



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

*Εφαρμογή εξελικτικού αλγορίθμου για την εκπαίδευση νευρωνικού δικτύου στο
παίγνιο της τρίλιζας*

Διπλωματική εργασία που εκπονήθηκε στα πλαίσια των απαιτήσεων για την απόκτηση
Πτυχιακού Διπλώματος

Τζιμίτση Αθηνά

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή
Παπαγεωργίου Μάρκος (Επιβλέπων)
Κοσματόπουλος Ηλίας
Μυγδαλάς Αθανάσιος

Χανιά 2005

Στον πιο δικό μου άνθρωπο.

Ευχαριστίες

Με την περάτωση αυτής της εργασίας, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μάρκο Παπαγεωργίου, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης και Διευθυντή του Εργαστηρίου Δυναμικών Συστημάτων & Προσομοίωσης του Πολυτεχνείου Κρήτης, ο οποίος μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα τόσο ενδιαφέρον. Η πολύτιμη καθοδήγηση καθώς και η αναγκαία κατανόηση που επέδειξε, οδήγησαν σε μια άριστη συνεργασία που αποτέλεσε κύριο παράγοντα στην επιτυχή ολοκλήρωση της παρούσας εφαρμογής.

Παράλληλα, θέλω να ευχαριστήσω τους κ. Α. Μυγδαλά και κ. Η. Κοσματόπουλο που με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διαδικασίας απόκτησης του Πτυχιακού μου Διπλώματος.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Ευάγγελο Βουντουράκη Ε.Ε.ΔΙ.Π. και Υπεύθυνο Συστημάτων του Εργαστηρίου Δυναμικών Συστημάτων & Προσομοίωσης του Πολυτεχνείου Κρήτης, τόσο για την πολύτιμη βοήθειά του σε θέματα τεχνικής υποστήριξης όσο και για τη συμπαράστασή του καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας προσπάθειας.

Θέλω να ευχαριστήσω, επίσης, τους γονείς μου για την αγάπη που μου προσφέρουν απλόχερα σε όλη μου τη ζωή, καθώς και αυτούς τους φίλους ή μη, που με τον έναν ή τον άλλο τρόπο με στήριξαν τα χρόνια της φοίτησής μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή.....	11
1.1 Γενικά.....	11
1.2 Δομή της εργασίας.....	11
Κεφάλαιο 2: Γενετικοί αλγόριθμοι	13
2.1 Εισαγωγή.....	13
2.2 Βιολογικό υπόβαθρο	13
2.3 Χώρος αναζήτησης λύσεων.....	14
2.4 Βασική περιγραφή	15
2.5 Παράμετροι γενετικών αλγορίθμων.....	17
Κεφάλαιο 3: Νευρωνικά δίκτυα.....	19
3.1 Εισαγωγή.....	19
3.2 Αρχιτεκτονική νευρωνικών δικτύων.....	20
3.3 RBF Δίκτυα	22
3.4 Κανονικοποίηση RBF δικτύων.....	24
3.5 Γενικευμένα RBF δίκτυα.....	24
3.6 RBF δίκτυα έναντι MLP δικτύων	26
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογή στο παίγνιο της τρίλιζας	29
4.1 Το παίγνιο της τρίλιζας	29
4.2 Μοντελοποίηση του νευρωνικού δικτύου.....	30
4.3 Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου	33
Κεφάλαιο 5: Περιγραφή κώδικα	39
5.1 Triliza	39
5.2 Symmetries check	40
5.3 Κλάσεις.....	52
5.4 Dna	53
5.5 Person.....	54
5.6 Population.....	57
5.7 Neural.....	61

5.8	Ροή του προγράμματος.....	64
Κεφάλαιο 6: Αποτελέσματα		69
6.1	Γενικά.....	69
6.2	Κατεύθυνση 1η	69
6.3	Κατεύθυνση 2η	73
6.4	Κατεύθυνση 3η	75
Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα - Μελλοντικές επεκτάσεις		77
Παράρτημα Α		79
A.1	Σιγμοειδής συνάρτηση	79
A.2	Radial συναρτήσεις	79
Παράρτημα Β.....		83
Βιβλιογραφία		89

Λίστα σχημάτων

<i>Σχήμα 1:</i>	<i>Παράδειγμα χώρου αναζήτησης.....</i>	<i>14</i>
<i>Σχήμα 2:</i>	<i>Ψευδοκώδικας ενός γενετικού αλγόριθμου</i>	<i>16</i>
<i>Σχήμα 3:</i>	<i>Παράδειγμα απλού νευρώνα</i>	<i>20</i>
<i>Σχήμα 4:</i>	<i>Παράδειγμα MLP νευρωνικού δικτύου.....</i>	<i>21</i>
<i>Σχήμα 5:</i>	<i>Παράδειγμα RBF νευρωνικού δικτύου</i>	<i>25</i>
<i>Σχήμα 6:</i>	<i>Πλέγμα τρίλιζας.....</i>	<i>29</i>
<i>Σχήμα 7:</i>	<i>Παραδείγματα τρίλιζας</i>	<i>29</i>
<i>Σχήμα 8:</i>	<i>Παραδείγματα έκβασης παιχνιδιού για τον παίκτη X.....</i>	<i>30</i>
<i>Σχήμα 9:</i>	<i>Το RBF νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε.....</i>	<i>32</i>
<i>Σχήμα 10:</i>	<i>Παράδειγμα fitness-proportionate selection.....</i>	<i>35</i>
<i>Σχήμα 11:</i>	<i>Παράδειγμα αναπαραγωγής με τη μέθοδο της διασταύρωσης σε ένα σημείο</i>	<i>36</i>
<i>Σχήμα 12:</i>	<i>Παράδειγμα μετάλλαξης</i>	<i>37</i>
<i>Σχήμα 13:</i>	<i>Διάγραμμα ροής της υπορουτίνας traliza.....</i>	<i>39</i>
<i>Σχήμα 14:</i>	<i>Παράδειγμα κεντρικής συμμετρίας</i>	<i>40</i>

<i>Σχήμα 15: Παράδειγμα κάθετης συμμετρίας</i>	40
<i>Σχήμα 16: Παράδειγμα διαγώνιας συμμετρίας</i>	40
<i>Σχήμα 17: Διάγραμμα ροής της υπορουτίνας symmetries_check</i>	41
<i>Σχήμα 18: Πιθανές πρώτες κινήσεις</i>	42
<i>Σχήμα 19: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση</i>	42
<i>Σχήμα 20: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση</i>	43
<i>Σχήμα 21: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση</i>	43
<i>Σχήμα 22: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση και δεύτερη στην 5^η</i>	44
<i>Σχήμα 23: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση και δεύτερη στην 9^η</i>	45
<i>Σχήμα 24: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση και δεύτερη στην 5^η</i>	45
<i>Σχήμα 25: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση και δεύτερη στην 8^η</i>	46
<i>Σχήμα 26: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση και δεύτερη στην 1^η</i>	46
<i>Σχήμα 27: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση και δεύτερη στη 2^η</i>	47
<i>Σχήμα 28: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση, δεύτερη στην 5^η και τρίτη στην 9^η</i>	48
<i>Σχήμα 29: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση, δεύτερη στην 9^η και τρίτη στην 5^η</i>	48
<i>Σχήμα 30: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση, δεύτερη στην 5^η και τρίτη στην 8^η</i>	49
<i>Σχήμα 31: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση, δεύτερη στην 8^η και τρίτη στην 5^η</i>	49
<i>Σχήμα 32: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση, δεύτερη στην 1^η και τρίτη στην 9^η</i>	50
<i>Σχήμα 33: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση, δεύτερη στη 2^η και τρίτη στην 8^η</i>	51
<i>Σχήμα 34: Διάγραμμα κλάσεων με βάση το συσχετισμό μεταξύ τους</i>	52
<i>Σχήμα 35: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας μετάλλαξης ενός ατόμου</i>	55
<i>Σχήμα 36: Αντιστοιχία τυχαίων τιμών στα άτομα του πληθυσμού</i>	58
<i>Σχήμα 37: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας επιλογής γονέων</i>	59
<i>Σχήμα 38: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας διασταύρωσης</i>	60
<i>Σχήμα 39: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας μετάλλαξης του πληθυσμού</i>	61

<i>Σχήμα 40: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας υπολογισμού των εξόδων του νευρωνικού δικτύου ..</i>	<i>63</i>
<i>Σχήμα 41: Διάγραμμα ροής του προγράμματος που υλοποιήθηκε για την επίλυση του παιγνίου....</i>	<i>65</i>
<i>Σχήμα 42: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη με 55 νευρώνες, $p_{mut} = 0.3\%$, και $f(x): \{+1, -1, 0\}$.</i>	<i>70</i>
<i>Σχήμα 43: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη</i>	<i>70</i>
<i>Σχήμα 44: Απόδοση ενός καλύτερου παίκτη με 27 νίκες σε ισάριθμα παιχνίδια</i>	<i>71</i>
<i>Σχήμα 45: Απόδοση του αντίστοιχου χειρότερου παίκτη</i>	<i>71</i>
<i>Σχήμα 46: Δέντρο πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη 1^{ης} κατεύθυνσης</i>	<i>72</i>
<i>Σχήμα 47: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη 2^{ης} κατεύθυνσης</i>	<i>74</i>
<i>Σχήμα 48: Απόκλιση από βέλτιστο καλύτερου παίκτη 2^{ης} κατευθυνσης</i>	<i>74</i>
<i>Σχήμα 49: Δέντρο πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη 2^{ης} κατεύθυνσης</i>	<i>75</i>
<i>Σχήμα 50: Sigmoid function</i>	<i>79</i>
<i>Σχήμα 51: Gaussian RBF</i>	<i>80</i>
<i>Σχήμα 52: Multiquadratic RBF</i>	<i>81</i>
<i>Σχήμα 53: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 1</i>	<i>83</i>
<i>Σχήμα 54: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 1</i>	<i>83</i>
<i>Σχήμα 55: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 2</i>	<i>84</i>
<i>Σχήμα 56: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 2</i>	<i>84</i>
<i>Σχήμα 57: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 3</i>	<i>85</i>
<i>Σχήμα 58: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 3</i>	<i>85</i>
<i>Σχήμα 59: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 4</i>	<i>86</i>
<i>Σχήμα 60: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 4</i>	<i>86</i>
<i>Σχήμα 61: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 5</i>	<i>87</i>
<i>Σχήμα 62: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 5</i>	<i>87</i>
<i>Σχήμα 63: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη Case 6</i>	<i>88</i>
<i>Σχήμα 64: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη Case 6</i>	<i>88</i>

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Τεχνητή νοημοσύνη (Artificial Intelligence - AI) είναι ένας συνδυασμός της επιστήμης υπολογιστών, της φιλοσοφίας και της φυσιολογίας. Στην πράξη όμως τεχνητή νοημοσύνη είναι ο κλάδος της επιστήμης υπολογιστών που εστιάζει στη δημιουργία μηχανών ικανών να επιδείξουν συμπεριφορές που ο άνθρωπος τις θεωρεί ευφυείς.

Ίσως ο καλύτερος τρόπος αποτίμησης της νοημοσύνης μιας μηχανής είναι το τεστ του *Alan Turing*. Εξέφρασε την άποψη πως ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής πρέπει να ονομάζεται ευφυής, αν μπορούσε να πείσει έναν άνθρωπο πως είναι και ο ίδιος άνθρωπος. Ωστόσο η τεχνητή νοημοσύνη περισσότερο αναφέρεται στην ικανότητα λήψης κατάλληλων αποφάσεων για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου σκοπού, και στην ικανότητα προσαρμογής συμπεριφοράς στο περιβάλλον που συναντάται ο σκοπός.

Τα μαθηματικά παίγνια αποτελούν ένα τομέα που προσφέρεται για τη μελέτη της ευφυούς συμπεριφοράς. Η συμπεριφορά των διάφορων στρατηγικών στα παίγνια αυτά, καθορίζεται από την απεικόνιση των αντιδράσεων του κάθε παίκτη στα ερεθίσματα που δέχεται. Η αποτελεσματική λήψη αποφάσεων σε κάποιο περιβάλλον σχεδόν πάντα απαιτεί μη γραμμική απεικόνιση των παραπάνω αντιδράσεων. Το πρόβλημα λοιπόν μετατοπίζεται στην επιλογή της κατάλληλης κωδικοποίησης και του κατάλληλου αλγόριθμου εκπαίδευσης των παικτών. Τα νευρωνικά δίκτυα και οι εξελικτικοί αλγόριθμοι αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στην επίλυση των θεμάτων αυτών.

Η εργασία αυτή περιγράφει την προσπάθεια διασταύρωσης των νευρωνικών δικτύων και των εξελικτικών αλγορίθμων για την εκμάθηση κατάλληλων στρατηγικών στο παίγνιο της τρίλιζας (Tic Tac Toe). Ο εξελικτικός αλγόριθμος κατάφερε να ανακαλύψει ένα νευρωνικό δίκτυο που μπορεί να παίζει αρκετά καλά το παίγνιο της τρίλιζας χωρίς να έχει καμία ιδιαίτερη γνώση για τους κανόνες του παιχνιδιού.

1.2 Δομή της εργασίας

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε έξι ενότητες.

Στη *δεύτερη ενότητα* γίνεται μια σύντομη αναφορά στους γενετικούς αλγορίθμους. Αρχικά δίνονται κάποιες γενικές πληροφορίες και συνεχίζει με μερικές βασικές αρχές της βιολογίας προκειμένου να αποκτηθεί το απαραίτητο υπόβαθρο. Έπειτα δίνεται ένας ορισμός του χώρου

αναζήτησης λύσεων των γενετικών αλγορίθμων και στη συνέχεια η περιγραφή της βασικής τους λειτουργίας ενώ παρατίθεται και ο σχετικός ψευδοκώδικας. Τέλος αναφέρονται οι κύριες παράμετροι των γενετικών αλγορίθμων και ο ρόλος τους.

Η *τρίτη ενότητα* ασχολείται με τα νευρωνικά δίκτυα. Στην αρχή και πάλι γίνεται μια γενική εισαγωγή στο θέμα και εν συνεχεία στην αρχιτεκτονική των νευρωνικών δικτύων έχοντας ως υπόδειγμα ένα MLP νευρωνικό δίκτυο. Κατόπιν γίνεται μια εκτενέστερη ανάλυση των RBF νευρωνικών δικτύων καταλήγοντας στη γενικευμένη τους δομή. Κλείνοντας δίνονται οι κυριότερες ομοιότητες αλλά και διαφορές μεταξύ των MLP και των RBF δικτύων.

Η *τέταρτη ενότητα* ξεκινά με την περιγραφή του παιγνίου της τρίλιζας. Εν συνεχεία κατασκευάζεται το ακριβές μοντέλο του νευρωνικού δικτύου που χρησιμοποιήθηκε για το παίγνιο αυτό αλλά και ο γενετικός αλγόριθμος όπως διαμορφώθηκε για την εκπαίδευση του συγκεκριμένου δικτύου.

Στην *πέμπτη ενότητα* εκτείνεται η ανάλυση του κώδικα που υλοποιήθηκε σε γλώσσα C++ για την εφαρμογή όσων αναφέρθηκαν στην τρίτη ενότητα. Ξεκινώντας με τα βοηθητικά προγράμματα και τις κλάσεις που χρησιμοποιήθηκαν συνεχίζει με τη ροή του κυρίως προγράμματος. Δίνονται επίσης πληροφορίες για τα αρχεία αποθήκευσης των αποτελεσμάτων.

Η *έκτη ενότητα* φέρει τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από διαδοχικά τρεξίματα του προγράμματος, στις διαφορετικές περιπτώσεις με τις οποίες έγινε προσπάθεια εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου στο παίγνιο της τρίλιζας.

Η *έβδομη ενότητα* περιέχει τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε με την εμπειρία που αποκτήσαμε από την παρούσα εργασία.

Εν κατακλείδι, εμπεριέχεται ένα σύντομο *παράρτημα* με τους ορισμούς των συναρτήσεων που απαιτούνται, ένα δεύτερο *παράρτημα* με τα γραφήματα των σημαντικότερων αποτελεσμάτων καθώς και η απαραίτητη *βιβλιογραφία*.

Κεφάλαιο 2

Γενετικοί αλγόριθμοι

2.1 Εισαγωγή

Οι γενετικοί αλγόριθμοι αποτελούν μέρος των εξελικτικών αλγορίθμων. Όπως αναμένεται από την ονομασία τους, εμπνεύστηκαν από τη Δαρβίνεια θεωρία της εξέλιξης. Πρόκειται λοιπόν, για μια προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων μέσα από μια εξελικτική διαδικασία με αποτέλεσμα την κατάληξη στην καλύτερη (fittest) λύση (survivor). Με άλλα λόγια η ίδια η λύση εξελίσσεται.

Η ιδέα της εφαρμογής των αρχών βιολογίας της φυσικής εξέλιξης σε τεχνητά συστήματα, ξεκίνησε πριν από περίπου πέντε δεκαετίες και γνώρισε εκπληκτική ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα η έννοια των εξελικτικών αλγορίθμων εισάγεται στη δεκαετία του 1960 από τον *I. Rechenberg* στην εργασία του “Evolution strategies”. Οι γενετικοί αλγόριθμοι επινοήθηκαν από τον *John Holland* και η ανάπτυξή τους από αυτόν και τους συνεργάτες του αναλύεται στο βιβλίο του “Adaption in Natural and Artificial Systems” το 1975.

2.2 Βιολογικό υπόβαθρο

Χρωμόσωμα

Όλοι οι ζωντανοί οργανισμοί αποτελούνται από κύτταρα (cells). Σε κάθε ένα από αυτά υπάρχει μια κοινή ομάδα χρωμοσωμάτων (chromosomes). Τα χρωμοσώματα είναι αλυσίδες DNA που φέρουν τις γενετικές πληροφορίες για όλο τον οργανισμό. Το χρωμόσωμα αποτελείται από γονίδια (genes), μέρη δηλαδή του DNA. Κάθε γονίδιο έχει τη δική του θέση (locus) πάνω στο χρωμόσωμα. Το γονίδιο εκφράζει μια συγκεκριμένη πληροφορία μέσω μίας πρωτεΐνης σχετικά με ένα μοναδικό κληρονομικό χαρακτηριστικό (trait), όπως για παράδειγμα το χρώμα των ματιών. Το χαρακτηριστικό αυτό γνώρισμα παίρνει διάφορες πιθανές “τιμές” (alleles), όπως για το παράδειγμα των ματιών μπλε, πράσινο κ.λ.π.

Η συγκέντρωση όλου του γενετικού υλικού, όλων δηλαδή των χρωμοσωμάτων, ονομάζεται γονιδίωμα (genome). Το σετ γονιδίων στο γονιδίωμα για κάθε συγκεκριμένο κληρονομικό χαρακτηριστικό, ονομάζεται γονότυπος (genotype). Ο γονότυπος στη συνέχεια, μετά τη γέννηση, εκφράζεται με το φαινότυπο (phenotype) του οργανισμού, δίνοντάς του δηλαδή τα φυσικά και κληρονομικά χαρακτηριστικά, όπως χρώμα ματιών, ευφυΐα κ.λ.π.

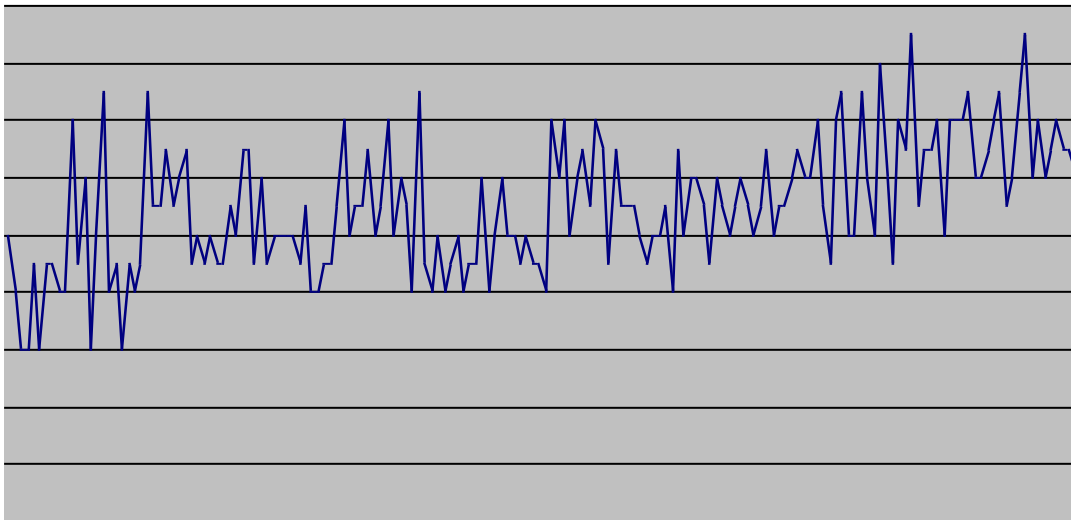
Αναπαραγωγή

Κατά την αναπαραγωγή (reproduction) πρώτα λαμβάνει χώρα ανασυνδυασμός ή αλλιώς διασταύρωση (recombination or crossover) των χρωμοσωμάτων των γονέων (parents). Τα γονίδια δηλαδή των γονέων συνδυάζονται για τη δημιουργία νέων γονιδίων. Οι απόγονοι (offspring) που δημιουργούνται πιθανόν να υποστούν μετάλλαξη (mutation). Κατά τη μετάλλαξη κάποια στοιχεία του DNA των απογόνων υπόκεινται σε μια μικρή αλλαγή. Αυτές οι αλλαγές προκύπτουν κυρίως από λάθη στην αντιγραφή των γονιδίων.

Η προσαρμοστικότητα (fitness) ενός οργανισμού εκτιμάται από την επιτυχία του οργανισμού στην επιβίωσή του (survival).

2.3 Χώρος αναζήτησης λύσεων

Λύνοντας ένα πρόβλημα συνήθως αναζητάμε μία λύση που θα είναι καλύτερη από όλες τις άλλες. Ο χώρος όλων των δυνατών λύσεων στον οποίο βρίσκεται και η επιθυμητή λύση, ονομάζεται χώρος αναζήτησης (search space or state space). Κάθε σημείο στο χώρο αναζήτησης αποτελεί και μία δυνατή λύση του προβλήματος. Εν συνεχεία κάθε λύση μπορεί να αντιπροσωπευθεί από το βαθμό προσαρμοστικότητάς της στο πρόβλημα. Με τους γενετικούς αλγορίθμους αναζητούμε την καλύτερη μεταξύ των λύσεων του χώρου αναζήτησης.



Σχήμα 1: Παράδειγμα χώρου αναζήτησης

Η εύρεση της καλύτερης λύσης συχνά μας οδηγεί στην αναζήτηση ενός ακρότατου (extreme value), μέγιστου ή ελάχιστου (maximum or minimum). Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός πως ο χώρος αναζήτησης είναι συνήθως πολύπλοκος και ξέρουμε μόνο μερικά σημεία του. Με τη μέθοδο των γενετικών αλγορίθμων η διαδικασία εύρεσης λύσεων δίνει και άλλα σημεία του χώρου αναζήτησης καθώς επέρχεται εξέλιξη. Οι λύσεις που βρίσκονται με αυτή τη μέθοδο συχνά

θεωρούνται ως καλές λύσεις γιατί σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί ποια είναι η βέλτιστη.

2.4 Βασική περιγραφή

Ο γενετικός αλγόριθμος είναι μία επαναληπτική διαδικασία που ξεκινά με ένα σταθερού μεγέθους πληθυσμό (population) από άτομα (individuals). Κάθε ένα από αυτά αποτελεί ένα γονιδίωμα (το σύνολο των χρωμοσωμάτων) και αναπαριστά μια πιθανή λύση στο χώρο αναζήτησης λύσεων του προβλήματος. Οι λύσεις από ένα πληθυσμό χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ενός νέου με την ελπίδα πως θα είναι καλύτερος από τον προηγούμενο. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι την ικανοποίηση κάποιας εκ των προτέρων καθορισμένης συνθήκης. Γενικά οι γενετικοί αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε πολυδιάστατους χώρους που είναι πρακτικά αδύνατο να εφαρμοστούν εξαντλητικές μέθοδοι αναζήτησης.

Η διαδικασία λοιπόν έχει ως εξής:

Ένας αρχικός πληθυσμός ατόμων δημιουργείται τυχαία ή ευριστικά. Σε κάθε βήμα επανάληψης γνωστό ως γενιά (generation), τα άτομα του τρέχοντος πληθυσμού αποκωδικοποιούνται (decoding) και αποτιμώνται (evaluation) σύμφωνα με προκαθορισμένα ποιοτικά κριτήρια που αναφέρονται ως προσαρμοστικότητα (fitness or fitness function $f(x)$).

Για τη δημιουργία ενός νέου πληθυσμού, την επόμενη γενιά, επιλέγονται (selection) άτομα σύμφωνα με την προσαρμοστικότητά τους. Άτομα με υψηλή προσαρμοστικότητα επιλέγονται με μεγαλύτερη πιθανότητα από αυτά με χαμηλότερη προσαρμοστικότητα, με την ελπίδα να φέρουν την καλή πληροφορία στο γενετικό τους κώδικα.

Ωστόσο η επιλογή από μόνη της δε δύναται να δώσει νέα άτομα στον πληθυσμό (πρακτικά δε δίνει νέες λύσεις στο χώρο αναζήτησης). Αυτό επιτυγχάνεται γενετικά μέσα από τη διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης. Η διασταύρωση εκτελείται μεταξύ δύο επιλεγμένων γονέων, με την ανταλλαγή μερών των γονιδιωμάτων τους για τη δημιουργία δύο νέων ατόμων, των απογόνων. Συνήθως η ανταλλαγή γίνεται σε ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο διασταύρωσης. Η μετάλλαξη εκτελείται στους απογόνους, με διαφοροποίηση κάποιων στοιχείων των γονιδιωμάτων*.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι στοχαστικές επαναληπτικές διαδικασίες που δεν εγγυώνται σύγκλιση. Η συνθήκη τερματισμού μπορεί να καθοριστεί με ένα μέγιστο αριθμό γενιών ή με την επίτευξη ενός αποδεκτού επιπέδου προσαρμοστικότητας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο ψευδοκώδικας ενός γενετικού αλγορίθμου και αμέσως μετά η συνοπτική περιγραφή του.

* Στο εξής με τον όρο χρωμοσώματα θα αναφερόμαστε στα γονιδιώματα

```
begin GA
  g=0
  Initialize population P(g)
  Evaluate population P(g)
  while not done do
    g=g+1
    New population P(g)
    Select P(g) from P(g-1)
    Crossover P(g)
    Mutate P(g)
    Evaluate P(g)
  end while
end GA
```

Σχήμα 2: Ψευδοκώδικας ενός γενετικού αλγόριθμου

[begin GA] Εκκίνηση γενετικού αλγορίθμου.

[g=0] Πρώτο βήμα.

[Initialize population P(g)] Δημιουργείται ένας αρχικός πληθυσμός n τυχαία επιλεγμένων χρωμοσωμάτων, τα άτομα, που αποτελούν δυνατές λύσεις του προβλήματος.

[Evaluate population P(g)] Αποτίμηση της προσαρμοστικότητας $f(x)$ για κάθε χρωμόσωμα x του πληθυσμού. Η τιμή αυτή εξαρτάται από το πόσο κοντά βρίσκεται στη λύση του προβλήματος.

[while not done do] Όσο δεν έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού κάνε

[g=g+1] Επόμενο βήμα.

[New population P(g)] Δημιουργία νέου πληθυσμού με την επανάληψη των παρακάτω βημάτων.

[Select P(g) from P(g-1)] Επιλογή των γονέων σύμφωνα με την προσαρμοστικότητά τους. Μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής.

[Crossover P(g)] Διασταύρωση των γονέων. Χωρίς διασταύρωση οι απόγονοι θα είναι απλές κόπιες των γονέων.

[Mutate P(g)] Μετάλλαξη των απογόνων.

[Evaluate P(g)] Αποτίμηση του νέου πληθυσμού.

[end while] Τέλος επαναληπτικής διαδικασίας. Αν έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού, ο αλγόριθμος τερματίζεται και επιστρέφει την καλύτερη λύση.

[end GA] Τέλος γενετικού αλγορίθμου.

Όπως είναι φανερό ένας γενετικός αλγόριθμος στη βασική του μορφή είναι πολύ γενικός. Είναι πολλές οι παράμετροι και οι τοποθετήσεις που μπορούν να διαφοροποιηθούν σε κάθε πρόβλημα.

Πρωτίστως πρέπει να επιλεγεί το μήκος και η κωδικοποίηση των χρωμοσωμάτων. Έπειτα να αποφασισθεί ο τρόπος επιλογής των γονέων για διασταύρωση. Πολλές φορές στην προσπάθεια να διατηρήσουμε την καλύτερη ή κάποιες καλύτερες λύσεις του τελευταίου πληθυσμού χρησιμοποιούμε τον ελιτισμό (elitism). Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις καλύτερες λύσεις του πληθυσμού αντιγράφεται χωρίς καμία αλλαγή στο νέο πληθυσμό με την ελπίδα είτε να επιβιώσει, είτε να δώσει καλύτερους απογόνους.

2.5 Παράμετροι γενετικών αλγορίθμων

Είναι τρεις οι βασικές παράμετροι των γενετικών αλγορίθμων:

Πιθανότητα διασταύρωσης p_{cross} (crossover probability or crossover rate)

Πόσο συχνά εφαρμόζεται διασταύρωση. Χωρίς διασταύρωση, οι απόγονοι είναι ακριβή αντίτυπα των γονιών. Με διασταύρωση, οι απόγονοι προκύπτουν από μέρη των χρωμοσωμάτων και των δύο γονιών. Αν λοιπόν $p_{cross} = 100\%$, τότε όλοι οι απόγονοι δημιουργούνται με διασταύρωση. Ενώ αν $p_{cross} = 0\%$, τότε όλη η καινούρια γενιά αποτελείται από ακριβή αντίτυπα της προηγούμενης χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως είναι και ίδιες.

