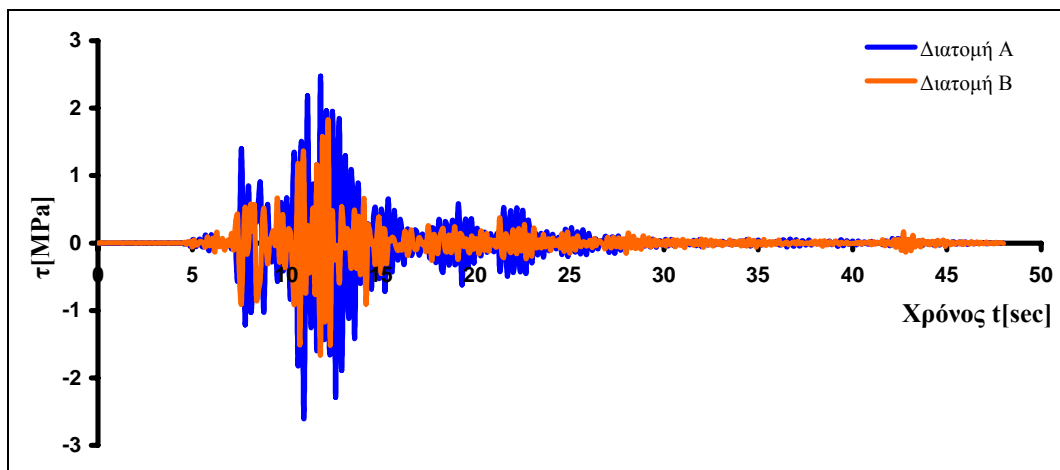
σχήμα 5.28: Χρόνο-Ιστορία σχετικής μετατόπισης μεταξύ των κόμβων Ι και ΙΙ

Σχήμα 5.29: Χρόνο-Ιστορία οριζόντιας παραμόρφωσης ε_x του κεντρικού στύλου

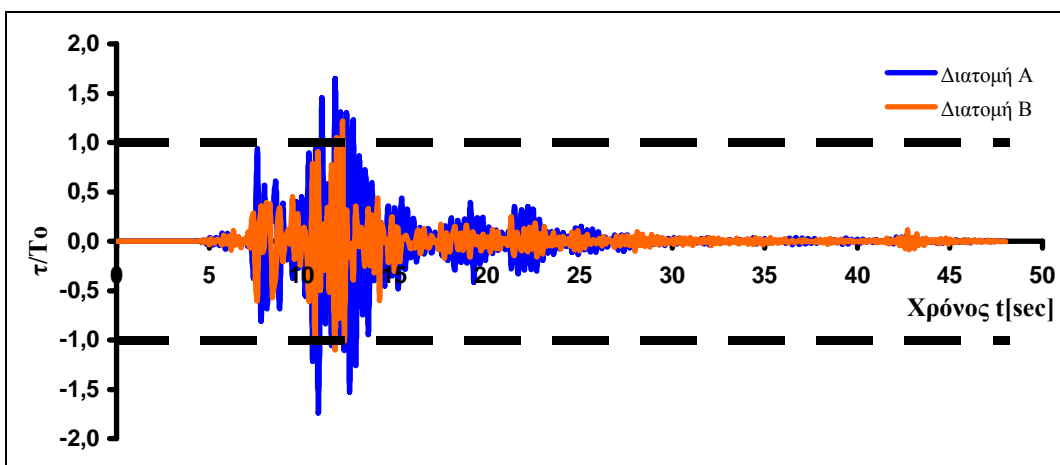
Σχήμα 5.30: Χρόνο-Ιστορία διατμητικής δύναμης στον κόμβο Ι

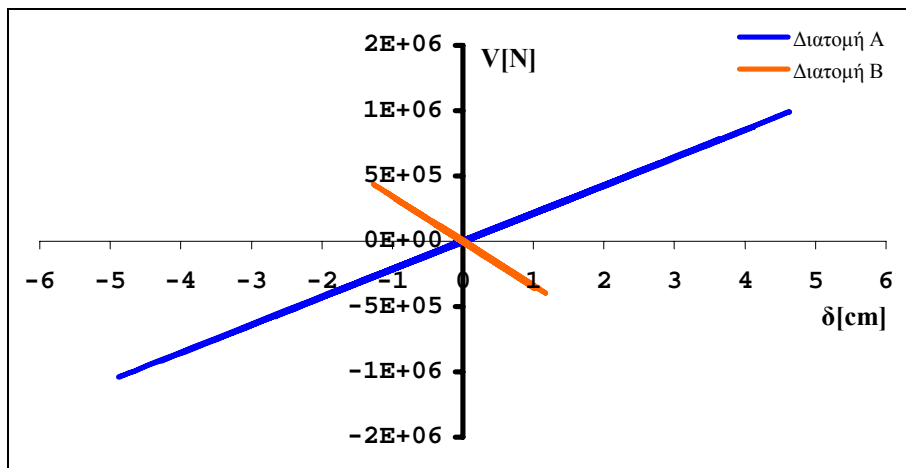


Σχήμα 5.31: Χρόνο-Ιστορία καμπτικής ροπής στον κόμβο Ι

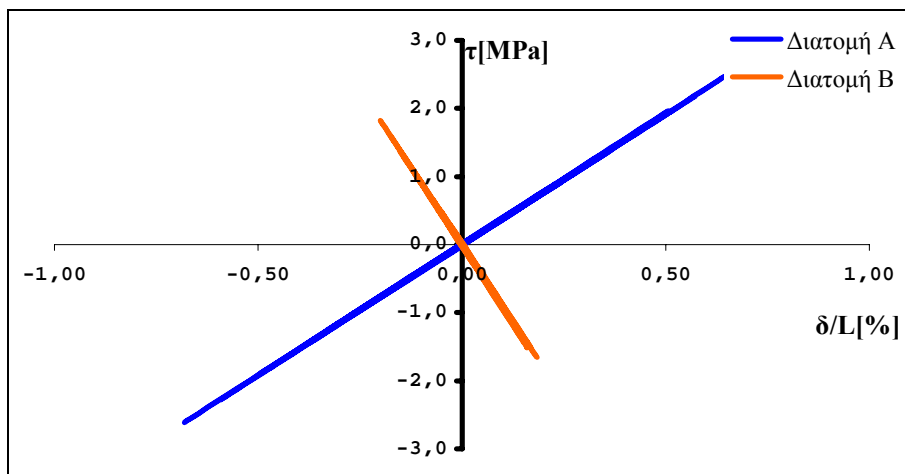


Σχήμα 5.32: Χρόνο-Ιστορία διατμητικής τάσης στον κόμβο Ι

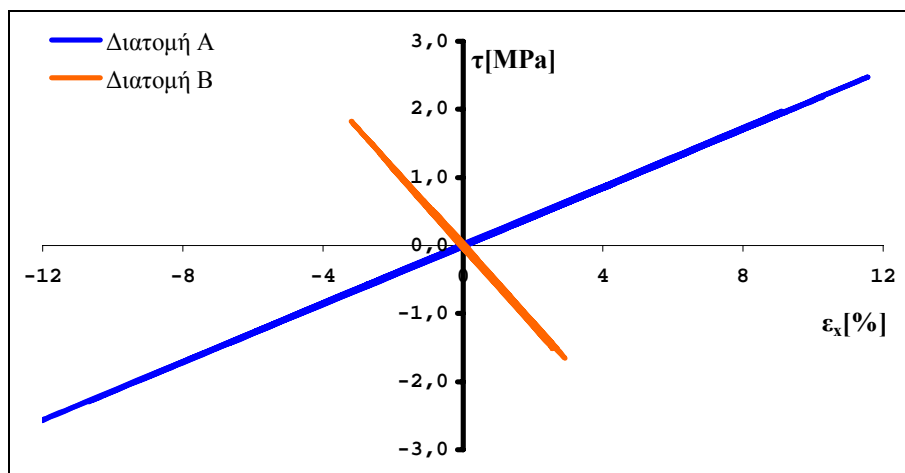
Σχήμα 5.33: Χρόνο-Ιστορία, κανονικοποιημένης ως προς την διατμητική αντοχή, διατμητικής τάσης ή
αντίστροφος συντελεστής ασφαλείας



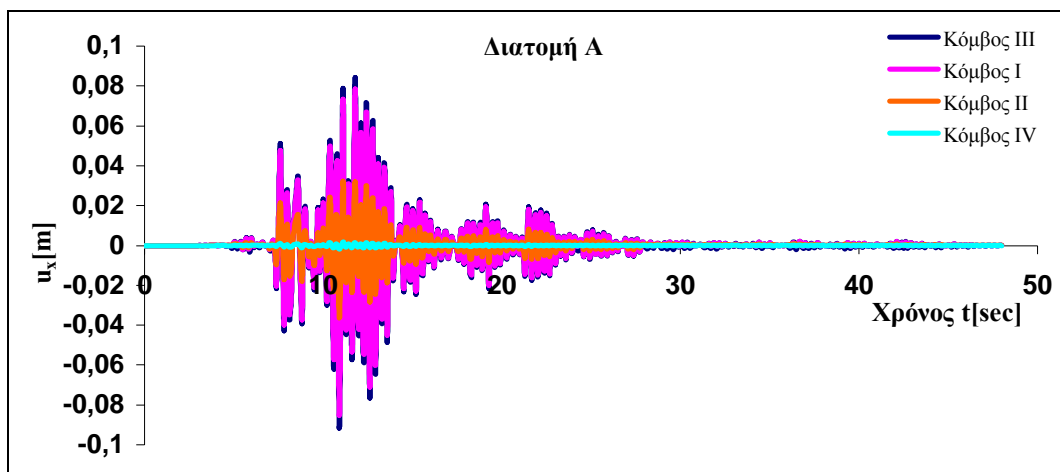
Σχήμα 5.34: Διατμητική δύναμη συναρτήσει της σχετικής μετατόπισης του στύλου



