



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ &
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ασυνέπειες της ασαφούς λογικής

ΒΑΚΟΥΛΗ ΑΝΤΙΓΟΝΗ

Επιβλέπων Καθηγητής: **ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΚΟΥΪΚΟΓΛΟΥ**

Χανιά, 2005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	3
<u>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>	<u>4</u>
1.1. Η ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ ΥΠΟ ΑΜΦΙΣΒΗΤΗΣΗ.....	4
1.2. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ ΕΛΚΑΝ.....	5
1.3. ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	8
<u>2. Η ΑΣΑΦΗΣ ΛΟΓΙΚΗ</u>	<u>9</u>
2.1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ	9
2.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.....	11
2.3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.....	12
2.3.1. ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ.....	12
2.3.2. ΛΕΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.....	12
2.3.3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ (MEMBERSHIP FUNCTIONS)	14
2.3.4. ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ	15
2.3.5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ.....	17
2.4. Η ΑΣΑΦΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ	17
2.4.1. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΙΣΟΔΩΝ ΣΕ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ (FUZZIFICATION).....	18
2.4.2. ΒΑΣΗ ΚΑΝΟΝΩΝ.....	19
2.4.3. ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΣΑΦΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ	20
2.4.4. ΣΥΝΑΘΡΟΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ (AGGREGATION)	20
2.4.5. ΑΠΟΣΑΦΗΝΙΣΗ (DEFUZZIFICATION)	20
2.4.5.1. Μέθοδος Κέντρου βάρους (Center of Gravity (C.O.G.)).....	23
2.4.5.2. Μέθοδος Ύψους (Height Method).....	24
2.5. ΑΣΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΒΑΘΜΙΔΩΝ (MULTISTAGE FUZZY	
CONTROL SYSTEMS)	25
2.5.1. ΔΟΜΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ	26
<u>3. ΑΣΥΝΕΠΕΙΑ ΑΣΑΦΟΥΣ ΛΟΓΙΚΗΣ</u>	<u>28</u>
3.1. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΩΝ ΑΣΥΝΕΠΕΙΩΝ ΠΟΥ ΕΝΤΟΠΙΣΘΗΚΑΝ.	28
3.2. Έλεγχος συμπεριφοράς ελεγκτή 1 (Μη συμμετρικού, μίας βαθμιάς)..	29

3.2.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΕΙΣΟΔΩΝ-ΕΞΟΔΟΥ ΕΛΕΓΚΤΗ 1.....	29
3.2.2. ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΛΕΓΚΤΗ 1	31
3.2.3. ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΑΣΤΟΧΙΩΝ ΕΛΕΓΚΤΗ 1	32
3.2.4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗ 1	34
3.2.5. ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ MATLAB ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ	
ΑΣΤΟΧΙΩΝ ΤΟΥ ΕΛΕΓΚΤΗ 1.	39
3.3. ΠΩΣ Η ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ ΤΗΝ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ	
ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΠΙΔΟΣΗ ΕΝΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗ ΜΙΑΣ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ.....	43
3.4. ΈΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗ 2 (ΜΙΑΣ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ ΜΕ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ	
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ).....	45
3.5. ΈΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗ 3 (ΜΙΑΣ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ ΜΕ “ΑΠΟΛΥΤΩΣ”	
ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ).....	47
3.6. ΈΛΕΓΧΟΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΕΛΕΓΚΤΗ 4 (ΔΥΟ ΒΑΘΜΙΑΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΩΣ	
ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ).....	48
<u>4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</u>	<u>53</u>
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</u>	<u>54</u>
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</u>	<u>57</u>

Πρόλογος

“ Όσο οι νόμοι των μαθηματικών αναφέρονται στην πραγματικότητα, δεν είναι ακριβείς. Και όσο είναι ακριβείς, δεν αναφέρονται στην πραγματικότητα.”

Albert Einstein

Η ασαφής λογική (fuzzy logic) είναι ένα υπερσύνολο της κλασικής λογικής, η οποία έχει επεκταθεί ώστε να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του "απολύτως αληθούς" και του "απολύτως ψευδούς". Επεκτείνεται έτσι σημαντικά η σημασία του συνόλου εφόσον γίνονται δεκτοί διαφορετικοί βαθμοί κτητικότητας, που αναφέρονται και σαν τιμές μελών. Στη θεωρία των ασαφών συνόλων όλα είναι ζήτημα βαθμού.

Η ασαφής λογική θεωρείται πλέον ένα από τα πετυχημένα εργαλεία για τη δημιουργία εξελιγμένων συστημάτων ελέγχου. Αυτό οφείλεται πρωτίστως στην ευκολία χρήσης της καθώς αποτελεί ένα βολικό, ευέλικτο και εύκολα κατανοήσιμο εργαλείο. Επί πλέον, μπορεί να χειρισθεί συστήματα των οποίων η δυναμική δεν είναι γνωστή με λεπτομέρεια ή πολύπλοκα συστήματα για τα οποία δεν υπάρχουν ακριβείς λύσεις. Για παράδειγμα, ένας έμπειρος οδηγός μπορεί να παρκάρει το αυτοκίνητό του χωρίς να έχει ακριβείς μετρήσεις γωνιών και αποστάσεων. Ένας ασαφής ελεγκτής μιμείται τη συμπεριφορά ενός έμπειρου χειριστή.

Παρόλη την επιτυχία της ασαφούς λογικής, έχουν αναφερθεί ασυνέπειες και παράδοξα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της. Στην παρούσα εργασία κατασκευάστηκε ένα απλό ασαφές σύστημα ελέγχου, το οποίο δέχεται δύο εισόδους και υπολογίζει μία έξοδο. Αν και οι ασαφείς συναρτήσεις που περιγράφουν την εξάρτηση της εξόδου από τις εισόδους φαίνεται να είναι αύξουσες, αυτό δεν επιβεβαιώνεται πάντοτε από τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Η σχεδίαση, επομένως, συστημάτων βασισμένων στην ασαφή λογική θα πρέπει να γίνεται με μεγάλη προσοχή, ώστε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτά να συμφωνούν με τη διαίσθηση.

1. Εισαγωγή

1.1. Η Ασαφής λογική υπό αμφισβήτηση

“Οι πιο σκληρές αντιπαραθέσεις αφορούν θέματα για τα οποία δεν υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις και από τις δύο πλευρές”

Bertrand Russell

Οι μέθοδοι ασαφούς λογικής έχουν χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Έχει γίνει χρήση ασαφών ελεγκτών σε ηλεκτρικές συσκευές και βιομηχανικά συστήματα, έχουν αναπτυχθεί συστήματα λήψης αποφάσεων και διάγνωσης βασισμένα στη θεωρία των ασαφών συνόλων κ.ο.κ.. Παρόλα αυτά, η συνοχή των θεμελίων της ασαφούς λογικής δέχεται ακόμα επιθέσεις.

Από τη γέννησή της, κιόλας, με τη θεμελιώδη εργασία του Lotfi Zadeh [1], η ασαφής λογική έχει διχάσει τον επιστημονικό κόσμο. Αγνοήθηκε και αντιμετωπίστηκε εχθρικά από τους επιστήμονες της δύσης αλλά στην ανατολή την πίστεψαν και την προώθησαν. Ίσως γιατί το μοτίβο της ασάφειας ενυπάρχει στα θρησκευτικά συστήματα της ανατολής, ίσως όμως να ήταν τυχαίο.

Σε μία αναφορά του υπουργείου εμπορίου των Η.Π.Α. το 1991 τονίζεται:

“Από φιλοσοφικής άποψης, η έννοια της λογικής της ασάφειας είναι συντονισμένη στις βασικές διδαχές του βουδισμού, ο οποίος ίσως συνέβαλε στην ιαπωνική αποδοχή αυτής της έννοιας. Άλλοι πιστεύουν πως η επιτυχία της λογικής της ασάφειας στην Ιαπωνία είναι αποτέλεσμα της διαβλεπόμενης ανάγκης να καταστεί αυτή η χώρα ανταγωνιστική σε τομείς της προηγμένης τεχνολογίας.”

Από την άλλη πλευρά, οι εμπορικοί οίκοι στην Ιαπωνία και την Ταϊβάν ισχυρίζονται πως δοκιμάζουν πολλούς τύπους συστημάτων ελέγχου και από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι στα περισσότερα προϊόντα το ασαφές σύστημα έχει ξεπεράσει τους μη ασαφείς ανταγωνιστές του.

1.2. Το παράδοξο του Elkan

Το άρθρο του Charles Elkan “The paradoxical success of fuzzy logic” [2] αναδεικνύει μία περίπτωση όπου η ασαφής λογική δεν συμφωνεί με την διαίσθηση.