Ο τελεστής διασταύρωσης ωθεί την εξελικτική διαδικασία να κινηθεί σε “υποσχόμενες για λύση” περιοχές του χώρου αναζήτησης. Βασίζεται στην ελπίδα τα νέα χρωμοσώματα να περιέχουν την καλή πληροφορία από τα προηγούμενα χρωμοσώματα και για το λόγο αυτό να είναι καλύτερα. Ωστόσο αποτελεί καλή τακτική να επιδιώκουμε ένα μέρος του παλιού πληθυσμού να επιβιώνει στη νέα γενιά.

Πιθανότητα μετάλλαξης p_{mut} (mutation probability)

Πόσο συχνά μέρη των χρωμοσωμάτων μεταλλάσσονται. Χωρίς μετάλλαξη, οι απόγονοι συνεχίζουν τη διαδικασία χωρίς καμία αλλαγή των χρωμοσωμάτων τους. Με μετάλλαξη, ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός χρωμοσώματος μεταβάλλονται. Αν λοιπόν $p_{mut} = 100\%$, τότε όλο το χρωμόσωμα κάθε απογόνου αλλάζει. Ενώ αν $p_{mut} = 0\%$, τότε δε γίνεται καμία αλλαγή.

Ο τελεστής μετάλλαξης εισάγεται για την αποφυγή πρόωρης σύγκλισης σε τοπικά βέλτιστα από την τυχαία δειγματοληψία σημείων στο χώρο αναζήτησης. Η μετάλλαξη δεν πρέπει να λαμβάνει χώρα συχνά γιατί τότε ο γενετικός αλγόριθμος θα καταλήξει σε τυχαία αναζήτηση.

Μέγεθος πληθυσμού (population size)

Πόσα χρωμοσώματα υπάρχουν στον πληθυσμό σε κάθε γενιά. Αν είναι πολύ λίγα τα χρωμοσώματα, ο γενετικός αλγόριθμος έχει πολύ λίγους συνδυασμούς για διασταύρωση και μόνο ένα μικρό μέρος του χώρου αναζήτησης ανιχνεύεται. Από την άλλη αν είναι πάρα πολλά τα χρωμοσώματα, ο γενετικός αλγόριθμος είναι αργός. Φαίνεται όμως από κάποιο όριο και μετά, ανάλογα με το πρόβλημα, πως δεν είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε μεγάλους πληθυσμούς γιατί δε λύνουν το πρόβλημα πιο γρήγορα από άλλους μικρότερους που επίσης το λύνουν.

Κεφάλαιο 3

Νευρωνικά δίκτυα

3.1 Εισαγωγή

Τα νευρωνικά δίκτυα είναι μιμήσεις των βιολογικών νευρώνων, που την πιο εκπληκτική και ταυτόχρονα πολύπλοκη συνδεσμολογία τους αποτελεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Η ικανότητα της μάθησης μέσω εμπειρίας είναι από τα κύρια χαρακτηριστικά της ανθρώπινης ευφυΐας. Η ανθρώπινη μνήμη έχει την ικανότητα να αποθηκεύει αρκετή σε ποσότητα και ποικιλία γνώση και να συσχετίζει πληροφορίες εύκολα και γρήγορα χωρίς καμιά ιδιαίτερη προσπάθεια. Σε αντίθεση οι υπολογιστές έχουν την ικανότητα να εκτελέσουν λογικές διαδικασίες με μεγάλη ταχύτητα και να συγκρατήσουν στη μνήμη τους μεγάλες ποσότητες πληροφοριών χωρίς όμως να μπορούν να τις εκμεταλλευτούν.

Εν αρχή πρέπει να γίνει μια σημείωση· ενώ είναι κατανοητό ποια μπορεί να είναι η λειτουργία ενός μεμονωμένου νευρώνα ή μιας μικρής ομάδας νευρώνων, ποτέ μέχρι σήμερα δεν έγινε γνωστό ποια πραγματικά είναι η λειτουργία του ανθρώπινου εγκέφαλου. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει περί τους 100δισ νευρώνες και ο κάθε ένας από αυτούς συνδέεται με άλλους 1000 περίπου. Είναι λοιπόν ανέλπιστο να καταφέρουμε να προσομοιώσουμε ένα τέτοιου μεγέθους και πολύπλοκότητας σύστημα, αν σκεφτούμε πως ένα νευρωνικό δίκτυο σήμερα θεωρείται πολύπλοκο και μόνο με μερικές χιλιάδες νευρώνες, ο καθένας με μερικές εκατοντάδες συνδέσεις.

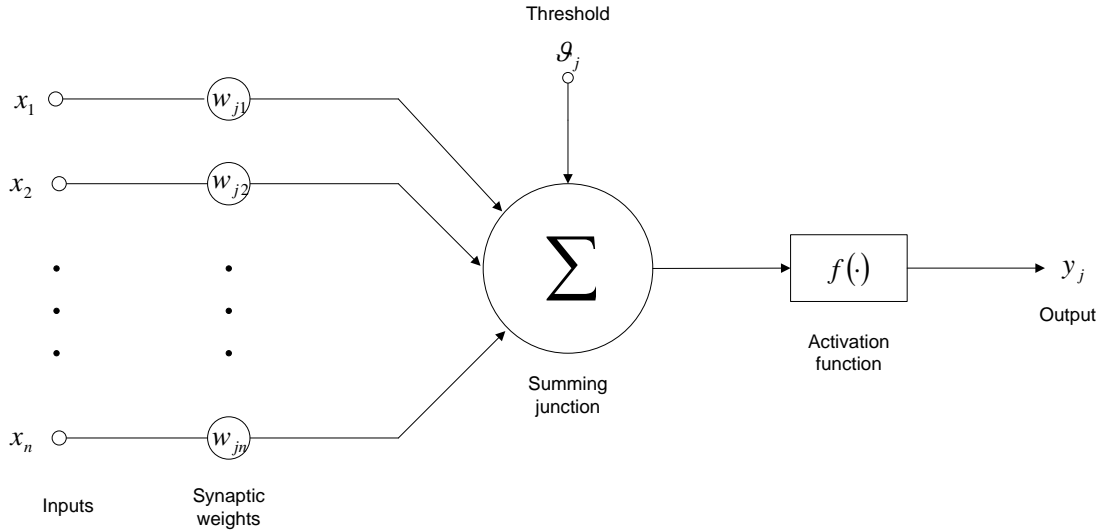
Αυτό που ελπίζουμε να καταφέρουμε είναι να αναπτύξουμε πιο απλά συστήματα που επιδεικνύουν τη γενικευμένη διαδικασία και την κληρονομικότητα της προσαρμοστικότητας των βιολογικών νευρωνικών δικτύων με σκοπό να βελτιώσουμε τα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες των υπολογιστικών μας εργαλείων.

Ένα πολυβαθμωτό νευρωνικό δίκτυο πρόσθιας δομής είναι ουσιαστικά μια μη γραμμική συνάρτηση $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$. Το \mathbf{x} αποτελεί το διάνυσμα των εισόδων $x_i, i = 1, \dots, N$ και το \mathbf{y} το διάνυσμα των εξόδων $y_i, i = 1, \dots, K$ που προκύπτουν. Η f είναι η διανυσματική συνάρτηση που δεδομένου του \mathbf{x} μας δίνει το \mathbf{y} . Τέλος το \mathbf{w} είναι το διάνυσμα των ελεύθερων παραμέτρων (βάρη) $w_i, i = 1, \dots, p$ που καθορίζουν την ακριβή μορφή της συνάρτησης f .

Σκοπός λοιπόν είναι να επιλέξουμε τα βάρη αυτά w_i με τα οποία το νευρωνικό δίκτυο θα μπορεί να μετατρέψει τις εισερχόμενες μεταβλητές εισόδου στις επιθυμητές μεταβλητές εξόδου για την ικανοποίηση ενός συγκεκριμένου στόχου. Η επιλογή των βαρών γίνεται μέσα από μια διαδικασία εκπαίδευσης (training) του νευρωνικού δικτύου.

3.2 Αρχιτεκτονική νευρωνικών δικτύων

Υπάρχουν πολλές αρχιτεκτονικές νευρωνικών δικτύων. Εισαγωγικά θα αναφερθούμε στο multilayer perceptron-MLP νευρωνικό δίκτυο που θεωρείται το πιο γενικό και ευρέως χρησιμοποιούμενο.



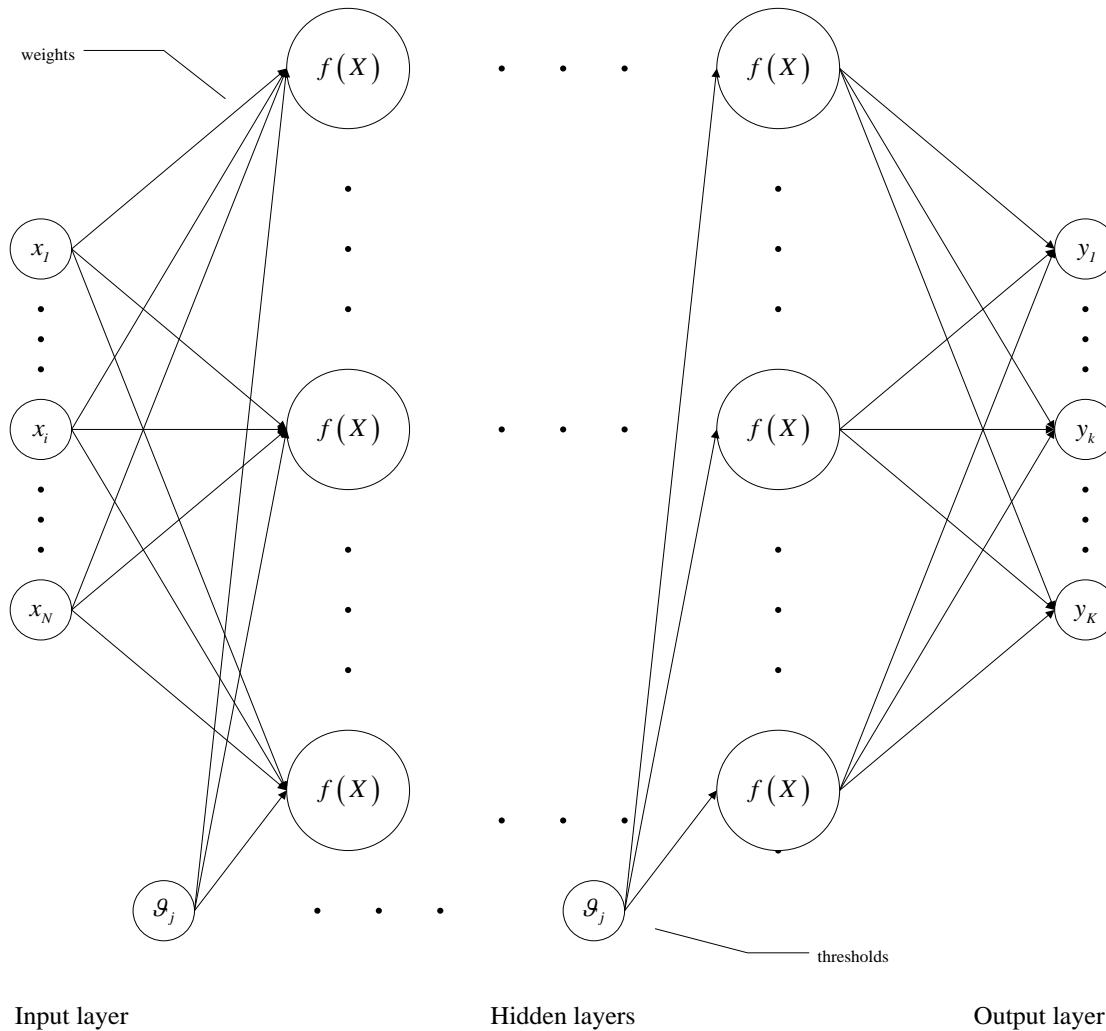
Σχήμα 3: Παράδειγμα απλού νευρώνα

Το πιο απλό στοιχείο ενός νευρωνικού δικτύου είναι ο νευρώνας (neuron). Κάθε νευρώνας μπορεί να συγκεντρώνει ένα μεγάλο αριθμό εισόδων, είτε αυτές είναι από το εξωτερικό περιβάλλον είτε από άλλους νευρώνες, πολλαπλασιασμένη κάθε μία από τις εισόδους με ένα καθορισμένο βάρος (weight). Στο άθροισμα αυτών των σταθμισμένων εισόδων προστίθεται ένα προσαρμοσμένο στο νευρώνα αυτό βάρος κατωφλίου (threshold or bias) και στη συνέχεια τροποποιείται μέσα από μια καθορισμένη συνάρτηση μεταφοράς (activation function) η οποία και αποφασίζει για την τελική έξοδο.

Μαθηματικά, η έξοδος ενός νευρώνα j με n εισόδους δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$y_j = f(X_j), \quad X_j = \theta_j + \sum_{i=1}^n x_i w_{ji}$$

όπου y_j είναι η έξοδος του νευρώνα σε μια βαθμίδα, $f(\cdot)$ είναι συνήθως η σιγμοειδής συνάρτηση¹, x_i είναι οι πιθανές εισοδοι στο νευρώνα, w_{ji} είναι τα βάρη που εφαρμόζονται στην κάθε είσοδο του νευρώνα και θ_j είναι το βάρος κατωφλίου.



Σχήμα 4: Παράδειγμα MLP νευρωνικού δικτύου

Πολλοί νευρώνες στη συνέχεια ομαδοποιούνται σε βαθμίδες (layers). Γενικά οι εισόδοι σε κάθε νευρώνα μιας βαθμίδας δημιουργούνται από τις εξόδους των νευρώνων των προηγούμενων βαθμίδων. Για την πρώτη βαθμίδα ή βαθμίδα εισόδου, οι εισόδοι προέρχονται από τα διάφορα “ερεθίσματα” του εξωτερικού περιβάλλοντος. Οι εξόδοι των νευρώνων μιας βαθμίδας συνδέονται με τις εισόδους των επόμενων βαθμίδων. Στην τελευταία βαθμίδα ή βαθμίδα εξόδου, οι εξόδοι απεικονίζονται στο περιβάλλον.

Πολλές βαθμίδες οργανώνονται σε ένα δίκτυο (neural network). Οι βαθμίδες που είναι μεταξύ της βαθμίδας εισόδου και της βαθμίδας εξόδου ονομάζονται κρυμμένες βαθμίδες (hidden layers). Ο αριθμός των νευρώνων στις βαθμίδες ποικίλει και δε χρειάζεται να είναι ο ίδιος σε κάθε μία από αυτές ενώ κατά γενικό κανόνα ο αριθμός των νευρώνων στις βαθμίδες εισόδου και εξόδου καθορίζεται από τον αριθμό των εισόδων και των εξόδων αντίστοιχα. Για παράδειγμα, ένα νευρωνικό δίκτυο με 10 εισόδους και 2 εξόδους θα έχει 10 νευρώνες στη βαθμίδα εισόδου και 2 νευρώνες στη βαθμίδα εξόδου. Αν επίσης έχει 2 κρυμμένες βαθμίδες θα μπορούσε να είναι 10 νευρώνες στην πρώτη κρυμμένη βαθμίδα και 5 νευρώνες στη δεύτερη κρυμμένη βαθμίδα.

Θα ασχοληθούμε με νευρωνικά δίκτυα που είναι πλήρως συνδεδεμένα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε νευρώνα μιας βαθμίδας, οι εισοδοί του προκύπτουν από τις εξόδους όλων των νευρώνων της προηγούμενης βαθμίδας ή όλων των εισόδων από το περιβάλλον αν πρόκειται για τη βαθμίδα εισόδου. Ταυτόχρονα η έξοδος κάθε νευρώνα μιας βαθμίδας συνδέεται με τις εισόδους όλων των νευρώνων της επόμενης βαθμίδας ή όλες τις εξόδους στο περιβάλλον αν πρόκειται για τη βαθμίδα εξόδου.

Μετά την επεξεργασία μιας ομάδας εισόδων από όλους τους νευρώνες σε όλες τις βαθμίδες προκύπτει η μία ή οι περισσότερες εξοδοί. Όταν το νευρωνικό δίκτυο βρίσκεται στο στάδιο της εκπαίδευσης τότε για κάθε ομάδα εισόδων θα υπάρχει και μια ομάδα επιθυμητών εξόδων (desired outputs or goals) που ο χρήστης έχει αποφασίσει ότι το νευρωνικό δίκτυο πρέπει να μάθει να παράγει, με την ίδια ή παρόμοια είσοδο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορες κλασσικές εκπαιδευτικές μεθόδους νευρωνικών δικτύων όπως π.χ. της οπισθόδρομης διάδοσης (back propagation), είτε μέσα από ένα γενετικό αλγόριθμο όπως θα δούμε πιο συγκεκριμένα στην εφαρμογή μας.

Θεωρητικά, κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης, το νευρωνικό δίκτυο θα μάθει να ξεχωρίζει τις εισόδους και να παράγει κάθε φορά εξόδους πλησιέστερες στις επιθυμητές ελαχιστοποιώντας την απόκλισή τους. Αν το κάνει σωστά θα έχουμε και αξιόλογα αποτελέσματα. Στη διαδρομή να καταφέρει να αντιστοιχίσει τις εισόδους με τις επιθυμητές εξόδους θα δημιουργήσει ένα γενικευμένο εσωτερικό μοντέλο επεξεργασίας της όποιας εισόδου.

3.3 RBF Δίκτυα

Το πρόβλημα της παρεμβολής

Το MLP (multilayer perceptron) επικεντρώνεται στο πρόβλημα της στοχαστικής προσέγγισης (stochastic approximation).

Το RBF (radial-basis function network) επεξεργάζεται το πρόβλημα της προσαρμογής καμπύλης (curve fitting) δηλαδή της προσέγγισης σε πολυδιάστατο χώρο (approximation in high-dimensional space). Η εκμάθηση στην περίπτωση αυτή είναι ισοδύναμη με την εύρεση μιας παρεμβαλλόμενης επιφάνειας στον πολυδιάστατο χώρο που ν' αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση στα δεδομένα εκπαίδευσης με βάση προεπιλεγμένα στατιστικά κριτήρια.

Το πρόβλημα της προσαρμογής καμπύλης ή της παρεμβολής μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

Έχοντας ένα σύνολο δεδομένων παραδειγμάτων $\{(\mathbf{x}_e, y_e)\}_{e=1}^N$ να βρεθεί η συνάρτηση $F: R^N \rightarrow R^1$ που ικανοποιεί τη συνθήκη παρεμβολής: $F(\mathbf{x}_e) = y_e$ για κάθε $e = 1, \dots, N$.

Radial-Basis συναρτήσεις²

Η τεχνική των radial-basis συναρτήσεων προτείνει την κατασκευή συναρτήσεων παρεμβολής F της ακόλουθης μορφής:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

όπου: $\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$ είναι ένα σύνολο μη γραμμικών radial-basis συναρτήσεων, \mathbf{x}_i είναι τα κέντρα των συναρτήσεων αυτών και $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδεια νόρμα.

Τα άγνωστα βάρη w_i μπορούν να βρεθούν λύνοντας την επόμενη γραμμική ισότητα πινάκων:

$$\mathbf{w} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}$$

όπου : \mathbf{w} είναι το διάνυσμα βαρών, \mathbf{y} είναι το διάνυσμα εξόδου και Φ είναι ο πίνακας των radial basis συναρτήσεων με

$$\Phi = \{ \varphi_{ei} / \varphi_{ei} = \varphi(\|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_i\|), (e, i) = (1, \dots, N) \}$$

Μερικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται είναι:

- *multiquadratics*: $\varphi(x) = (x^2 + c^2)^{1/2}$ για κάποιο $c > 0$
- *inverse multiquadratics*: $\varphi(x) = 1/(x^2 + c^2)^{1/2}$ για κάποιο $c > 0$
- *Gaussian*: $\varphi(x) = \exp(-x^2 / 2\sigma^2)$ για κάποιο $\sigma > 0$

Η πολυμεταβλητή (multivariate) συνάρτηση Gauss φέρει επίσης δύο σημαντικές ιδιότητες που την καθιστούν μία πολύ καλή επιλογή για την κατασκευή radial-basis συναρτήσεων : είναι αμετάβλητη κατά τη μεταφορά (translation) αλλά και κατά την περιστροφή (rotation).

Η συνάρτηση Gauss με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται και συνάρτηση Green:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 / 2\sigma_i^2)$$

3.4 Κανονικοποίηση RBF δικτύων

Το κανονικοποιημένο δίκτυο μοντελοποιεί τη συνάρτηση παρεμβολής F ως μια γραμμική υπέρθεση (γραμμικό σταθμισμένο άθροισμα) πολυμεταβλητών συναρτήσεων Gauss των οποίων ο αριθμός είναι ίσος με τον αριθμό των παραδειγμάτων για εκμάθηση N :

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \quad \text{ή} \quad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \exp\left(-\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 / 2\sigma_i^2\right)$$

όπου: w_i είναι τα άγνωστα βάρη.

Το κανονικοποιημένο δίκτυο εγγυάται τρία σημαντικά χαρακτηριστικά:

- έχει τη δυνατότητα γενικής προσέγγισης (universal approximator) που σημαίνει πως μπορεί να προσεγγίσει αρκετά καλά οποιαδήποτε πολυμεταβλητή συνεχή συνάρτηση σε ένα συγκεκριμένο, γνωστό χώρο, λαμβάνοντας υπόψη έναν ικανοποιητικά μεγάλο αριθμό σημείων
- έχει τη δυνατότητα της καλύτερης προσέγγισης (best approximation property) με την έννοια ότι για μια μη γραμμική συνάρτηση πάντα υπάρχει μια επιλογή συντελεστών που προσεγγίζουν τη συνάρτηση καλύτερα από κάθε άλλη επιλογή
- παράγει βέλτιστες λύσεις (optimal solutions) οι οποίες ελαχιστοποιούν τη διαδικασία υπολογισμού της απόκλισης της λύσης από την πραγματική της τιμή όπως αυτή δίνεται από τα παραδείγματα εκπαίδευσης.

3.5 Γενικευμένα RBF δίκτυα

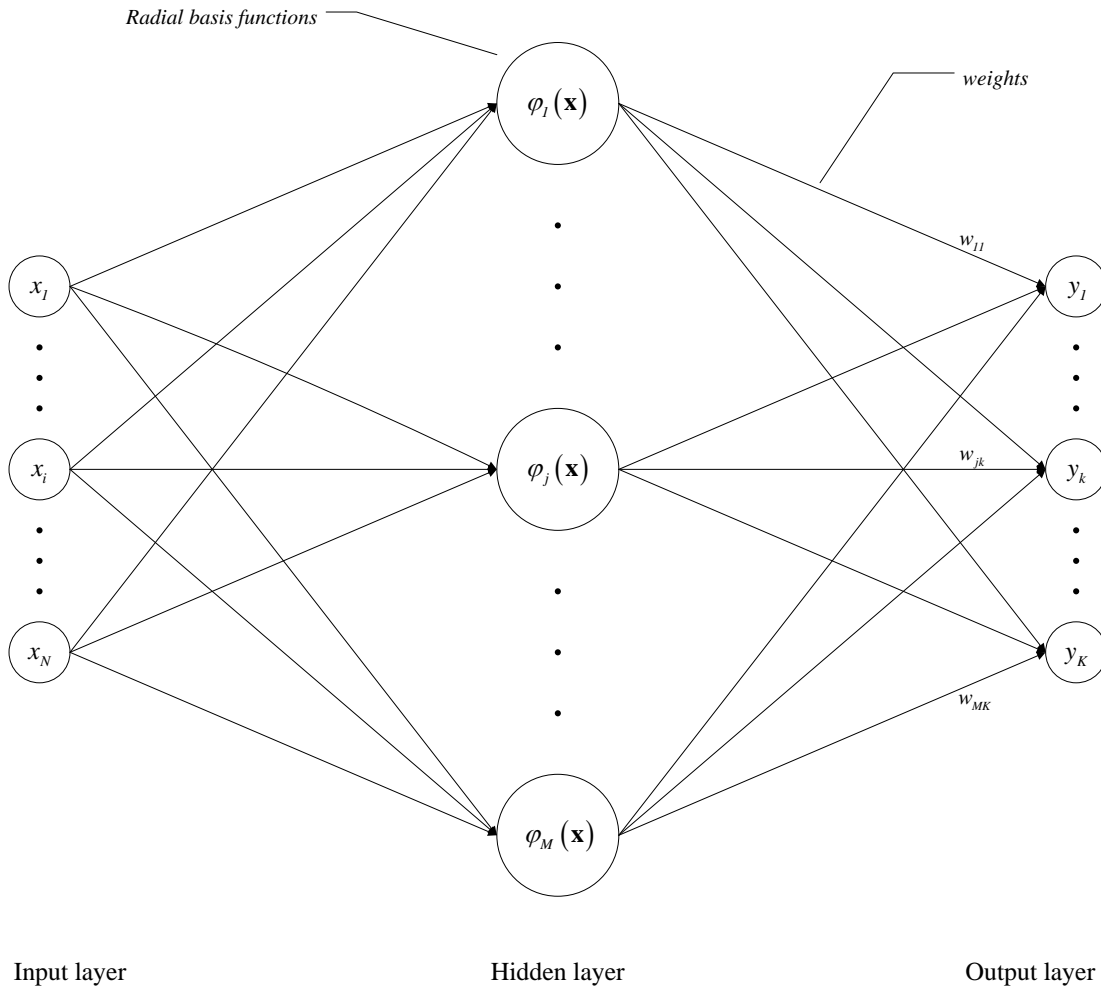
Η ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στον αριθμό των συναρτήσεων Green και τον αριθμό των παραδειγμάτων προς εκμάθηση συχνά δεν είναι πρακτικά δυνατή γιατί πιθανόν να απαιτεί το συνδυασμό ενός πολύ μεγάλου αριθμού radial basis συναρτήσεων όταν τα παραδείγματα προς εκμάθηση είναι πολλά.

Για να αποφύγουμε προβλήματα που οφείλονται στη μεγάλη διάσταση των πινάκων αυτών των συναρτήσεων, επιδιώκουμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα του δικτύου. Αυτό στην πράξη σημαίνει πως σκοπός μας είναι να βρούμε μια λύση που προσεγγίζει τη λύση του κανονικοποιημένου δικτύου.

Η δομή των RBF νευρωνικών δικτύων

Ένα RBF νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από ένα αριθμό νευρώνων οργανωμένων σε 3 βαθμίδες

- βαθμίδα εισόδου: η οποία διοχετεύει τα παραδείγματα εκμάθησης στις επόμενες βαθμίδες του δικτύου
- κρυμμένη βαθμίδα: η οποία εφαρμόζει ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό στις εισόδους και τις επεκτείνει στον συνήθως πολλών διαστάσεων “κρυμμένο” χώρο
- βαθμίδα εξόδου: η οποία εφαρμόζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό στις εισόδους που λαμβάνει από τον “κρυμμένο” χώρο



Σχήμα 5: Παράδειγμα RBF νευρωνικού δικτύου

Αξίζει να σημειωθεί πως τα RBF νευρωνικά δίκτυα συχνά αναφέρονται ως “μιας βαθμίδας” δίκτυα αφού έχουν μία μόνο κρυμμένη βαθμίδα.

Έχουμε λοιπόν μια ομάδα n δεδομένων σημείων σε ένα πολυδιάστατο χώρο τέτοια ώστε για κάθε N -διάστασης διάνυσμα εισόδου $\mathbf{x}^p = \{x_i^p : i = 1, \dots, N\}$ υπάρχει και αντίστοιχη K -

διάστασης επιθυμητή έξοδος $\mathbf{d}^p = \{d_k^p : k = 1, \dots, K\}$. Οι έξοδοι αυτοί γενικά αποδίδονται από κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις $g_k(\mathbf{x})$ συνοδευόμενες από τυχαίο θόρυβο. Στόχος είναι να προσεγγίσουμε τις $g_k(\mathbf{x})$ με συναρτήσεις $y_k(\mathbf{x})$ της μορφής

$$y_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^M w_{jk} \varphi_j(\mathbf{x})$$

όπου: M ($< n$) είναι ο αριθμός των radial basis συναρτήσεων.

Θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση των Gaussian radial basis συναρτήσεων με

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

στις οποίες έχουμε τα κέντρα $\{\mathbf{c}_j\}$ και τις διασπορές $\{\sigma_j\}$. Προφανώς λοιπόν οδηγούμαστε στην ανάπτυξη μιας διαδικασίας εύρεσης των κατάλληλων τιμών για τα M , $\{w_{jk}\}$, $\{c_{ij}\}$ και $\{\sigma_j\}$.

Στη διαδικασία προσπέλασης από την κρυμμένη βαθμίδα προς τη βαθμίδα εξόδου, το δίκτυο συμπεριφέρεται σαν ένα πρόσθιας δομής MLP δίκτυο, με το σταθμισμένο άθροισμα των εξόδων των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας να αποτελεί τη συνάρτηση μεταφοράς των νευρώνων της βαθμίδας εξόδου η οποία εξαρτάται από τα βάρη $\{w_{jk}\}$. Η συνάρτηση μεταφοράς των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας είναι οι radial basis συναρτήσεις $\varphi_j(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j, \sigma_j)$, που εξαρτώνται από τα βάρη $\{c_{ij}, \sigma_j\}$ και τις εισόδους $\{x_i\}$.

3.6 RBF δίκτυα έναντι MLP δικτύων

Ομοιότητες

- Τα RBF δίκτυα όπως και τα MLP είναι βαθμωτά πρόσθιας δομής νευρωνικά δίκτυα.
- Είναι αποδεδειγμένα και τα δύο εργαλεία γενικής προσέγγισης (universal approximators).

Δεν αποτελεί έκπληξη λοιπόν το γεγονός πως χρησιμοποιούνται σε παρόμοιες εφαρμογές (classification problems, function approximations) και υπάρχει πάντα ένα RBF νευρωνικό δίκτυο ικανό να μιμηθεί ένα συγκεκριμένο MLP δίκτυο, ή το αντίθετο. Ωστόσο τα δύο δίκτυα διαφέρουν μεταξύ τους σε μερικά σημαντικά σημεία.