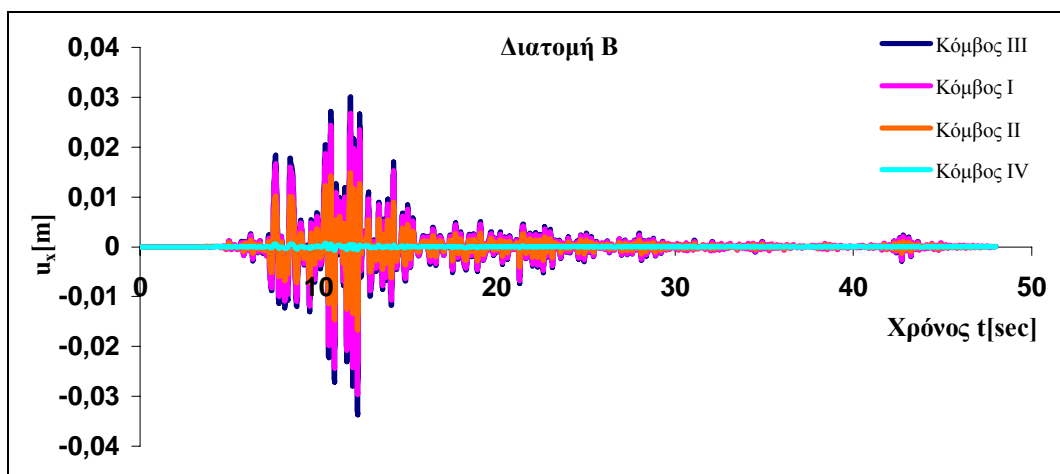
Σχήμα 5.35: Διατμητική τάση συναρτήσει της εγκάρσιας παραμόρφωσης του στύλου



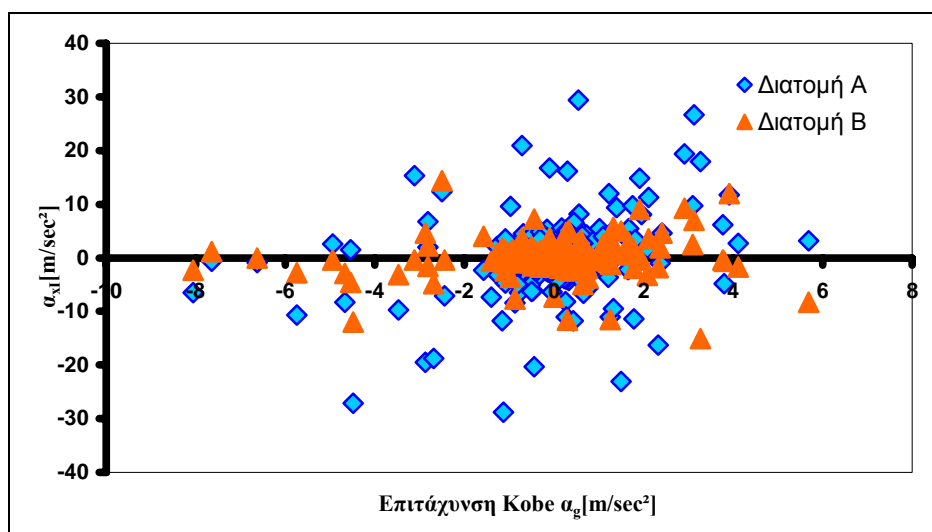
Σχήμα 5.36: Διατμητική τάση συναρτήσει της οριζόντιας παραμόρφωσης, ε_x , του στύλου



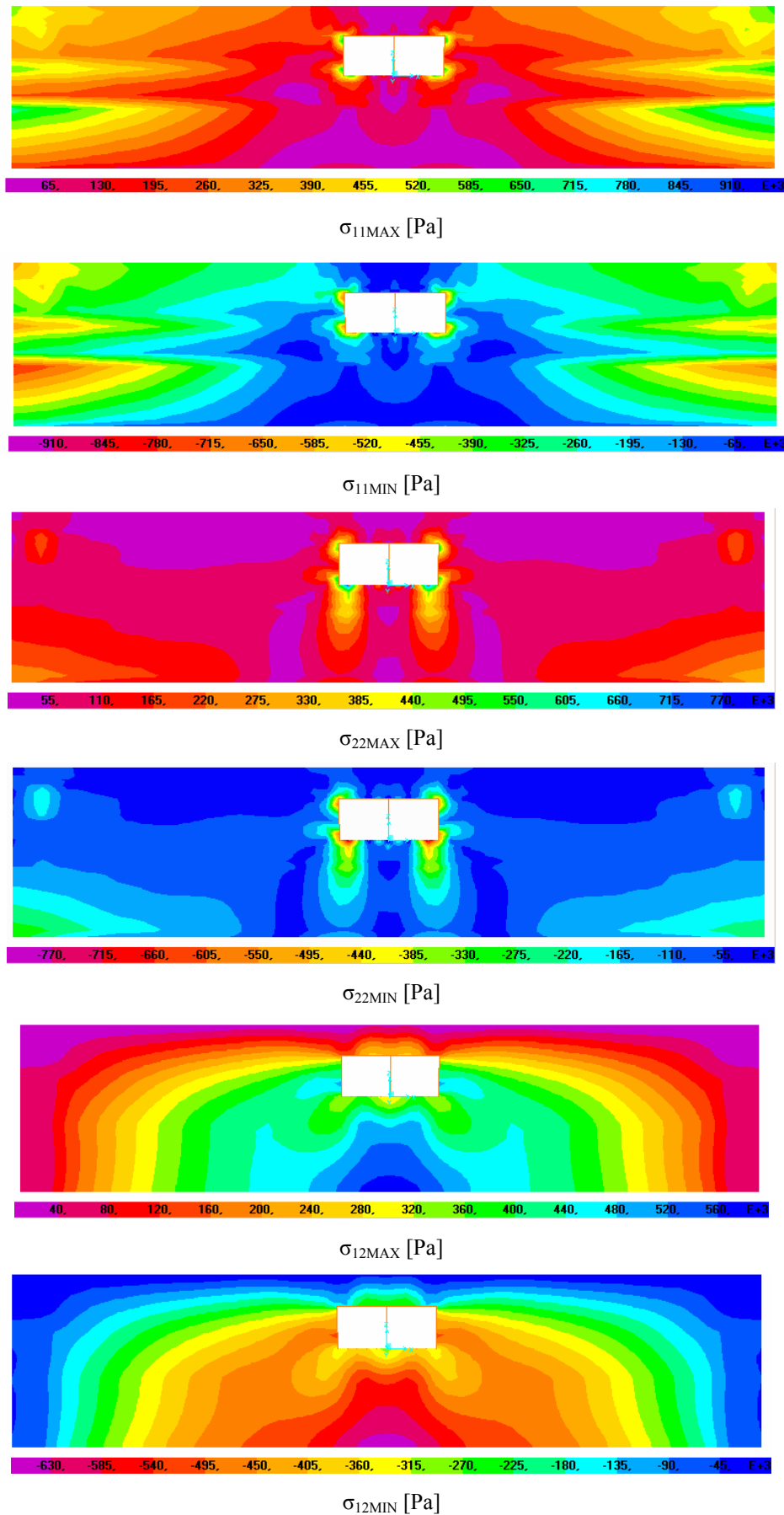
Σχήμα 5.37: Χρόνο-Ιστορία της οριζόντιας μετατόπισης για τους κόμβους μελέτης



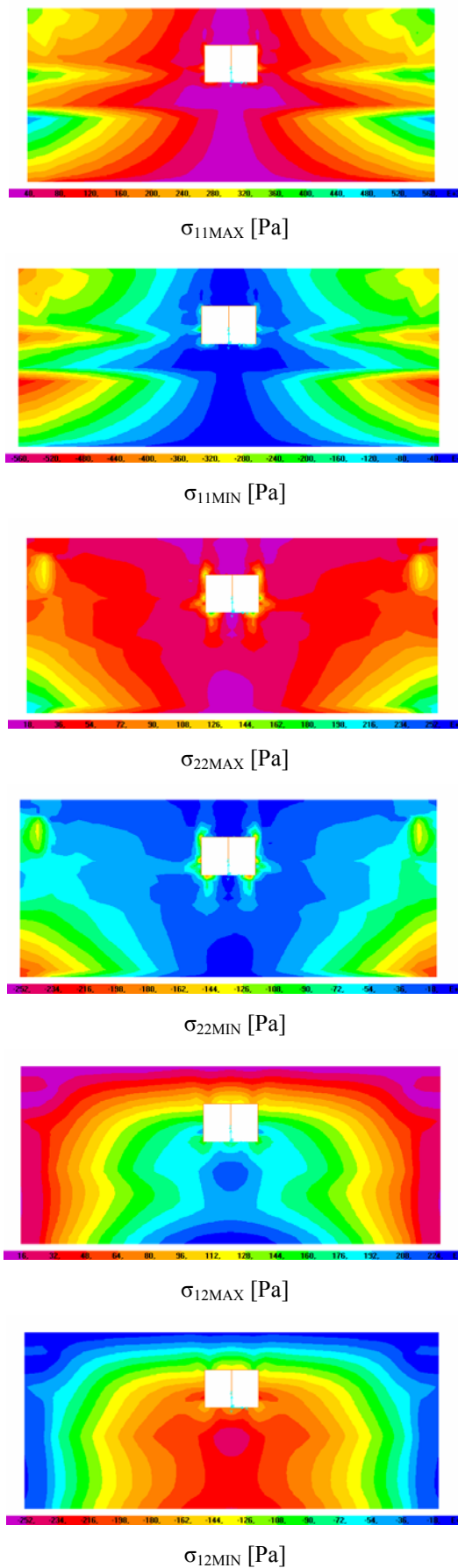
Σχήμα 5.38: Χρόνο-Ιστορία της οριζόντιας μετατόπισης για τους κόμβους μελέτης



Σχήμα 5.39: Συσχέτιση επιτάχυνσης εισόδου (Kobe) και επιτάχυνσης εξόδου στον κόμβο