Ο συγγραφέας χαρακτηριστικά αναφέρει ότι οι ασαφείς ελεγκτές που κυκλοφορούν στην αγορά είναι πολύ απλοί για να εμφανίσουν λάθη και αδυναμίες. Είναι, θεωρεί, θέμα χρόνου να διαπιστωθεί ότι η ασαφής λογική είναι περιορισμένων δυνατοτήτων. Οι ασαφείς ελεγκτές θα αντιμετωπίσουν σύντομα προβλήματα, ήδη γνωστά στα διάφορα συστήματα που λειτουργούν με βάσεις κανόνων.

Σε κάθε λογική πρόταση ή ισχυρισμό A , η ασαφής λογική αντιστοιχίζει ένα βαθμό αληθείας $\mu(A)$ στο διάστημα $[0, 1]$, σε αντίθεση με την συμβατική λογική όπου $\mu(A) = 0$ (ψευδής) ή 1 (αληθής). Για παράδειγμα, στην πρόταση $A =$ “ο Νίκος είναι κοντός” κάποιος μπορεί να αποδώσει τον βαθμό αληθείας $\mu(A) = 0.8$.

Η κλασσική ένωση και τομή των συνόλων μπορεί να επεκταθεί στα ασαφή σύνολα ως εξής:

Θεωρούμε δύο λογικές προτάσεις A και B με διαφορετικούς, εν γένει, βαθμούς αληθείας $\mu(A)$ και $\mu(B)$. Στην ασαφή λογική μπορούμε να υπολογίσουμε τους βαθμούς αληθείας των συνθετικών προτάσεων:

$A \cap B =$ “ισχύει και το A και το B ”.

$A \cup B =$ “ισχύει είτε το A είτε το B ”.

$\neg A =$ “δεν ισχύει το A ”.

Οι βαθμοί αλήθειας των συνθέσεων αυτών υπολογίζονται με βάση του ακόλουθους τύπους:

$$\mu(A \cap B) = \min\{\mu(A), \mu(B)\} \quad (1.1)$$

$$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\} \quad (1.2)$$

$$\mu(\neg A) = 1 - \mu(A) \quad (1.3)$$

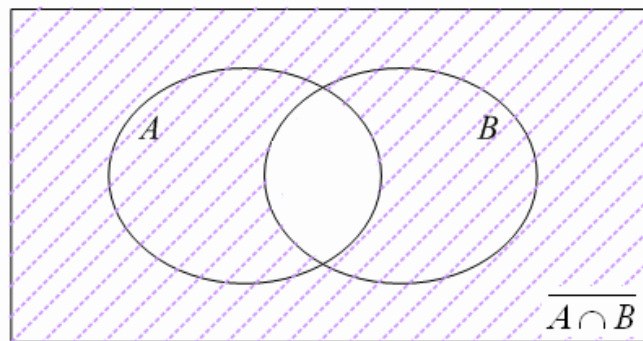
Επίσης, όταν δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες τότε έχουν τους ίδιους βαθμούς αλήθειας, ήτοι $\mu(A) = \mu(B)$.

(1.4)

Με βάση τις σχέσεις (1.1)-(1.4), ο Elkan ανέπτυξε ένα θεώρημα που λέει ότι για να είναι τα αποτελέσματα της ασαφούς λογικής αποδεκτά, θα πρέπει οι βαθμοί αλήθειας να παίρνουν μόνο δύο τιμές. Επομένως η ασαφής λογική επιστρέφει στην αφετηρία της, τη δυαδική λογική του Boole. Για την ευκολία του αναγνώστη παρουσιάζουμε εδώ την διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος.

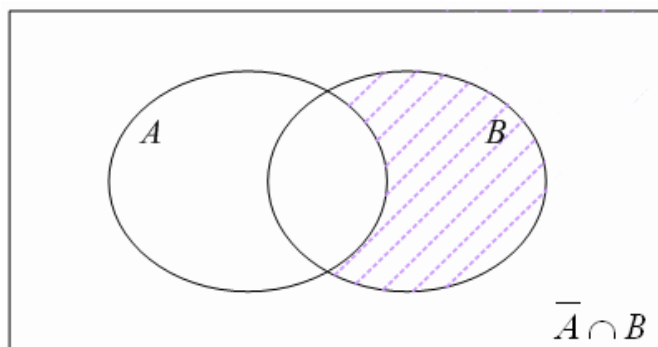
Το θεώρημα βασίζεται στην ισοδυναμία των λογικών προτάσεων $\overline{A \cap B}$ και $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B)$. Η ισοδυναμία αυτή αποδεικνύεται γραφικά με τα διαγράμματα Venn.

Σχεδιάζουμε δύο σύνολα A και B . Έστω $A \cap B \neq \emptyset$. Η σκιαγραφημένη περιοχή του Σχ 1.1 αποτελεί το σύνολο $\overline{A \cap B}$.



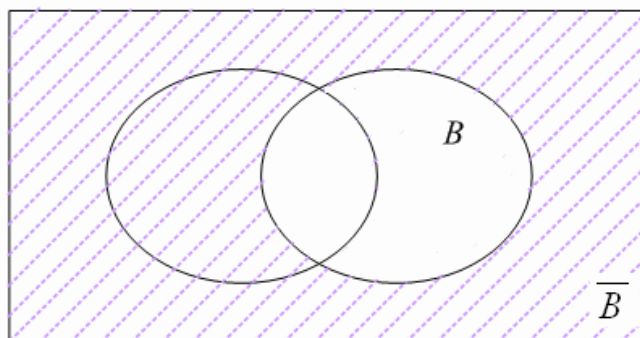
Σχήμα 1.1. Το σύνολο $\overline{A \cap B}$

Για τον σχεδιασμό του συνόλου $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B)$ ξεκινάμε πρώτα από το σύνολο $\overline{A} \cap B$.



Σχήμα 1.2. Το σύνολο $\overline{A} \cap B$

Κατόπιν αναπαριστούμε το σύνολο \overline{B} με το γραμμοσκιασμένο χωρίο του Σχ. 1.3.



Σχήμα 1.3. Το σύνολο \overline{B}

Η ένωση των γραμμοσκιασμένων χωρίων 1.2 και 1.3 ισοδυναμεί με την πρόταση $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B)$ και ταυτίζεται με το σύνολο $\overline{A \cap B}$ του Σχ. 1.1.

Θεώρημα:

Για να είναι οι λογικές προτάσεις $\overline{A \cap B}$ και $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B)$ ισοδύναμες για οποιουσδήποτε δύο ισχυρισμούς A και B, θα πρέπει να ισχύει είτε $\mu(A) = \mu(B)$ είτε $\mu(B) = 1 - \mu(A)$.

Απόδειξη:

Εφόσον υποθέτουμε ότι $\overline{A \cap B}$ και $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B)$ είναι λογικά ισοδύναμα από την σχέση (1.4) έχουμε $\mu(\overline{A \cap B}) = \mu(\overline{B} \cup (\overline{A} \cap B))$. (1.5)

Αναλύουμε το κάθε ένα μέρος της ισότητας ξεχωριστά. Λόγω των σχέσεων (1.1) - (1.3) το πρώτο μέλος γίνεται $\mu(\overline{A \cap B}) = 1 - \min\{\mu(A), \mu(B)\} =$

$$= 1 + \max \{-\mu(A), -\mu(B)\} = \max \{1 - \mu(A), 1 - \mu(B)\} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Από τις Εξ. (1.1)-(1.3) το δεύτερο μέλος αναλύεται ως εξής: } \mu(\bar{B} \cup (\bar{A} \cap B)) = \\ = \max \{1 - \mu(B), \min \{1 - \mu(A), \mu(B)\}\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Η ισότητα (1.5) δεν ισχύει όταν $1 - \mu(A) > 1 - \mu(B)$ και $1 - \mu(A) > \mu(B)$

$$\text{γιατί τότε } \mu(\overline{A \cap B}) = 1 - \mu(A) \text{ και } \mu(\bar{B} \cup (\bar{A} \cap B)) = \begin{cases} \mu(B), & \mu(B) > 1 - \mu(B) \\ 1 - \mu(B), & \mu(B) < 1 - \mu(B) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω ότι } \mu(B) < 1 - \mu(B). \quad \text{Δηλαδή } \mu(B) < 1 - \mu(B) < 1 - \mu(A) \quad \text{ή} \\ \begin{cases} \mu(B) < 1 - \mu(B) \\ \mu(A) < \mu(B) \end{cases} \Rightarrow \mu(A) < \mu(B) < 0.5 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Στο συμπέρασμα της σχέσης (1.8) καταλήγουμε εφόσον έχουμε υποθέσει τους ισχυρισμούς A και B . Αν η υπόθεση αφορά τους ισχυρισμούς \bar{A} και B , τότε το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι πρέπει να ισχύει $1 - \mu(A) < \mu(B) < 0.5$. Όμοια, αντικαθιστούμε στην (1.5) όλους τους συνδυασμούς (A, \bar{A}) στη θέση A και (B, \bar{B}) στη θέση B . Μελετώντας τις σχέσεις που προκύπτουν συμπεραίνουμε ότι για να μην ισχύει ταυτόχρονα καμία από αυτές πρέπει $\mu(A) = \mu(B)$ είτε $\mu(B) = 1 - \mu(A)$.