Διαφορές

- Το RBF δίκτυο έχει μόνο μία κρυμμένη βαθμίδα, ενώ το MLP μπορεί να έχει μία ή και περισσότερες κρυμμένες βαθμίδες, ανάλογα με την εφαρμογή.
- Τα RBF δίκτυα είναι γενικά πλήρως συνδεδεμένα ενώ είναι σύνηθες τα MLP να είναι μερικώς συνδεδεμένα.
- Στους νευρώνες της κρυμμένης βαθμίδας του RBF η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη γραμμική ενώ στη βαθμίδα εξόδου είναι γραμμική. Στις κρυμμένες βαθμίδες και την εξωτερική βαθμίδα του MLP δικτύου οι νευρώνες φέρουν μη γραμμικές συναρτήσεις μεταφοράς.
- Επίσης οι νευρώνες στις κρυμμένες βαθμίδες του MLP δικτύου χρησιμοποιούν τουλάχιστον κοινή - αν όχι την ίδια - συνάρτηση μεταφοράς (σιγμοειδής συνάρτηση), ενώ κάθε νευρώνας του RBF χρησιμοποιεί διαφορετική (παραμετρικές Gaussian συναρτήσεις με διαφορετικά κέντρα και διασπορές).
- Οι συναρτήσεις μεταφοράς του RBF δικτύου υπολογίζουν την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των εισόδων και των κέντρων των Gaussian συναρτήσεων, ενώ οι συναρτήσεις μεταφοράς του MLP υπολογίζουν το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των εισόδων και των βαρών.
- Το MLP δίκτυο οδηγεί σε γενικές προσεγγίσεις (global approximations), ενώ το RBF σε τοπικές προσεγγίσεις (local approximations).

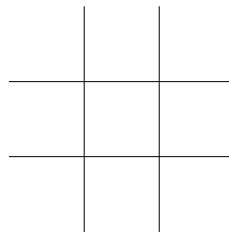
Γενικά, στην απεικόνιση μη γραμμικών συναρτήσεων (non-linear input-output mapping), τα RBF νευρωνικά δίκτυα μπορεί να εκπαιδεύονται πιο γρήγορα, τα MLP όμως απαιτούν πολύ μικρότερο αριθμό παραμέτρων για την επίτευξη της ίδιας ακρίβειας.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή στο παίγνιο της τρίλιζας

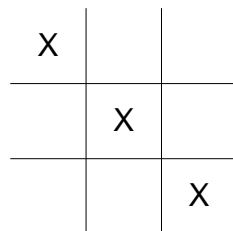
4.1 Το παίγνιο της τρίλιζας

Η τρίλιζα είναι ένα πολύ γνωστό παιχνίδι, ωστόσο για λόγους πληρότητας θα αναφέρουμε τα βασικά του χαρακτηριστικά. Έχουμε ένα τρία επί τρία πλέγμα (grid) που αποτελείται από εννέα διαδοχικές θέσεις όπως φαίνεται στο σχήμα:

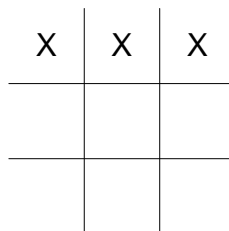


Σχήμα 6: Πλέγμα τρίλιζας

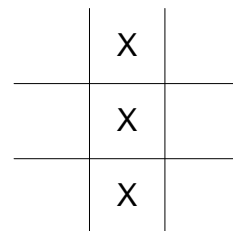
Υπάρχουν δύο αντίπαλοι παίκτες που παίζουν εναλλάξ. Ο ένας τοποθετεί το σύμβολο “X” σε κάποια από τις θέσεις και ο άλλος το σύμβολο “O”. Ο παίκτης με το σύμβολο “X” παίζει πρώτος. Σκοπός των παικτών είναι να σχηματίσουν μια συνεχόμενη τριάδα του συμβόλου τους με έναν από τους δυνατούς τρόπους, οριζόντια, κάθετα ή διαγώνια.



a



b



c

Σχήμα 7: Παραδείγματα τρίλιζας
a. Διαγώνια b. Οριζόντια c. Κάθετη

Το αποτέλεσμα είναι νίκη (win) γι’ αυτόν που θα το καταφέρει και ήττα (loss) για τον αντίπαλο. Στην περίπτωση που δεν επιτυγχάνεται νίκη οι παίκτες περιορίζονται στην ισοπαλία (draw) αποφεύγοντας έτσι και την ήττα. Αποδεικνύεται πως ο δεύτερος παίκτης μπορεί να αναγκάσει τουλάχιστον σε ισοπαλία τον πρώτο.

X	O	
X	X	X
	O	O
a		

X	X	O
	X	O
		O
b		

O	X	X
X	O	O
X	O	X
c		

Σχήμα 8: Παραδείγματα έκβασης παιχνιδιού για τον παίκτη X
a. Νίκη b. Ήττα c. Ισοπαλία

Σκοπός λοιπόν είναι να γίνει μια δομή ενός συστήματος που να δέχεται σαν είσοδο ένα στιγμιότυπο (pattern) της τρίλιζας και να δίνει σαν ανταπόκριση την επόμενη κίνηση. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο νευρωνικού δικτύου.

4.2 Μοντελοποίηση του νευρωνικού δικτύου

Το νευρωνικό δίκτυο είναι αυτό που θα παίζει το ρόλο των παικτών. Στην πραγματικότητα ο κάθε παίκτης αντιπροσωπεύεται και από ένα ξεχωριστό νευρωνικό δίκτυο και η στρατηγική του ορίζεται από τα βάρη του αντίστοιχου δικτύου.

Στην προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιούμε ένα RBF νευρωνικό δίκτυο με διάνυσμα εισόδου $x_i, i = 1, \dots, N$ και $N = 9$. Οι εννέα είσοδοι αντιστοιχούν στις εννέα διαφορετικές θέσεις του πλέγματος της τρίλιζας και είναι κανονικοποιημένες στο διάστημα $[-1.0, 1.0]$. Συγκεκριμένα υπάρχει η εξής αντιστοίχιση:

Κενή θέση 0.0

Σύμβολο X 1.0

Σύμβολο O -1.0

Προφανώς λοιπόν η κωδικοποίηση του κενού πλέγματος της τρίλιζας αντιστοιχεί στο διάνυσμα $[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$, ενώ στη συνέχεια δίνονται ενδεικτικά οι κωδικοποιήσεις των στιγμιότυπων του Σχήματος 8:

a. $[1.0, -1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.0, -1.0, -1.0]$

b. $[1.0, 1.0, -1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 0.0, 0.0, -1.0]$

c. $[-1.0, 1.0, 1.0, 1.0, -1.0, -1.0, 1.0, -1.0, 1.0]$

Ο αριθμός των νευρώνων στην κρυμμένη βαθμίδα επιλέγεται αυθαίρετα. Τέλος, έχουμε ένα διάνυσμα εξόδου $y_k, k=1, \dots, K$ και $K=9$. Ομοίως κι εδώ οι εννέα έξοδοι αντιστοιχούν στις εννέα διαφορετικές θέσεις του πλέγματος και είναι της μορφής

$$y_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^M w_{jk} \varphi_j(\mathbf{x})$$

όπου w_{jk} το βάρος μεταξύ του νευρώνα j και της εξόδου k ,

ενώ επιλέχθηκαν οι Gaussian radial basis συναρτήσεις με

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

όπου \mathbf{c}_j τα κέντρα και σ_j η κοινή διασπορά στο νευρώνα j αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 9 δίνεται η δομή του δικτύου που χρησιμοποιήθηκε.

Η επόμενη κίνηση επιλέγεται από την κενή θέση στο πλέγμα με τη μέγιστη τιμή εξόδου. Αυτό εγγυάται επιτρεπτές μόνο κινήσεις. Οι έξοδοι των κόμβων που σχετίζονται με θέσεις που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί απλά αγνοούνται. Επομένως αν υποθέσουμε πως η είσοδος του νευρωνικού δικτύου αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο

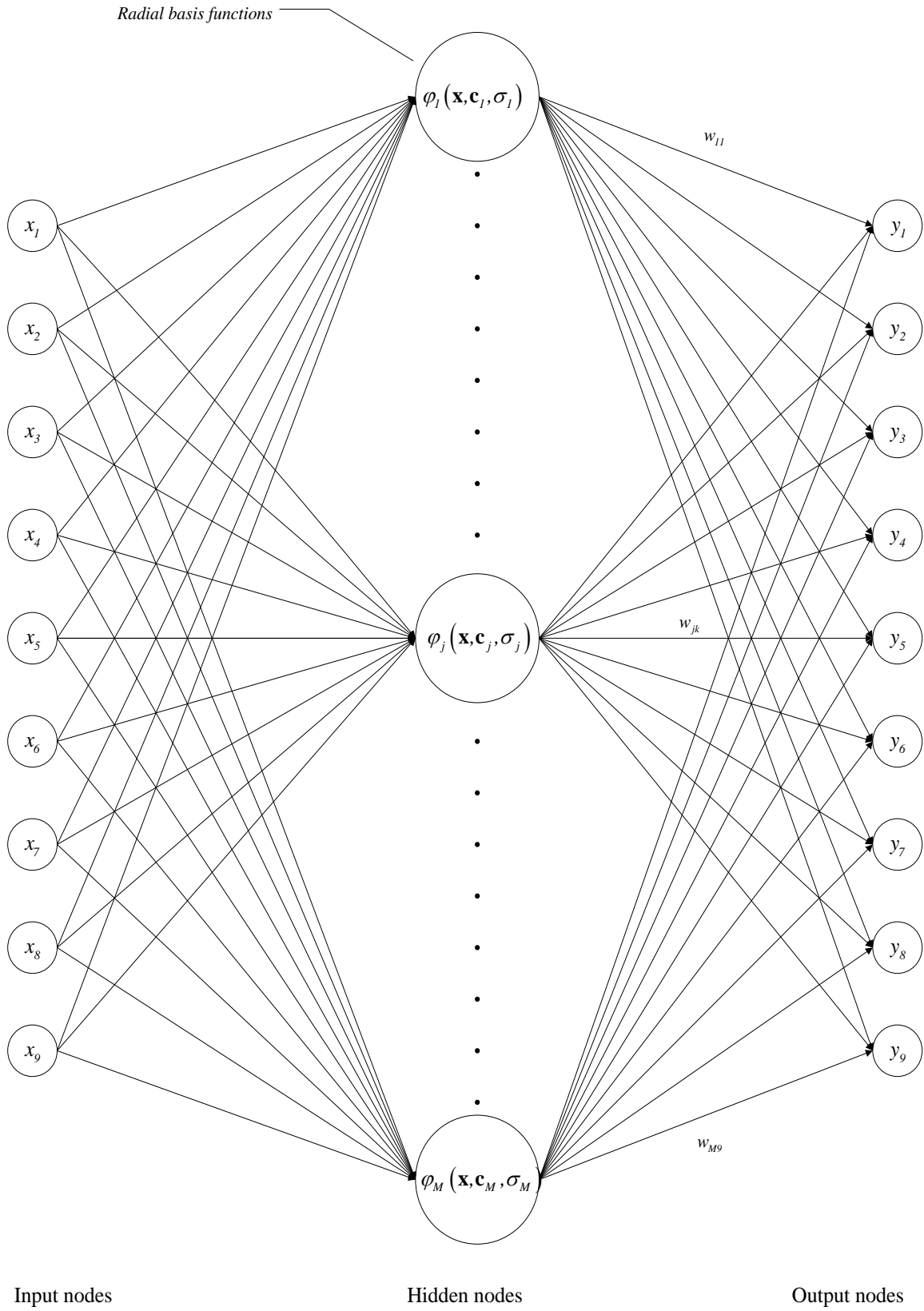
Ο	Χ	
Χ	Ο	

ή

$[-1.0, 1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$

και η αντίστοιχη έξοδος είναι

$[0.10431, -0.06813, -0.09616, 0.06320, 0.01341, -0.07778, 0.09619, -0.06071, 0.034027],$



Σχήμα 9: Το RBF νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε

αρχικά προσανατολιζόμαστε στην πρώτη θέση του πλέγματος αφού στη θέση αυτή έχουμε και τη μέγιστη έξοδο. Επειδή όμως η θέση αυτή είναι κατειλημμένη, στρεφόμαστε στην αμέσως επόμενη μεγαλύτερη έξοδο που είναι η έβδομη και αντιστοιχεί σε κενή θέση πλέγματος. Έτσι το επόμενο στιγμιότυπο είναι το

Ο	Χ	
Χ	Ο	
Χ		

ή $[-1.0, 1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0]$

Αυτό που μένει τελικά είναι να αναζητηθεί ο καλύτερος συνδυασμός βαρών του δικτύου ώστε να έχουμε σωστές ανταποκρίσεις στο παίγνιο της τρίλιζας.

4.3 Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου

Το πρόβλημα που ανακύπτει λοιπόν είναι η μέθοδος εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου, του παίκτη. Ο απώτερος στόχος είναι να μάθει ο παίκτης το παίγνιο της τρίλιζας κατά τρόπο βέλτιστο χωρίς να υπάρχει προηγούμενη γνώση και στρατηγική.

Η εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου επιτυγχάνεται μέσω ενός γενετικού αλγορίθμου. Έχουμε λοιπόν τη σύσταση ενός αρχικού πληθυσμού (*class population*) που αποτελείται από ένα συγκεκριμένο αριθμό ατόμων (*class person*). Το κάθε άτομο έχει ένα γενετικό κώδικα (*class dna*) που οι τιμές του αντιστοιχούν στα βάρη του νευρωνικού δικτύου. Σύμφωνα με το RBF νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε, αν υποθέσουμε πως είναι n ο αριθμός των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας, το μήκος του γενετικού κώδικα του κάθε ατόμου είναι $19 * n$. Αναλυτικότερα η τιμή αυτή προκύπτει από τους $9 * n$ σταθμιστές w , τα $9 * n$ κέντρα c και τις n διασπορές σ .

Τα βάρη παίρνουν τυχαίες τιμές ομοιόμορφα κατανεμημένες σε συγκεκριμένα διαστήματα. Αναλυτικά, τα κέντρα c στο διάστημα $[-1.0, 1.0]$, επειδή και η είσοδος είναι κανονικοποιημένη στο ίδιο διάστημα. Αυτό εγγυάται τη δυνατότητα ενεργοποίησης όλων των νευρώνων. Οι διασπορές σ στο διάστημα $[0.0, 1.0]$, επειδή θέλουμε να είναι μικρή η περιοχή ενεργοποίησης των νευρώνων. Με τον τρόπο αυτό εκμεταλλευόμαστε στο μέγιστο την ιδιότητα των RBF δικτύων να ενεργοποιούνται μερικοί νευρώνες σε μια συγκεκριμένη είσοδο. Ουσιαστικά κάθε νευρώνας ανταποκρίνεται μόνο σε μια υποδιαίρεση του συνόλου των εισόδων. Αν η είσοδος βρίσκεται πολύ μακριά από το κέντρο του νευρώνα και με μικρή διασπορά, η έξοδος που δίνει

είναι πολύ μικρή που να θεωρείται αμελητέα. Οι σταθμιστές w στο διάστημα $[-2.0, 2.0]$, επειδή επιθυμούμε ευρύ πεδίο λύσεων αυξάνοντας την πιθανότητα σύγκλισης του δικτύου.

Για τη λύση του παιγνίου έχουν επιλεγθεί τρεις διαφορετικές κατευθύνσεις.

1^η περίπτωση

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε έναν “προπονητή” τον οποίο αντιμετωπίζει ο κάθε παίκτης. Το ρόλο του “προπονητή” τον παίζει ένα πρόγραμμα λίγων γραμμών που ακολουθεί τους βασικούς κανόνες της τρίλιζας. Οι παίκτες αποτιμώνται από τις εκβάσεις των παιχνιδιών ενάντια στον “προπονητή” ενώ η εκπαίδευση τερματίζεται όταν ένας παίκτης καταφέρει μόνο νίκες.

2^η περίπτωση

Στην περίπτωση αυτή επιδιώκεται να μάθει κάποιος παίκτης τις επιθυμητές ανταποκρίσεις σε συγκεκριμένα στιγμιότυπα. Από τις εκάστοτε ανταποκρίσεις των παικτών γίνεται και η αποτίμησή τους για να ακολουθήσει το στάδιο της επιλογής γονέων. Η εκπαίδευση τερματίζεται όταν ένας παίκτης δώσει όλες τις σωστές ανταποκρίσεις.

3^η περίπτωση

Στην τρίτη περίπτωση επιχειρούμε να καταλήξουμε σε μια λύση με διεξαγωγή πρωταθλήματος μεταξύ των παικτών. Επιλέγεται κάθε φορά ένας παίκτης του πληθυσμού και αντιμετωπίζει όλους τους άλλους παίκτες. Αυτό γίνεται για όλο τον πληθυσμό. Η αποτίμηση των παικτών βασίζεται στις εκβάσεις των παιχνιδιών αυτών. Ο τερματισμός της εκπαίδευσης προκύπτει είτε με σύγκριση των ανταποκρίσεων των παικτών με τις επιθυμητές της δεύτερης περίπτωσης, είτε με σύγκριση των παικτών με τον “προπονητή” της πρώτης περίπτωσης.

Ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που ακολουθήσαμε και σύμφωνα με την αντίστοιχη fitness function που χρησιμοποιήθηκε, ελέγχουμε πάντα αν η απόκλιση από το βέλτιστο για κάποιο άτομο είναι μηδενική. Στην περίπτωση αυτή τερματίζεται η διαδικασία της εκπαίδευσης. Σε διαφορετική περίπτωση έπεται το εξελικτικό στάδιο.

Ελιτισμός

Επιλέγεται από το χρήστη ένας συγκεκριμένος αριθμός καλών παικτών που θα συνεχίσουν στην επόμενη γενιά ως έχουν. Αυτό σημαίνει πως δε γίνεται καμία αλλαγή στο γενετικό τους κώδικα.

Επιλογή των παικτών (γονέων)

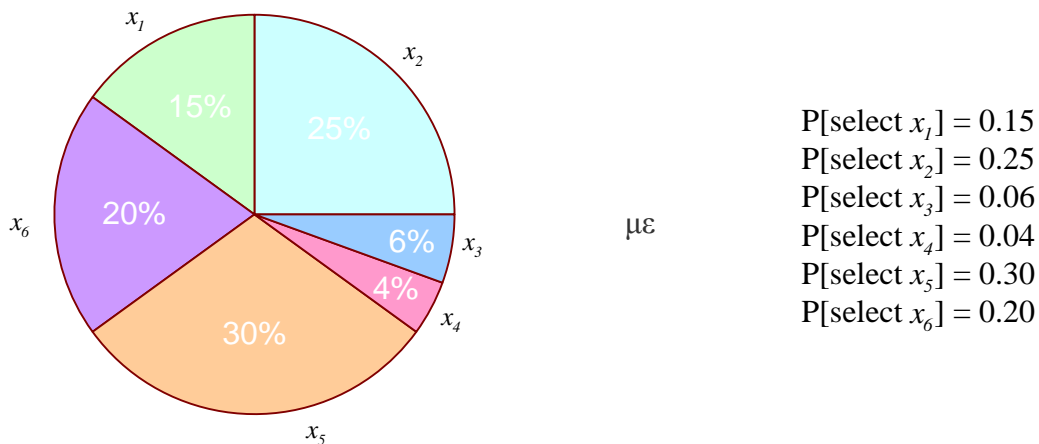
Επιλέγονται οι παίκτες του παρόντος πληθυσμού που θα χρησιμοποιηθούν για γονείς της επόμενης γενιάς.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι επιλογής. Ένας από τους απλούστερους αλλά και συνηθέστερους είναι αυτός που προτείνει ο *J.Holland* και ονομάζεται *fitness-proportionate selection*. Τα άτομα επιλέγονται με μία πιθανότητα ανάλογη της σχετικής προσαρμοστικότητάς τους. Αυτό εξασφαλίζει ότι ο αναμενόμενος αριθμός των φορών που θα επιλεγεί ένα άτομο είναι συνάρτηση της συμπεριφοράς του ατόμου σε σχέση με το σύνολο του πληθυσμού. Έτσι άτομα με υψηλή προσαρμοστικότητα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγούν για αναπαραγωγή, ενώ αυτά με χαμηλή προσαρμοστικότητα τείνουν να εξαφανιστούν.

Αν λοιπόν για παράδειγμα είχαμε 6 άτομα από τα οποία έπρεπε να επιλέξουμε γονείς, με *fitness function*

$$[f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6)] = [15, 25, 6, 4, 30, 20]$$

αντίστοιχα, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα-πίτας όπου το κάθε κομμάτι αυτού αντιστοιχεί πια στην πιθανότητα επιλογής του ατόμου για γονέα.



Σχήμα 10: Παράδειγμα *fitness-proportionate selection*

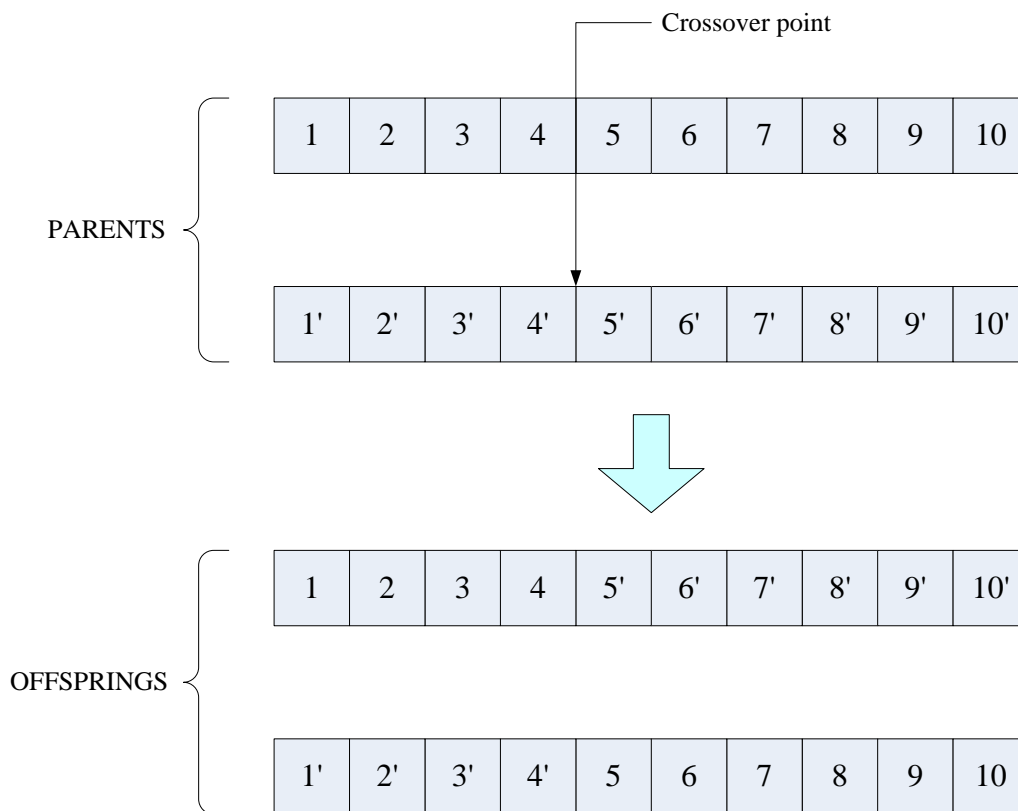
Οι εναπομείναντες παίκτες, αυτοί δηλαδή που έμειναν εκτός πληθυσμού κατά το στάδιο της επιλογής, πεθαίνουν και αντικαθίστανται από νεογνά των επιλεγμένων μέσα από το στάδιο της αναπαραγωγής.

Διασταύρωση

Το στάδιο της αναπαραγωγής με τη μέθοδο της διασταύρωσης. Θεωρούμε πως η πιθανότητα της διασταύρωσης είναι $p_{cross} = 100\%$. Αυτό στην πράξη σημαίνει πως όλα τα άτομα του νέου πληθυσμού, πέραν αυτών που προέκυψαν στη διαδικασία του ελιτισμού, δημιουργούνται από τη διασταύρωση των επιλεγέντων γονέων.

Εκτελείται στοχαστική διασταύρωση ενός σημείου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή επιλέγεται τυχαία ένα κοινό σημείο στο γενετικό κώδικα δύο γονέων. Οι κώδικες και των δύο χωρίζονται σε δύο διαφορετικά τμήματα. Αυτό επιτυγχάνεται με την τυχαία επιλογή ενός ακέραιου μεταξύ του αριθμού 1 και του μήκους του γενετικού κώδικα. Στη συνέχεια “γεννώνται” δύο νέα άτομα - οι απόγονοι - με γενετικό κώδικα που δημιουργείται από το συνδυασμό των τμημάτων του γενετικού κώδικα των γονέων όπως αυτά προέκυψαν από το διαχωρισμό.

Συγκεκριμένα, καθώς φαίνεται και στο Σχήμα 11 παρακάτω, ο γενετικός κώδικας του ενός εκ των δύο απογόνων έχει στο πρώτο του τμήμα το πρώτο τμήμα του γενετικού κώδικα του πρώτου γονέα και στο δεύτερο τμήμα του το δεύτερο τμήμα του γενετικού κώδικα του δεύτερου γονέα. Ο άλλος απόγονος έχει στο πρώτο του τμήμα το πρώτο τμήμα του γενετικού κώδικα του δεύτερου γονέα και στο δεύτερο τμήμα του το δεύτερο τμήμα του γενετικού κώδικα του πρώτου γονέα.



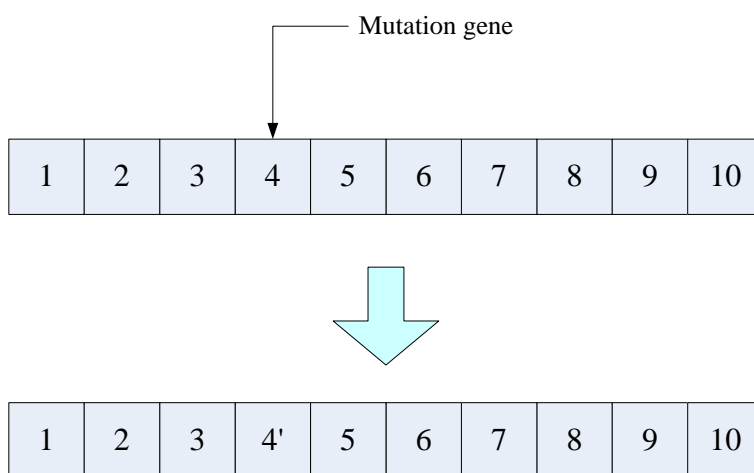
Σχήμα 11: Παράδειγμα αναπαραγωγής με τη μέθοδο της διασταύρωσης σε ένα σημείο

Οι γονείς είναι σε αριθμό όσοι και στον αρχικό πληθυσμό και κατατάσσονται σύμφωνα με τη σειρά επιλογής τους. Η δε διασταύρωση εκδηλώνεται μεταξύ του πρώτου με τον τελευταίο, του δεύτερου με τον προτελευταίο κ.ο.κ. Κάθε διασταύρωση δίνει δύο νέα άτομα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία τόσων απογόνων όσων και οι επιλεγμένοι γονείς. Στην πράξη, το πλήθος των απογόνων που ενσωματώνονται τελικά στο νέο πληθυσμό εξαρτάται άμεσα από τον

ελιτισμό που προηγήθηκε. Οι παραπάνω απόγονοι που προκύπτουν από τις διασταυρώσεις των γονέων του τρέχοντος πληθυσμού απλά αγνοούνται. Έτσι τελικά έχουμε τη δημιουργία ενός νέου πληθυσμού ίσο σε αριθμό με τον αρχικό.

Μετάλλαξη

Επέρχεται μετάλλαξη με μια πολύ μικρή πιθανότητα στα νεογνά. Αυτό επιτυγχάνεται με την αλλαγή κάποιων γονιδίων του γονότυπού τους με νέες τυχαίες ομοιόμορφα κατανομημένες τιμές. Στην πράξη λοιπόν έχουμε το γενετικό κώδικα ενός ατόμου και ελέγχουμε για κάθε γονίδιο αν θα αντικατασταθεί με ένα νέο σύμφωνα με την προεπιλεγμένη πιθανότητα μετάλλαξης.



Σχήμα 12: Παράδειγμα μετάλλαξης

Στο Σχήμα 12 δίνεται ένα παράδειγμα μετάλλαξης στο τέταρτο γονίδιο του γενετικού κώδικα.

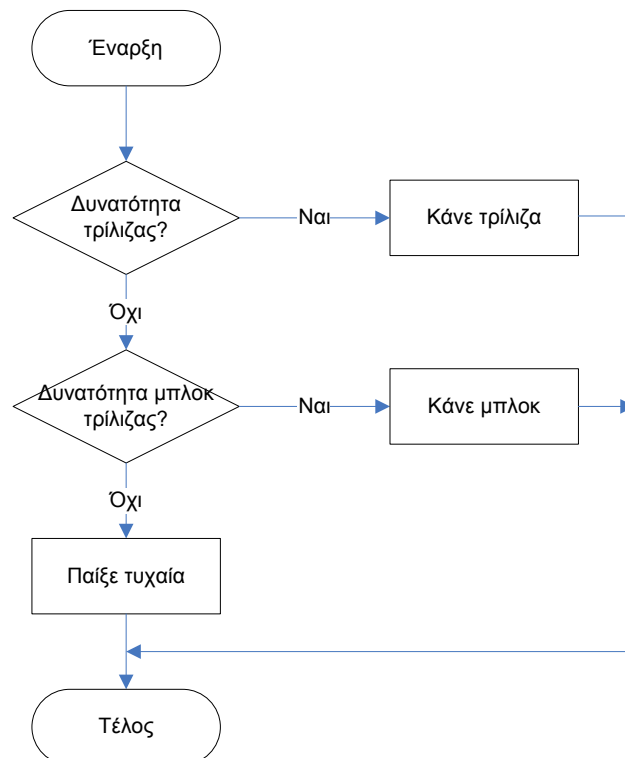
Κεφάλαιο 5

Περιγραφή κώδικα

Για την εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου έχει υλοποιηθεί ένας κώδικας σε γλώσσα C++. Στο πρώτο μέρος της ενότητας αυτής θα ασχοληθούμε με την περιγραφή των βοηθητικών προγραμμάτων που χρησιμοποιούνται.

5.1 Triliza

Το πρόγραμμα αυτό κωδικοποιεί ορισμένες βασικές κινήσεις στο παίγνιο τις τρίλιζας, τις οποίες υλοποιεί ο “προπονητής” προκειμένου να αντιμετωπίσει τους παίκτες. Πιο συγκεκριμένα ο “προπονητής” επιδιώκει με προτεραιότητα να επιτύχει νίκη, αλλιώς να αποφύγει ήττα, διαφορετικά παίζει τυχαία. Στο τελευταίο αυτό στάδιο ο “προπονητής” ελέγχει αν υπάρχει κάποιο ‘Ο’ σε σειρά με δύο κενές θέσεις και επιλέγει τυχαία μία εκ των δύο. Αν όχι, η τυχαία επιλογή γίνεται μεταξύ όλων των κενών θέσεων στο πλέγμα της τρίλιζας. Στη συνέχεια δίνεται το λογικό διάγραμμα του κώδικα.