Σχήμα 5.40: Μέγιστες και ελάχιστες αλγεβρικές τιμές των τάσεων για τη διατομή Α



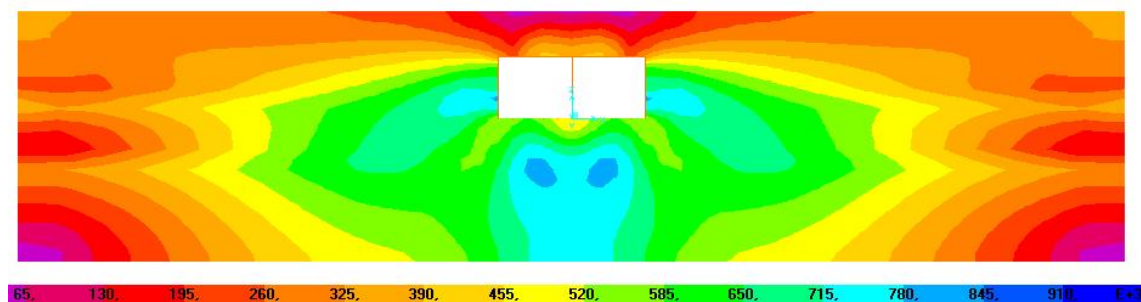
Σχήμα 5.41: Μέγιστες και ελάχιστες αλγεβρικές τιμές των τάσεων για τη διατομή Β

Στα σχήματα 5.42 και 5.43 απεικονίζεται με τη μορφή χαρτών χρωματικού κώδικά η κατανομή της ισοδύναμης τάσης **von Mises** τη χρονική στιγμή που οι κόμβοι μελέτης έχουν τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση. Η ισοδύναμη τάση συναρτήσει των κυρίων τάσεων δίδεται από τη σχέση

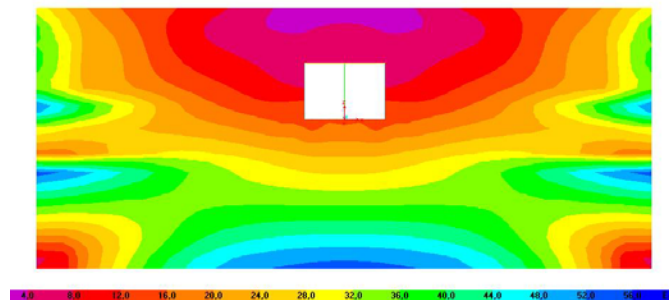
$$\sigma_{eq} = \sigma_{vm} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.7)$$

η οποία για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης γίνεται

$$\sigma_{eq} = \sigma_{vm} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2} \quad (5.8)$$



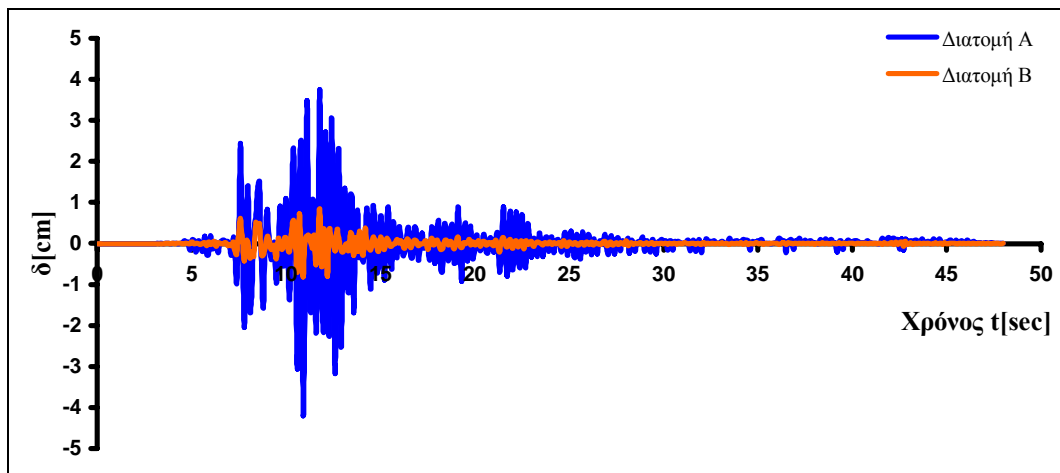
Σχήμα 5.42: Ισοδύναμες τάσεις **von Mises**, σ_{eq} [Pa], για τη Διατομή Α



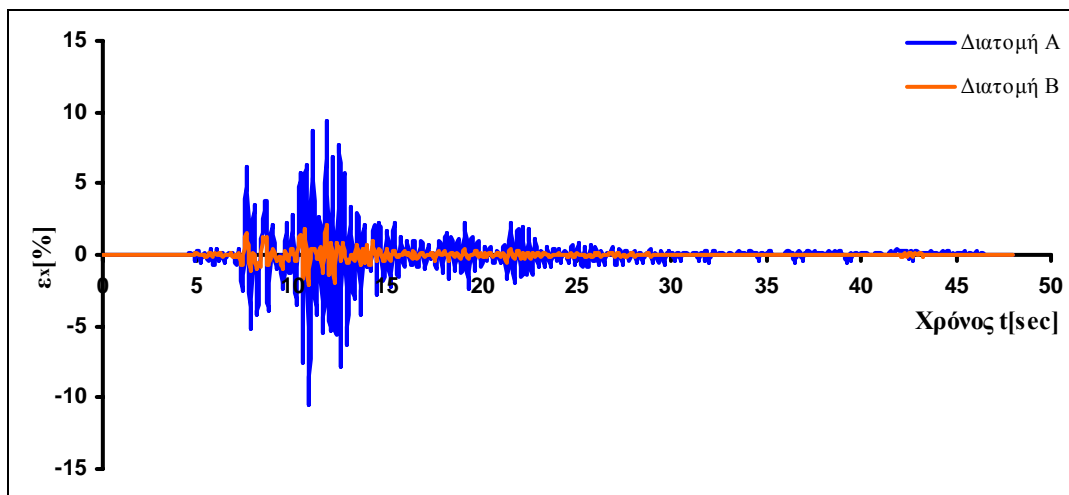
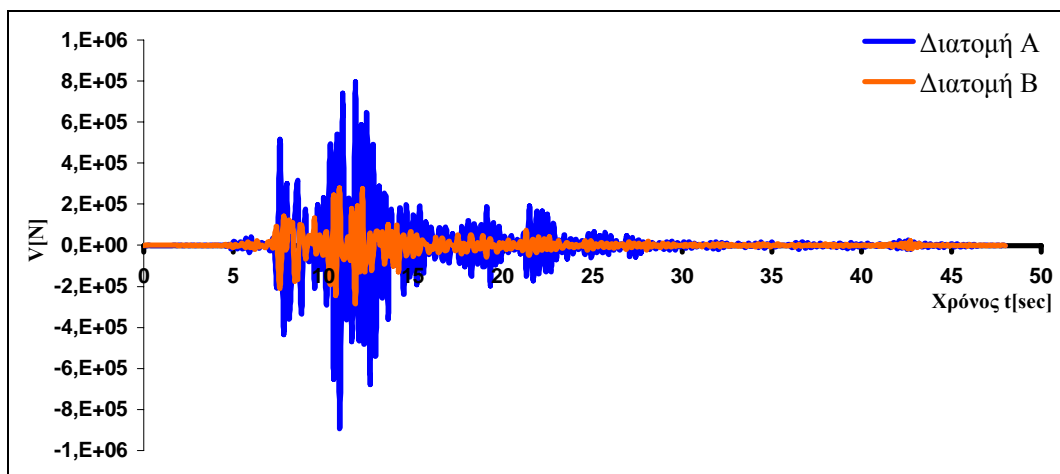
Σχήμα 5.43: Ισοδύναμες τάσεις **von Mises**, σ_{eq} [Pa], για τη Διατομή Β

5.4.3 Αποτελέσματα χρόνο ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών

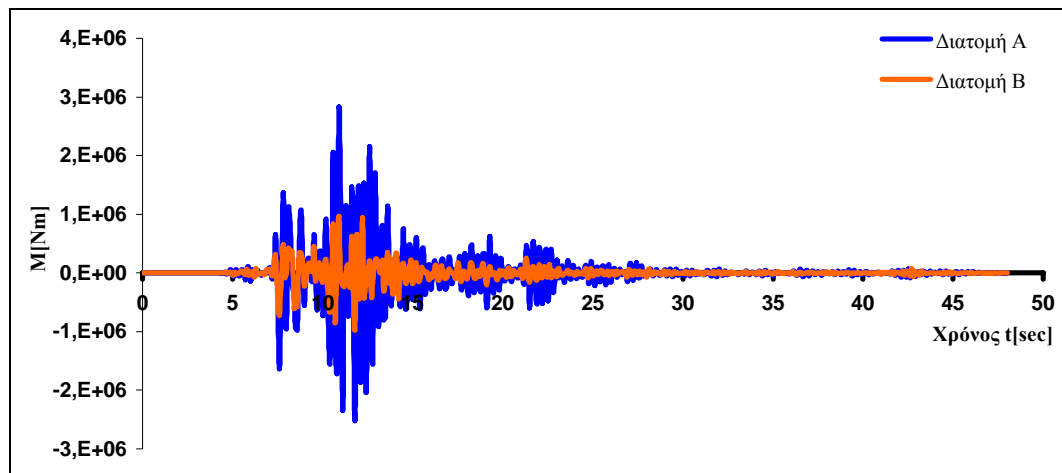
Αντίστοιχα με την χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση, για την αξιολόγηση της χρόνο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών ακολουθείται η ίδια διαδικασία για τους κόμβους μελέτης (σχήμα 5.27) και τυπώνονται οι αντίστοιχοι χάρτες χρωματικού κώδικα για τις τάσεις.