Συνεπώς, για να ισχύει μία λογική ισοδυναμία θα πρέπει η ασαφής λογική να συρρικνωθεί μαθηματικά στη δίτιμη λογική. Αυτό το συμπέρασμα έχει προκαλέσει μεγάλη συζήτηση στον επιστημονικό κόσμο. Πολλοί λένε πως αποτελεί απλώς ένα τέχνασμα και στην πραγματικότητα η ασαφής λογική δεν οδηγεί σε ασυνεπή αποτελέσματα. Παρακάτω θα δούμε ένα τέτοιο ασυνεπές αποτέλεσμα, αν και η πιθανή σχέση του με το παράδοξο του Elkan δεν έχει διερευνηθεί.

1.3. Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας

Στόχος της εργασίας είναι να δείξει μερικές πρακτικές εφαρμογές στις οποίες η ασαφής λογική δείχνει να μην είναι πάντοτε συνεπής ακόμα και σε περιπτώσεις πολύ απλών συστημάτων ελέγχου.

Γι' αυτό το σκοπό, κατασκευάσαμε ένα απλό παράδειγμα εξαγωγής συμπερασμάτων που δέχεται δύο εισόδους και παράγει μία έξοδο με τη βοήθεια ασαφών κανόνων ελέγχου. Το παράδειγμα αναφέρεται σε όχημα που δεν έχει δυνατότητα να στρίψει και πρέπει να σταματήσει μπροστά από ένα εμπόδιο χωρίς να συγκρουσθεί. Ο βασικός κανόνας είναι: “Όσο πιο κοντά είμαστε σε ένα εμπόδιο (1^η είσοδος) και όσο πιο γρήγορα τρέχουμε (2^η είσοδος), τόσο περισσότερο φρένο πρέπει να πατήσουμε προκειμένου να αποφύγουμε τη σύγκρουση.”

Παρατηρούμε ότι το φρενάρισμα είναι αύξουσα συνάρτηση της εγγύτητας του εμποδίου και της ταχύτητας με την οποία το όχημα κινείται προς το αυτό. Λειτουργήσαμε το σύστημα για συγκεκριμένες συναρτήσεις συμμετοχής $\mu(x)$ και διάφορες αριθμητικές τιμές εισόδων αλλά η έξοδος που λάβαμε δεν ήταν πάντοτε αύξουσα συνάρτηση των εισόδων, παρόλο που οι κανόνες του ελεγκτή σχεδιάστηκαν έτσι ώστε αυτό να ισχύει.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην ασαφή λογική. Στο Κεφάλαιο 3 αναπτύσσεται ένας ασαφής ελεγκτής που εμφανίζει το παράδοξο που περιγράψαμε προηγουμένως. Εντοπίζεται η αιτία που οδηγεί στο παράδοξο αποτέλεσμα και προτείνεται λύση, η οποία μας οδηγεί στη “βέλτιστη” μορφή συναρτήσεων συμμετοχής των λεκτικών τιμών κάθε μεταβλητής ενός ελεγκτή μίας βαθμίδας. Στην Παράγραφο 2.5, διερευνάται η συμπεριφορά ελεγκτή δύο βαθμίδων. Αποδεικνύεται ασυνεπής σε ορισμένες περιπτώσεις, παρόλο που οι συναρτήσεις συμμετοχής των μεταβλητών του συστήματος είναι της “βέλτιστης” μορφής. Στο Κεφάλαιο 4 συνοψίζονται τα συμπεράσματα της έρευνάς μας.

2. Η ασαφής λογική

2.1. Ιστορική αναδρομή

Στις αρχές του 20ού αιώνα, ο λογικός Bertrand Russell, έδειξε ότι τα παράδοξα μολύνουν τη μαθηματική θεωρία που περιγράφει σύνολα και υποσύνολα αντικειμένων. Για να το αποδείξει αυτό χρησιμοποίησε το παράδειγμα του κουρέα του. Ο κουρέας του Russell είχε αναρτήσει μια επιγραφή που έλεγε: «Ξυρίζω όλους όσους δεν μπορούν να ξυριστούν μόνοι τους». Ποιος ξυρίζει όμως τον κουρέα; αν ξυρίζεται μόνος του, τότε σύμφωνα με την επιγραφή του, δεν μπορεί να ξυριστεί. Αν όμως δεν ξυρίζεται μόνος του, τότε πάλι σύμφωνα με την επιγραφή, ξυρίζεται μόνος του. Έτσι φαίνεται πως ταυτόχρονα ξυρίζεται και δεν ξυρίζεται μόνος του. Η ερμηνεία της ασάφειας θεωρεί τον κουρέα ως μεσαίο φαινόμενο. Η πρόταση που το περιγράφει είναι κυριολεκτικά μισή αλήθεια.

Το 1937 ο φιλόσοφος Max Black δημοσίευσε στο Philosophy of Science ένα άρθρο με τον τίτλο «Αοριστία: Μία άσκηση στη λογική ανάλυση» [3]. Το άρθρο όριζε το πρώτο απλό ασαφές σύνολο με τη βοήθεια αυτού που σήμερα ονομάζουμε καμπύλη μέλους. Ο Black αντιλήφθηκε ότι τα πάντα είναι σε κάποιο βαθμό A και σε κάποιο βαθμό όχι- A . Όταν ο βαθμός είναι πολύ μικρός ή πολύ μεγάλος, τον εκλαμβάνουμε ως 0 ή 1, ως τίποτα ή όλα. Έτσι ο Black τον απεικόνισε με καμπύλες που προσεγγίζουν τα άκρα 0 και 1 χωρίς να τα φτάνουν.

Αν η καμπύλη που περιγράφει το βαθμό συμμετοχής ενός στοιχείου στο σύνολο A αγγίζει το 1, η καμπύλη συμμετοχής του στοιχείου στο συμπληρωματικό σύνολο όχι- A θα αγγίζει το 0 και αντίστροφα. Καθώς οι καμπύλες απομακρύνονται από τα άκρα, αυτά γίνονται πιο ασαφή. Τέμνονται στη μέση τιμή $\frac{1}{2}$. Ο Black στο άρθρο του χρησιμοποίησε σύμβολα για την αοριστία στο επίπεδο των συνόλων ή των συστημάτων.

Τελικά η θεωρία δεν είχε απήχηση. Ο κόσμος της πλειότιμης λογικής, από τον οποίο είχε διδαχθεί και τον οποίο ήθελε να συγκινήσει, δεν έδωσε καμιά προσοχή. Ίσως γιατί οι φιλόσοφοι έχουν ελάχιστη επιρροή στον κόσμο των θετικών επιστημών.

Χρειάστηκε ένας άνθρωπος με μαθηματική κατάρτιση για να γίνει αποδεκτή η αοριστία στην επιστήμη. Συγκεκριμένα, η αρχή έγινε με μία αλλαγή ονόματος από το «αόριστα» σε «ασαφή» που έκανε ο Ιρανός Lotfi Zadeh. Ο Zadeh γεννήθηκε στο

Μπακού του Σοβιετικού Αζερμπαιτζάν το 1921. Πήγε στις Η.Π.Α. και φοίτησε στο MIT από όπου το 1946 πήρε master ηλεκτρολόγου-μηχανολόγου. Το 1951 απέκτησε διδακτορικό στο Πανεπιστήμιο Κολούμπια και εντάχθηκε στο διδακτικό προσωπικό. Το 1959 εξελέγη πρόεδρος στο τμήμα ηλεκτρολόγων-μηχανολόγων στο Μπέρκλεϊ.

Το 1972, ο Zadeh διατύπωσε την αρχή της ασυμβατότητας ως εξής:

“Καθώς αυξάνεται η πολυπλοκότητα ενός συστήματος, μειώνεται η ικανότητα μας να κάνουμε ακριβείς και σημαντικές προτάσεις για τη συμπεριφορά του, ώσπου να

φτάσουμε σε ένα κατώφλι πέρα από το οποίο η ακρίβεια και η σημασία είναι σχεδόν αμοιβαία αποκλειόμενες ιδιότητες”.