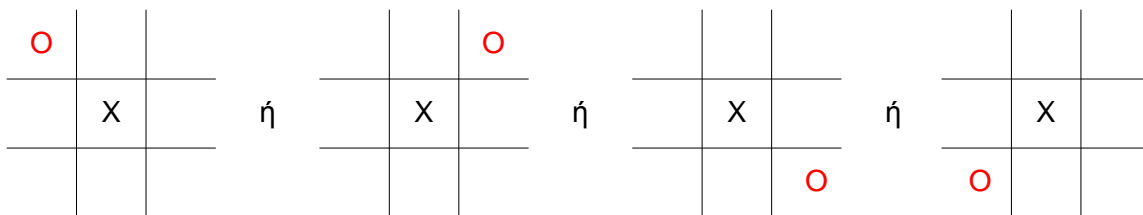
Σχήμα 13: Διάγραμμα ροής της υπορουτίνας triliza

Το πρόγραμμα της τρίλιζας λοιπόν δέχεται σαν όρισμα ένα στιγμιότυπο του παιχνιδιού και επιστρέφει τη θέση της επόμενης βέλτιστης (υπό των βασικών κανόνων) κίνησης.

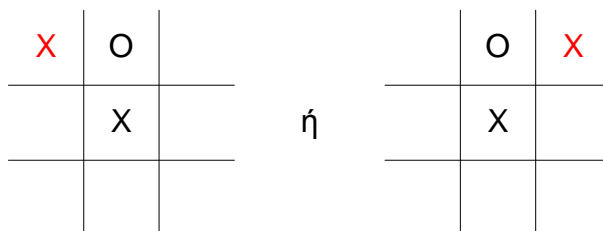
5.2 Symmetries check

Το πρόγραμμα αυτό επιδιώκει να εντοπίσει κάποιες από τις υπάρχουσες συμμετρίες στο πλέγμα της τρίλιζας σε βάθος τεσσάρων κινήσεων από τις εννέα συνολικά.

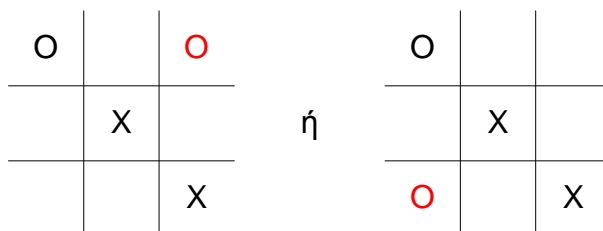
Οι περιπτώσεις συμμετρίας που ανιχνεύουμε είναι τρεις και θα αναφέρονται ως: “κεντρική”, “κάθετη” και “διαγώνια” (Σχήμα 14,15,16).



Σχήμα 14: Παράδειγμα κεντρικής συμμετρίας



Σχήμα 15: Παράδειγμα κάθετης συμμετρίας

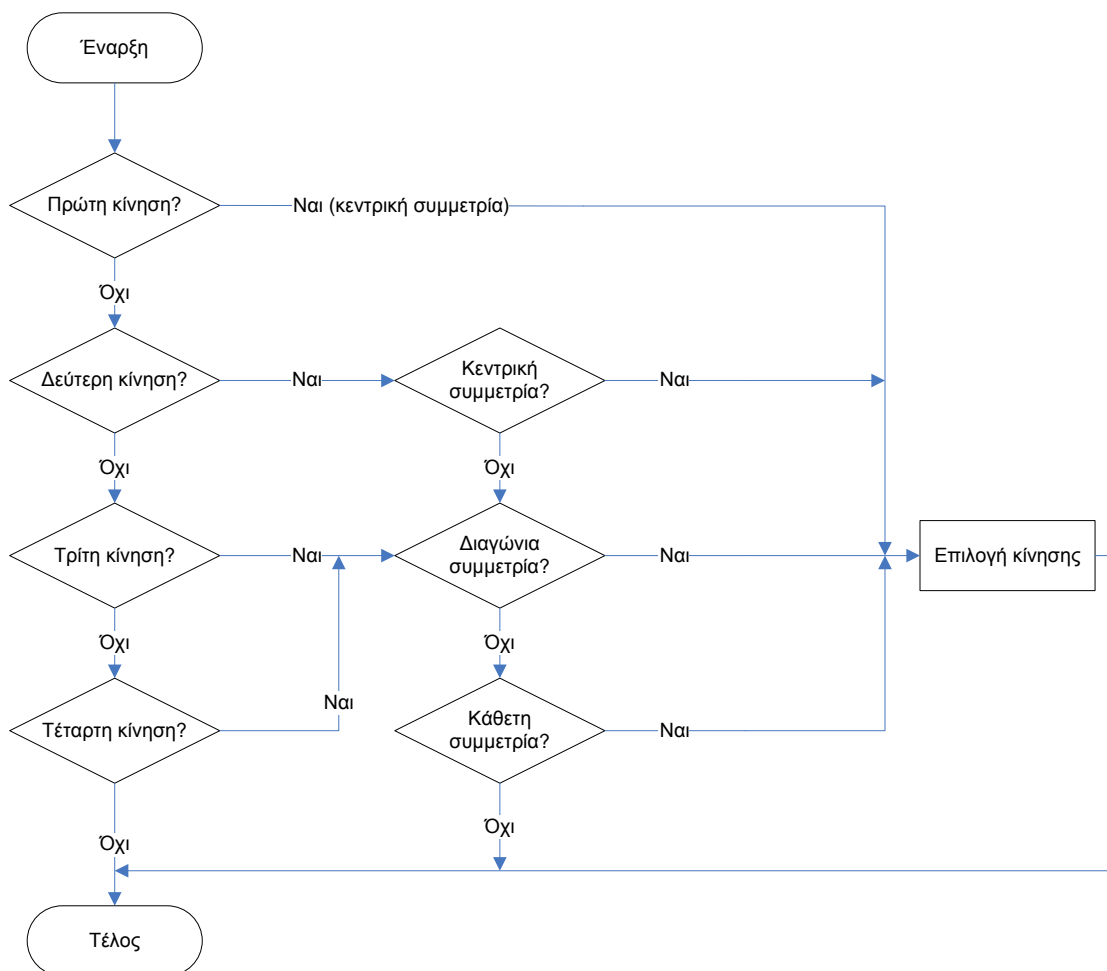


Σχήμα 16: Παράδειγμα διαγώνιας συμμετρίας

Ανάλογα με την κίνηση στην οποία βρισκόμαστε και δεδομένου ότι μέχρι και την τέταρτη κίνηση το πλέγμα της τρίλιζας διαμορφώνεται λαμβάνοντας υπόψη τις υπάρχουσες συμμετρίες έχουμε κάνει μια απλή κωδικοποίηση για τις συμμετρίες αυτές. Έτσι όταν ένας παίκτης επιλέξει μια κίνηση ελέγχουμε πρώτα για τυχόν συμμετρικές ως προς αυτήν και στη συνέχεια επιλέγουμε

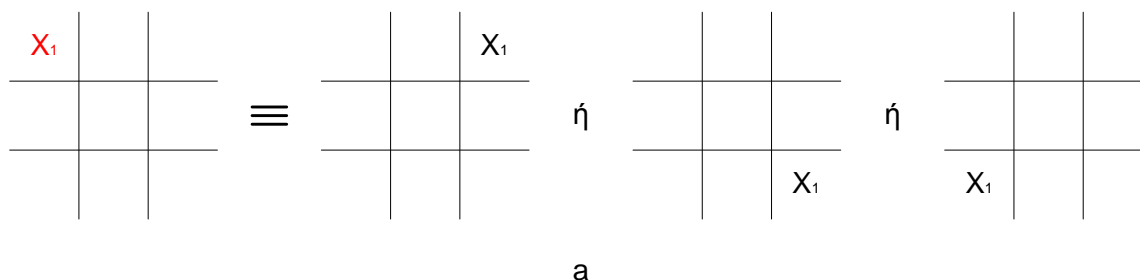
μία, την ίδια πάντα, από αυτές. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε πολύ μικρότερο αριθμό των στιγμιότυπων που αντικρίζει και πρέπει να μάθει τελικά το νευρωνικό δίκτυο.

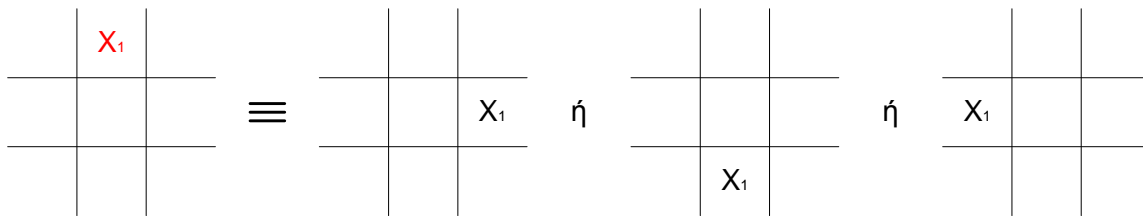
Αμέσως παρακάτω δίνεται το λογικό διάγραμμα του κώδικα και η ανάλυσή του.



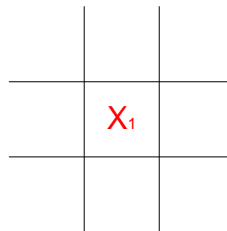
Σχήμα 17: Διάγραμμα ροής της υπορουτίνας *symmetries_check*

Στην πρώτη κίνηση λοιπόν όταν το πλέγμα της τρύλιζας είναι κενό η συμμετρία είναι κεντρική. Οι πιθανές κινήσεις λαμβάνοντας υπόψη τις συμμετρίες είναι τρεις και είναι στις θέσεις 1^η, 2^η και 5^η (από αριστερά προς τα δεξιά).





b

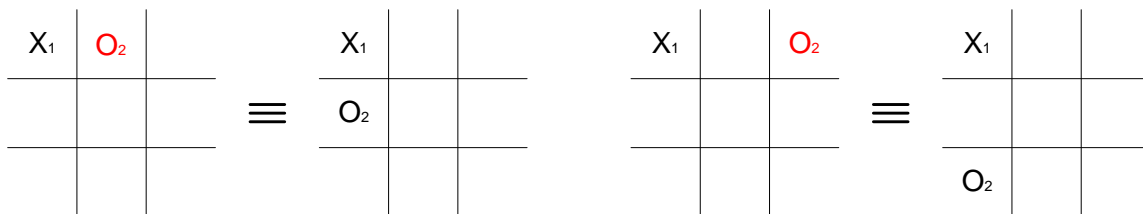


c

Σχήμα 18: Πιθανές πρώτες κινήσεις

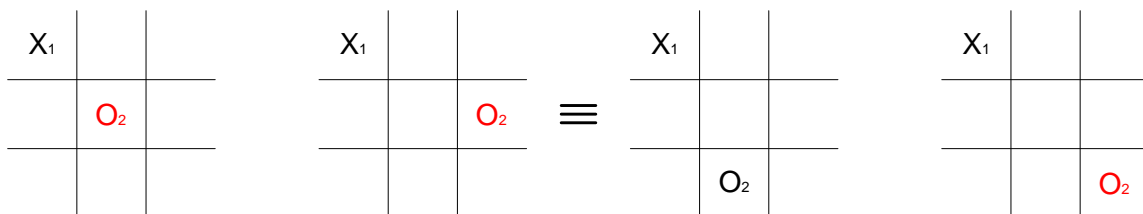
Στη δεύτερη κίνηση έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 1^η θέση (Σχήμα 18a) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η, 5^η, 6^η και 9^η.



a

b



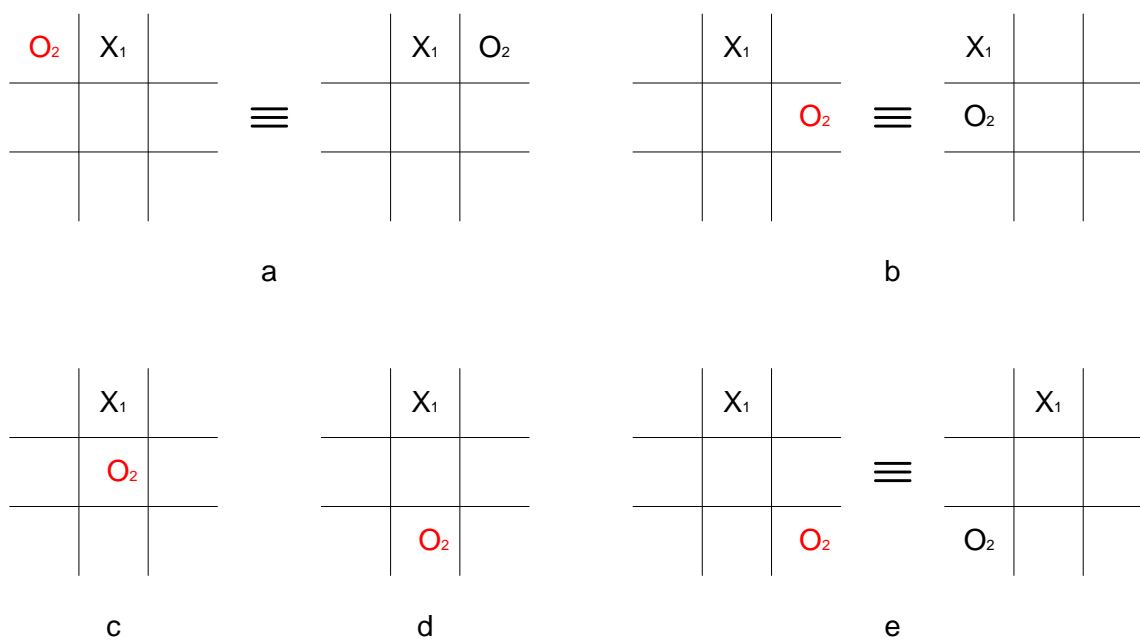
c

d

e

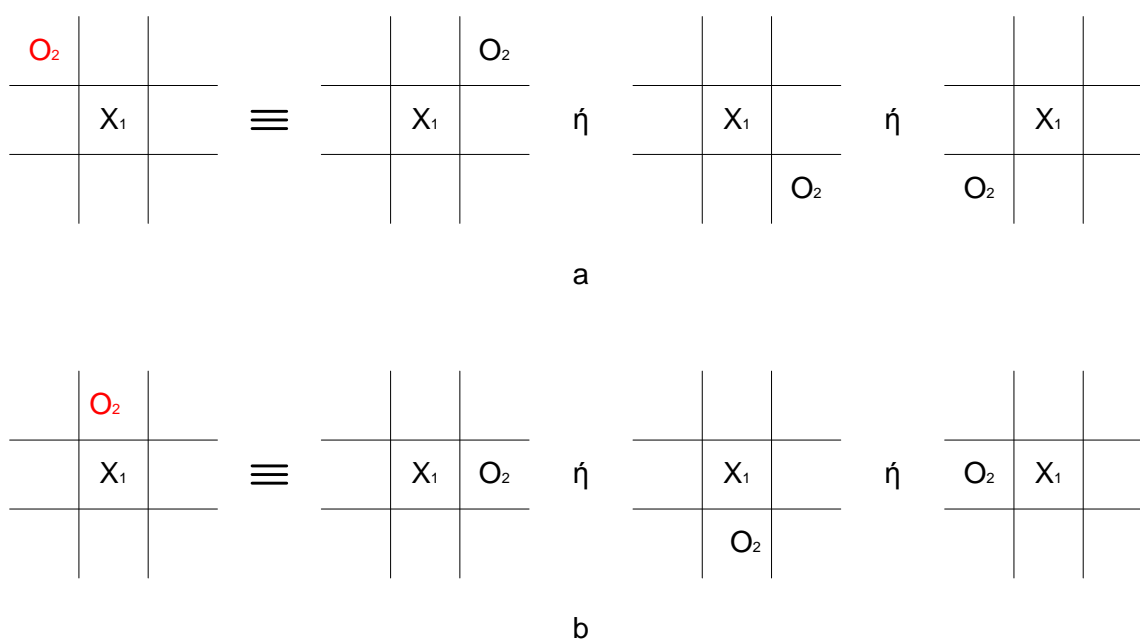
Σχήμα 19: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση

Αν η πρώτη κίνηση είναι στη 2^η θέση (Σχήμα 18b) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η, 5^η, 8^η και 9^η.



Σχήμα 20: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση

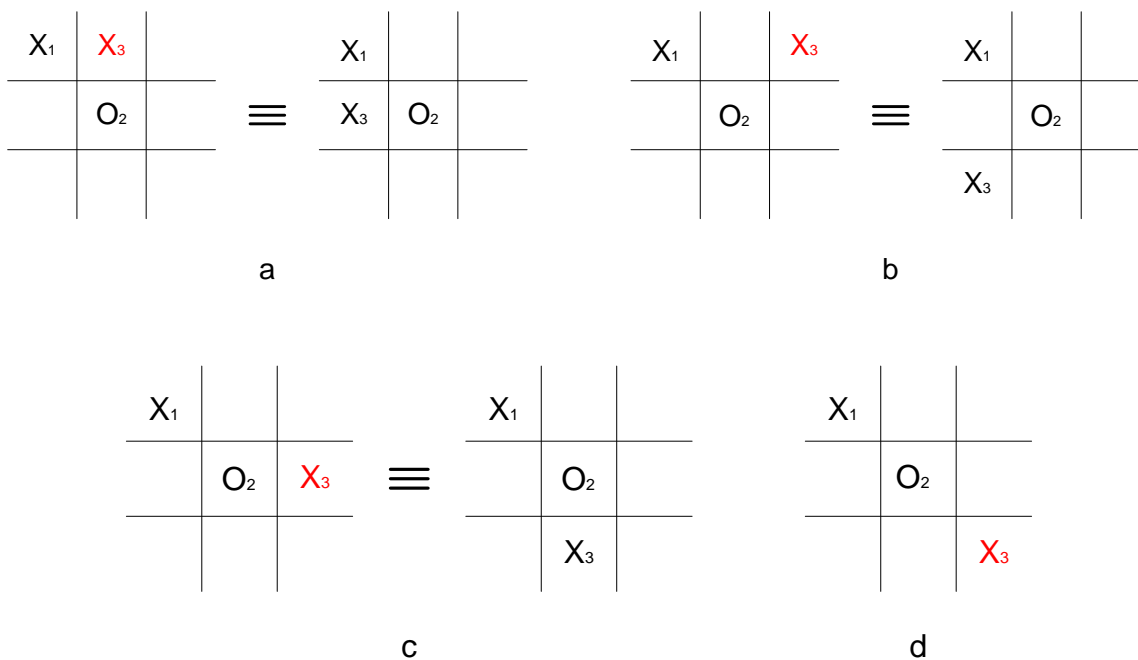
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 5^η θέση (Σχήμα 18c) τότε έχουμε κεντρική συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η και 2^η.



Σχήμα 21: Πιθανές δεύτερες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση

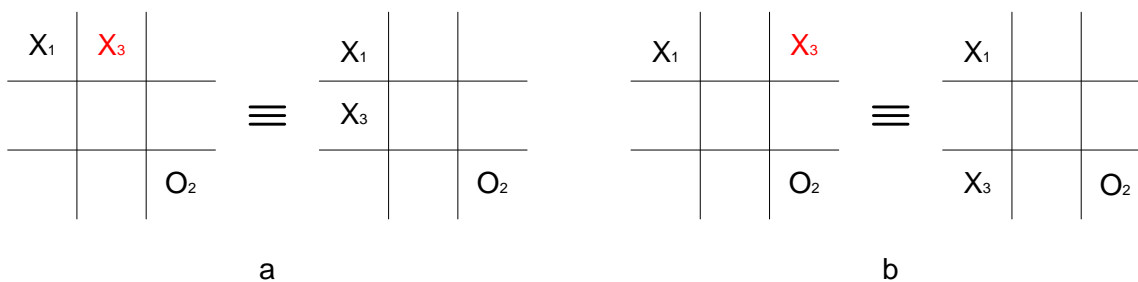
Στην τρίτη κίνηση εντοπίζονται οι παρακάτω περιπτώσεις συμμετρίας:

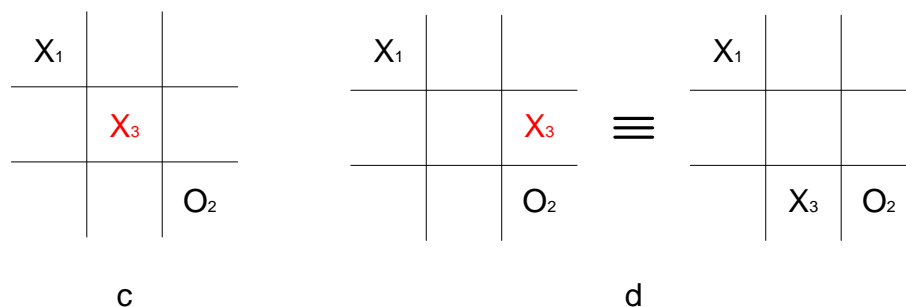
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 1^η θέση και η δεύτερη κίνηση στην 5^η θέση (Σχήμα 19c) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η, 6^η και 9^η.



Σχήμα 22: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση και δεύτερη στην 5^η

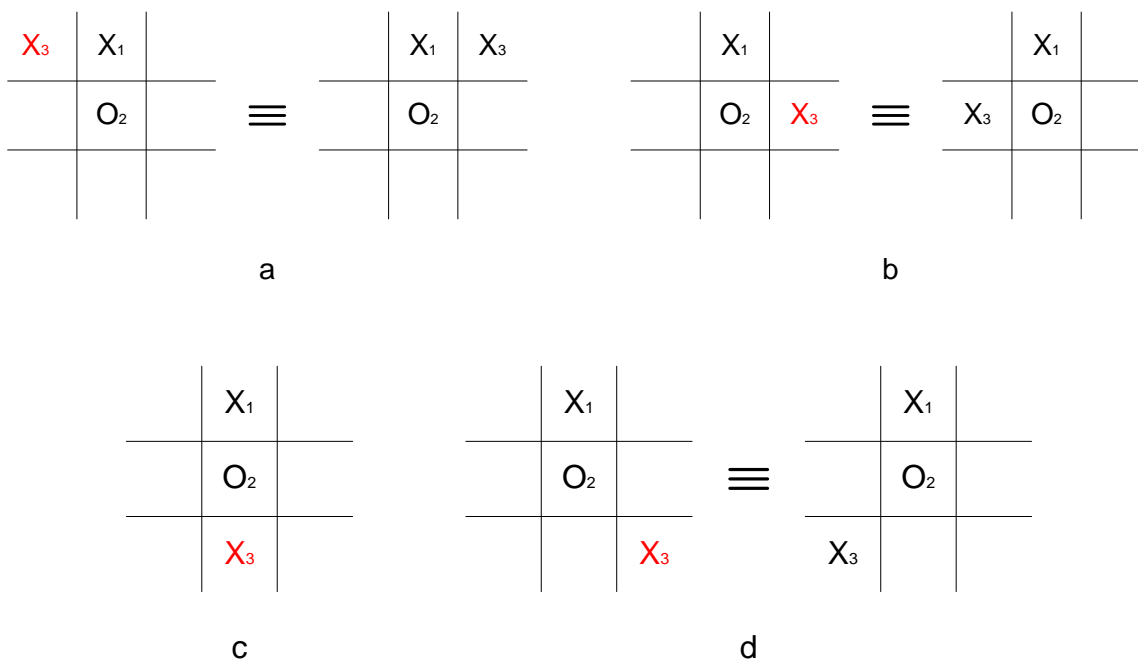
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 1^η θέση και η δεύτερη κίνηση στην 9^η θέση (Σχήμα 19e) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η, 5^η και 6^η.





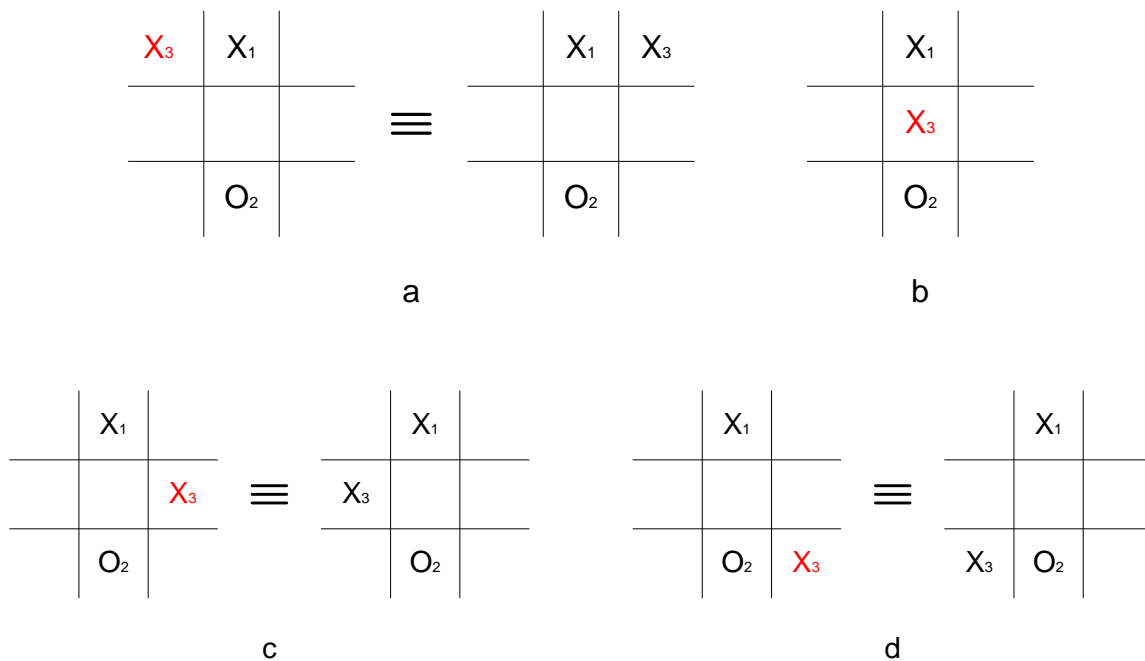
Σχήμα 23: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση και δεύτερη στην 9^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στη 2^η θέση και η δεύτερη κίνηση στην 5^η θέση (Σχήμα 20c) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η, 8^η και 9^η.



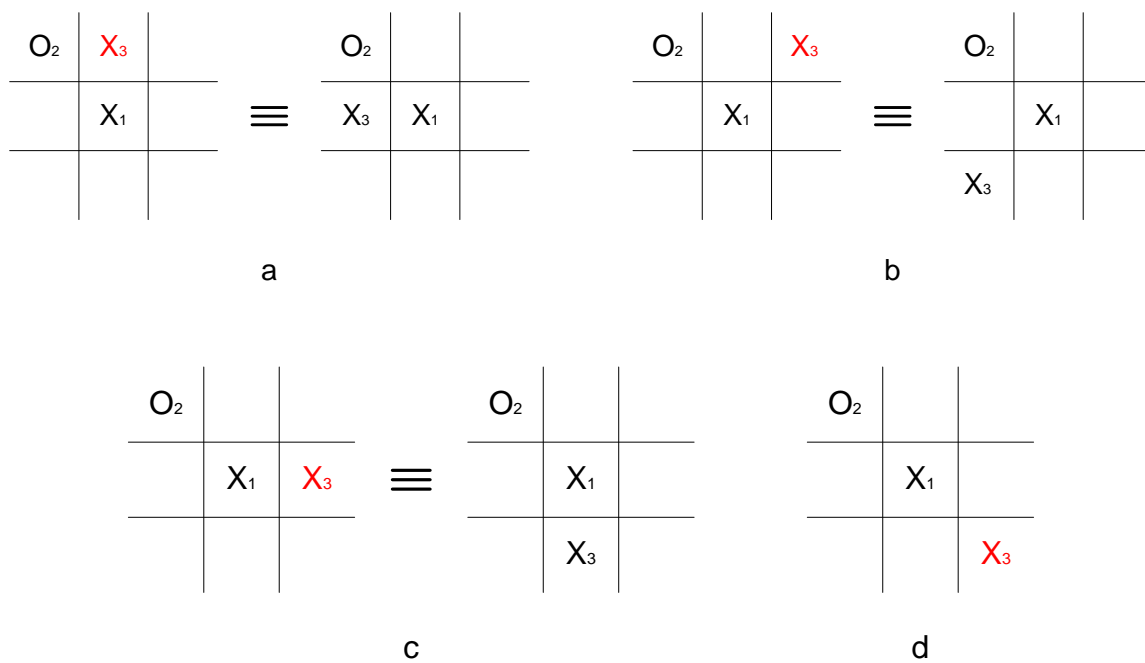
Σχήμα 24: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση και δεύτερη στην 5^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στη 2^η θέση και η δεύτερη κίνηση στην 8^η θέση (Σχήμα 20d) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 5^η, 6^η και 9^η.