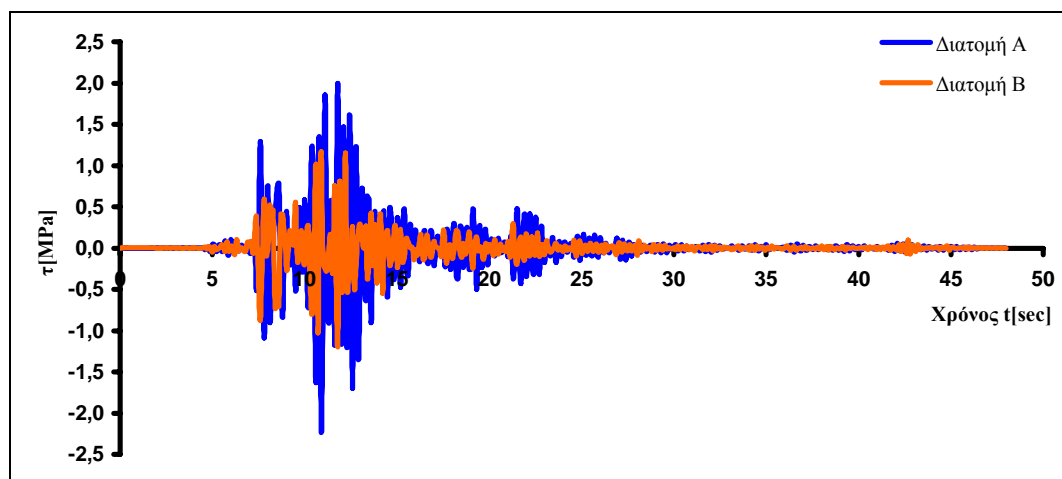
σχήμα 5.44: Χρόνο-Ιστορία σχετικής μετατόπισης μεταξύ των κόμβων I και II

Σχήμα 5.45: Χρόνο-Ιστορία οριζόντιας παραμόρφωσης ε_x του κεντρικού στύλου

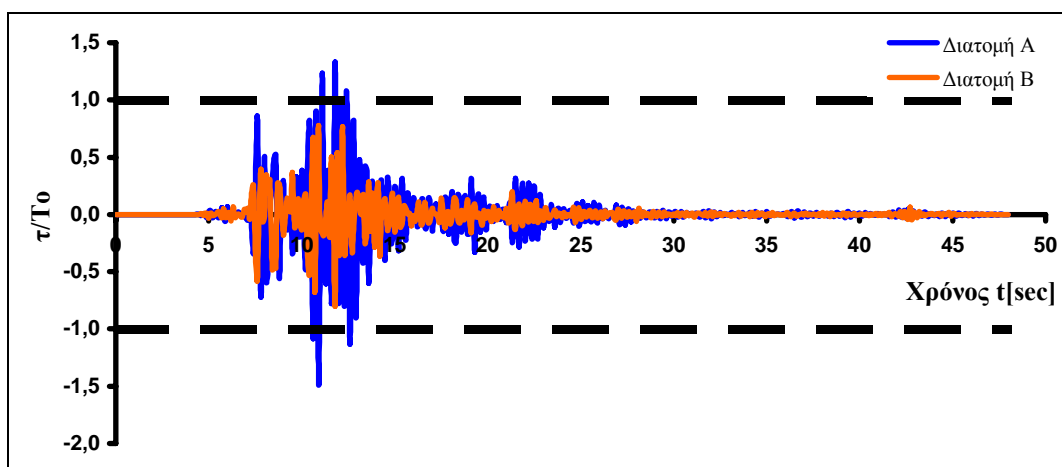
Σχήμα 5.46: Χρόνο-Ιστορία διατμητικής δύναμης στον κόμβο I



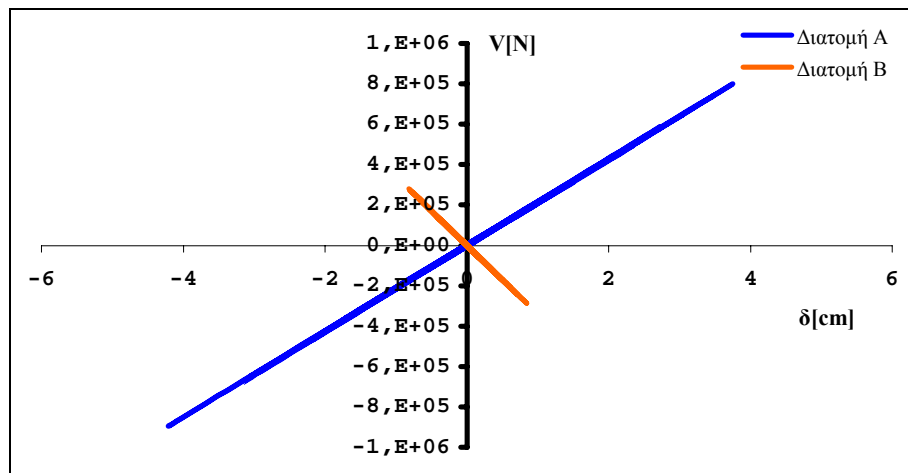
Σχήμα 5.47: Χρόνο-Ιστορία καμπτικής ροπής στον κόμβο Ι



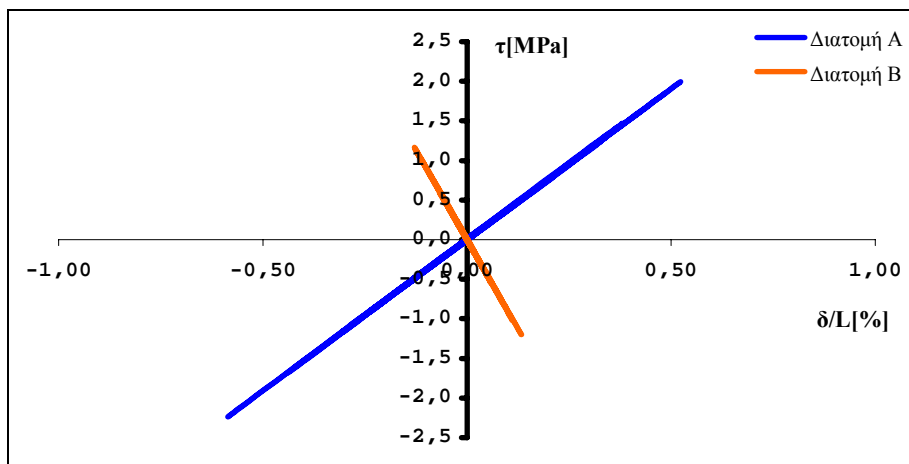
Σχήμα 5.48: Χρόνο-Ιστορία διατμητικής τάσης στον κόμβο Ι



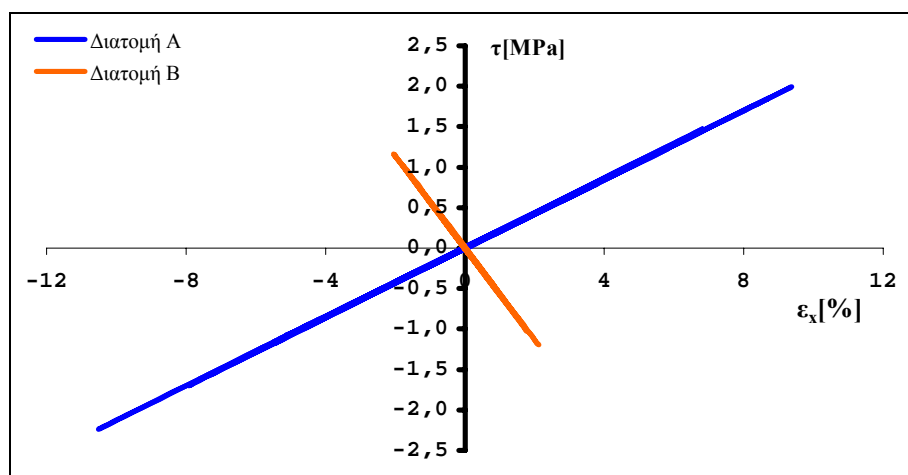
Σχήμα 5.49: Χρόνο-Ιστορία, κανονικοποιημένης ως προς την διατμητική αντοχή, διατμητικής τάσης ή αντίστροφος συντελεστής ασφαλείας