Περίληπτικά, μπορούμε να διατυπώσουμε μια συμπερασματική αρχή ως εξής: “Όσο πιο κοντά εξετάζουμε ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου, τόσο πιο ασαφής γίνεται η λύση του” [4].

Στη δεκαετία του '70 εμφανίστηκαν οι πρώτες εφαρμογές της ασαφούς λογικής αλλά συχνά ήταν προσομοιώσεις απλών μαθηματικών εννοιών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Μόνη εξαίρεση ήταν μία εργασία του Ebrahim Mamdani στην Αγγλία που αφορούσε στη λειτουργία ατμομηχανής. Αυτή οδήγησε σε ένα ασαφές σύστημα που έχει την πλέον ευρεία χρήση σήμερα.

2.2. Εφαρμογές ασαφούς λογικής

Η ασαφής λογική βρήκε εξ αρχής πρόσφορο έδαφος στην Άπω Ανατολή. Η Κίνα κατέχει τον μεγαλύτερο αριθμό επιστημόνων που την μελετούν και την εφαρμόζουν ενώ η Ιαπωνία βρίσκεται στην κορυφή της ασαφούς τεχνολογικής εξέλιξης. Μικροεπεξεργαστές ασαφούς λογικής ενσωματώθηκαν σε δεκάδες προϊόντα της βιομηχανίας και της ηλεκτρονικής.

Σε φωτογραφικές μηχανές με αυτοεστιαζόμενο φακό, μηχανές λήψεως που καταστέλλουν τις μικροδονήσεις, συσκευές κλιματισμού, ηλεκτρικά ψυγεία, πλυντήρια ρούχων, ηλεκτρικές σκούπες, κιβώτια ταχυτήτων, συσκευές ελέγχου

υπόγειου σιδηροδρόμου, φωτοαντιγραφικά μηχανήματα, μεταφραστικές μηχανές και σε πολλά ακόμα. Στο Παράρτημα συγκαταλέγεται κατάλογος του 1992 με δοκιμασμένα στην πράξη ασαφή προϊόντα στην Ιαπωνία και τη Νότια Κορέα.

2.3. Στοιχεία ασαφούς λογικής

2.3.1. Ασαφή σύνολα

Έστω X ένα υπερσύνολο αναφοράς του οποίου τα στοιχεία συμβολίζονται με x . Το ασαφές σύνολο A ορίζεται ως το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, όπου $\mu_A(x) \in [0,1]$ η συνάρτηση συμμετοχής του x στο A που δηλώνει το βαθμό με τον οποίο το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A .

Για παράδειγμα, αν $X = \text{“όλοι οι γνωστοί μου”}$, $A = \text{“ψηλός”}$ και $x = \text{“Νίκος”}$ τότε με $\mu_A(x) = 0.8$ δηλώνουμε ότι ο Νίκος είναι ψηλός με βαθμό αληθείας 0.8.

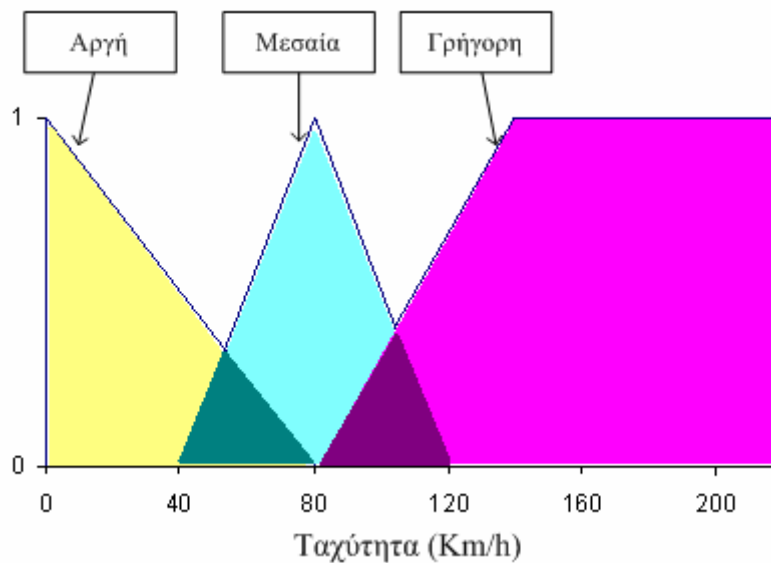
2.3.2. Λεκτικές μεταβλητές

Ως λεκτική ορίζεται μια μεταβλητή που δέχεται για τιμές λέξεις σε φυσική γλώσσα. Για παράδειγμα η μεταβλητή «ταχύτητα» μπορεί να πάρει τιμές όπως: αργά, μέτρια, γρήγορα. Οι τιμές μπορεί να είναι φυσικά και αριθμητικές. Στο παράδειγμα της ταχύτητας, το πεδίο τιμών της μεταβλητής χωρίζεται σε διάφορα διαστήματα. Για να καταστούν αυτά τα διαστήματα ασαφή χρησιμοποιούμε κατάλληλες συναρτήσεις συμμετοχής.

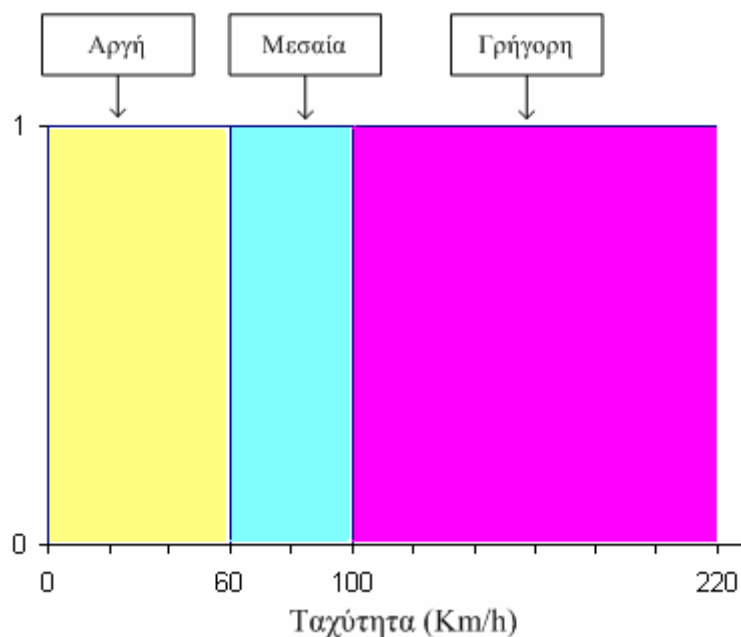
Όσο π.χ. η ταχύτητα αυξάνεται τόσο ο βαθμός συμμετοχής της στην λεκτική τιμή “αργή” μειώνεται ενώ ταυτόχρονα αυξάνεται ο βαθμός συμμετοχής της στη λεκτική

τιμή “μεσαία”. Περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας θα μειώσει τη συμμετοχή της στην λεκτική τιμή “μεσαία” και θα την αυξήσει στην τιμή “γρήγορη”.

Στα παρακάτω σχήματα γίνεται προφανής η διαφορά μεταξύ της χρήσης δυαδικών συνόλων και της χρήσης ασαφών συνόλων για τον χαρακτηρισμό της ταχύτητας ενός οχήματος. Για παράδειγμα, η ταχύτητα των 90 Km/h στο Σχ. 2.1 μπορεί να χαρακτηριστεί ως Μεσαία ή Γρήγορη με ορισμένους βαθμούς αληθείας. Στο Σχ. 2.2 χαρακτηρίζεται αυστηρά ως Μεσαία.



Σχήμα 2.1. Ασαφή σύνολα ταχυτήτων: “αργή”, “μεσαία”, “γρήγορη”.



Σχήμα 2.2. Σαφή σύνολα ταχυτήτων: “αργή”, “μεσαία”, “γρήγορη”.

2.3.3. Συναρτήσεις συμμετοχής (Membership Functions)

Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1, μία λεκτική τιμή A μιας μεταβλητής περιγράφεται από ένα ασαφές σύνολο με τη χρήση της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_A(x)$. Αυτή η συνάρτηση αντιστοιχίζει στην αριθμητική τιμή x της μεταβλητής μία τιμή $\mu_A(x) \in [0, 1]$ που αντιστοιχεί στο ποσοστό συμμετοχής της στην A ή ισοδύναμα, στο ποσοστό αληθείας της πρότασης «η μεταβλητή είναι A ».