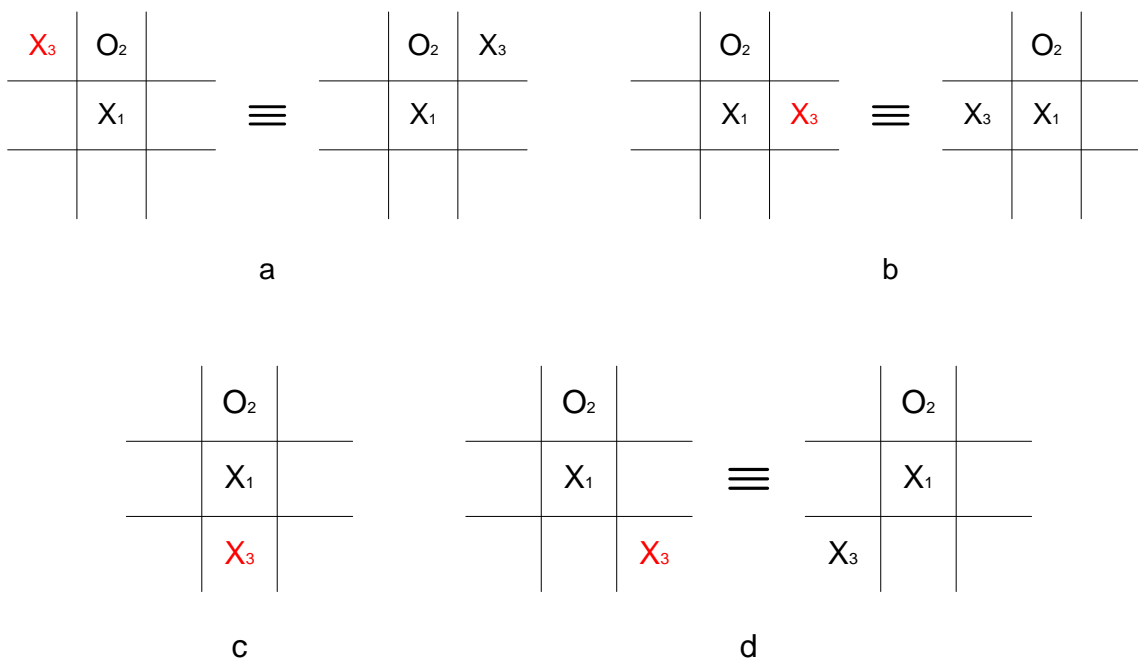
Σχήμα 25: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση και δεύτερη στην 8^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 5^η θέση και η δεύτερη κίνηση στην 1^η θέση (Σχήμα 21a) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η, 6^η και 9^η.



Σχήμα 26: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση και δεύτερη στην 1^η

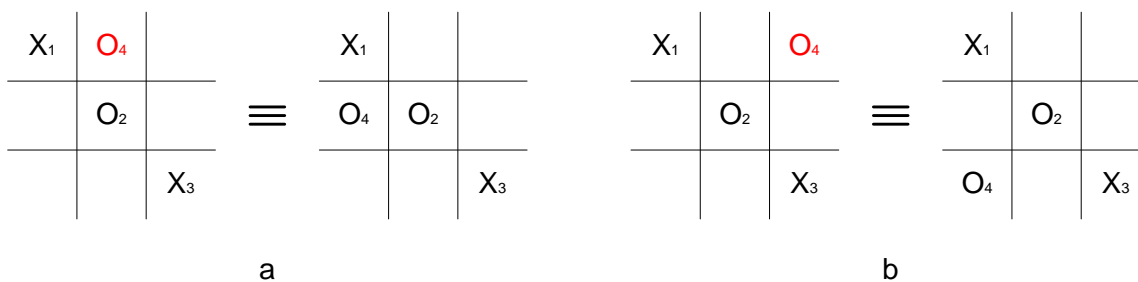
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 5^η θέση και η δεύτερη κίνηση στη 2^η θέση (Σχήμα 21b) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η, 8^η και 9^η.

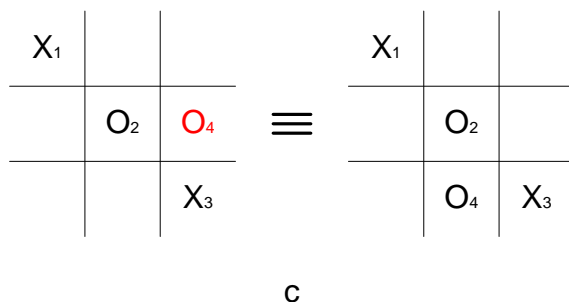


Σχήμα 27: Πιθανές τρίτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση και δεύτερη στη 2^η

Τέλος στην τέταρτη κίνηση εντοπίζονται οι παρακάτω περιπτώσεις συμμετρίας:

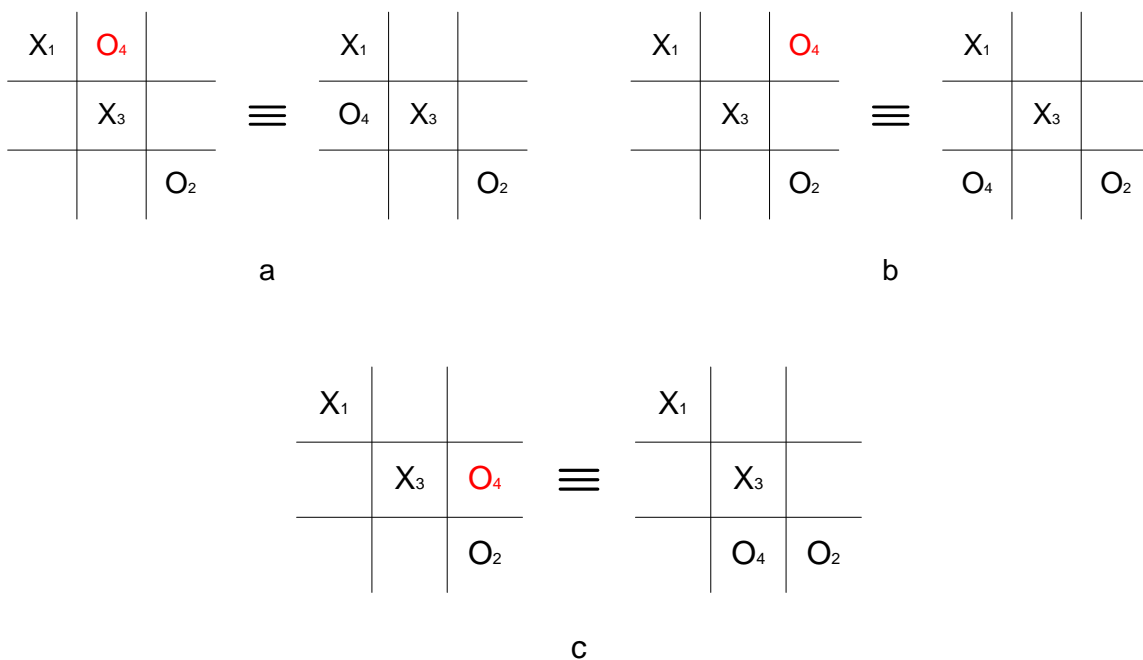
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 1^η θέση, η δεύτερη κίνηση στην 5^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 9^η θέση (Σχήμα 22d) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η και 6^η.





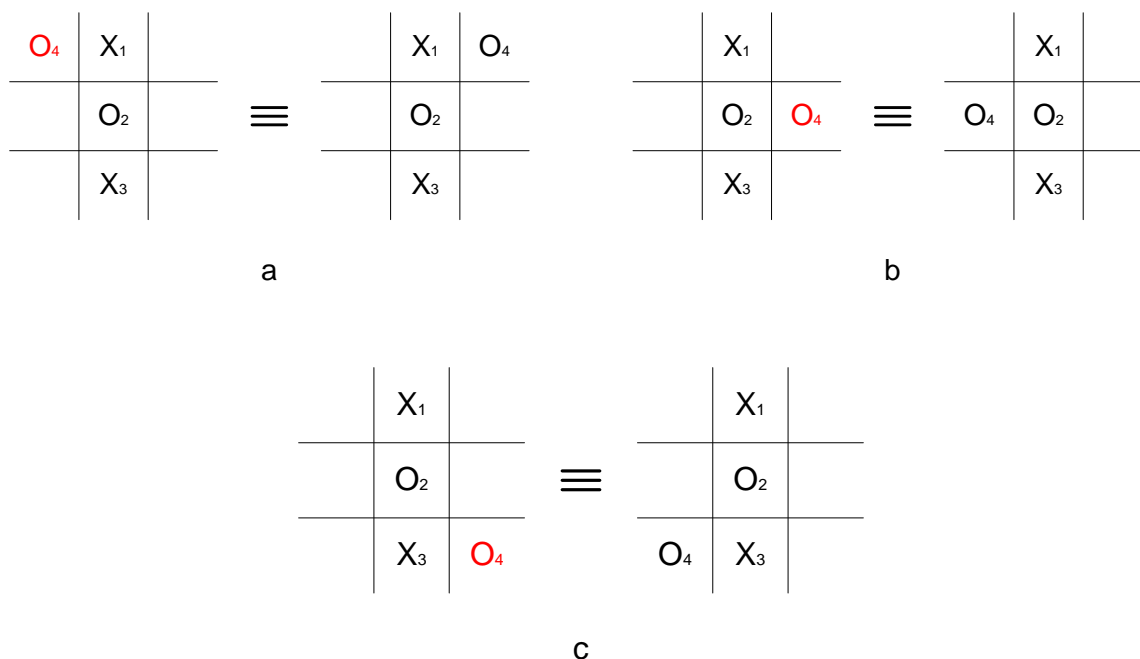
Σχήμα 28: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση, δεύτερη στην 5^η και τρίτη στην 9^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 1^η θέση, η δεύτερη κίνηση στην 9^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 5^η θέση (Σχήμα 23c) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η και 6^η.



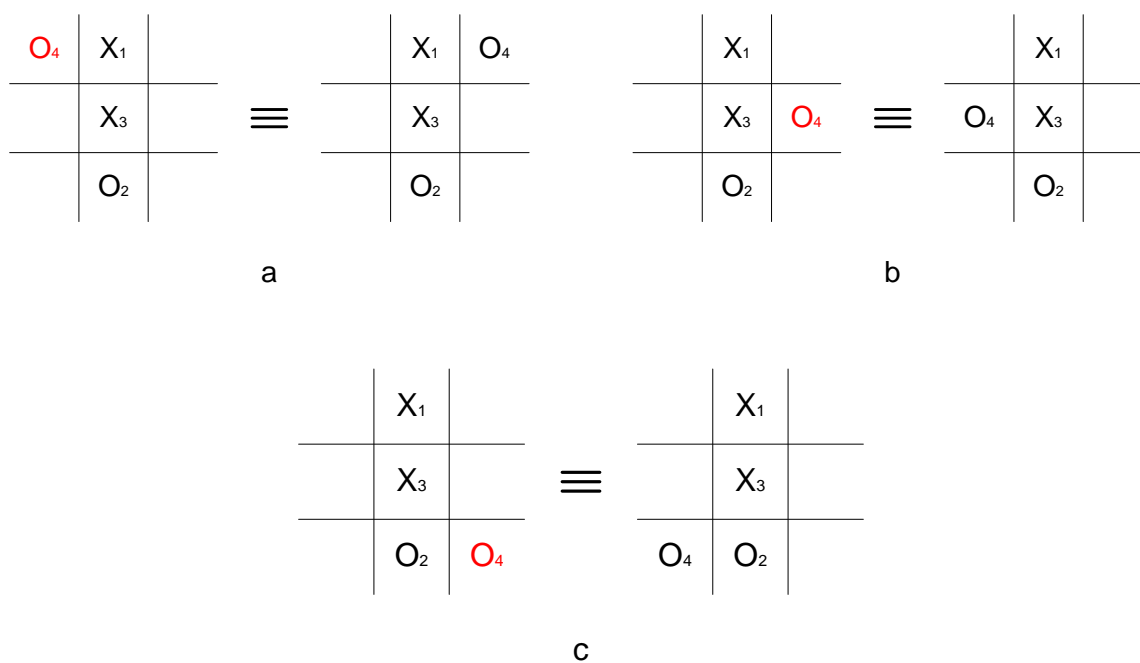
Σχήμα 29: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 1^η θέση, δεύτερη στην 9^η και τρίτη στην 5^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στη 2^η θέση, η δεύτερη κίνηση στην 5^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 8^η θέση (Σχήμα 24c) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η και 9^η.



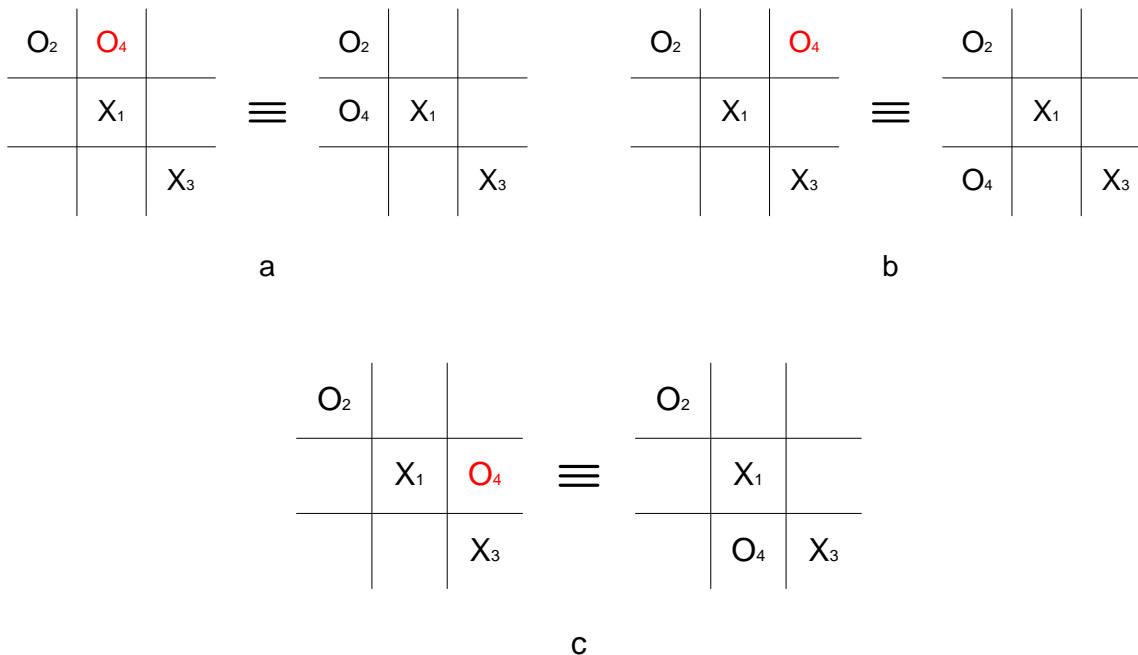
Σχήμα 30: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση, δεύτερη στην 5^η και τρίτη στην 8^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στη 2^η θέση, η δεύτερη κίνηση στην 8^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 5^η θέση (Σχήμα 25b) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η και 9^η.



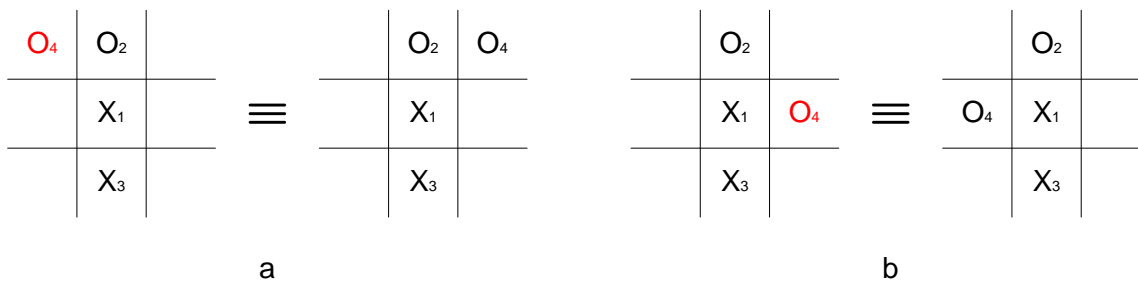
Σχήμα 31: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στη 2^η θέση, δεύτερη στην 8^η και τρίτη στην 5^η

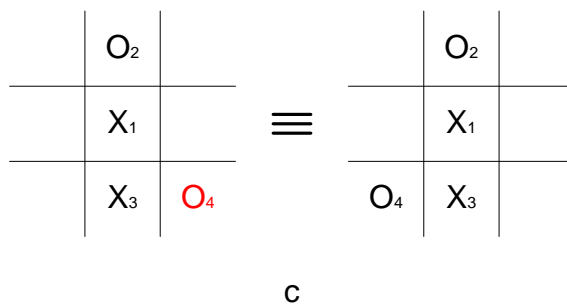
Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 5^η θέση, η δεύτερη κίνηση στην 1^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 9^η θέση (Σχήμα 26d) τότε έχουμε διαγώνια συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 2^η, 3^η και 6^η.



Σχήμα 32: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση, δεύτερη στην 1^η και τρίτη στην 9^η

Αν η πρώτη κίνηση είναι στην 5^η θέση, η δεύτερη κίνηση στη 2^η θέση και η τρίτη κίνηση στην 8^η θέση (Σχήμα 27c) τότε έχουμε κάθετη συμμετρία. Οι πιθανές κινήσεις σε αυτή την περίπτωση είναι στις θέσεις 1^η, 6^η και 9^η.



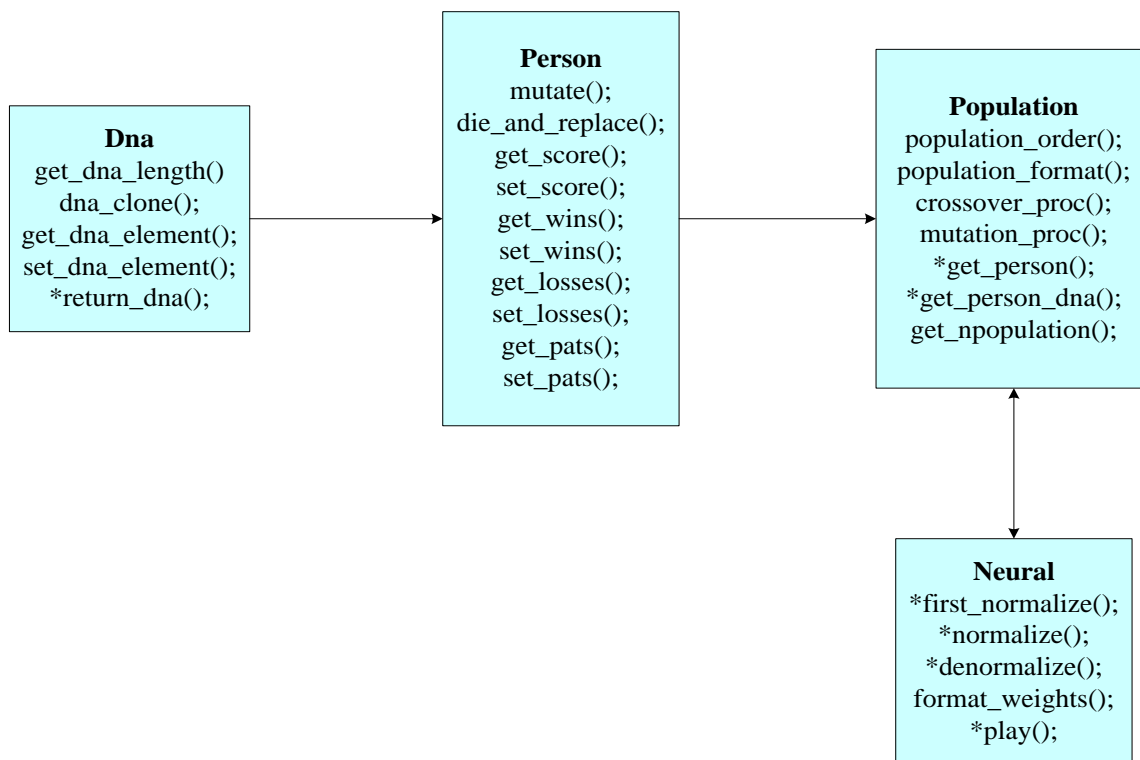


Σχήμα 33: Πιθανές τέταρτες κινήσεις με πρώτη κίνηση στην 5^η θέση, δεύτερη στη 2^η και τρίτη στην 8^η

Οι υπόλοιπες συμμετρίες που πιθανόν εντοπίζονται απλά αγνοούνται ενώ δεν επεμβαίνουμε καθόλου στις επόμενες κινήσεις. Αυτό συμβαίνει διότι οι συμμετρίες λαμβάνονται υπόψη σε σχέση με τις κατειλημμένες θέσεις του πλέγματος και ανεξάρτητα από τον παίκτη που τις έχει καταλάβει.

5.3 Κλάσεις

Στο δεύτερο μέρος θα ασχοληθούμε με το κυρίως πρόγραμμα. Όπως έχει προαναφερθεί ο κώδικας είναι γραμμένος σε γλώσσα C++. Χρησιμοποιούμε τέσσερις βασικές κλάσεις. Τη Dna, την Person, την Population και τη Neural. Στη συνέχεια δίνεται ένα διάγραμμα των κλάσεων αυτών που αναδεικνύει τη σχέση μεταξύ τους.



Σχήμα 34: Διάγραμμα κλάσεων με βάση το συσχετισμό μεταξύ τους

Ξεκινώντας λοιπόν, σύμφωνα με τη φορά που δείχνουν τα βέλη, δημιουργούμε την κλάση Dna η οποία αποτελεί συστατικό στοιχείο της Person και από ένα σύνολο των κλάσεων αυτών προκύπτει η Population. Τέλος μεταξύ της Neural και της Population υπάρχει αμφίδρομη σχέση αφού αλληλοτροφοδοτούνται στις βασικές διαδικασίες του προγράμματος.

Παρακάτω γίνεται αναλυτική παρουσίαση των κλάσεων καθώς και των λειτουργιών τους με τα διαγράμματα ροής των κυριότερων από αυτές, ενώ προηγείται ένας αναλυτικός πίνακας των κυριότερων παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στον κώδικα για την καλύτερη κατανόησή του.

Neurons_num : ο αριθμός των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας

Dna_dim : η διάσταση του διανύσματος του dna

Inputs_num : ο αριθμός των εισόδων του δικτύου

Outputs_num : ο αριθμός των εξόδων του δικτύου

Layers_num : ο αριθμός των βαθμίδων του δικτύου
Persons_num : ο αριθμός των ατόμων του πληθυσμού
Iter_num : ο αριθμός των γενεών
Set_num : ο αριθμός των σετ των παιχνιδιών
Top_score : το μέγιστο δυνατό σκορ
Worst_score : το ελάχιστο δυνατό σκορ
Elit_num : ο αριθμός των ατόμων που προκύπτουν με ελιτισμό
Mutation_prob: η πιθανότητα μετάλλαξης

5.4 Dna

Με την κλάση αυτή ορίζεται ουσιαστικά ο γενετικός κώδικας (dna) ενός ατόμου, ένα διάνυσμα δηλαδή που περιέχει το σύνολο των βαρών του νευρωνικού δικτύου που αντιστοιχεί στο δεδομένο άτομο.

```

class dna
{
    int dna_length;
    double *dnamatrix;
public:
    dna(int length);
    ~dna();
    int get_dna_length();
    void dna_clone(double *duplicate);
    void set_dna_element(int i, double set_el);
    double* return_dna();
}
  
```

Μοναδικό όρισμα της κλάσης αυτής είναι το μήκος του dna δηλαδή το πλήθος των αγνώστων βαρών που θέλουμε να προσδιορίσουμε, ενώ τα στοιχεία της κλάσης είναι το μήκος αλλά και το διάνυσμα του dna. Οι λειτουργίες που εκτελεί η κλάση αυτή αναφέρονται στη συνέχεια αναλυτικά.

```
int get_dna_length();
```

Επιστρέφει το μήκος του dna.

```
void dna_clone(double *duplicate);
```

Δημιουργεί ένα αντίγραφο του dna *duplicate*.

```
void set_dna_element(int i, double set_el);
```

Δίνει σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο *i* του dna την τιμή *set_el*.

```
double* return_dna();
```

Επιστρέφει το διάνυσμα του dna.

5.5 Person

Με την κλάση αυτή ορίζονται τα άτομα του πληθυσμού αποδίδοντας σε αυτά τα βασικά τους χαρακτηριστικά. Ένα από αυτά είναι και ο γενετικός τους κώδικας, δηλαδή μια κλάση dna.

```
class person:public dna
{
    int ev_score;
    int score;
    int wins;
    int losses;
    int pats;
public:
    person(int length);
    ~person();
    void mutate(double mprobability, int n);
    void die_and_replace(class person *new_person);
    void die_and_replace(class dna *temp_dna);
    int get_score();
    void set_score(int set_score);
    int get_ev_score();
    void set_ev_score(int set_ev);
    int get_wins();
    void set_wins(int set_w);
    int get_losses();
    void set_losses(int set_l);
    int get_pats();
```

```

void set_pats(int set_p);
}

```

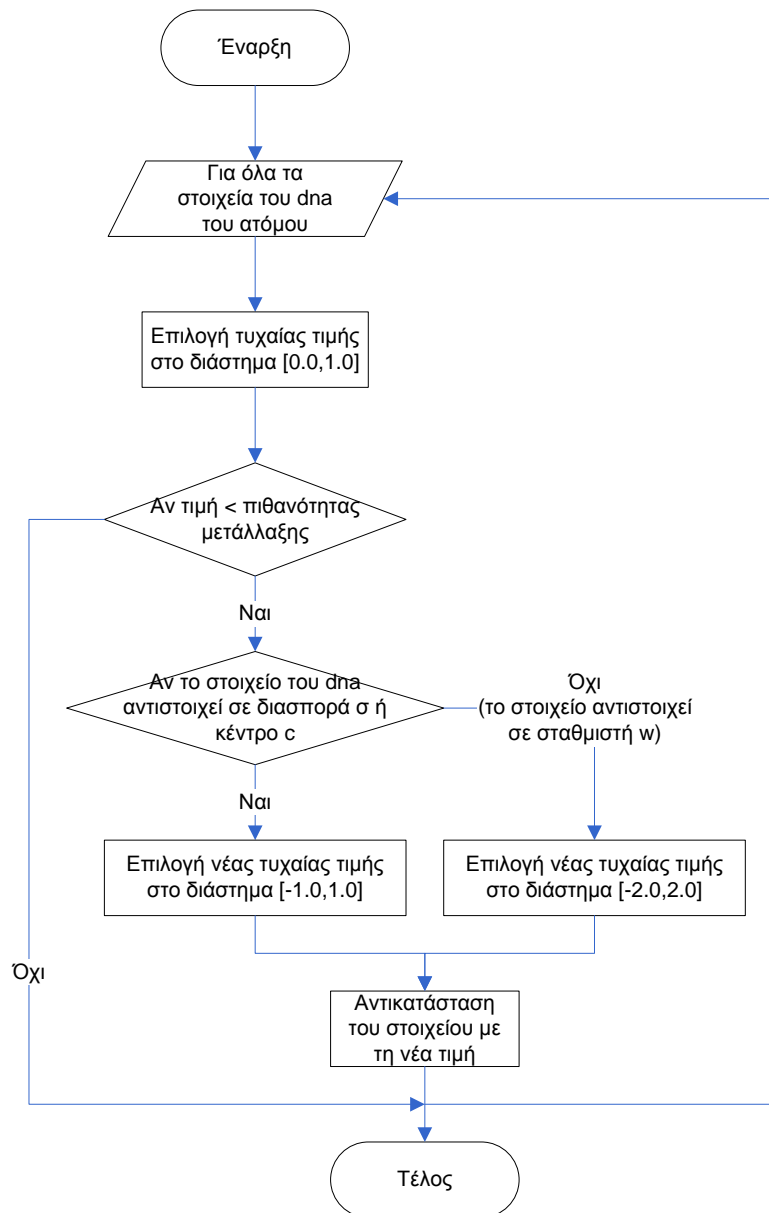
Και πάλι μοναδικό όρισμα της κλάσης αποτελεί το μήκος του dna ενώ τα στοιχεία της είναι τα διαφορετικά σκορ των ατόμων, οι νίκες, οι ήττες και οι ισοπαλίες τους. Εκτελεί όλες τις λειτουργίες που εκτελεί και η dna αλλά και αυτές που αναφέρονται παρακάτω.

```

void mutate(double mprobability, int n);

```

Με μια μικρή πιθανότητα *mprobability* μεταβάλλονται τα στοιχεία του dna. Ακολουθεί το λογικό διάγραμμα της διαδικασίας.



Σχήμα 35: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας μετάλλαξης ενός ατόμου

Η διαδικασία της μετάλλαξης λαμβάνει χώρα σε όλα τα στοιχεία του dna. Οι νέες τιμές αυτών που αντιστοιχούν σε κέντρα c και σε διασπορές σ επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[-1.0, 1.0]$. Αυτές που αντιστοιχούν σε σταθμιστές w και καταλαμβάνουν τις τελευταίες $9 * n$ θέσεις του dna επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[-2.0, 2.0]$.

```
void die_and_replace(class person *new_person);
```

Αντικαθιστά ένα άτομο του πληθυσμού με ένα νέο το *new_person*.

```
void die_and_replace(class dna *temp_dna);
```

Αντικαθιστά το dna ενός ατόμου με το dna κάποιου άλλου, *temp_dna*.

```
int get_score();
```

Επιστρέφει το *score*.

```
void set_score(int set_score);
```

Δίνει στο *score* την τιμή *set_score*.

```
int get_ev_score();
```

Επιστρέφει το *ev_score*.

```
void set_ev_score(int set_ev);
```

Δίνει στο *ev_score* την τιμή *set_ev*.

```
int get_wins();
```

Επιστρέφει τον αριθμό των νικών, *wins*.

```
void set_wins(int set_w);
```

Δίνει στο *wins* την τιμή *set_w*.

```
int get_losses();
```

Επιστρέφει τον αριθμό των ηττών, *losses*.


```
void set_losses(int set_l);
```

Δίνει στο *losses* την τιμή *set_l*.

```
int get_pats();
```

Επιστρέφει τον αριθμό των ισοπαλιών, *pats*.

```
void set_pats(int set_p);
```

Δίνει στο *pats* την τιμή *set_p*.

5.6 Population

Με την κλάση αυτή δημιουργείται ο πληθυσμός των ατόμων.

```
class population
```

```
{
    int npopulation;
    class person **pop;
    int dna_size;
public:
    population(int np, int dna_length);
    ~population();
    void population_order(int choice);
    void population_format(int best_neurals, int worst_score, int choice);
    void crossover_proc(int elit_persons, int dna_len);
    void mutation_proc(double mpropability, int start_index, int n);
    class person *get_person();
    class person *get_person(int i);
    double *get_person_dna(int i);
    int get_npopulation();
}
```

Τα ορίσματα της κλάσης είναι τώρα το μήκος του dna αλλά και το μέγεθος του πληθυσμού. Τα στοιχεία του είναι το μέγεθος του πληθυσμού, τα άτομα και το μήκος του dna. Οι λειτουργίες που εκτελεί φαίνονται παρακάτω.

```
void population_order(int choice);
```

Με τη χρήση ενός απλού αλγορίθμου κατάταξης, τοποθετούνται τα άτομα από το καλύτερο προς το χειρότερο, με βάση κάποιο από τα σκορ σύμφωνα με την επιλογή *choice*.

```
void population_format(int best_neurals, int worst_score, int choice);
```

Εδώ έχουμε τη διαδικασία της επιλογής των ατόμων που προορίζονται για γονείς σύμφωνα με τη μέθοδο proportionate selection.