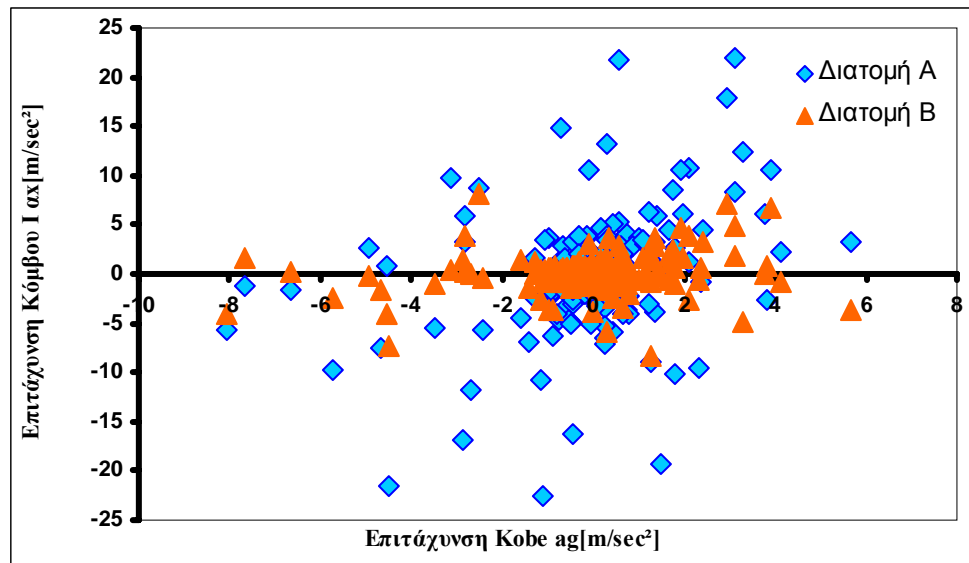


Σχήμα 5.50: Διατμητική δύναμη συναρτήσει της σχετικής μετατόπισης του στύλου

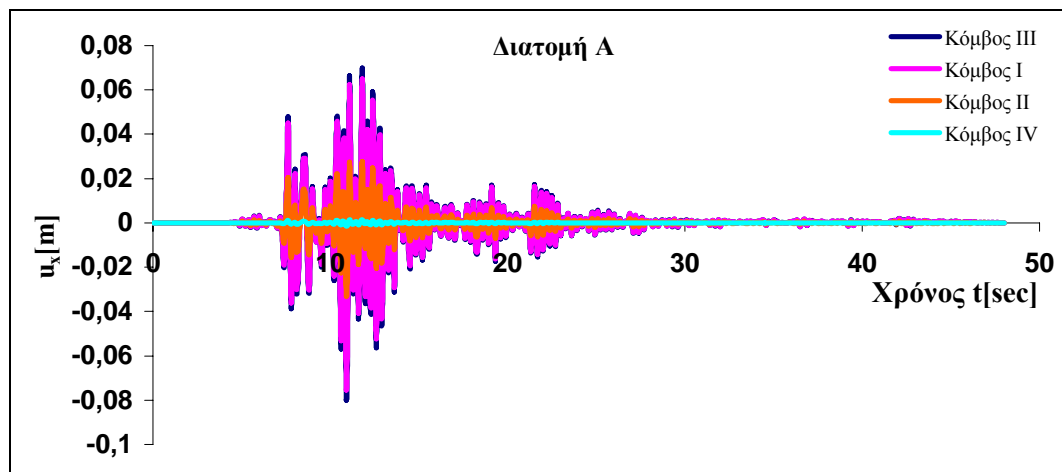


Σχήμα 5.51: Διατμητική τάση συναρτήσει της εγκάρσιας παραμόρφωσης του στύλου

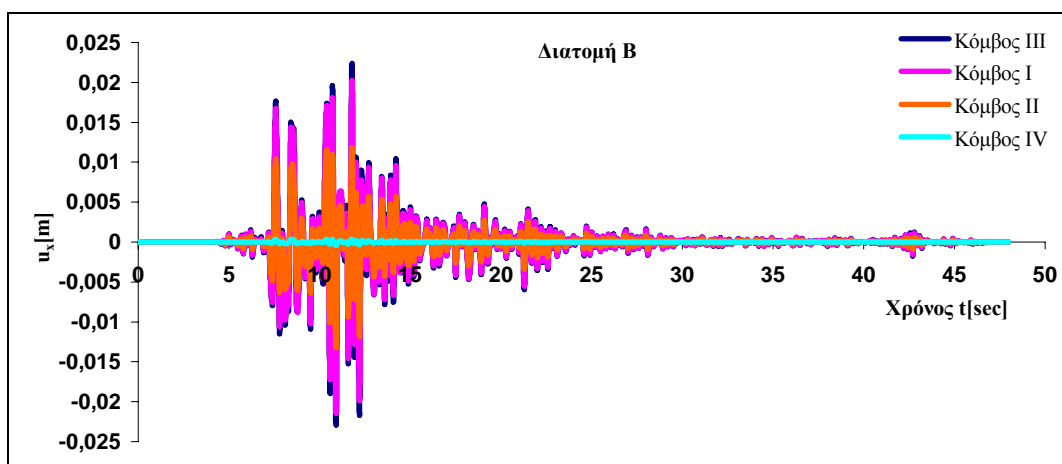
Σχήμα 5.52: Διατμητική τάση συναρτήσει της οριζόντιας παραμόρφωσης ε_x του στύλου



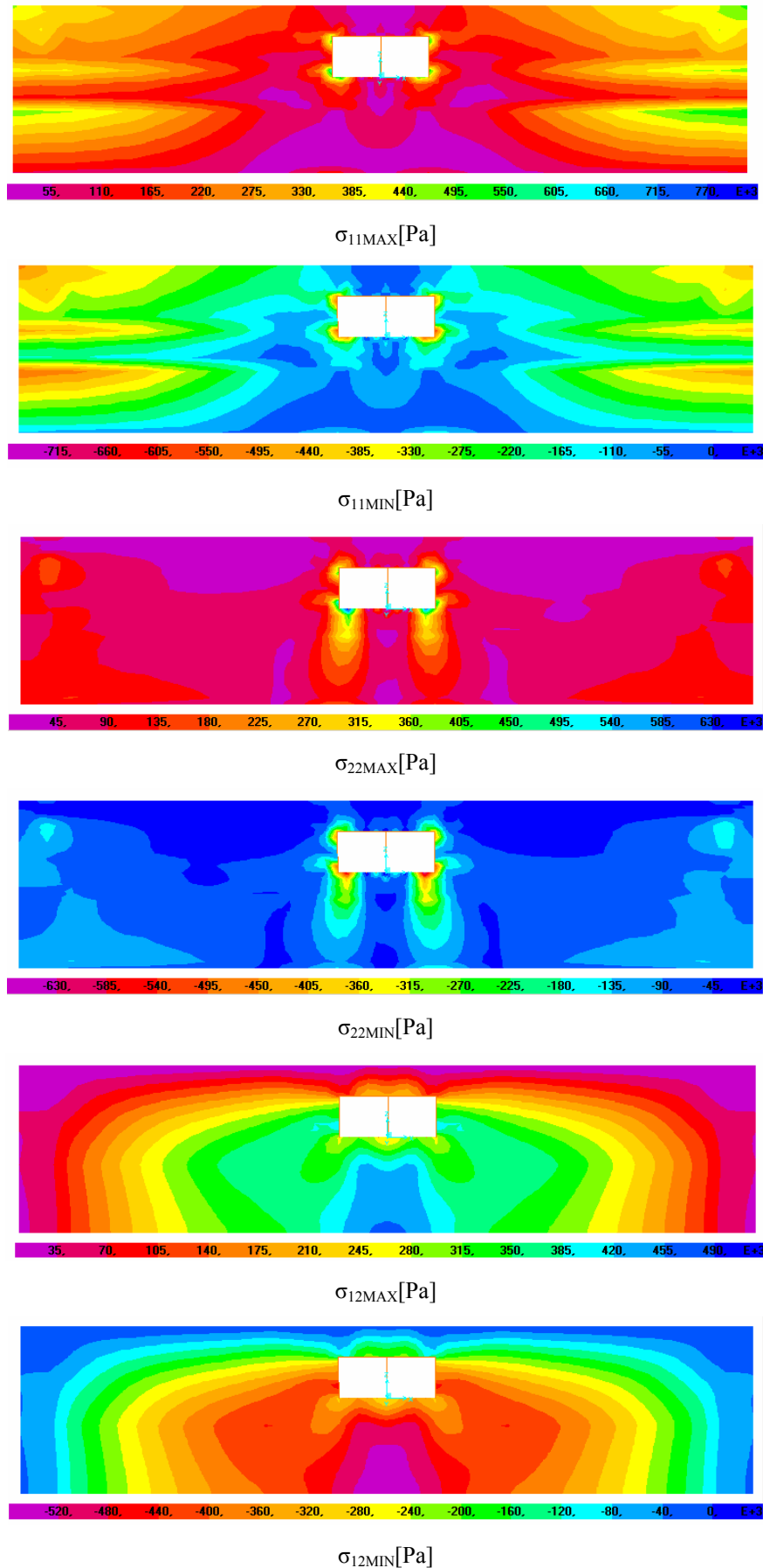
Σχήμα 5.53 : Συσχέτιση επιτάχυνσης εισόδου (Kobe) και επιτάχυνσης εξόδου στον κόμβο Ι



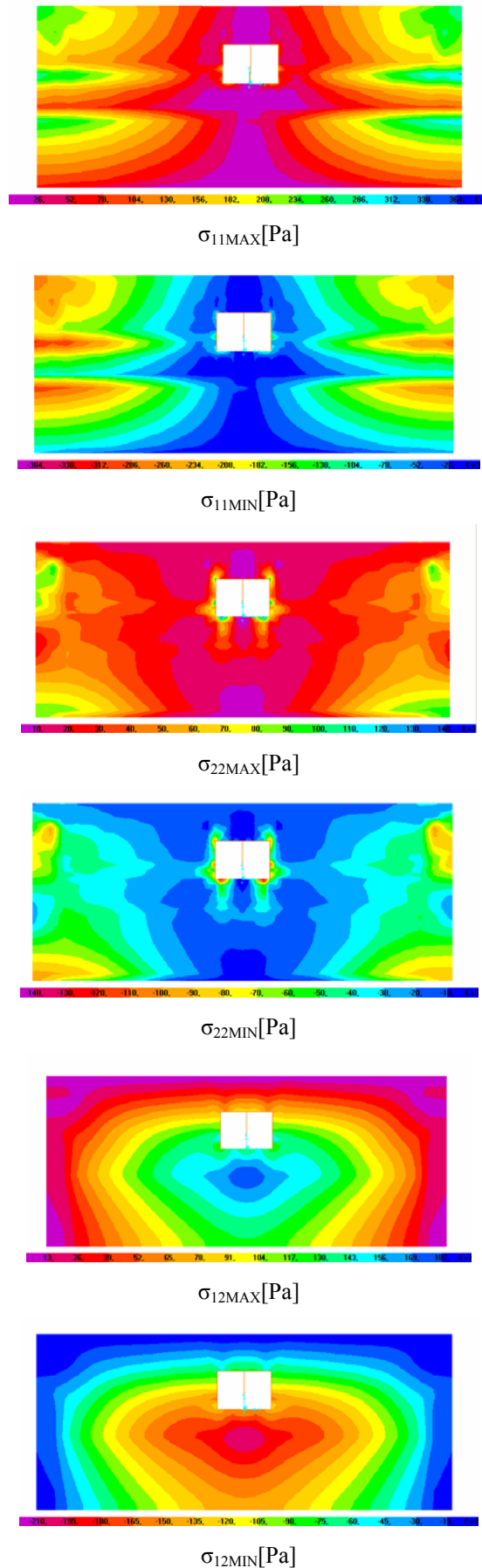
Σχήμα 5.54: Χρόνο-Ιστορία οριζόντιας μετατόπισης στους κόμβους μελέτης