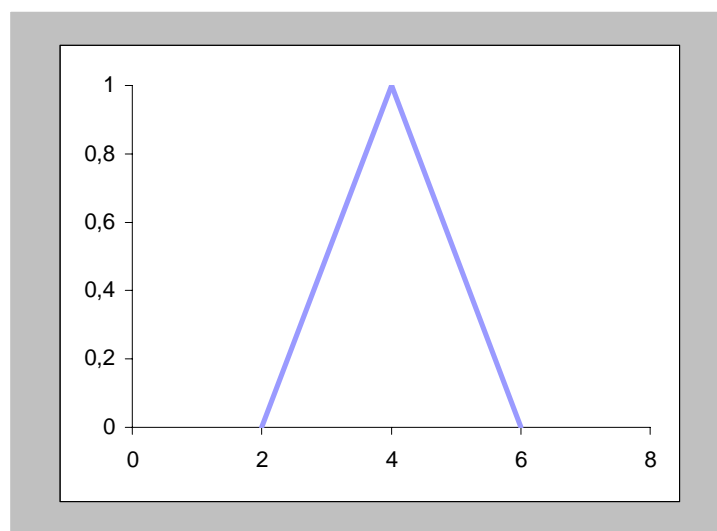
Η συνάρτηση μπορεί να έχει τη μορφή οποιασδήποτε αυθαίρετης καμπύλης η οποία να εξυπηρετεί την απαίτηση μας για απλότητα, ταχύτητα και αποδοτικότητα. Από τις πιο απλές συναρτήσεις είναι η τριγωνική.

Να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις συμμετοχής των στοιχείων $x \in X$ ενός ασαφούς συνόλου A μπορεί να λαμβάνουν τιμές σε ένα οιοδήποτε διάστημα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, συνίσταται η κανονικοποίηση τους ώστε να ισχύει: $\mu_A(x) \in [0,1]$, $\forall x \in X$. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διαίρεσης όλων των βαθμών συμμετοχής $\mu_A(x)$, των στοιχείων του συνόλου A , ως προς τον μεγαλύτερο αυτών.

2.3.4. Τύποι συναρτήσεων συμμετοχής

► Τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής

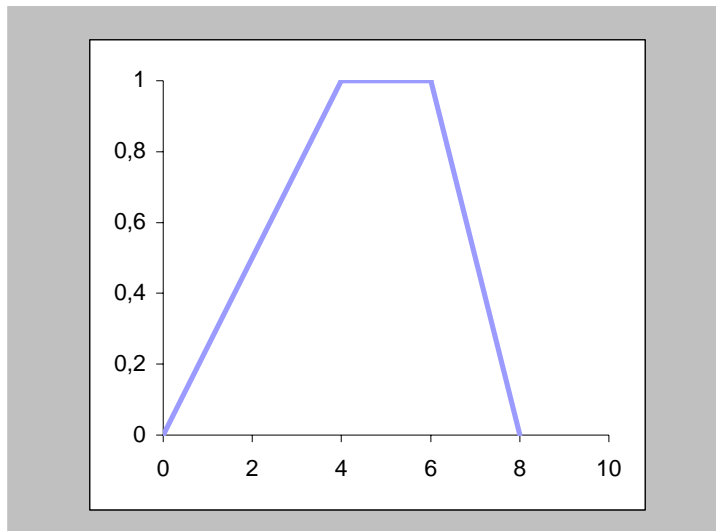
Ορίζονται πλήρως από μία τριάδα παραμέτρων $\{a, b, c\}$. Για παράδειγμα, αν $a=2$, $b=4$, $c=6$ η γραφική της συνάρτησης είναι της μορφής:



Σχήμα 2.3. Τριγωνική συνάρτηση.

► Τραπεζοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής

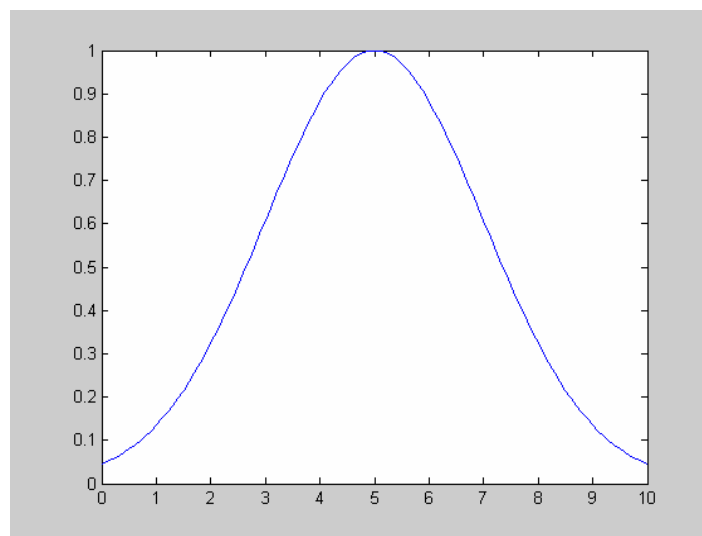
Για τον ορισμό τους απαιτούνται τέσσερις παράμετροι $\{a, b, c, d\}$. Για $a=0$, $b=4$, $c=6$, $d=8$ έχουμε το τραπέζιο του Σχ. 2.4.



Σχήμα 2.4. Τραπεζοειδής συνάρτηση.

► Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής

Ορίζονται μέσω του τύπου $\mu(x) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$, όπου οι δύο παράμετροι c και σ εκφράζουν τη μέση τιμή και το εύρος αντίστοιχα. Για $x \in [0,10]$, $c=5$ και $\sigma=2$ προκύπτει η καμπύλη του Σχ. 2.5.



Σχήμα 2.5. Gaussian συνάρτηση.

Άλλοι τύποι συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι οι κωδωνοειδείς, οι σιγμοειδείς και διάφορες καμπύλες πολυνόμων.

2.3.5. Βασικές πράξεις συνόλων

Έστω A και B ασαφή σύνολα με συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_A(x)$ και $\mu_B(x)$ αντίστοιχα και X το σύνολο αναφοράς, δηλαδή το σύνολο που έχει όλες τις τιμές x . Οι πιο βασικές πράξεις μεταξύ ασαφών συνόλων, οι οποίες συναντώνται και στην παρούσα εργασία είναι:

► Η ένωση $A \cup B$ στο X είναι ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής τη μέγιστη των A και B : $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. (2.1)

► Η τομή $A \cap B$ στο X είναι ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής την ελάχιστη των A και B : $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. (2.2)

► Το συμπλήρωμα \bar{A} είναι ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής $1 - \mu_A(x)$.

Σε αντίθεση με δύο βασικούς κανόνες της θεωρίας των κλασικών συνόλων, για τα ασαφή σύνολα ισχύουν:

► Εν γένει, $A \cup \bar{A} \neq X \Rightarrow \mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1, \forall x \in X$ και.

► Εν γένει, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0 \forall x \in X$.

Παράδειγμα

Έστω ασαφές σύνολο A με $\mu_A(x) = \frac{1}{3}, x \in X$.

► $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = \max(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \neq 1$.

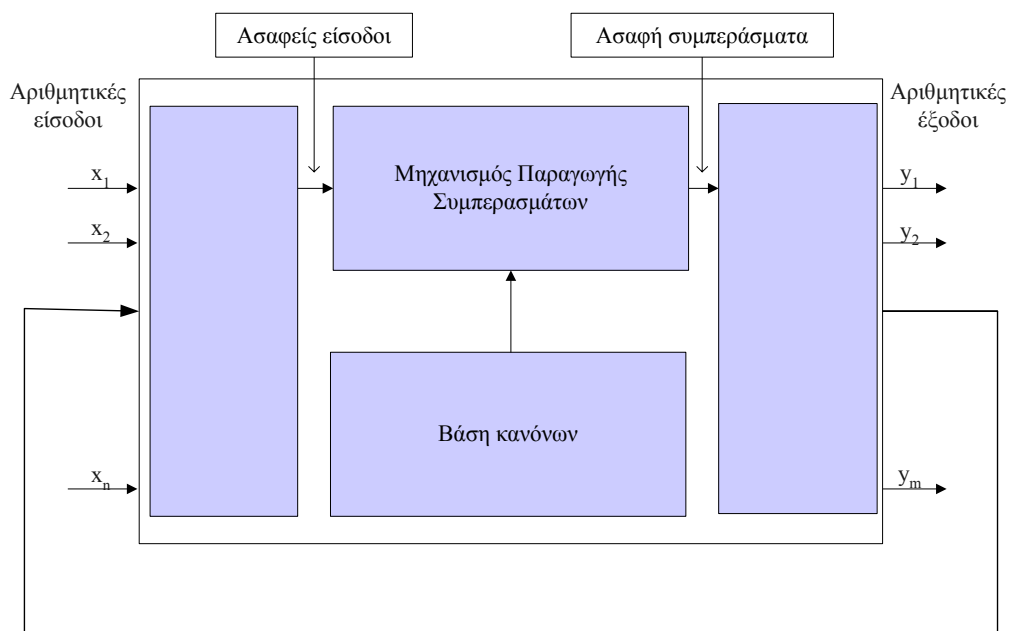
► $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = \min(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \neq 0$.