Για την εφαρμογή της μεθόδου κάνουμε μια απλή κανονικοποίηση των σκορ προσθέτοντας σε κάθε ένα από αυτά το χειρότερο δυνατό σε απόλυτη τιμή, *worst_score*, και υπολογίζουμε το άθροισμά τους. Στη συνέχεια επιλέγουμε μία τυχαία τιμή στο διάστημα μεταξύ του μηδενός και του αθροίσματος και αποφασίζουμε σε ποιο άτομο αντιστοιχεί. Το άτομο αυτό επιλέγεται για γονέας της επόμενης γενιάς.

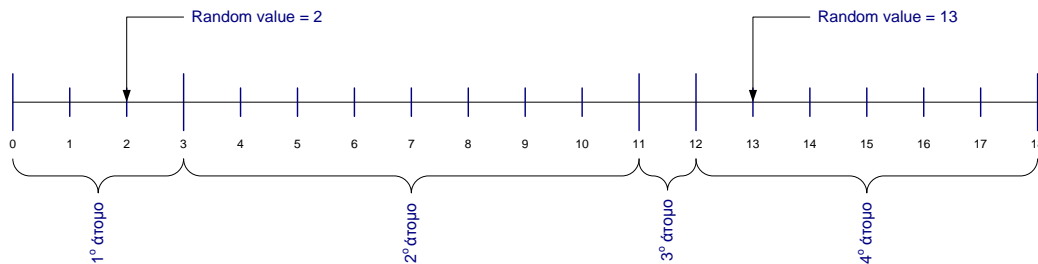
Αν λοιπόν για παράδειγμα είχαμε 4 άτομα από τα οποία έπρεπε να επιλέξουμε γονείς, με αντίστοιχα σκορ

$$[sc(x_1), sc(x_2), sc(x_3), sc(x_4)] = [-2, 3, -4, 1]$$

και χειρότερο δυνατό σκορ ίσο με -5, τότε αυτά μετά την κανονικοποίηση θα γινόταν

$$[sc'(x_1), sc'(x_2), sc'(x_3), sc'(x_4)] = [3, 8, 1, 6]$$

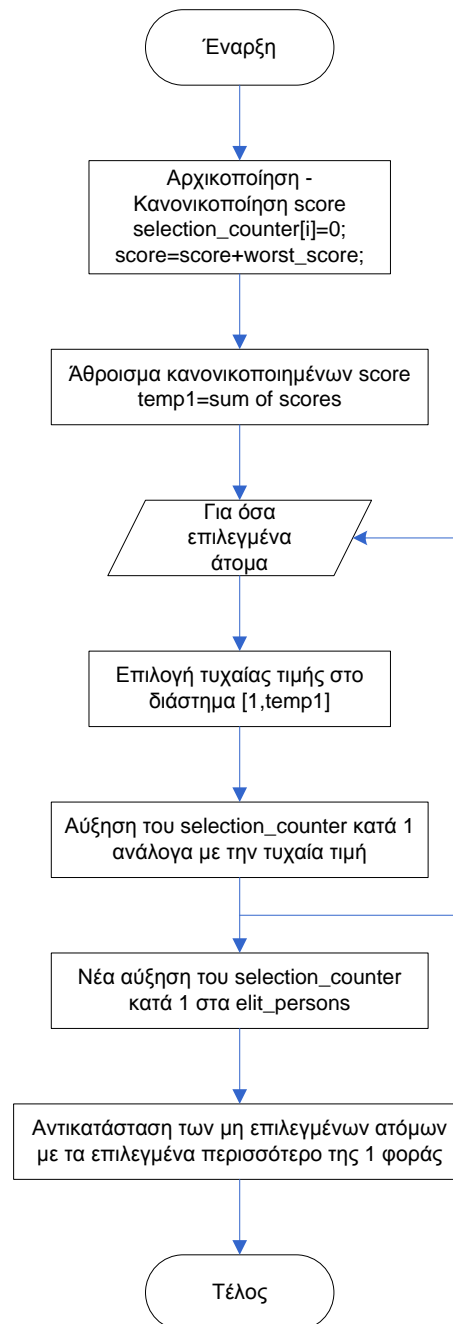
με άθροισμα ίσο με 18. Τοποθετώντας τις τιμές αυτές σε μία ευθεία ακεραίων όπως φαίνεται στο Σχήμα 36, διακρίνονται τα διαστήματα τιμών που αντιστοιχούν στο κάθε άτομο. Έτσι για μία τυχαία τιμή ίση με 13 επιλέγεται το 4^ο άτομο ενώ για την τιμή 2 επιλέγεται το 1^ο άτομο.



Σχήμα 36: Αντιστοιχία τυχαίων τιμών στα άτομα του πληθυσμού

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσα και τα άτομα που θα επιλεγθούν. Χρησιμοποιούμε ένα διάνυσμα *selection_counter* στο οποίο αποθηκεύουμε τον αριθμό των φορών που επιλέγεται ένα άτομο για γονέας. Κατόπιν γίνεται αντικατάσταση των μη επιλεγμένων, από αυτούς που επιλέχθηκαν περισσότερες από μία φορές. Τέλος λαμβάνει χώρα αποκανονικοποίηση των σκορ με την αντίστροφη διαδικασία της κανονικοποίησης, απλά και μόνο για να εξασφαλιστεί η σωστή ροή του προγράμματος.

Ακολουθεί το λογικό διάγραμμα της διαδικασίας.



Σχήμα 37: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας επιλογής γονέων

Χρησιμοποιείται μερικός ελιτισμός και επιλέγονται τα καλύτερα *best_neurals* άτομα που θα συνεχίσουν στην επόμενη γενιά χωρίς καμία αλλαγή. Τα άτομα αυτά συμμετέχουν επίσης στη διαδικασία επιλογής των γονέων.

```
void crossover_proc(int dna_len);
```

Εδώ έχουμε τη διαδικασία της διασταύρωσης. Ακολουθεί το λογικό διάγραμμα της διαδικασίας.

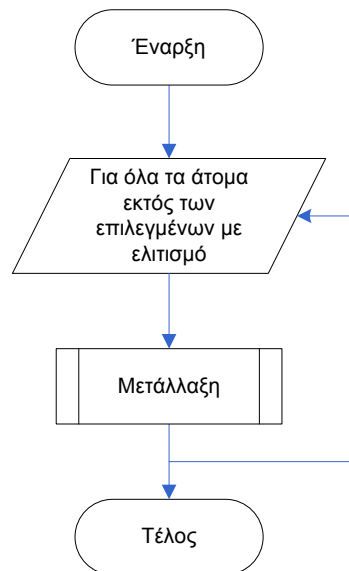


Σχήμα 38: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας διασταύρωσης

Δημιουργούμε ζευγάρια των ατόμων που προορίζονται για γονείς (ο πρώτος με τον τελευταίο, ο δεύτερος με τον προτελευταίο κ.λ.π.) και ανταλλάσσουν μεταξύ τους τα στοιχεία του dna σε ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο. Στη συνέχεια οι γονείς αντικαθίστανται από τους απογόνους τους.

```
void mutation_proc(double mpropability, int start_index, int n);
```

Εδώ έχουμε τη διαδικασία της μετάλλαξης. Ακολουθεί το λογικό διάγραμμα της διαδικασίας.



Σχήμα 39: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας μετάλλαξης του πληθυσμού

Στη φάση της μετάλλαξης αναφερόμαστε σε αυτή όπως δόθηκε αναλυτικά κατά την περιγραφή της κλάσης `person`.

```
class person *get_person();
```

Επιστρέφει ένα τυχαίο άτομο.

```
class person *get_person(int i);
```

Επιστρέφει το i άτομο του πληθυσμού.

```
double *get_person_dna(int i);
```

Επιστρέφει το dna του i ατόμου του πληθυσμού.

```
int get_npopulation();
```

Επιστρέφει το μέγεθος του πληθυσμού.

5.7 Neural

Με την κλάση αυτή επιτυγχάνεται η διαδικασία της εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου.

```
class neural_network
```

```
{
    double ***w;
    int inputs;
    int outputs;
    int layers;
    int neurons;
public:
    neural_network(int in, int out, int neuro, int lay);
    ~neural_network();
    double *first_normalize(double *temp);
    double *normalize(int position, double sign, double *input);
    int *denormalize(double *output, int *pos);
    void format_weights(class person *player);
    double *play(double *input, double *output);
};
```

Τα ορίσματα της κλάσης αυτής είναι ο αριθμός των εισόδων, ο αριθμός των εξόδων, ο αριθμός των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας και ο αριθμός των κρυμμένων βαθμίδων που στην περίπτωση μας είναι μία. Τα δε στοιχεία της είναι όλα αυτά που αποτελούν και ορίσματά της αλλά και τα βάρη του δικτύου. Οι λειτουργίες που εκτελεί δίνονται παρακάτω.

```
double *first_normalize(double *temp);
```

Δημιουργεί ένα κενό πλέγμα τρίλιζας. Στην πράξη θέτει όλα τα στοιχεία του πλέγματος *temp* ίσα με 0.0.

```
double *normalize(int position, double sign, double *input);
```

Δίνει στη θέση *position* του πλέγματος *input* την τιμή *sign*.

```
int *denormalize(double *output, int *pos);
```

Κατατάσσει τις εξόδους με σειρά προτεραιότητας από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη και επιστρέφει τη σειρά αυτή με το διάνυσμα *pos*.

```
void format_weights(class person *player);
```

Εδώ το διάνυσμα *dna* του εκάστοτε ατόμου *player* καταχωρείται σε ένα τριδιάστατο διάνυσμα *w* προκειμένου να είναι ευκολότερη η επεξεργασία των βαρών στο νευρωνικό δίκτυο. Πιο συγκεκριμένα προκύπτει η παρακάτω αντιστοίχιση:

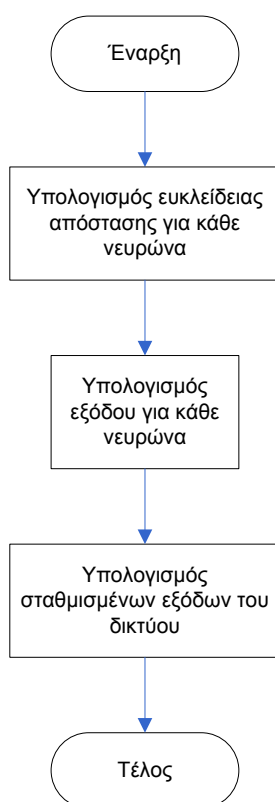
Gaussian κέντρα c : $w[i < inputs][j < neurons][k < layers - 1]$

Gaussian διασπορές σ : $w[i = inputs][j < neurons][k < layers - 1]$

Σταθμιστές w : $w[i < outputs][j < neurons][k = layers - 1]$

```
double *play(double *input, double *output);
```

Εδώ έχουμε την προσπέλαση του RBF νευρωνικού δικτύου. Δέχεται λοιπόν ως είσοδο ένα στιγμιότυπο *input* του πλέγματος της τρύλιζας και επιστρέφει το διάλυμα των εξόδων *output* που δίνει το νευρωνικό δίκτυο.



Σχήμα 40: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας υπολογισμού των εξόδων του νευρωνικού δικτύου

Καθώς φαίνεται, ο υπολογισμός των εξόδων του δικτύου γίνεται σταδιακά. Αρχικά υπολογίζουμε τις ευκλείδειες αποστάσεις. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις εξόδους των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας και τελικά υπολογίζουμε τις εξόδους του δικτύου.

Ροή του προγράμματος

Τέλος, θα ασχοληθούμε με την κλάση Main. Η ρουτίνα αυτή παρέχει τη λογική σειρά με την οποία εκτελούνται οι διαδικασίες για την επίλυση του παιχνιδιού.

Στη συνέχεια δίνεται αναλυτικά η πορεία του προγράμματος, όπως αυτή διαγράφεται στο διάγραμμα ροής (Σχήμα 41).

Αρχικοποίηση

Δημιουργία του νευρωνικού δικτύου που θα παίζει το ρόλο των παικτών με εισαγωγή του αριθμού των εισόδων, των εξόδων, των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας και των βαθμίδων. Σύμφωνα με το δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε οι εισοδοί και οι εξοδοί είναι 9, οι βαθμίδες 2, ενώ ο αριθμός των νευρώνων αποτελεί ελεύθερη παράμετρο.

Δημιουργία ενός πληθυσμού ατόμων προεπιλεγμένο από το χρήστη και αρχικοποίηση των τιμών του γενετικού τους κώδικα. Για να γίνει αυτό ορίζεται πρώτα το μήκος του γενετικού κώδικα κάτι που, όπως είναι γνωστό, εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των νευρώνων της κρυμμένης βαθμίδας. Το πλήθος των νευρώνων επιλέγεται επίσης από το χρήστη. Η αρχικοποίηση επιτυγχάνεται με την επιλογή τυχαίων ομοιόμορφα κατανεμημένων τιμών στα διαστήματα που προαναφέρθηκαν για τα βάρη του κάθε νευρωνικού δικτύου. Οι τιμές αυτές προκύπτουν από μια γεννήτρια τιμών που κατασκευάστηκε σε C++ για το σκοπό αυτό.

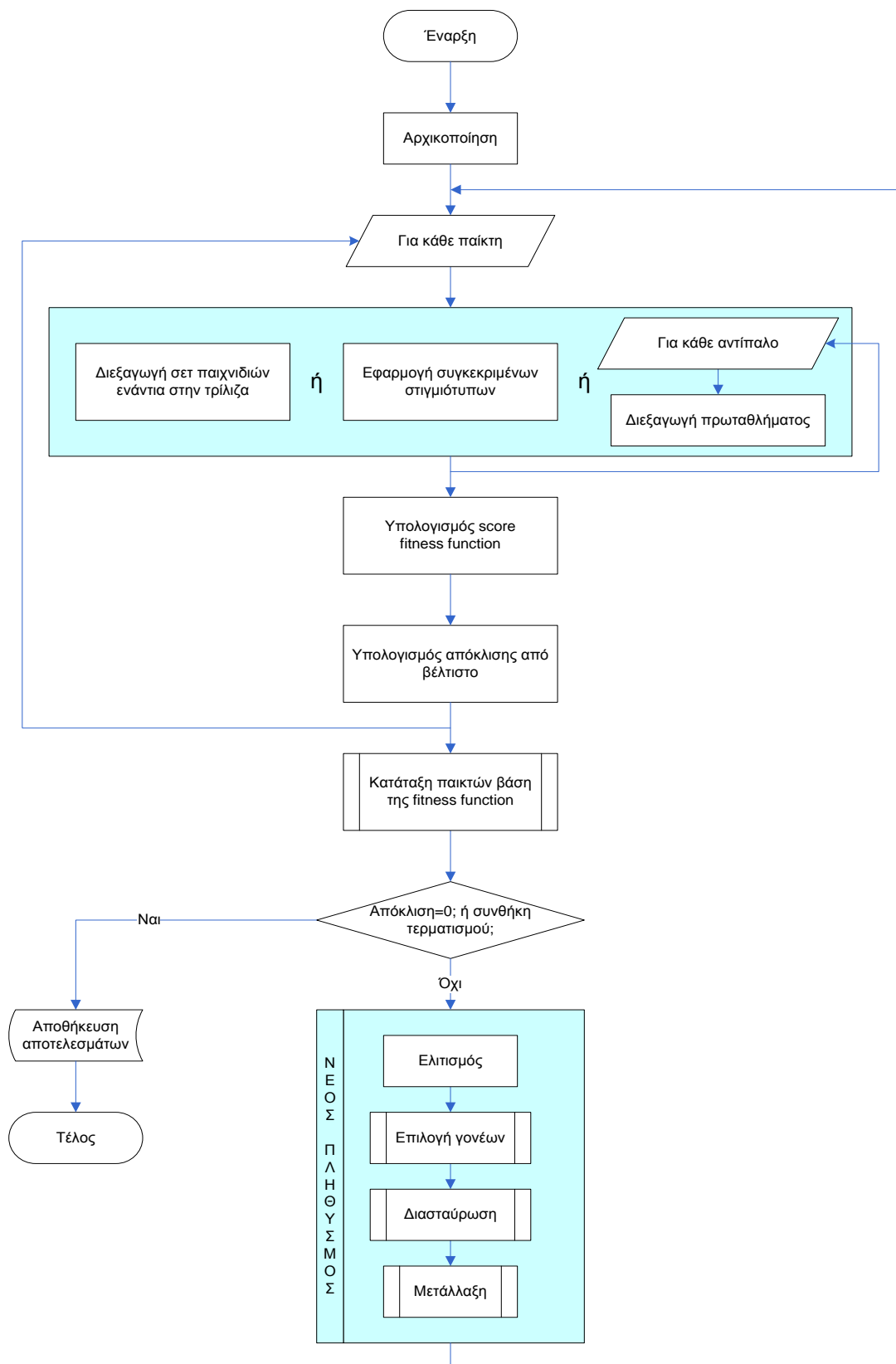
Τα βάρη είναι αυτά που καθορίζουν τη στρατηγική του ατόμου. Παράλληλα στο κάθε άτομο δίνεται μηδενικό σκορ και στις περιπτώσεις που απαιτείται, μηδενικός αριθμός νικών, ηττών και ισοπαλιών.

Επίσης ο χρήστης επιλέγει τον αριθμό των ατόμων που θα διατηρηθούν στο στάδιο του ελιτισμού, την πιθανότητα μετάλλαξης και μία μέγιστη τιμή γενεών.

Επιλογή κατεύθυνσης

1^η περίπτωση

Η εκπαίδευση των παικτών γίνεται μέσα από μια διαδικασία συνεχούς διαγωνισμού με τον “προπονητή”. Έτσι επιλέγεται ο παίκτης κάθε φορά που θα αντιμετωπίσει τον “προπονητή” και παίζουν κάποια σετ παρτίδων. Το κάθε σετ αποτελείται από 9 παρτίδες. Σε κάθε μία από τις παρτίδες είναι διαφορετική η εκκίνηση. Ο κάθε παίκτης, δηλαδή το νευρωνικό δίκτυο, δικαιούται να παίζει πρώτος και δέχεται σε κανονικοποιημένη μορφή ένα κενό πλέγμα τρίλιζας. Επιλέγει την πρώτη κίνηση. Στην πρώτη παρτίδα λοιπόν το νευρωνικό δίκτυο επιλέγει την πρώτη θέση στο κενό πλέγμα της τρίλιζας, στη δεύτερη παρτίδα επιλέγει τη δεύτερη θέση στο κενό πλέγμα και ούτω καθεξής. Αυτό που λαμβάνει χώρα αμέσως μετά είναι ο έλεγχος για κάποια συμμετρία.



Σχήμα 41: Διάγραμμα ροής του προγράμματος που υλοποιήθηκε για την επίλυση του παιχνιδιού

Ο σκοπός της παραπάνω διαδικασίας είναι από τη μια, να δραστηριοποιείται προς όλες τις πιθανές θέσεις το νευρωνικό δίκτυο και από την άλλη, στιγμιότυπα συμμετρικά να λαμβάνονται ως ένα κοινό για μείωση του αριθμού των στιγμιότυπων άρα και ταχύτερο αλγόριθμο.

Ο “προπονητής” απαντάει και στη συνέχεια το νευρωνικό δίκτυο δέχεται σε κανονικοποιημένη και πάλι μορφή το νέο στιγμιότυπο του πλέγματος και ούτω καθεξής, ωστόσο να συμπληρωθεί το πλέγμα της τρίλιζας ή ένας εκ των δύο παικτών να καταφέρει να κάνει τρίλιζα.

2^η περίπτωση

Τροφοδοτείται ο παίκτης με όλα τα στιγμιότυπα προς εκμάθηση. Περιλαμβάνονται αυτά τα στιγμιότυπα που προκύπτουν μετά τον έλεγχο συμμετριών. Προφανώς η εισαγωγή των στιγμιότυπων γίνεται σε κανονικοποιημένη μορφή. Ο παίκτης ανταποκρίνεται σε κάθε ένα από αυτά.

3^η περίπτωση

Στην περίπτωση αυτή η επίλυση του παιχνιδιού επιχειρείται με διεξαγωγή πρωταθλήματος. Γίνεται επιλογή του παίκτη που θα παίξει έναντι όλων των υπολοίπων καθώς και του εκάστοτε αντιπάλου του. Ο παίκτης που πρόκειται να αντιμετωπίσει όλους τους υπόλοιπους δικαιούται να παίξει πρώτος. Δέχεται λοιπόν σε κανονικοποιημένη μορφή το κενό πλέγμα της τρίλιζας και αποφασίζει ποια κίνηση θα κάνει. Ο δεύτερος παίκτης δέχεται σε κανονικοποιημένη και πάλι μορφή το στιγμιότυπο της τρίλιζας που προέκυψε και απαντά. Οι συμμετρίες λαμβάνονται υπόψη κι εδώ.

Υπολογισμός Fitness Function

1^η περίπτωση

Το κριτήριο προσαρμοστικότητας που χρησιμοποιείται βασίζεται στον αριθμό των νικών που επιτυγχάνει ο κάθε παίκτης έναντι του προπονητή σε σχέση όμως και με τις ήττες στις οποίες υποχρεώνεται. Χρησιμοποιούνται τέσσερις ξεχωριστοί τρόποι αποτίμησης των παικτών. Στον πρώτο τρόπο, κάθε νίκη προσθέτει έναν πόντο, ενώ κάθε ήττα αφαιρεί έναν. Στην περίπτωση ισοπαλίας το σκορ δεν αλλάζει. Στο δεύτερο τρόπο χρησιμοποιείται η μέθοδος βαθμολογίας των αγώνων ποδοσφαίρου. Κάθε νίκη προσθέτει τρεις πόντους, κάθε ισοπαλία προσθέτει έναν πόντο, ενώ στην ήττα το σκορ δεν αλλάζει. Στον τρίτο τρόπο, δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στο γεγονός της νίκης. Έτσι κάθε νίκη προσθέτει δέκα πόντους, κάθε ήττα αφαιρεί έναν και στην ισοπαλία παραμένει το ίδιο. Αντίστροφα στον τελευταίο τρόπο, δίνεται βαρύτητα στο γεγονός της μη ήττας. Κάθε νίκη λοιπόν προσθέτει έναν πόντο, κάθε ήττα αφαιρεί δέκα και στην ισοπαλία παραμένει ως έχει. Σκοπός πάντα είναι η μεγιστοποίηση του σκορ.

2^η περίπτωση

Η fitness function στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται από τον αριθμό των σωστών ανταποκρίσεων. Προφανώς η βέλτιστη τιμή αντιστοιχεί στο πλήθος των στιγμιότυπων προς εκμάθηση.

3^η περίπτωση

Και πάλι κριτήριο προσαρμοστικότητας αποτελεί το σκορ των παικτών, αυτή τη φορά όμως από τα παιχνίδια που διεξάγονται μεταξύ τους.

Υπολογισμός απόκλισης από το βέλτιστο

Στο σημείο αυτό έχουμε τη σύγκριση της στρατηγικής των παικτών όπως αυτή εξελίχθηκε, με τη βέλτιστη στρατηγική. Τέτοια όμως στο πρόβλημά μας υπάρχει μόνο στην επίλυσή του με την εκμάθηση συγκεκριμένων στιγμιότυπων. Στη δε δεύτερη περίπτωση υπολογίζεται η απόκλιση από το μεγαλύτερο δυνατό σκορ. Η απόκλιση από το βέλτιστο στην τελευταία περίπτωση χρησιμοποιεί μία εκ των μεθόδων των δύο πρώτων περιπτώσεων.

Κατάταξη των παικτών βάση της Fitness Function

Μέσα από ένα απλό αλγόριθμο κατατάσσονται οι παίκτες από τον καλύτερο προς τον χειρότερο σύμφωνα με το κριτήριο προσαρμοστικότητας που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Ο καλύτερος είναι αυτός με το μεγαλύτερο σκορ και ο χειρότερος αυτός με το μικρότερο.

Έλεγχος τερματισμού του προγράμματος

Ελέγχεται αν κάποιος από τους παίκτες έχει καταφέρει να επιτύχει μόνο νίκες έναντι του “προπονητή”, ή αν έχει δώσει μόνο σωστές ανταποκρίσεις. Ουσιαστικά δηλαδή η απόκλισή του από το βέλτιστο είναι μηδενική, οπότε και τερματίζεται το πρόγραμμα. Σε διαφορετική περίπτωση, συνθήκη τερματισμού αποτελεί ένας μέγιστος αριθμός γενεών.

Αποθήκευση αποτελεσμάτων

Αφού τερματιστεί το πρόγραμμα είτε με την επίτευξη μηδενικής απόκλισης, είτε με την προσέγγιση ενός μεγάλου αριθμού γενεών, αποθηκεύονται τα αποτελέσματα σε τέσσερα αρχεία, που έπονται αναλυτικά με τα ονόματα και τα περιεχόμενά τους.

fmax : αρχείο αποθήκευσης του σκορ του επικρατέστερου σε κάθε γενιά

fmin : αρχείο αποθήκευσης του σκορ του λιγότερο επικρατή σε κάθε γενιά

fwin_loss_pat : αρχείο αποθήκευσης των εκβάσεων του επικρατέστερου σε κάθε γενιά

fweights : αρχείο αποθήκευσης των βαρών του επικρατέστερου

Συγκεκριμένα για το τελευταίο αρχείο αποθήκευσης *fweights*, όταν το πρόγραμμα τερματίζεται με την επίτευξη μηδενικής απόκλισης από κάποιο παίκτη, τα βάρη του παίκτη αυτού είναι αυτά και τα οποία αποθηκεύονται. Στην περίπτωση τερματισμού του προγράμματος σε ένα μέγιστο αριθμό γενεών, αποθηκεύονται τα βάρη του παίκτη που πέτυχε την ελάχιστη απόκλιση ανεξαρτήτου γενιάς.

Τέλος ακολουθούν τα στάδια του *ελιτισμού*, της *επιλογής γονέων*, της *διασταύρωσης* και της *μετάλλαξης*, όπως έχει προηγηθεί αναλυτικά η περιγραφή τους.

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα

6.1 Γενικά

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των πειραμάτων που έγιναν προκειμένου να εκπαιδευθεί το νευρωνικό δίκτυο που κατασκευάστηκε στο παίγνιο της τρίλιζας.

Τα αποτελέσματα αυτά χωρίζονται σε τρεις κύριες κατηγορίες ανάλογα με την κατεύθυνση που επιλέχθηκε για την εκπαίδευση του δικτύου. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση, οι παράμετροι που μεταβάλλονται για διάφορες τιμές των οποίων έγιναν οι πειραματισμοί, είναι κοινές. Πρόκειται για τον αριθμό των γενεών, τον αριθμό των νευρώνων, την πιθανότητα μετάλλαξης, το μέγεθος του πληθυσμού αλλά και τη μορφή της συνάρτησης αποτίμησης προσαρμοστικότητας.

Για κάθε διαφορετικό συνδυασμό των παραμέτρων που μεταβάλλονται γίνονται δέκα ξεχωριστές προσπάθειες - τρεξίματα. Για τα σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε ένας υπολογιστής *Intel Pentium 4* στα *2.80GHz* και *1GB RAM*, με λειτουργικό *Microsoft Windows XP Professional* και περιβάλλον εφαρμογής *Microsoft Visual C++ 6 Enterprise Edition*.

6.2 Κατεύθυνση 1η

Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου με διεξαγωγή παιχνιδιών ενάντια στον προπονητή.

Στην πρώτη αυτή περίπτωση το νευρωνικό δίκτυο προς εκπαίδευση παίζει πρώτο. Ο κάθε παίκτης παίζει 3 σετ των 9 παιχνιδιών με διαφορετική εκκίνηση. Δεδομένου όμως των συμμετριών που λαμβάνονται υπόψη, ουσιαστικά παίζει 9 σετ των 3 παιχνιδιών.

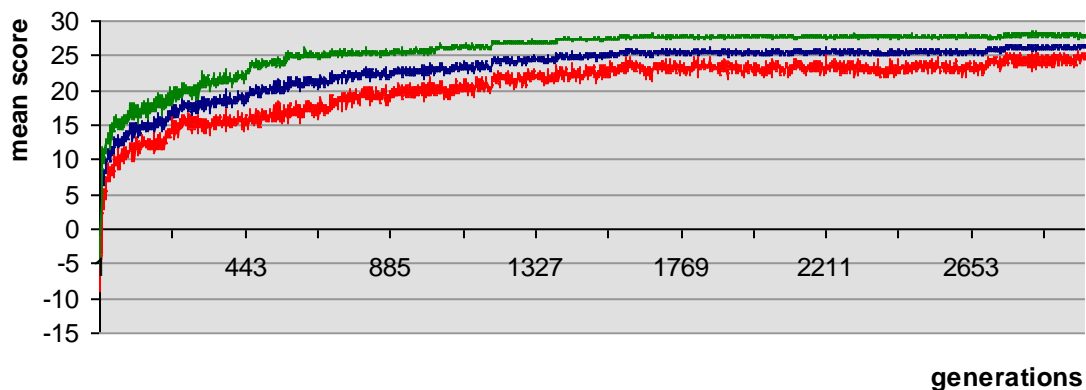
Ο αρχικός πληθυσμός αποτελείται από 40 άτομα. Ένα 10% αυτού συνεχίζει στην επόμενη γενιά με τη διαδικασία του ελιτισμού. Γίνονται προσπάθειες για διάφορες τιμές των γενεών και των νευρώνων. Η πιθανότητα μετάλλαξης παίρνει τις τιμές $p_{mut} = 3\%$ και $p_{mut} = 0.3\%$. Σε γενικές γραμμές η εκπαίδευση επιτυγχάνεται στις 2000 περίπου γενιές. Η καλύτερη μέση απόδοση παρατηρείται στο νευρωνικό δίκτυο με 55 νευρώνες. Για μερικούς περισσότερους ή λιγότερους νευρώνες προκύπτουν παρόμοια ή χειρότερα αποτελέσματα, ενώ για μεγαλύτερη πιθανότητα μετάλλαξης φαίνεται να γίνεται τυχαία η αναζήτηση της βέλτιστης στρατηγικής.