Σχήμα 5.55: Χρόνο-Ιστορία οριζόντιας μετατόπισης στους κόμβους μελέτης

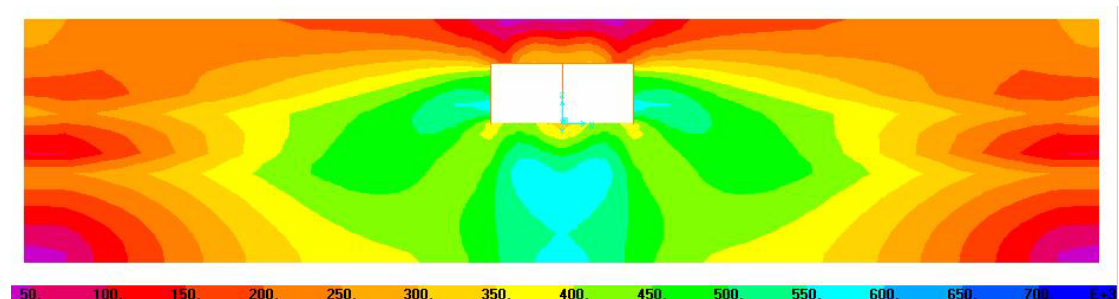


Σχήμα 5.56: Μέγιστες και ελάχιστες αλγεβρικές τιμές των τάσεων για τη διατομή Α

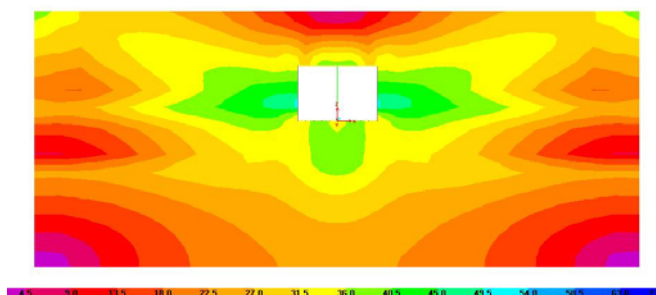


Σχήμα 5.57: Μέγιστες και ελάχιστες αλγεβρικές τιμές των τάσεων για τη διατομή Β

Στα σχήματα 5.58 και 5.59 απεικονίζεται με τη μορφή χαρτών χρωματικού κώδικα η κατανομή της ισοδύναμης τάσης Von Mises τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στη μέγιστη απόλυτη μετατόπιση των κόμβων μελέτης.



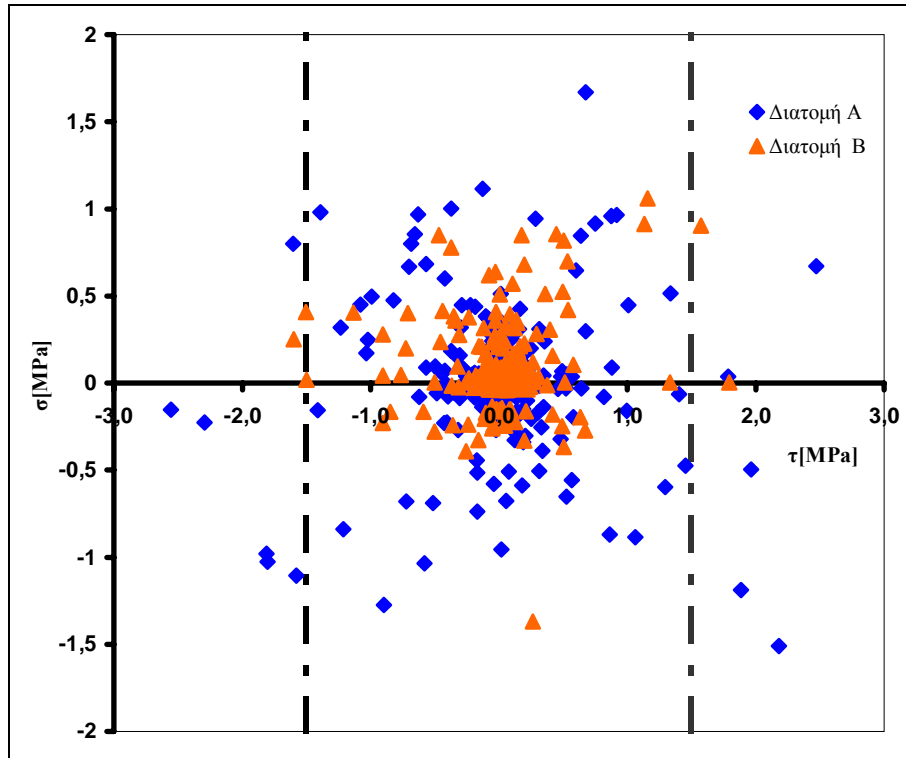
Σχήμα 5.58: Κατανομή της ισοδύναμης τάσης von Mises, σ_{eq} [Pa], για τη Διατομή Α



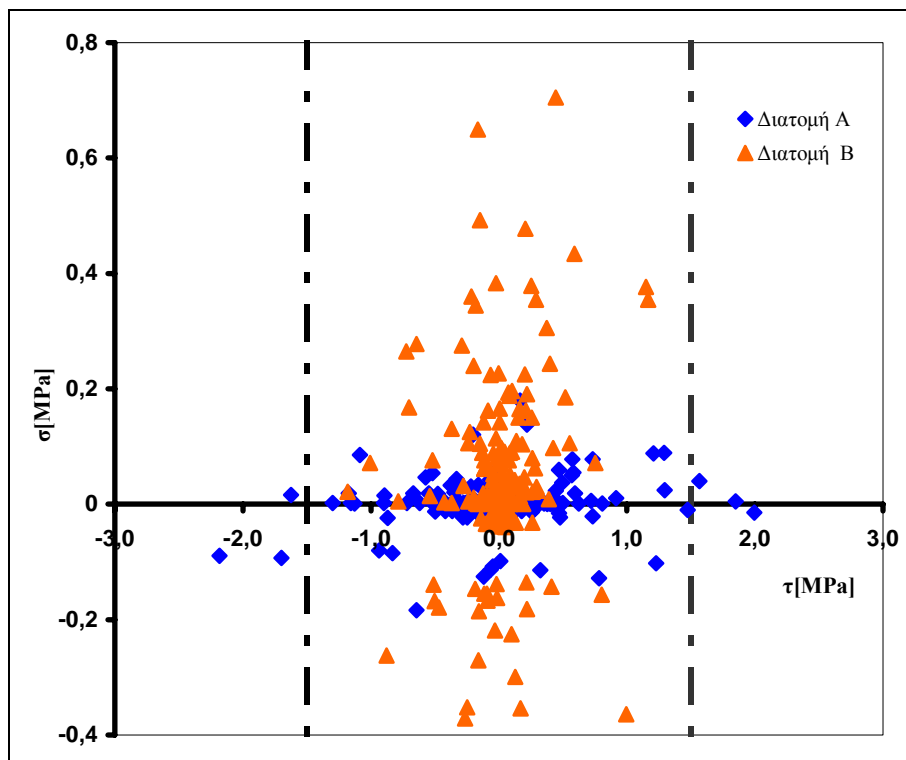
Σχήμα 5.59: Κατανομή της ισοδύναμης τάσης von Mises, σ_{eq} [Pa], για τη Διατομή Β

5.4.4 Αποτελέσματα εφαρμογής συνδυασμένης κατακόρυφης και οριζόντιας επιτάχυνσης

Για να θεωρηθεί η ανάλυση ολοκληρωμένη, για κάθε ένα από τα μοντέλα Διατομή Α και Διατομή Β επιλύεται και η περίπτωση της εφαρμογής συνδυασμένης κατακόρυφης (χρόνο-ιστορία κατακόρυφης κίνησης, σχήμα 5.8) και οριζόντιας επιτάχυνσης στη βάση του μοντέλου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τον κόμβο μελέτης I, παρουσιάζονται στα σχήματα 5.60 και 5.61. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν δικαιολογείται η παραδοχή που έγινε σχετικά με την κατακόρυφη κίνηση στην παράγραφο 5.3.5. Η κατακόρυφη κίνηση αγνοείται καθώς οι ορθές τάσεις που επάγει στον κεντρικό στύλο της υποστήριξης φτάνουν περίπου το 4% της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος για την περίπτωση της χρόνο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών και το 10% της αντοχής του σκυροδέματος για την περίπτωση της χρόνο-ιστορικής ολοκλήρωσης (βλ. Πίνακα 5.3, θλιπτική αντοχή C_0).



Σχήμα 5.60: Συσχέτιση ορθής και διατμητικής τάσης στον Κόμβο Ι για την περίπτωση της χρονο-ιστορικής ολοκλήρωσης



Σχήμα 5.61: Συσχέτιση ορθής και διατμητικής τάσης στον Κόμβο Ι για την περίπτωση της χρονο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών

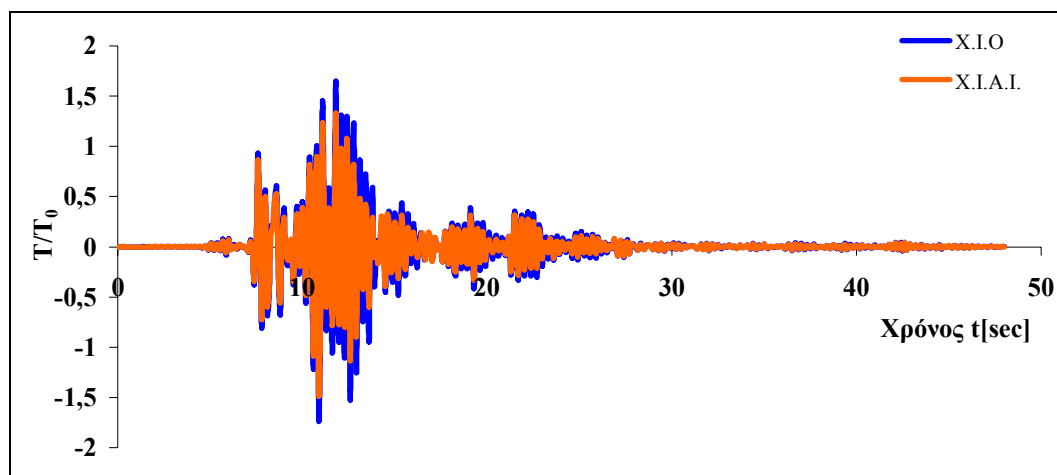
Κεφάλαιο 6^ο

Συμπεράσματα και Προτάσεις

Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς της υποστήριξης του σταθμού του Daikai και της σιδηροδρομική γραμμής του δικτύου, βγαίνουν κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Κάποια από αυτά έχουν ήδη αναφερθεί, ωστόσο σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια προσπάθεια να συνοψιστούν για να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη εικόνα της ανάλυσης που έγινε.