2.4. Η ασαφής συλλογιστική

Συλλογιστική είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων (έξοδοι) με βάση κάποιες παρατηρήσεις (είσοδοι). Η ασαφής λογική χρησιμοποιεί ασαφείς κανόνες. Η διαδικασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

1. Μετατροπή εισόδων σε ασαφή σύνολα.
2. Ανάπτυξη βάσης κανόνων ασαφούς συλλογιστικής.
3. Σύνθεση εισόδων σε κάθε κανόνα.
4. Συνδυασμός συμπερασμάτων από όλους τους κανόνες.
5. Αποσαφήνιση.

Το βασικό δομικό διάγραμμα που φανερώνει την πορεία που ακολουθεί η ασαφής συλλογιστική είναι [5, pp. 203-208]:

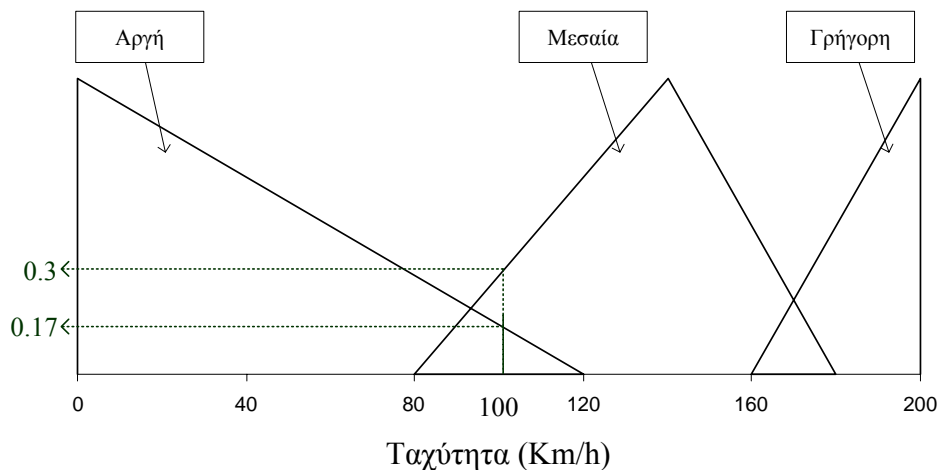


Σχήμα 2.6. Η ασαφής συλλογιστική.

2.4.1. Μετατροπή εισόδων σε ασαφή σύνολα (Fuzzification).

Η αριθμητική τιμή x_c της εισόδου c μετατρέπεται σε ασαφές σύνολο ώστε να είναι συμβατή με τη βάση κανόνων.

Για παράδειγμα, με βάση τη γραφική της λεκτικής μεταβλητής “ταχύτητα” του Σχ. 2.7, η αριθμητική τιμή 100 km/h αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο: {“αργή” με βαθμό αληθείας 0.17, “μεσαία” με βαθμό αληθείας 0.3 και “γρήγορη” με βαθμό αληθείας 0} = {(αργή, 0.17), (μεσαία, 0.3)}.



Σχήμα 2.7. Μετατροπή αριθμητικής εισόδου σε ασαφές σύνολο.

2.4.2. Βάση κανόνων

Όλη η γνώση του δημιουργού του ασαφούς συστήματος παρέχεται στο πρόγραμμα με τη μορφή κανόνων, το σύνολο των οποίων αποτελεί τη βάση δεδομένων αυτού.

Οι κανόνες συνδέουν ιδέες. Συσχετίζουν ένα πράγμα, ένα γεγονός ή μια διαδικασία με ένα άλλο γεγονός ή διαδικασία. Στις φυσικές γλώσσες, όπως και στις γλώσσες των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι κανόνες έχουν την μορφή προτάσεων Εάν - Τότε. Ο ασαφής λογικός κανόνας συσχετίζει ασαφή σύνολα: Εάν η 1^η είσοδος είναι A και η 2^η είσοδος είναι B , τότε η έξοδος είναι Γ . Όπου A , B , Γ ασαφή σύνολα.

Κάθε είσοδος στο σύστημα ενεργοποιεί όλους τους κανόνες σε κάποιο βαθμό σε μια πολύ συνειρμική μνήμη. Όσο πιο πολύ ταιριάζει η είσοδος με το “Εάν” μέρος του κανόνα τόσο πιο πολύ ενεργοποιείται το “Τότε” μέρος του.

2.4.3. Σύνθεση ασαφών σχέσεων

Οι κανόνες Εάν - Τότε αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις και το πρόβλημα της ασαφούς συλλογιστικής είναι μαθηματικά ισοδύναμο με τη σύνθεση. Μια απλή μέθοδος σύνθεσης (min) είναι εκείνη που αποδίδει στο συμπέρασμα τον μικρότερο βαθμό αληθείας όλων των επιμέρους εισόδων που συνδέονται μεταξύ τους με το “και” και ανήκουν στο εάν-μέρος του κανόνα. Άλλες γνωστές μέθοδοι σύνθεσης (product, average) αποδίδουν στην έξοδο το γινόμενο ή τον μέσο όρο, αντίστοιχα, όλων των βαθμών αληθείας των εισόδων που συμμετέχουν στον κανόνα.

Για παράδειγμα, με βάση την min σύνθεση, αν $\mu_A(\text{είσοδος1})$ είναι ο βαθμός συμμετοχής της εισόδου1 στο A και $\mu_B(\text{είσοδος2})$ είναι ο βαθμός συμμετοχής της εισόδου2 στο B , τότε ο κανόνας: “Εάν η είσοδος1 είναι A και η είσοδος2 είναι B τότε η έξοδος είναι Γ ” αποδίδει στην έξοδο Γ , βαθμό αληθείας $\mu_{\Gamma}(\text{έξοδος}) = \min\{\mu_A(\text{είσοδος1}), \mu_B(\text{είσοδος2})\}$.

2.4.4. Συνάθροιση αποτελεσμάτων (Aggregation)

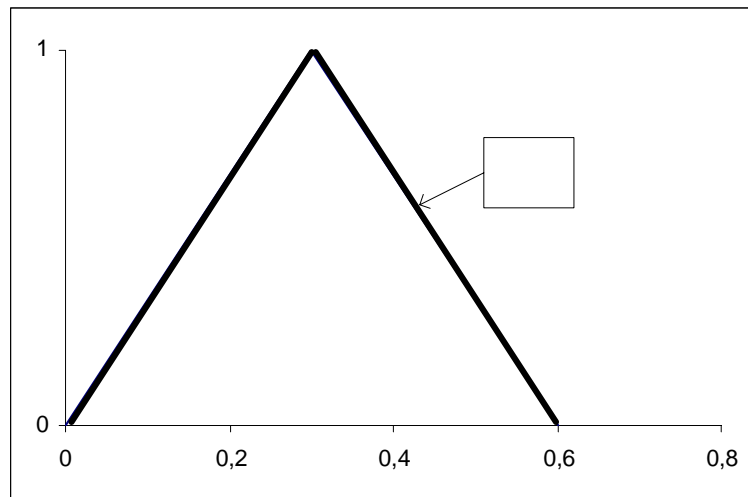
Σε αυτή τη φάση πραγματοποιείται σύνθεση των αποτελεσμάτων όλων των κανόνων οι οποίοι αποδίδουν την ίδια λεκτική τιμή ως έξοδο.

Η συνδυασμένη έξοδος των κανόνων είναι σύνηθες να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή συγγένειας των παραμέτρων εξόδου κάθε κανόνα, αφού ο συνδυασμός έχει την έννοια της ένωσης, όπως έχει ορισθεί στην Παράγραφο 2.3.5.

Για παράδειγμα, εάν ένας κανόνας δίνει έξοδο “Το y έχει λεκτική τιμή Γ ” με βαθμό αληθείας 0.8 και ένας άλλος δίνει την ίδια έξοδο αλλά με βαθμό αληθείας 0.6, τότε η τελική έξοδος είναι $\mu_{\Gamma}(y) = \max\{0.8, 0.6\} = 0.8$.