Η συνάρτηση αποτίμησης ποικίλλει και παίρνει τέσσερις διαφορετικές μορφές $\{+1, -1, 0\}$, $\{+3, -1, 0\}$, $\{+10, -1, 0\}$ και $\{+1, -10, 0\}$ με τις τιμές να αναφέρονται σε νίκη, ήττα και ισοπαλία αντίστοιχα. Αφού λοιπόν τα σετ των παρτίδων είναι 3, το μέγιστο δυνατό σκορ για την πρώτη

και την τελευταία περίπτωση είναι 27, για τη δεύτερη 81 και για την τρίτη 270. Το δε ελάχιστο δυνατό σκορ για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις είναι -27 και για την τελευταία -270.

Εν γένει, με τη χρήση της $\{+1, -1, 0\}$ συνάρτησης αποτίμησης, η συμπεριφορά του νευρωνικού δικτύου σε κάθε μία από τις δέκα προσπάθειες που γίνονται είναι λίγο πολύ κοινή. Με διάστημα εμπιστοσύνης 95% , τα άνω και κάτω όρια της μέσης απόδοσης* είναι πολύ κοντά σε αυτή.

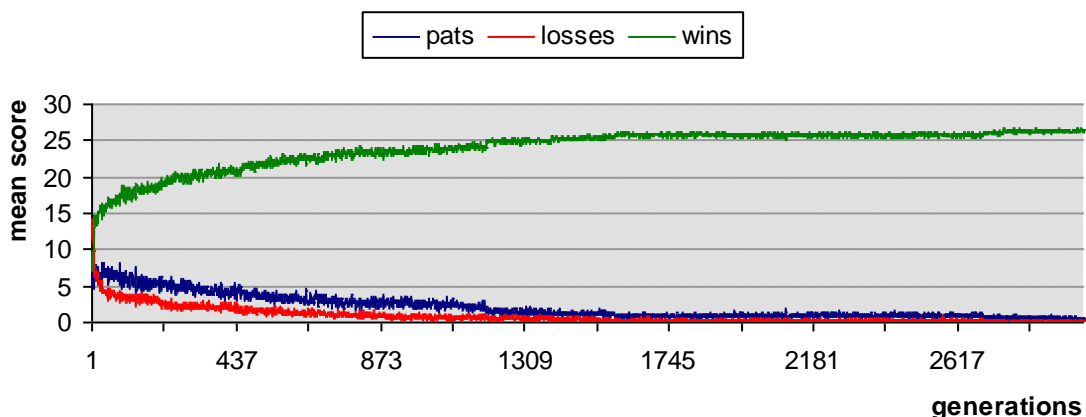
μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



Σχήμα 42: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη με 55 νευρώνες, $p_{mut} = 0.3\%$, και $f(x) : \{+1, -1, 0\}$

Το μέγιστο σκορ που επιτυγχάνεται είναι και το μέγιστο δυνατό σε όλες σχεδόν τις προσπάθειες που γίνονται και πολλές φορές σε ελάχιστες γενιές. Πολύ σύντομα λοιπόν ο αριθμός των νικών εμφανίζεται πολύ μεγαλύτερος από αυτόν των ηττών αλλά και των ισοπαλιών, οι οποίες τείνουν να εκμηδενιστούν.

μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

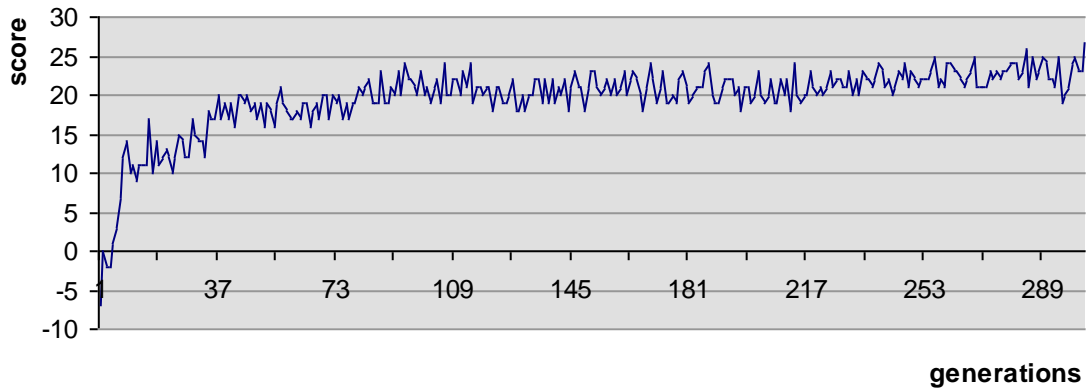


Σχήμα 43: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

* Ο υπολογισμός των άνω και κάτω ορίων έγινε με χρήση της t - κατανομής

Τουλάχιστον ένας παίκτης καταφέρνει να επιτύχει 27 νίκες σε 27 παιχνίδια αντίστοιχα. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να εγγυηθεί πως παίζει βέλτιστα λόγω της τυχαιότητας σε κάποιες κινήσεις του προπονητή αλλά και την ανύπαρκτη ευελιξία του σε άλλες. Ωστόσο μπορούμε να πούμε με σιγουριά πως ο παίκτης έχει αναπτύξει στρατηγική και εκμεταλλεύεται σε μεγάλο βαθμό τις λάθος επιλογές του αντιπάλου, με αποτέλεσμα πολλές φορές να τον κερδίζει.

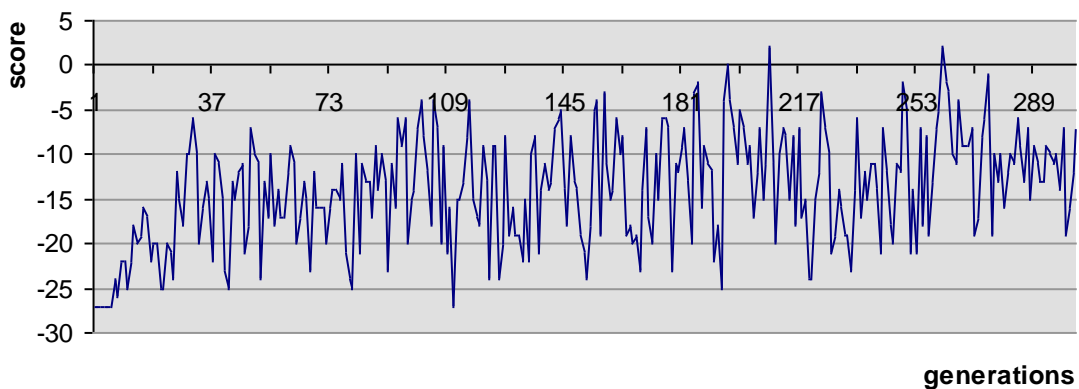
απόδοση καλύτερου παίκτη



Σχήμα 44: Απόδοση ενός καλύτερου παίκτη με 27 νίκες σε ισάριθμα παιχνίδια

Ακόμη είναι εμφανής και η βελτίωση του σκορ του αντίστοιχου χειρότερου παίκτη. Παρόλο που δεν επιτυγχάνει κάποιο αξιοσημείωτο επίπεδο, αποδεικνύει την παράλληλη εξέλιξη όλου του πληθυσμού και όχι μόνο ενός ατόμου.

απόδοση χειρότερου παίκτη



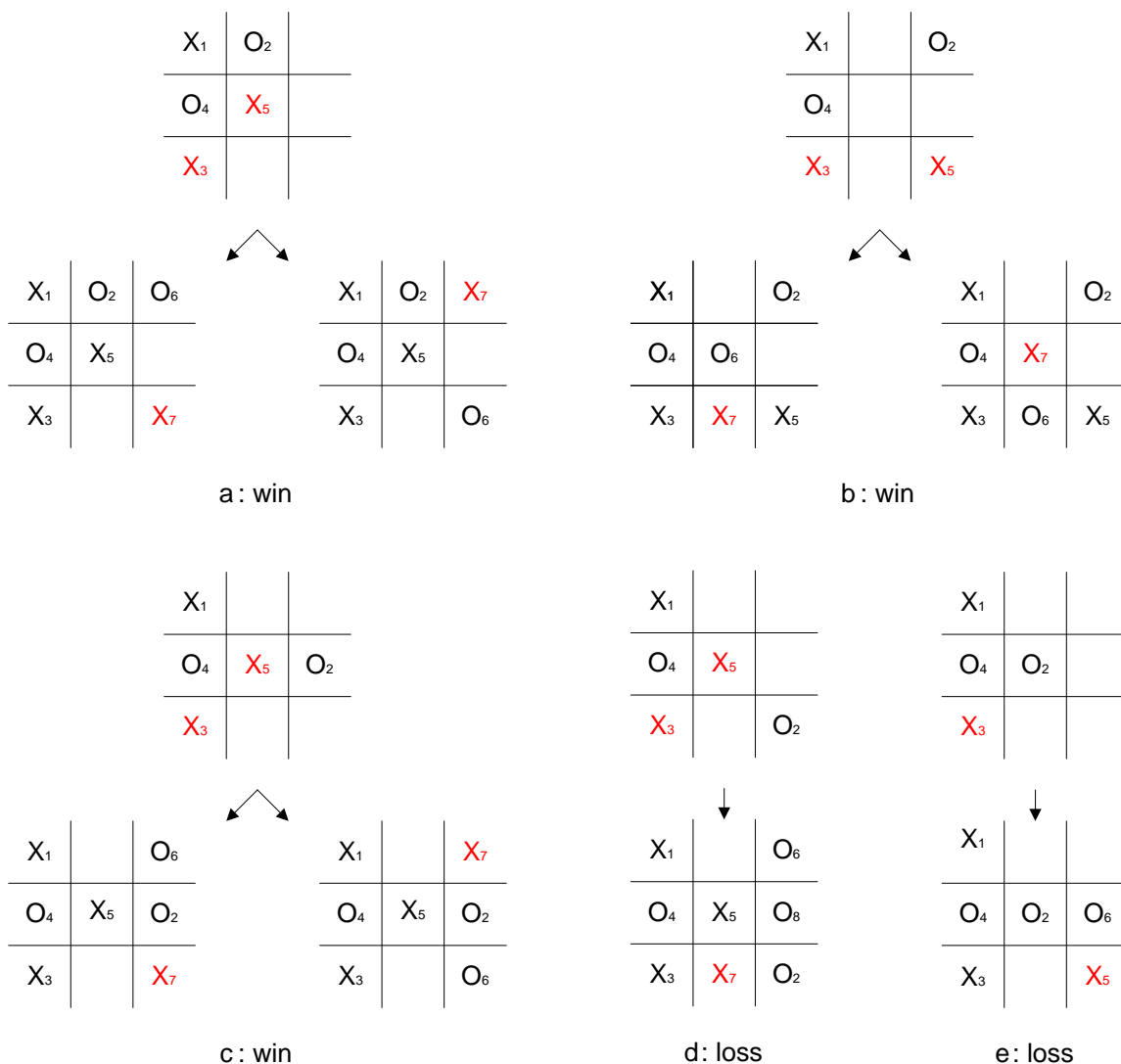
Σχήμα 45: Απόδοση του αντίστοιχου χειρότερου παίκτη

Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρούνται και στη χρήση της $\{+3, -1, 0\}$ και $\{+10, -1, 0\}$ συνάρτησης αποτίμησης, με τη διαφορά πως δεν προσφέρουν την ίδια σταθερότητα στη

συμπεριφορά κατά τις προσπάθειες. Με το ίδιο διάστημα εμπιστοσύνης λοιπόν η διαφορά των άνω και κάτω ορίων από τη μέση απόδοση είναι μεγαλύτερη.

Λίγο διαφορετικά είναι τα αποτελέσματα στη χρήση της $\{+1, -10, 0\}$ συνάρτησης αποτίμησης. Τα άνω και κάτω όρια της μέσης απόδοσης είναι πολύ κοντά σε αυτή, εντούτοις, αν και πολύ σύντομα εξαφανίζονται οι στρατηγικές που ηττώνται, στη συνέχεια δε φαίνεται να εξελίσσεται η εκπαίδευση με τον ίδιο ρυθμό. Σε λίγες μόνο προσπάθειες το επιτευχθέν σκορ είναι και το μέγιστο δυνατό και αυτό συνήθως μετά από αρκετές γενιές. Ωστόσο, αν ο εκμηδενισμός των ηττών θεωρείται υψηλότερης σημαντικότητας από ό,τι η επίτευξη νίκης, η συνάρτηση αποτίμησης $\{+1, -10, 0\}$ αποτελεί πολύ καλύτερη λύση από τη $\{+1, -1, 0\}$.

Οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες παρατηρούνται όλα τα παραπάνω συμπεράσματα καθώς και τα σχετικά γραφήματα, παρατίθενται στο παράρτημα Β.



Σχήμα 46: Δέντρο πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη

Το δέντρο των πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη με χρήση της συνάρτησης αποτίμησης $\{+1, -1, 0\}$ δίνεται στο Σχήμα 46. Αυτό βέβαια δε σημαίνει πως ο καλύτερος παίκτης σε κάθε προσπάθεια εκ των δέκα αναπτύσσει την ίδια στρατηγική. Σύμφωνα με το δέντρο λοιπόν ο συγκεκριμένος παίκτης θα επιτύχει 3 νίκες και θα υποστεί 2 ήττες σε σύνολο 5 περιπτώσεων.

Αξιοσημείωτο είναι πως η τέταρτη περίπτωση στην οποία και αποτυγχάνει το νευρωνικό δίκτυο, είναι συμμετρική της δεύτερης περίπτωσης, στην οποία και εξαναγκάζει τον αντίπαλο σε ήττα. Αυτό συμβαίνει, αφενός γιατί η συμμετρία σε αυτό το στιγμιότυπο δεν ανήκει σε αυτές που λαμβάνονται υπόψη επομένως δεν την αναγνωρίζει, αφετέρου γιατί, με 27 παιχνίδια ενάντια στον προπονητή, ελάχιστα είναι τα στιγμιότυπα που αντικρίζει σε μια γενιά σε σχέση με το σύνολό τους, κάποια ίσως και καθόλου.

Είναι ακόμη προφανές από το δέντρο πιθανών απαντήσεων, πως ο παίκτης για αρκετές διαφορετικές εισόδους δίνει κοινή έξοδο. Αυτό οδηγεί στη σκέψη πως πιθανόν τα διαστήματα τιμών των βαρών πρέπει να αναθεωρηθούν.

Επίσης όπως παρατηρήθηκε, όταν η συμπεριφορά του αντιπάλου δεν είναι η αναμενόμενη, το νευρωνικό δίκτυο δεν καταφέρνει να δώσει τη σωστή και συνήθως προφανή ανταπόκριση. Αυτό διότι ο “προπονητής”, με τον οποίο και εκπαιδεύεται το νευρωνικό δίκτυο, δε δίνει ποτέ μη αναμενόμενες κινήσεις, με αποτέλεσμα αυτό να τις αγνοεί.

6.3 Κατεύθυνση 2η

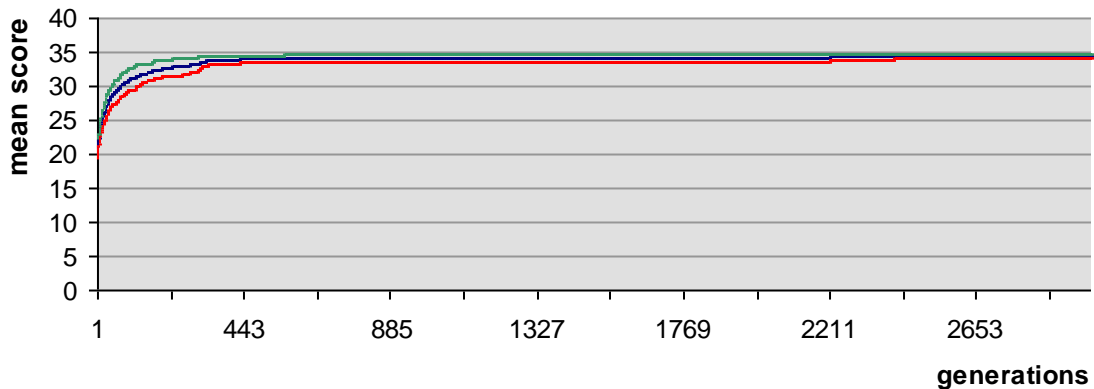
Εκπαίδευση του νευρωνικού δικτύου μέσω της εκμάθησης συγκεκριμένων ανταποκρίσεων.

Στην περίπτωση αυτή γίνεται χρήση ενός κανονικοποιημένου RBF νευρωνικού δικτύου. Ουσιαστικά λοιπόν ο αριθμός των νευρώνων είναι ίσος με τα συγκεκριμένα στιγμιότυπα των οποίων τις ανταποκρίσεις καλείται να εκπαιδευθεί. Επειδή όπως είναι αναμενόμενο τα στιγμιότυπα στο σύνολό τους είναι εξαιρετικά πολλά, η προσπάθεια υλοποιήθηκε για την περίπτωση που το νευρωνικό δίκτυο προς εκπαίδευση παίζει πρώτο και ξεκινά από το κέντρο. Κατασκευάζοντας το δέντρο αποφάσεων, τα στιγμιότυπα τελικά στα οποία πρέπει να εκπαιδευθεί το νευρωνικό δίκτυο είναι 36.

Ο κάθε παίκτης τροφοδοτείται με τα 36 στιγμιότυπα και αποτιμάται από τις ανταποκρίσεις του. Για κάθε σωστή ανταπόκριση παίρνει ένα βαθμό επομένως το μέγιστο σκορ που δύναται να επιτευχθεί είναι 36. Η πιθανότητα μετάλλαξης έχει την τιμή $p_{mut} = 0.3\%$. Το μέγεθος του πληθυσμού είναι όπως και προηγουμένως 40, με ελίτ 4 ατόμων.

Πολύ σύντομα, στις 300 με 400 περίπου γενιές, όλα τα δίκτυα - παίκτες επιτυγχάνουν υψηλά σκορ. Θεωρητικά δύνανται μετά από άγνωστο αριθμό γενεών να αγγίξουν το μέγιστο σκορ. Τα πάνω και κάτω όρια της μέσης απόδοσης - με 95% διάστημα εμπιστοσύνης - είναι πολύ κοντά σε αυτή, σχεδόν ταυτίζονται.

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη

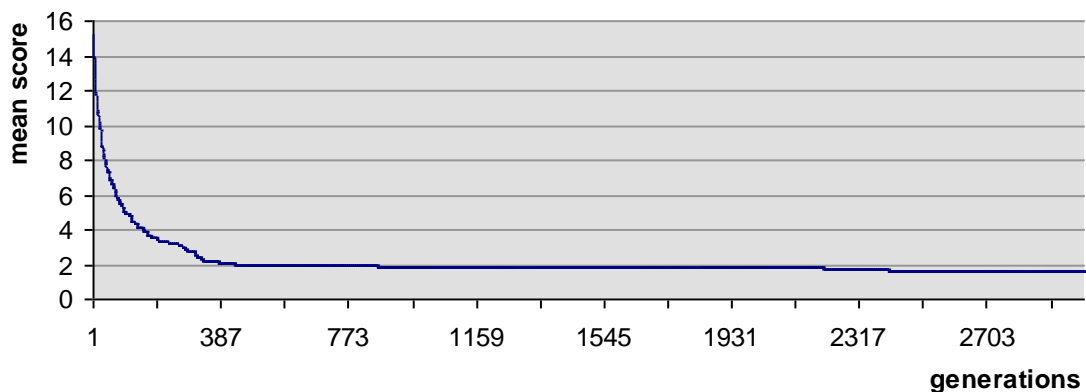


Σχήμα 47: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

Όπως είναι φανερό η μορφή του γραφήματος (βηματική) διαφέρει από την αντίστοιχη της προηγούμενης κατεύθυνσης. Αυτό οφείλεται στον ελιτισμό που πραγματοποιείται σε συνδυασμό με το γεγονός πως τα στιγμιότυπα που αντικρίζει το δίκτυο είναι συγκεκριμένα. Κατά συνέπεια σε καμία περίπτωση ο καλύτερος παίκτης μιας γενιάς δε μπορεί να είναι χειρότερος από τον καλύτερο παίκτη της προηγούμενης γενιάς.

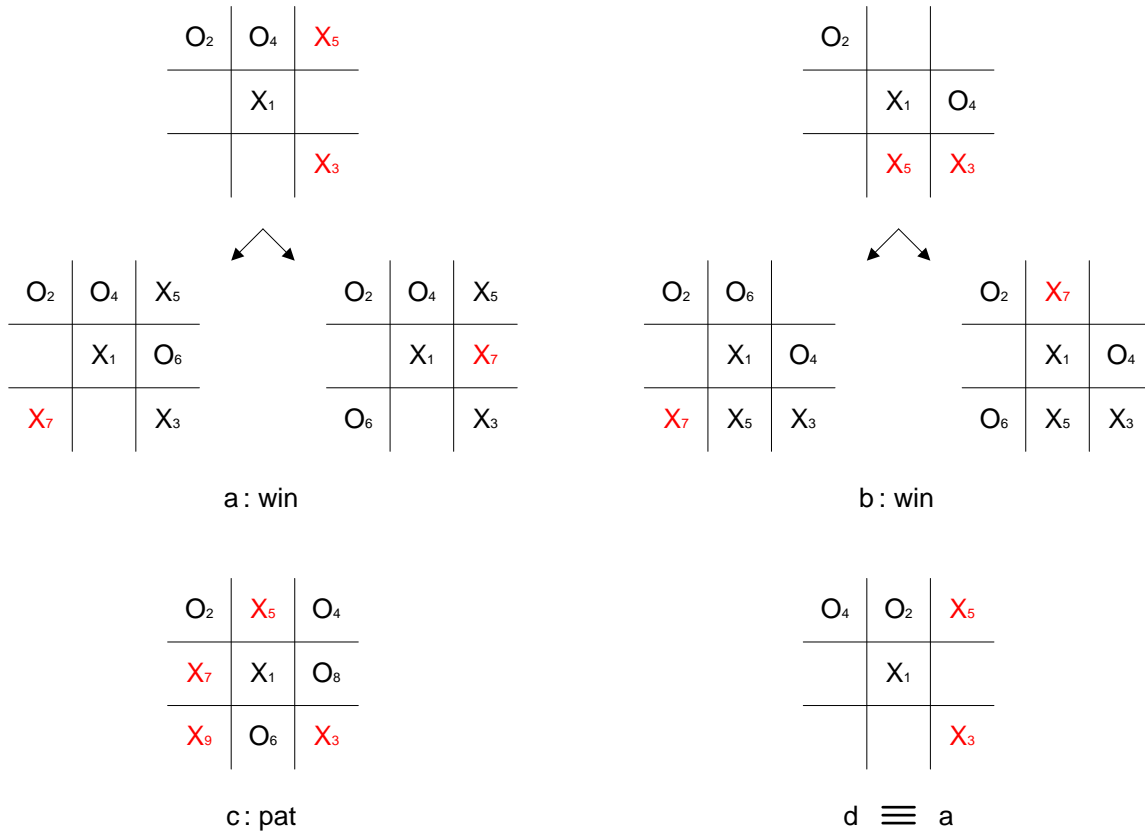
Η απόκλιση από το βέλτιστο ενός καλύτερου παίκτη με σκορ 35 στη συνέχεια,

απόκλιση μέσης απόδοσης καλύτερου παίκτη



Σχήμα 48: Απόκλιση από βέλτιστο καλύτερου παίκτη

ενώ ακολουθεί το δέντρο των ανταποκρίσεών του.



Σχήμα 49: Δέντρο πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη

Κατά τα φαινόμενα ο παίκτης ανταποκρίνεται τέλεια στο παίγνιο της τρίλιζας. Εκεί λοιπόν που αναμένεται να κάνει λάθος, αφού πέτυχε σκορ 35 με μέγιστο 36, είναι στην περίπτωση που ο αντίπαλος δε θα δώσει μια λογικά σωστή κίνηση - π.χ. ενώ δύναται να σταματήσει επικείμενη τρίλιζα, δεν το κάνει. Πιθανόν ο παίκτης, το στιγμιότυπο στου οποίου την ανταπόκριση αποτυγχάνει, δεν το αντίκρισε αρκετές φορές ή και καθόλου με αποτέλεσμα να μην το γνωρίζει. Γεγονός το οποίο προφανώς οφείλεται στην τυχαία μορφή των στιγμιότυπων αλλά και στο τυχαίο πλήθος των φορών που τα αντικρίζει ο κάθε παίκτης.

6.4 Κατεύθυνση 3η

Εκπαίδευση ενός νευρωνικού δικτύου με διεξαγωγή παιχνιδιών μεταξύ νευρωνικών δικτύων.

Ο κάθε παίκτης παίζει από ένα παιχνίδι έναντι όλων των άλλων παικτών. Όπως και προηγουμένως γίνονται προσπάθειες για διάφορες τιμές των γενεών, των νευρώνων αλλά και του μεγέθους του πληθυσμού. Η πιθανότητα μετάλλαξης θεωρείται $p_{mut} = 0.3\%$. Εφαρμόζεται ελιτισμός στο 10% του πληθυσμού.

Σε όλες τις προσπάθειες, αποτιμώντας τον παίκτη, είτε από την απόδοσή του σε σχέση με τον “προπονητή”, είτε από τις ανταποκρίσεις του σε συγκεκριμένα στιγμιότυπα, παρατηρείται μια σχεδόν εξελικτική πορεία. Τελικά όμως δεν καταλήξαμε σε μια συγκεκριμένη μορφή ενός νευρωνικού δικτύου που να εκπαιδεύεται σε ικανοποιητικό βαθμό. Έτσι λοιπόν και έπειτα από την εμπειρία που αποκτήσαμε από τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις επιλέγεται η εξής μοντελοποίηση.

Ο κάθε παίκτης αντιμετωπίζει έναν “προπονητή” ο οποίος όμως παίζει τυχαία. Διεξάγονται κάθε φορά 100 παιχνίδια αναμεταξύ τους, από τις εκβάσεις των οποίων αποτιμώνται οι παίκτες. Ο αλγόριθμος εκπαίδευσης τερματίζεται με την εκμάθηση 10 στιγμιότυπων. Τα 10 αυτά στιγμιότυπα προέκυψαν φιλτράροντας το σύνολο των 36 αν θεωρηθεί πως ο αντίπαλος παίκτης κάνει πάντα λογικές κινήσεις. Περιορίζονται τα διαστήματα τιμών των βαρών και πλέον τα κέντρα και οι διασπορές παίρνουν τιμές από το $[-0.5, 0.5]$ και οι σταθμιστές από το $[-1.0, 1.0]$. Η επιλογή αυτής της μοντελοποίησης εξυπηρετεί τους παρακάτω βασικούς σκοπούς:

- Ο παίκτης αξιολογείται από τις αντιδράσεις του ακόμη και όταν ο αντίπαλος δεν κάνει λογικές κινήσεις.
- Τα νέα διαστήματα τιμών γίνονται ακόμη μικρότερα κι έτσι περιορίζεται ακόμη περισσότερο ο αριθμός των νευρώνων που συμμετέχουν σε κάθε έξοδο.
- Ο αριθμός των παρτίδων που διεξάγονται προκειμένου να αποτιμηθούν οι παίκτες δεν περιορίζεται από τον πληθυσμό των ατόμων και μπορούν να είναι πολύ περισσότερες προσφέροντας μεγαλύτερη ευελιξία στη συνάρτηση αποτίμησης. Ακόμη λοιπόν και για ένα μικρό πληθυσμό η προσαρμοστικότητα των ατόμων είναι διακριτή.
- Ελαχιστοποίηση των στιγμιότυπων προς εκμάθηση, το οποίο σε συνάρτηση με το μικρό μέγεθος πληθυσμού δίνει ένα πολύ πιο σύντομο αλγόριθμο.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω μοντελοποίηση ήταν εκπληκτικά. Τουλάχιστον ένα νευρωνικό δίκτυο, αν και ύστερα από πολλές γενιές - περισσότερες από 50000 -, καταφέρνει να επιτύχει το μέγιστο σκορ. Το δέντρο πιθανών απαντήσεων ενός καλύτερου παίκτη ταυτίζεται με αυτό της προηγούμενης κατεύθυνσης (Σχήμα 49), με την προσθήκη της ανταπόκρισης στο κενό πλέγμα τρίλιζας. Πράγματι η ανταπόκριση ενός καλύτερου παίκτη στο κενό πλέγμα τρίλιζας είναι η 5^η θέση, που αντιστοιχεί στο κέντρο του πλέγματος.

Καταφέραμε λοιπόν – υπό των παραπάνω προϋποθέσεων - να δημιουργήσουμε έναν παίκτη που ανταποκρίνεται άριστα στο παίγνιο της τρίλιζας χωρίς καμία πρότερη γνώση και πληροφορία. Απλά, με τις εκβάσεις τυχαίων παιχνιδιών οι παίκτες εξελίσσονται, με αποτέλεσμα να ανταποκρίνονται όλο και καλύτερα στο παίγνιο της τρίλιζας κι έπειτα από ένα μεγάλο αριθμό γενεών να προκύπτει ο άριστος παίκτης που προαναφέρθηκε.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα - Μελλοντικές επεκτάσεις

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια εκπαίδευσης ενός νευρωνικού δικτύου με έναν εξελικτικό αλγόριθμο στο παίγνιο της τρίλιζας.

Ο σκοπός ήταν να καταλήξουμε στην εκμάθηση του παιγνίου με μοναδικό γνώμονα τις εκβάσεις των παιχνιδιών μεταξύ των - υπό εκπαίδευση - νευρωνικών δικτύων. Οι προσπάθειες προς την κατεύθυνση αυτή δεν έδειξαν αξιόλογα αποτελέσματα.

Στραφήκαμε λοιπόν στην εκπαίδευση του δικτύου με κάποιο “προπονητή” που παίζει καλά όχι όμως βέλτιστα. Αρχικά καταφέραμε να καταλήξουμε σε ένα παίκτη ικανό να κερδίζει τις περισσότερες φορές, ωστόσο σε άλλες να αποτυγχάνει.

Εν συνεχεία εκπαιδύσαμε ένα νευρωνικό δίκτυο με τις ανταποκρίσεις σε συγκεκριμένα στιγμιότυπα. Η προσπάθεια αυτή έδωσε ένα παίκτη που ανταποκρίνεται σχεδόν τέλεια στο παίγνιο της τρίλιζας.

Τελικά κάναμε ένα συνδυασμό των παραπάνω περιπτώσεων. Το νευρωνικό δίκτυο εκπαιδεύεται αντιμετωπίζοντας έναν “προπονητή”, που αυτή τη φορά παίζει τυχαία, με στόχο την εκμάθηση συγκεκριμένων ανταποκρίσεων. Ο εκπαιδευμένος παίκτης δύναται να κερδίσει έναν οποιοδήποτε αντίπαλο όταν αυτός υποπέσει σε κάποια λάθος κίνηση, διαφορετικά θα παραχωρήσει ισοπαλία.