Τα συμπεράσματα σχετικά με τις μεθόδους ανάλυσης που εφαρμόστηκαν είναι τα εξής:

- Οι τιμές των εντατικών μεγεθών στους κόμβους μελέτης (δυνάμεις, τάσεις, μετατοπίσεις, παραμορφώσεις κτλ.), που προκύπτουν από την χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση είναι μεγαλύτερες σε σχέση με αυτές που προκύπτουν από την χρόνο-ιστορική ανάλυση των ιδιομορφών (σχήμα 6.1). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για την περίπτωση της χρόνο-ιστορικής ολοκλήρωσης ο λόγος απόσβεσης είναι ενιαίος για όλο το μοντέλο, $\zeta=0,05$ ή $\zeta=5\%$, ενώ για την περίπτωση της χρόνο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών διακρίνεται σε, $\zeta=1$ ή $\zeta=100\%$ στα πλευρικά όρια του κάθε μοντέλου, $\zeta=0,03$ ή $\zeta=3\%$ στα εδαφικά στρώματα και $\zeta=0,07$ ή $\zeta=7\%$ στο σκυρόδεμα της υποστήριξης.
- Η χρόνο-ιστορική ανάλυση των ιδιομορφών είναι ταχύτερη από την χρόνο ιστορική ολοκλήρωση καθώς οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του μοντέλου (άγνωστη μεταβλητή, βλ. παράγραφο 4.2.1) προκύπτουν από την κατάλληλη υπέρθεση χρονικών συναρτήσεων των ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίζονται από την επίλυση του προβλήματος των ιδιομορφών (βλ. παράγραφο 3.5.2).



Σχήμα 6.1: Σύγκριση αποτελεσμάτων χρόνο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών (X.I.A.I.) με την χρόνο-ιστορική ολοκλήρωση (X.I.O) για τον κόμβο I της διατομής A.

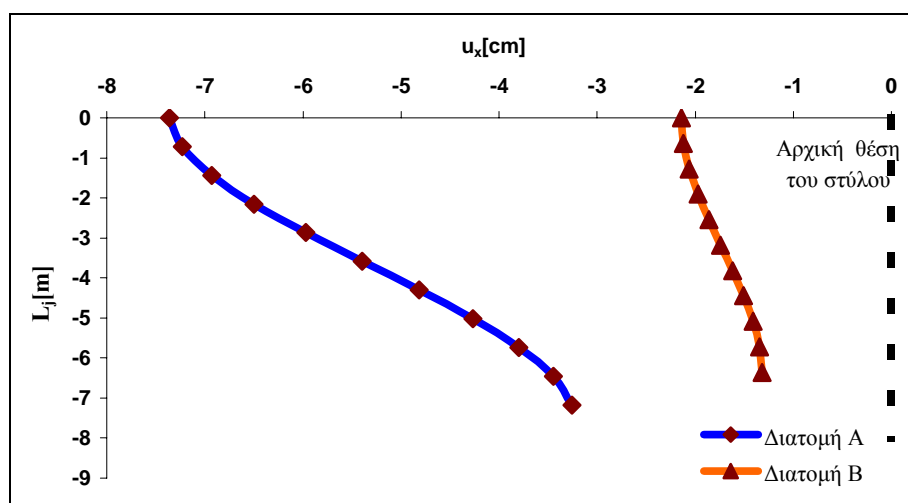
Από τα συμπεράσματα που προκύπτουν σχετικά με τις μεθόδους ανάλυσης, επιλέγονται τα αποτελέσματα της χρόνο-ιστορικής ανάλυσης των ιδιομορφών για να ερμηνευθεί η συμπεριφορά του σταθμού του Daikai (Διατομή A) και να συγκριθεί με αυτή της σιδηροδρομικής γραμμής του δικτύου (Διατομή B), καθώς προσεγγίζει καλύτερα την πραγματικότητα.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης για τα δύο μοντέλα προκύπτουν τα εξής:

- Κατά την εφαρμογή μόνο της οριζόντιας επιτάχυνσης, οι αξονικές δυνάμεις και κατά συνέπεια και οι ορθές τάσεις που αναπτύσσονται στο κεντρικό στύλο για τα δύο μοντέλα, είναι της τάξης των 0-10N και 0-10⁻⁵Pa αντίστοιχα, για αυτό και αγνοούνται.
- Η απόλυτη διατμητική τάση που αναπτύσσεται στον κεντρικό στύλο της Διατομής A ξεπερνά την διατμητική αντοχή του σκυροδέματος, $T_0=1,5\text{MPa}$, μεταξύ 10 και 14sec, κατά τη διάρκεια του σεισμού (βλ. σχήμα 5.48). Η μέγιστη απόλυτη τιμή που λαμβάνει είναι περίπου το 140% της διατμητικής αντοχής του σκυροδέματος (βλ. σχήμα 5.49). Αντίθετα για τη Διατομή B η μέγιστη απόλυτη διατμητική τάση είναι περίπου το 80% της διατμητικής αντοχής.

- Η μέγιστη απόλυτη σχετική μετατόπιση, $|\delta|$, το χρονικό διάστημα που η διατμητική τάση του στύλου στη Διατομή Α υπερβαίνει την αντοχή του, κυμαίνεται από 3,8-4,2cm, ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τη Διατομή Β σε όλη τη διάρκεια του σεισμού είναι από 0,6-0,9cm (βλ. σχήμα 5.44)
- Η μέγιστη απόλυτη εγκάρσια παραμόρφωση, γ , το χρονικό διάστημα που η διατμητική τάση του στύλου στη Διατομή Α υπερβαίνει την αντοχή του, κυμαίνεται από 0,38-0,42%, ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τη Διατομή Β σε όλη τη διάρκεια του σεισμού είναι από 0,1-0,13% (βλ. σχήμα 5.51).
- Από την εφαρμογή συνδυασμένης οριζόντιας και κατακόρυφης επιτάχυνσης προκύπτει ότι οι μέγιστες απόλυτες ορθές τάσεις που επάγονται στο στύλο φτάνουν περίπου το 4% της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος, $C_0=20\text{MPa}$ (Σχήμα 5.61).

Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, προκύπτει ότι ο στύλος της Διατομής Α αστοχεί σε διάτμηση ενώ ο στύλος της διατομής Β επιβιώνει οριακά καθώς τα φορτία που αναπτύσσονται σε αυτόν είναι μεν μικρότερα της αντοχής του ωστόσο οι τιμές τους είναι κοντά σε αυτή. Στο σχήμα 6.2 απεικονίζεται η κατανομή της οριζόντιας μετατόπισης του στύλου τη χρονική στιγμή $t_i=10,6$ sec. Τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στο στύλο ξεπερνά τη διατμητική του αντοχή.

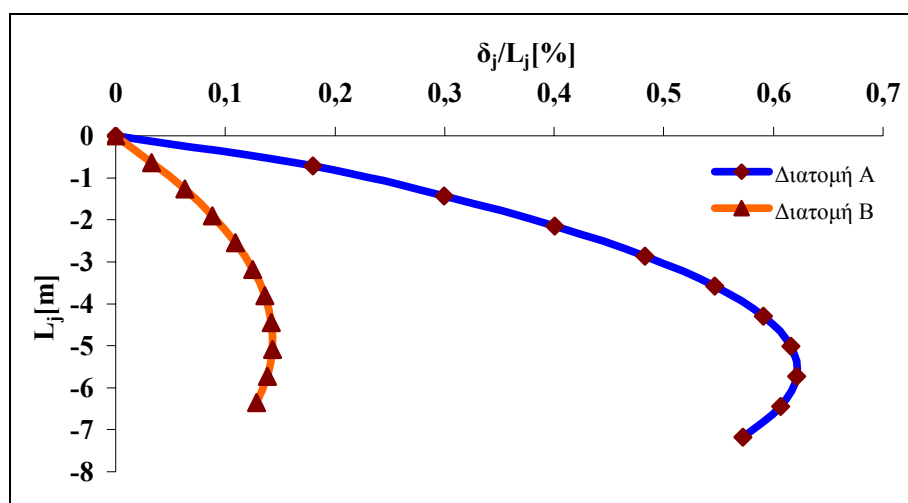


Σχήμα 6.2: Κατανομή της οριζόντιας μετατόπισης στο στύλο τη χρονική στιγμή $t_i=10,6$

Η σχετική μετατόπιση ενός τυχαίου σημείου, j , του στύλου, το οποίο απέχει από τον κόμβο I απόσταση L_j , θα δίδεται από τη σχέση

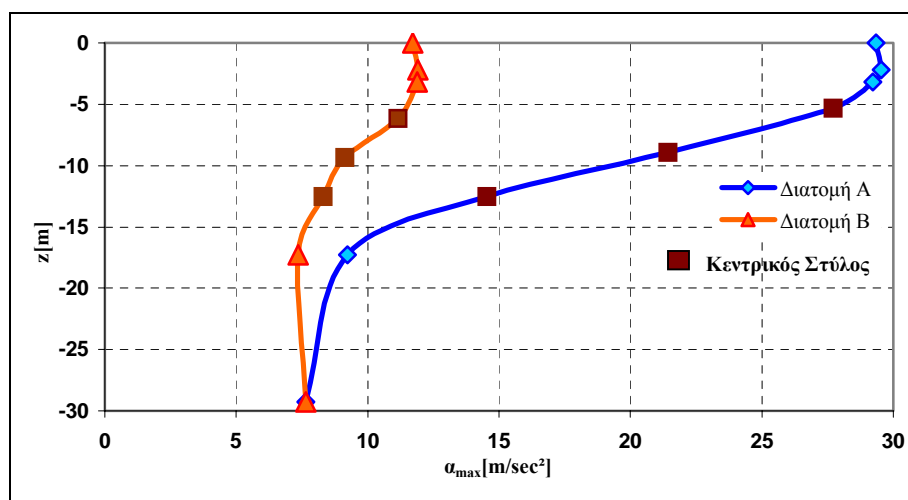
$$\delta_j = u_I - u_j$$

Στο σχήμα 6.3 απεικονίζεται η ανηγμένη ως προς την απόσταση L_j , σχετική μετατόπιση κατά μήκος του στύλου .