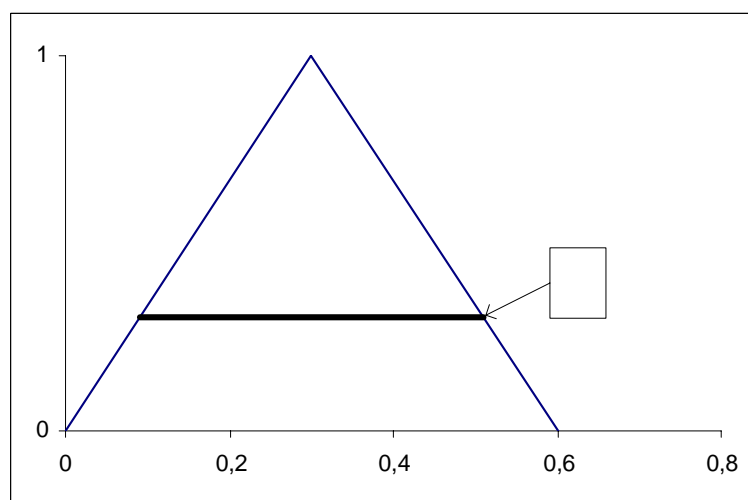
2.4.5. Αποσαφήνιση (Defuzzification)

Ονομάζουμε $\mu_j(x)$ τη συνάρτηση συμμετοχής της λεκτικής τιμής j της μεταβλητής εξόδου του ασαφούς ελεγκτή. Για παράδειγμα, στο Σχ. 2.8 παρουσιάζεται η συνάρτηση συμμετοχής της λεκτικής τιμής 1 της εξόδου ενός ελεγκτή.



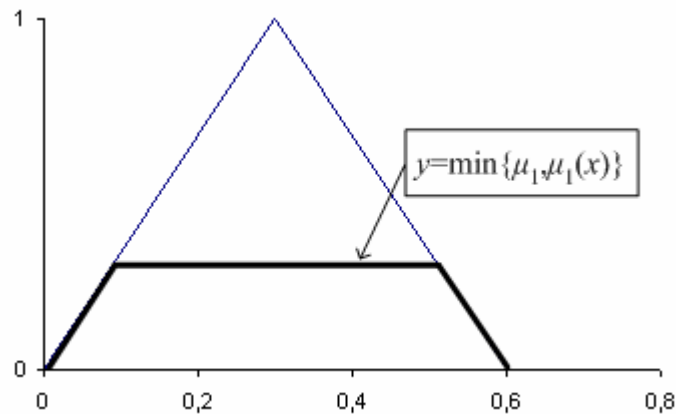
Σχ. 2.8. Η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_1(x)$.

Μετά την συνάθροιση των αποτελεσμάτων των κανόνων κάθε λεκτική τιμή j συμμετέχει στην έξοδο με ένα βαθμό συμμετοχής μ_j . Σε συμφωνία με το παραπάνω παράδειγμα, έστω μ_1 ο βαθμός συμμετοχής της λεκτικής τιμής 1 στην έξοδο του ελεγκτή.



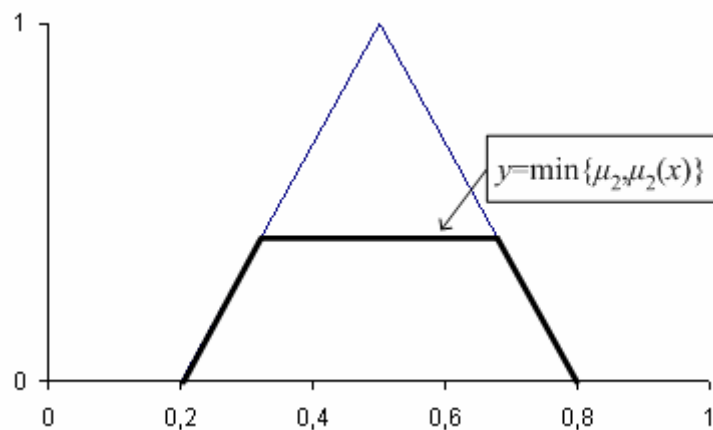
Σχ. 2.9. Η ευθεία $y = \mu_1$.

Η καμπύλη της οποίας η εξίσωση δίνεται από τη σχέση: $y = \min\{\mu_j, \mu_j(x)\}$ αποτελεί την έξοδο για την λεκτική τιμή j . Για το παράδειγμα που αναπτύχθηκε παραπάνω, η καμπύλη που περιγράφει την έξοδο για την λεκτική τιμή 1 φαίνεται στο Σχ. 2.10 με έντονο περίγραμμα.



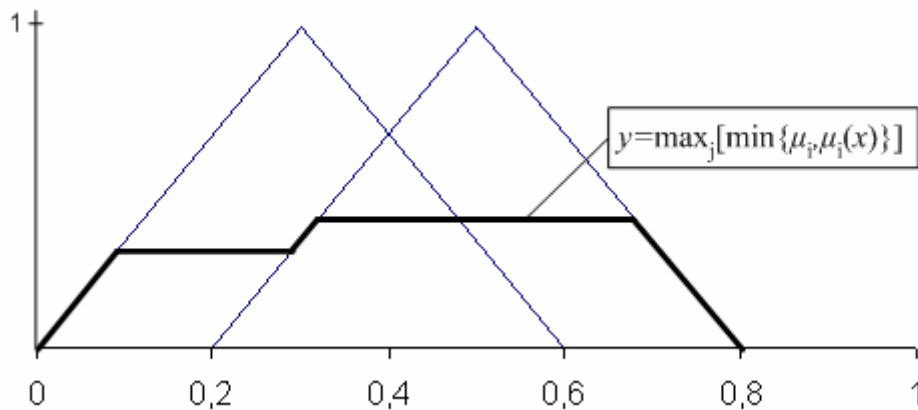
Σχ. 2.10. Έξοδος για λεκτική τιμή 1.

Έστω ότι οι αριθμητικές εισόδους του παραπάνω ελεγκτή ενεργοποιούν δύο κανόνες και ότι ο δεύτερος κανόνας αποδίδει στην λεκτική τιμή 2 την έξοδο του Σχ. 2.11.



Σχ. 2.11. Έξοδος για λεκτική τιμή 2.

Η καμπύλη της συνολικής εξόδου δίνεται από την εξίσωση: $\mu(x) = \max_j [\min\{\mu_i, \mu_i(x)\}]$, $\forall j \in X$. Για το παραπάνω παράδειγμα η συνολική έξοδος δίνεται γραφικά στο Σχ. 2.12.



Σχ. 2.12. Η καμπύλη της συνολικής εξόδου.

Για την μετατροπή της εξόδου του ελεγκτή από ασαφές σύνολο σε αριθμητική τιμή απαραίτητη είναι η διαδικασία της αποσαφoποίησης. Οι διαδικασίες αποσαφoποίησης είναι πολλές. Οι σημαντικότερες παρουσιάζονται παρακάτω.

2.4.5.1. Μέθοδος Κέντρου βάρους (Center of Gravity (C.O.G.))

Ο τύπος που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της αριθμητικής τιμής είναι :

$$x^{COG} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \mu(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx}. \quad (2.3)$$

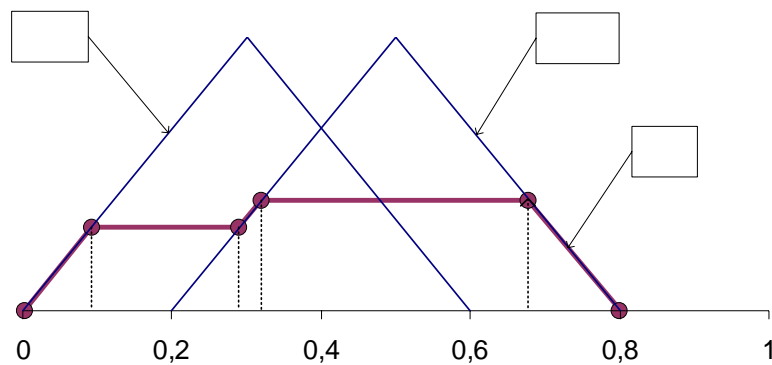
Όπου \int το κλασσικό ολοκλήρωμα και $\mu(x)$ η καμπύλη της τελικής εξόδου, όπως είδαμε παραπάνω.

Μία προσέγγιση για πολυγωνικές καμπύλες $\mu(x)$ θεωρείται η ακόλουθη:

$$x^{COG} = \frac{\sum_{i=1}^l x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^l \mu(x_i)}. \quad (2.4)$$

Όπου i είναι τα σημεία όπου η πολυγωνική γραμμή $\mu(x)$ αλλάζει κλίση.