Όλα τα παραπάνω πειράματα δείχνουν την ικανότητα της εξέλιξης των νευρωνικών δικτύων στην κατασκευή στρατηγικών στο παίγνιο της τρίλιζας. Το σημαντικό είναι πως σε καμία περίπτωση δε δίνονται πληροφορίες στο νευρωνικό δίκτυο για το αντικείμενο του παιγνίου, ούτε και καμία γνώση για τη βέλτιστη στρατηγική. Ιδιαίτερα στην πρώτη και τρίτη περίπτωση, η μοναδική πληροφορία που δίνεται σε σχέση με την ποιότητα της εκάστοτε στρατηγικής είναι οι τελικές εκβάσεις των παιχνιδιών.

Αν και ο αρχικός σκοπός δεν επιτεύχθηκε τελικά, οι ευφυείς συμπεριφορές που καταγράφηκαν δίνουν υποσχέσεις για ακόμη καλύτερα αποτελέσματα. Πιθανόν μια νέα κωδικοποίηση των εισόδων, αναθεώρηση των διαστημάτων τιμών των μεταβλητών των radial basis συναρτήσεων, ένας διαφορετικός συνδυασμός των παραμέτρων του γενετικού αλγόριθμου ή ακόμα και ένα εξ ολοκλήρου διαφορετικό μοντέλο νευρωνικού δικτύου να έδινε βέλτιστες στρατηγικές.

Παράλληλα είναι εμφανής η αναλογία που υπάρχει στις στρατηγικές που αναπτύσσονται στα εξελικτικά παίγνια και στον τομέα λήψης αποφάσεων με την έννοια επιλογής της βέλτιστης αναμεταξύ πολλών εφικτών. Η περαιτέρω επομένως μελέτη πάνω σε στρατηγικές εξελικτικών παιγνίων είναι επιθυμητή με την προσμονή χρήσιμων αλλά και αξιοποιήσιμων αποτελεσμάτων.

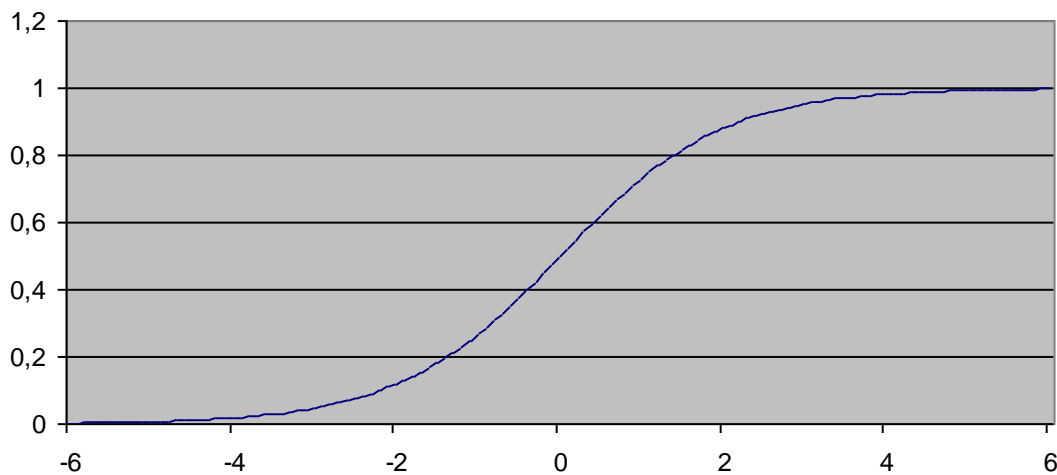
Παράρτημα Α

Α.1 Σιγμοειδής συνάρτηση

Οι σιγμοειδείς συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις που σχηματίζουν το γράμμα S. Το χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι πως όσο η είσοδός τους τείνει στο $-\infty$ η έξοδος τείνει στο 0, ενώ όσο η είσοδος τείνει στο ∞ η έξοδος τείνει στο 1. Η σιγμοειδής συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x - b))}$$

Οι παράμετροι είναι ο συντελεστής κλίσης a και το βήμα μετατόπισης b . Παρακάτω δίνεται η σιγμοειδής συνάρτηση με κλίση $a = 1$ και βήμα $b = 0$.



Σχήμα 50: Sigmoid function

Α.2 Radial συναρτήσεις

Οι radial συναρτήσεις (RBF) είναι μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων. Το χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι πως η έξοδός τους μειώνει (ή αυξάνει) μονοτονικά με την απόσταση από ένα

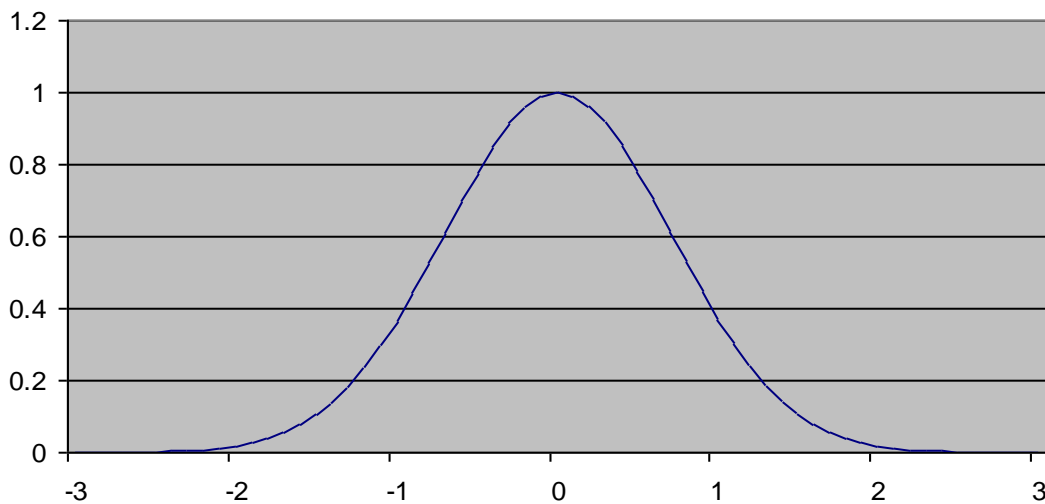
κεντρικό σημείο. Το κέντρο, η απόσταση από αυτό και η συγκεκριμένη μορφή της radial συνάρτησης αποτελούν τις παραμέτρους του μοντέλου, όλες σταθερές εάν είναι γραμμικό.

Μια τυπική radial συνάρτηση είναι η Gauss η οποία, στην περίπτωση κλιμακωτών εισόδων, είναι

$$h(x) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{r^2}\right)$$

Οι παράμετροι είναι το κέντρο c και η ακτίνα r . Παρακάτω δίνεται η Gaussian RBF με κέντρο $c = 0$ και ακτίνα $r = 1$.

Μια Gaussian RBF μονοτονικά μειώνει καθώς η απόσταση από το κέντρο αυξάνει.

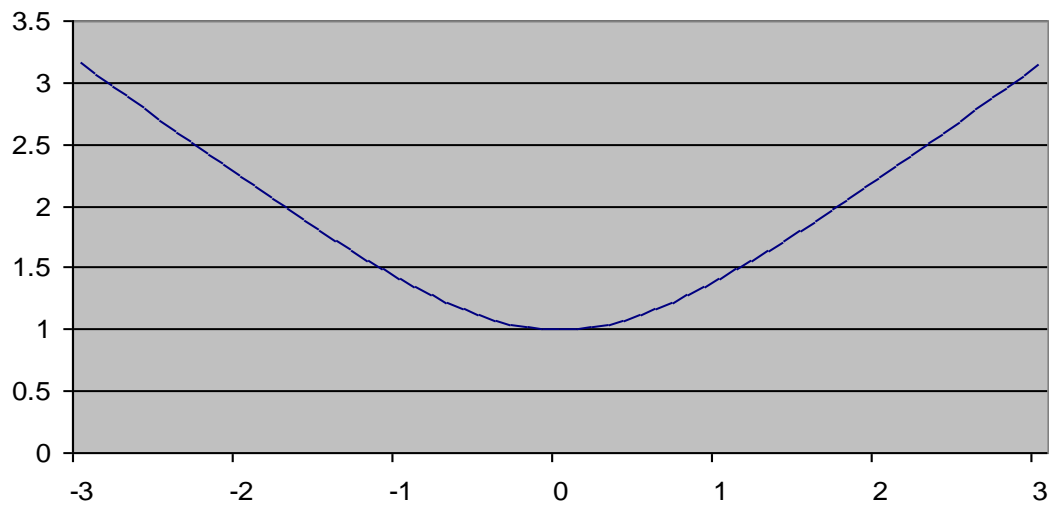


Σχήμα 51: Gaussian RBF

Σε αντίθεση, μια multiquadratic RBF η οποία, στην περίπτωση κλιμακωτών εισόδων, είναι

$$h(x) = \frac{\sqrt{r^2 + (x-c)^2}}{r}$$

μονοτονικά αυξάνει καθώς αυξάνει η απόσταση από το κέντρο (βλ. σχήμα).



Σχήμα 52: *Multiquadratic RBF*

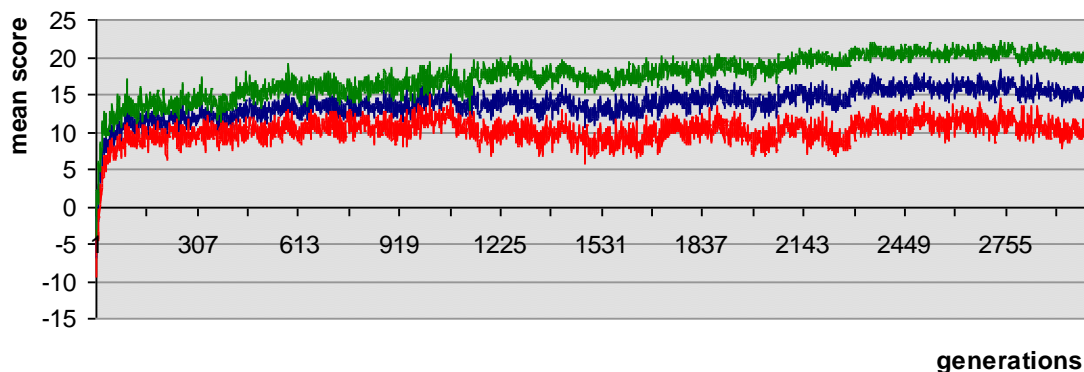
Οι Gaussian RBF είναι “τοπικές” συναρτήσεις (δίνουν σημαντική έξοδο μόνο για την περιοχή γύρω από το κέντρο) και χρησιμοποιούνται πολύ περισσότερο από τις multiquadratic RBF οι οποίες έχουν γενική έξοδο. Είναι επίσης και βιολογικά πιο εύλογες γιατί είναι πεπερασμένες.

Παράρτημα Β

Ακολουθούν διάφορα αποτελέσματα για την περίπτωση που το νευρωνικό δίκτυο αντιμετωπίζει τον προπονητή.

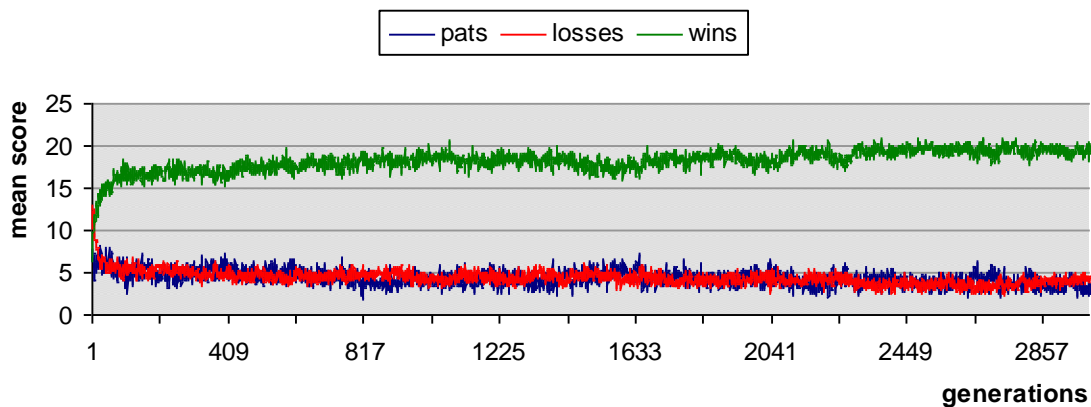
Case 1	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	55
Iterations	3000
Mutation probability	3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+1, -1, 0}

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



Σχήμα 53: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

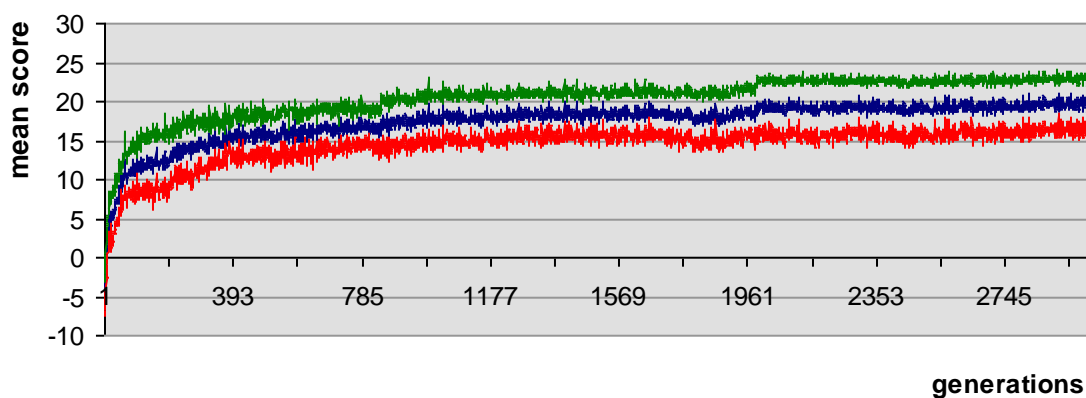
μέση πμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη



Σχήμα 54: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

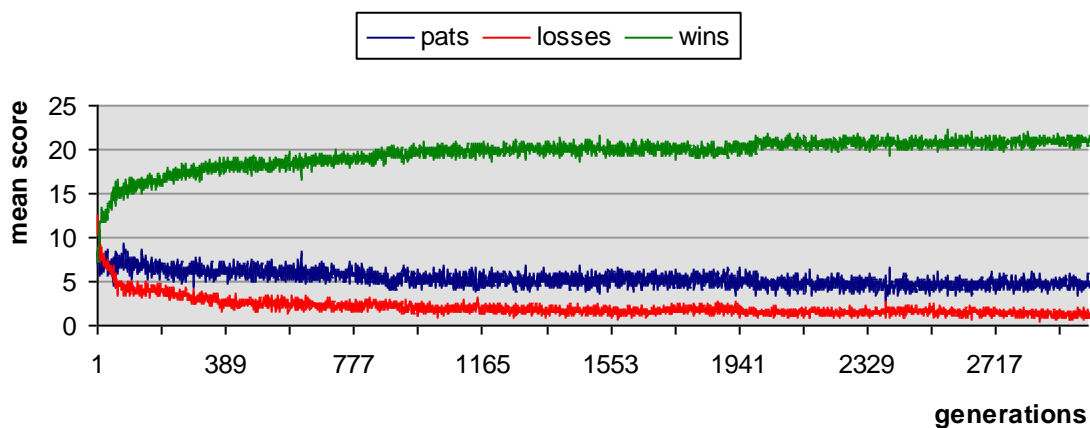
Case 2	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	50
Iterations	3000
Mutation probability	0.3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+1, -1, 0}

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



Σχήμα 55: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

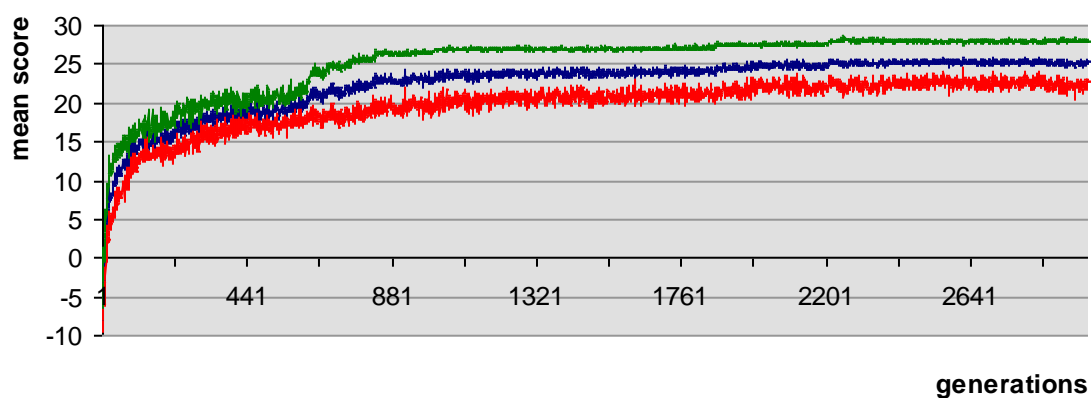
μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη



Σχήμα 56: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

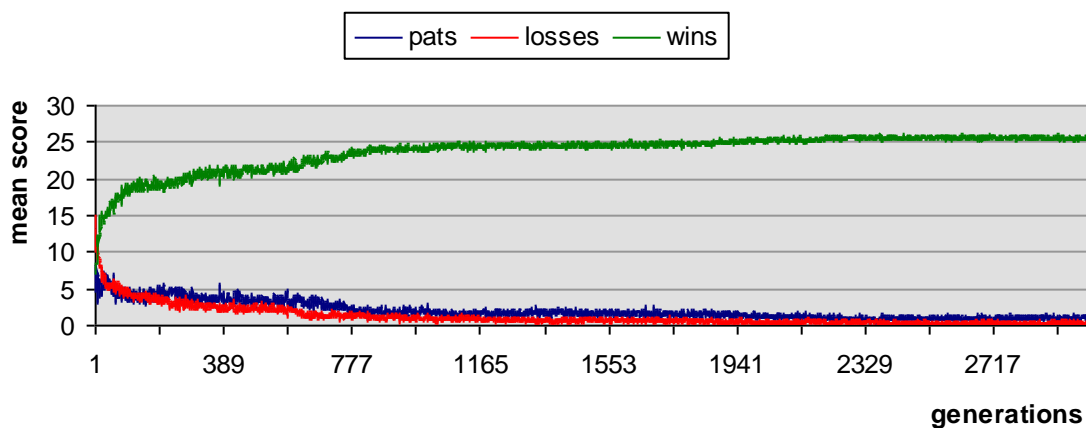
Case 3	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	60
Iterations	3000
Mutation probability	0.3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+1, -1, 0}

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



Σχήμα 57: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

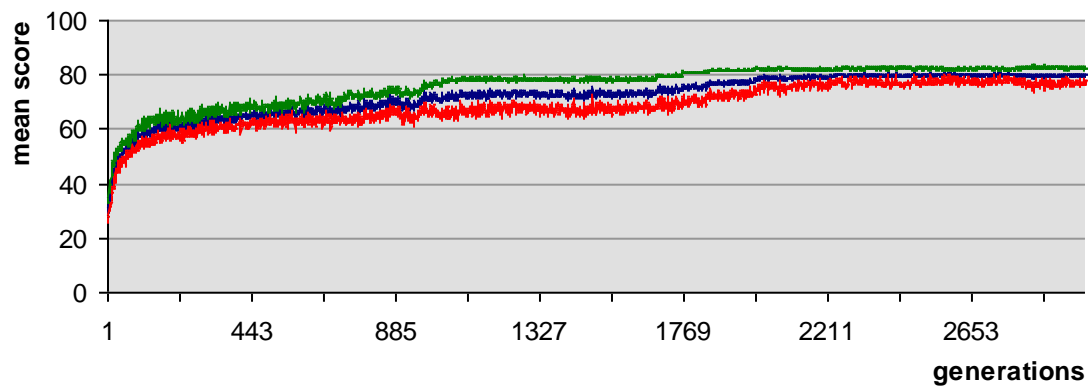
μέση πμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη



Σχήμα 58: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

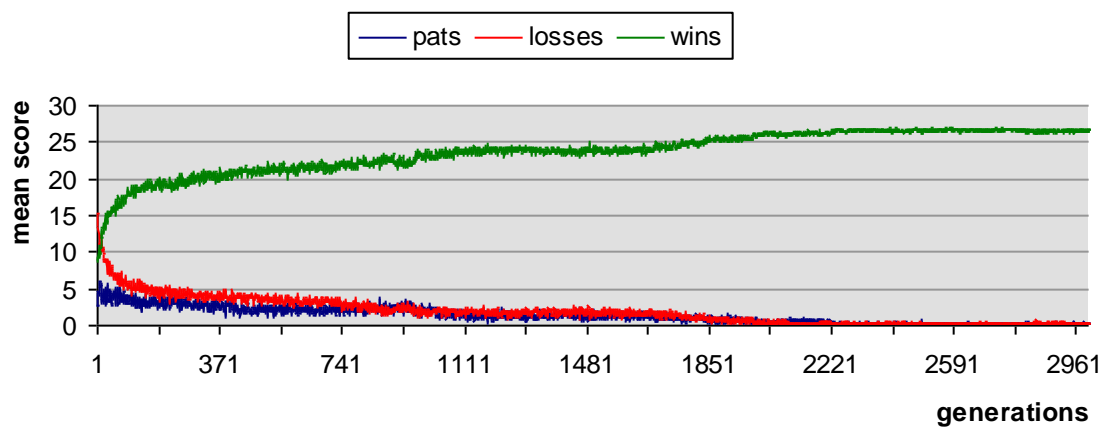
Case 4	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	55
Iterations	3000
Mutation probability	0.3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+3, 0, 1}

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



Σχήμα 59: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

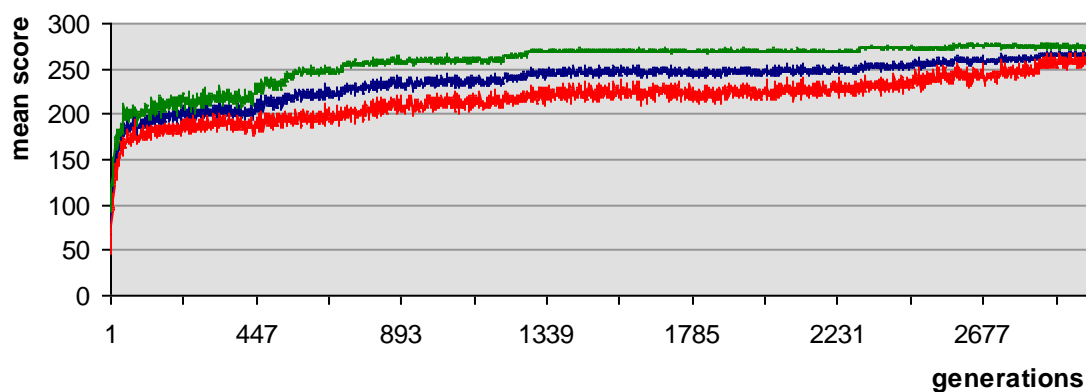
μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη



Σχήμα 60: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

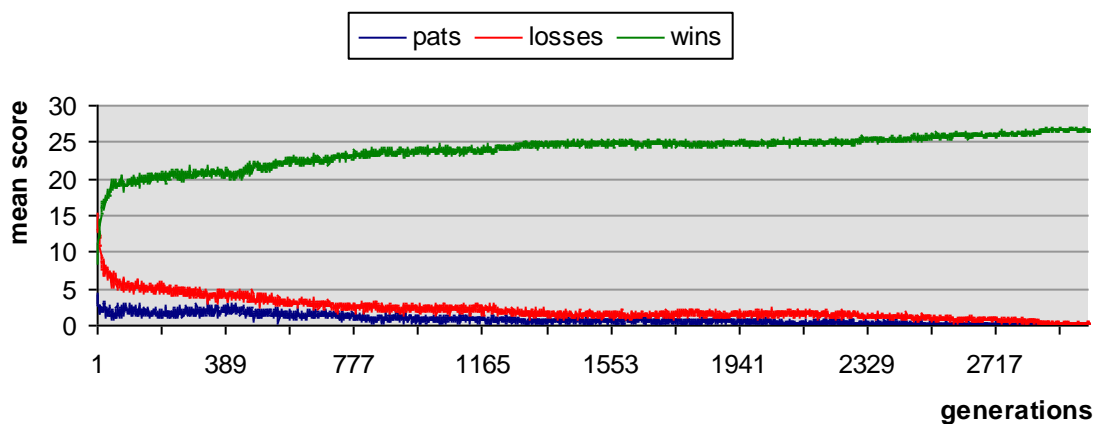
Case 5	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	55
Iterations	3000
Mutation probability	0.3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+10, -1, 0}

μέση απόδοση του καλύτερου παίκτη



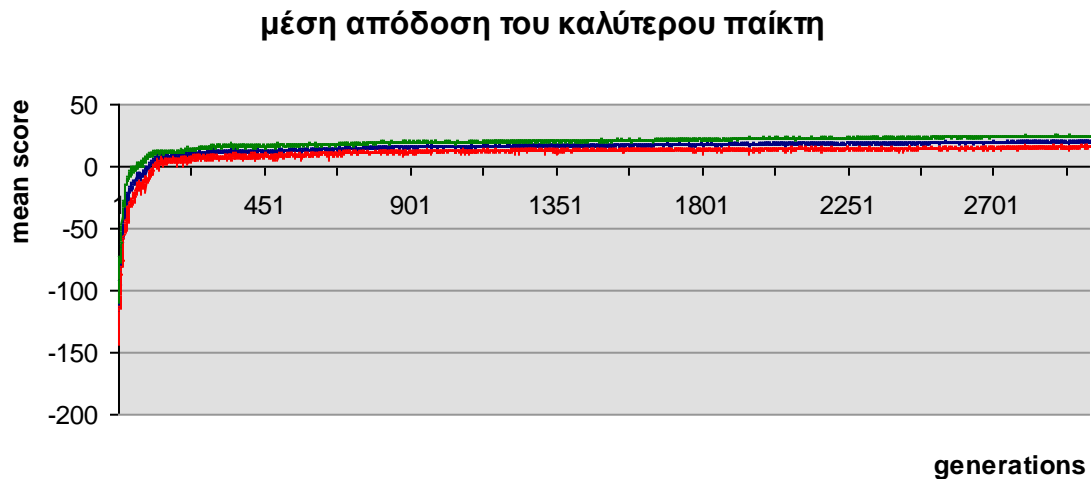
Σχήμα 61: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη

μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

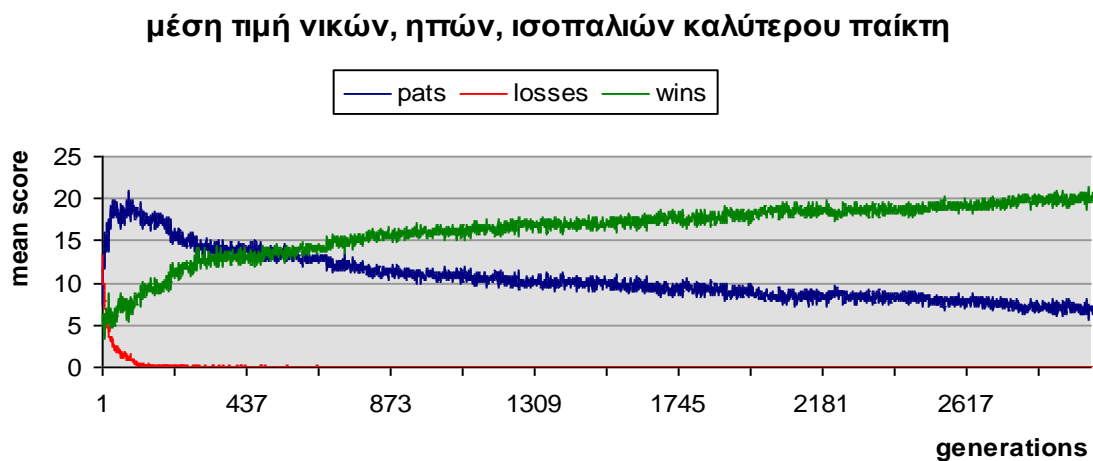


Σχήμα 62: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

Case 6	Neural against Triliza, neural plays first
Neurons	55
Iterations	3000
Mutation probability	0.3%
Fitness function {win, loss, pat}	{+1, -10, 0}



Σχήμα 63: Μέση απόδοση καλύτερου παίκτη



Σχήμα 64: Μέση τιμή νικών, ηττών, ισοπαλιών καλύτερου παίκτη

Βιβλιογραφία

Βιβλία

S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Macmillan College Publishing Company, Inc, 1994

D. B. Fogel, *Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*, Piscataway, N.J.: IEEE Press, 1995

Γ. Γιαννακάκης, *Εφαρμογή Εξελικτικών Αλγορίθμων στο Ερευνητικό Πεδίο της Τεχνητής Ζωής*, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, 1999

M. Waite, S. Prata, The Waite Group, *C: Step - By - Step*, The Waite Group, 1989

K. Jamsa, Ph.D, M.B.A., *Jamsa's C/C++/C# Programmer's Bible: The Ultimate Guide to C/C++/C# Programming*, Onword Press, 2002

Papers

K. Chellapilla, D. B. Fogel, *Evolution, Neural Networks, Games, and Intelligence*, Proc. IEEE, Vol. 87:9, Sept., pp. 1471-1496, 1999

D. B. Fogel, *Using Evolutionary Programming to Construct Neural Networks that are Capable of Playing Tic Tac Toe*, Proc. 1995 IEEE Intern. Conf. on Neural Networks, San Francisco, CA, pp. 875-880, 1993

A. M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, Mind, Vol. 59, pp. 433-460, 1950

I. Rojas, M. Anguita, E. Ros, H. Pomares, O. Valenzuela, A. Prieto, *What are the Main Factors Involved in the Design of a Radial Basis Function Network?*, Proc 1998 ESANN - European Symposium on Artificial Neural Networks, Bruges (Belgium), D-Facto Public., pp. 1-6, 1998

N. B. Karayiannis, *Reformulated Radial Basis Neural Networks Trained by Gradient Descent*, IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 10, pp. 1153-1165, May 1999