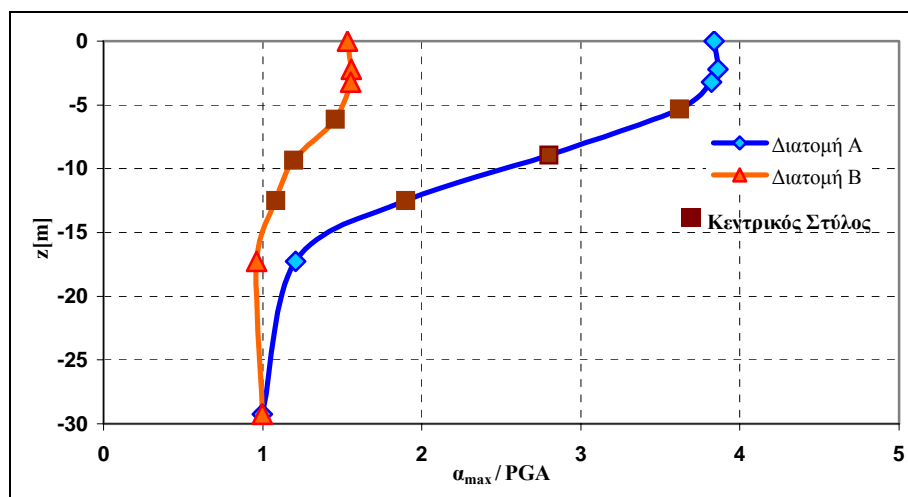


Σχήμα 6.3: Κατανομή εγκάρσιας παραμόρφωσης στο στύλο τη χρονική στιγμή $t_i=10,6$ sec

Στα σχήματα 6.4 και 5.5 απεικονίζεται η κατανομή της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης συναρτήσει του βάθους σε μια κατακόρυφη στήλη της οποίας ο άξονας διέρχεται από τους κόμβους μελέτης (βλ. σχήμα 5.27).



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα βάθους της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης



Σχήμα 6.5: Διάγραμμα βάθους της ενίσχυσης της επιτάχυνσης

Παρατηρείται ότι για την Διατομή A η επιτάχυνση που υπολογίζεται στην επιφάνεια παρουσιάζει ενίσχυση περίπου 5 φορές σχετικά με την επιτάχυνση που εφαρμόζεται στη βάση (οριζόντια PGA Kobe, σχήμα 5.5). Αντίστοιχα για τη Διατομή B η επιτάχυνση στην επιφάνεια παρουσιάζεται ενισχυμένη μόνο 1,5 φορές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η απόσταση μεταξύ των πλευρικών ορίων του μοντέλου „2S+b (βλ. σχήμα 5.20), για την Διατομή A είναι περίπου η διπλάσια από την αντίστοιχη της Διατομής B.

Τέλος όσον αφορά τη γενικότερη φιλοσοφία της ανάλυσης που έγινε στη παρούσα εργασία, αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της αντιμετώπισης των προβλημάτων αντισεισμικού σχεδιασμού ως δυναμικά και όχι ως ψευδοστατικά. Πιο συγκεκριμένα με τη θεώρηση ψευδοστατικής ανάλυσης γίνεται η αντικατάσταση της σύνθετης επίδρασης ενός σεισμικού φορτίου από μια ισοδύναμη στατική δύναμη η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη επιτάχυνση που δίδει ο σεισμός. Με την θεώρηση αυτή αγνοούνται τα εξής πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά:

- Το σεισμικό φορτίο συνήθως προκαλεί περισσότερους του ενός, κύκλους φόρτισης οι οποίοι μπορούν να προκαλέσουν αστοχία λόγω κόπωσης του υλικού (πρόβλημα αντοχής υλικών).

- Το συχνοτικό περιεχόμενο του σεισμού είναι δυνατό να καλύπτει ένα ευρύ φάσμα τιμών, στο οποίο περιέχονται οι ιδιοσυχνότητες δομικών έργων που αστοχούν λόγω συντονισμού.

Με βάση την εμπειρία που προέκυψε από την παρούσα εργασία, για να προσεγγιστεί καλύτερα η μηχανική συμπεριφορά ενός υπογείου τεχνικού έργου από σκυρόδεμα σε σεισμικά φορτία, προτείνετε σε μελλοντικές εργασίες να πραγματοποιηθεί:

- Επίλυση των μοντέλων με μη γραμμική ανάλυση, κατά την οποία τα στοιχεία του μητρώου ακαμψίας θα είναι συναρτήσεις της μετατόπισης.
- Χρήση κατάλληλων στοιχείων που θα προσομοιώνουν την τριβή στη διεπιφάνεια μεταξύ του σκυροδέματος και των γεωυλικών
- Χρήση στοιχείων εδαφικών υλικών τα οποία θα λαμβάνουν υπόψη το πορώδες, την πίεση των πόρων (ενεργές τάσεις κτλ.).
- Παραμετρική ανάλυση για διατομές διαφορετικής γεωμετρίας (κυκλική, ελλειψοειδής, τόξα κτλ.).

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. **Αβδελάς Γ. και Σίμος Θ.**, *Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά-Ξάνθη 2000.
2. **Αγιουτάντης Ζ.**, *Στοιχεία Γεωμηχανικής και Μηχανική Πετρωμάτων*, Εκδόσεις «Ιων», Αθήνα 2002.
3. **Αναστασιάδης Κ.**, *Δυναμική των Κατασκευών - Διακριτά Συστήματα*, Τόμος Ι, Εκδόσεις «ΖΗΤΗ», Θεσσαλονίκη 1983.
4. **Βαφείδης Α.**, *Γεωφυσική Ι - Σεισμικά*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 1996.
5. **Κατσιαδέλης Ι. Θ.**, *Δυναμική των Κατασκευών*, Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2002
6. **Κόντος Γ.**, *Υπολογισμός Ιδιοσυχνοτήτων Ταλάντωσης Μονολιθικής Επένδυσης Σήραγγας*, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 2003.
7. **Μερτίκας Σ.**, *Τηλεπισκόπηση και Ψηφιακή Ανάλυση Εικόνας*, Εκδόσεις «Ιων», Αθήνα 1999.
8. **Μιγκίρος Π. Γ.**, *Βασικές αρχές και έννοιες της Γεωλογίας*, Εκδόσεις Access, Αθήνα 1996.
9. **Προβιδάκης Κ.**, *Μηχανική ΙΙ – Αντοχή Υλικών*, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 2000.

10. **Σαρρής Ε.** *Προσομοίωση Ανατίναξης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 2004.
11. **Τραχανάς Σ.**, *Διαφορικές Εξισώσεις - Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1999.

Διεθνής Βιβλιογραφία

1. **Bachmann Hugo**, *Αντισεισμική Προστασία των Κατασκευών*, Ζυρίχη 1995, Απόδοση στα ελληνικά: Δημ. Πέντζας, Εκδόσεις Γκιούρδας, Αθήνα 1998.
2. **Brandy B. H. G and E. T. Brown**, *Rock Mechanics – For underground Mining*, Chapman & Hall, 1985.
3. **Chopra K. Anil**, *Dynamic of structures*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
4. **Cook R., D. Malkus and M. Plesha**, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, J. Wiley, 1989.
5. **Fagan M. J.**, *Finite Element Analysis – Theory and Practice*, Longman Group, 1996.
6. **Hashash M. A. Youssef, Hook J. Jeffrey, Schmidt Birger, I-Chiang Yao John**, Seismic design and analysis of underground structures, *Journal of Tunneling and Underground Space Technology*, Vol. 16, pp 247-293, 2001.
7. **Kramer Steven L.**, *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
8. **Senzai Samata, Hajime Ohuchi and Takashi Matsuda**, A Study of the Damage of Subway Structure during the 1995 Hanshin – Awaji Earthquake, *Journal of Cement and Concrete Composites*, Vol. 19, pp 223-239, 1997.

9. **Somerville P.**, The January 17, 1995 Hyogo Ken Nanbu (Kobe) Earthquake, *Geoscience and Geotechnical aspects*, University of California official site (βλ. δικτυακοί τόποι), Berkeley, 1995
10. **Wilson L. Edward**, *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computer and Structure inc, Berkeley, 2002
11. **Xuehui An, Ashraf A. Shawky and Koichi Maekawa**, The Collapse Mechanism of a Subway Station during the Great Hanshin Earthquake, *Journal of Cement and Concrete*, Vol 19, pp 241-257, 1997.
12. **Young D. Hugh**, *University Physics*, 8th Edition, Addison - Wesley, 1994.

Δικτυακοί Τόποι

1. www.ce.berkeley.edu, Research Areas, Department of Civil and Environmental engineering, University of California, Berkeley
2. www.seismo.unr.edu, Nevada Seismological Laboratory