Για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης (2.4), στο Σχ. 2.13 σημειώνονται τα σημεία αλλαγής κλίσης της γραμμής $\mu(x)$ του παραδείγματος που περιγράφηκε παραπάνω και οι συντεταγμένες τους στον άξονα x .



Σχ. 2.13. Σημεία αλλαγής κλίσης της γραμμής $\mu(x)$.

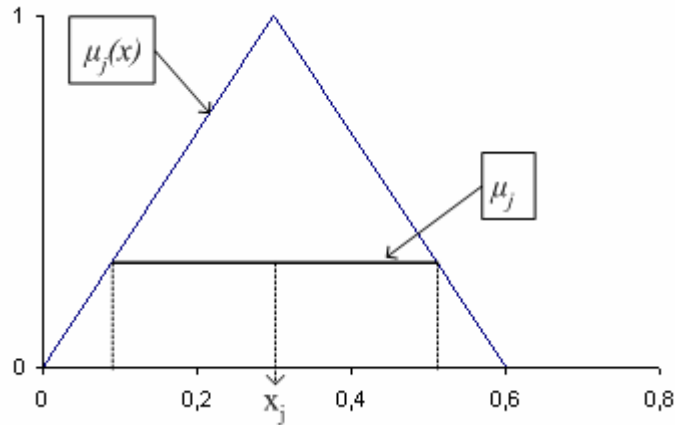
$$\mu_1(x)$$

2.4.5.2. Μέθοδος Ύψους (Height Method)

Ο τύπος που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της αριθμητικής τιμής είναι :

$$x^{Height} = \frac{\sum_{j=1}^k x_j \cdot \mu_j}{\sum_{j=1}^k \mu_j} \quad (2.5)$$

Όπου k ο αριθμός των λεκτικών τιμών που αποτελούν εξόδους των ενεργοποιημένων κανόνων, μ_j ο βαθμός συμμετοχής της εξόδου στην λεκτική τιμή j , και x_j η διάμεσος των σημείων για τα οποία $\mu_j(x) \geq \mu_j$.



Σχήμα 2.14. Αποσαφήνισης μέσω της Μεθόδου Ύψους (height method).

2.5. Ασαφή συστήματα ελέγχου πολλών βαθμίδων (multistage fuzzy control systems)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ασαφής λογική βρίσκει εφαρμογή σε πολύπλοκα συστήματα με βάση κανόνων μεγάλου μεγέθους. Ο αριθμός των κανόνων ενός συστήματος ελέγχου εξαρτάται από το πλήθος των μεταβλητών εισόδου και εξόδου αυτού αλλά και των λεκτικών τιμών κάθε εισόδου. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα μίας βαθμίδας με έξι μεταβλητές εισόδου ($M=6$) επτά λεκτικών τιμών ($N=7$) η καθεμία και μία έξοδο, ο βέλτιστος αριθμός των κανόνων ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της πληρότητας είναι: $R_{1\text{-Level}} = N^M = 7^6 = 117\,649$.

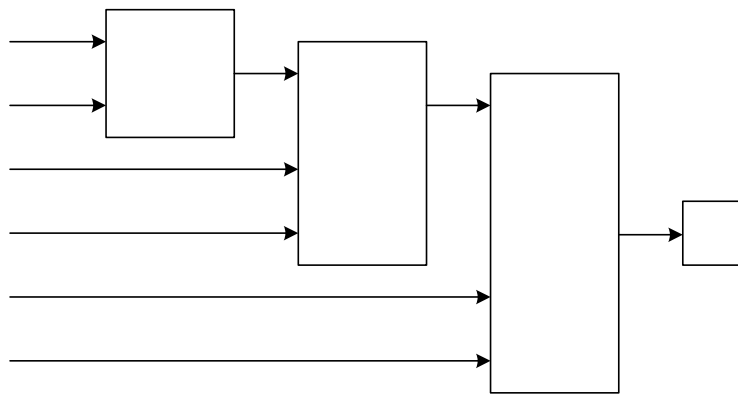
Ένας τόσο μεγάλος αριθμός κανόνων, όμως, απαιτεί κόπο για να αναπτυχθεί και χρόνο για να επεξεργαστεί. Θεωρήθηκε, λοιπόν, απαραίτητη η ανάπτυξη συστημάτων νέας μορφής που να ικανοποιούν τη συνθήκη της πληρότητας μέσω ενός πολύ μικρότερου αριθμού κανόνων.

Έτσι, προτάθηκε η ασαφής συλλογιστική πολλών βαθμίδων [8]. Σε τέτοια συστήματα, εκτός των μεταβλητών εισόδου και εξόδου γίνεται χρήση και ενδιάμεσων μεταβλητών, οι οποίες εμφανίζονται άλλοτε στο Εάν μέρος κάποιου κανόνα και άλλοτε στο Τότε μέρος κάποιου άλλου. Το πλεονέκτημα αυτής της μορφής ελεγκτή είναι ο μικρός αριθμός κανόνων που χρησιμοποιεί. Εάν, για παράδειγμα, αντί του παραπάνω συστήματος καταφύγουμε στη χρήση ενός αντίστοιχου πέντε βαθμίδων

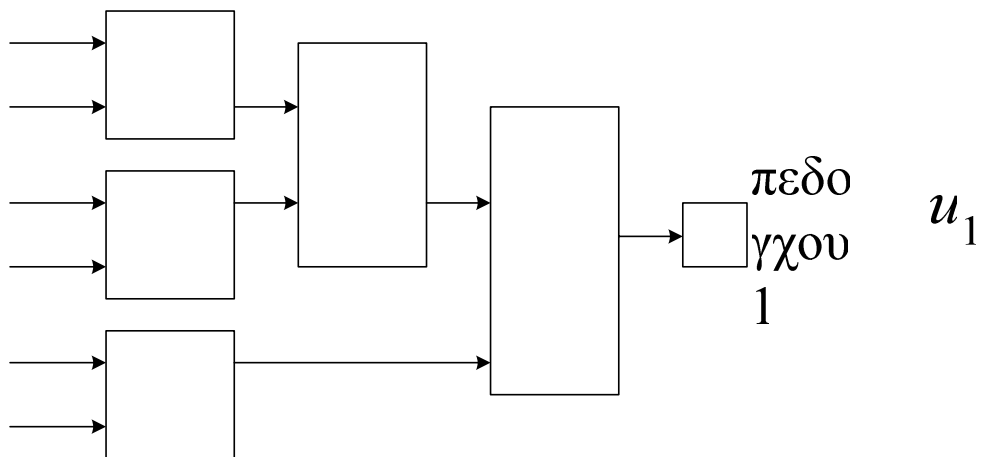
της δομής του Σχ. 2.17, τότε το πλήθος των κανόνων μειώνεται από $R_{1\text{-Level}} = 117\ 649$ σε $R_{5\text{-Level}} = 5 \cdot 7^2 = 245$.

2.5.1. Δομές συστημάτων ελέγχου πολλών επιπέδων

Ένα σύστημα ελέγχου πολλών βαθμίδων (έστω 6 εισόδων) μπορεί να ακολουθεί μία από τις παρακάτω δομές.

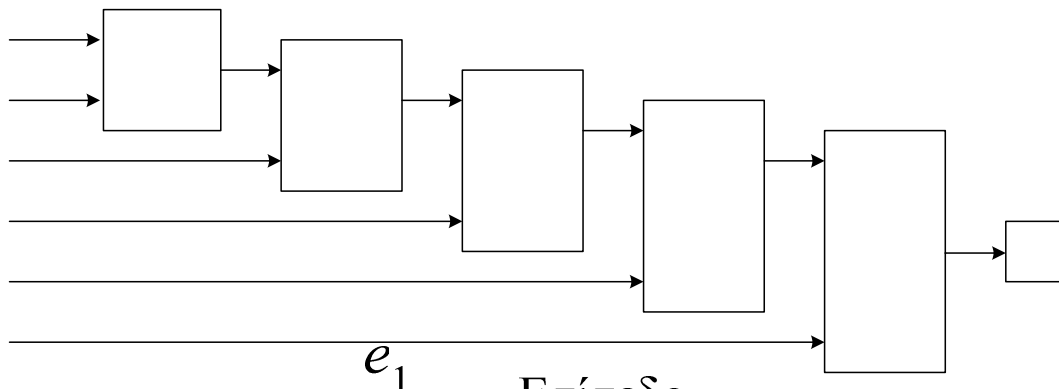


Σχ. 2.15. Ελεγκτής τριών βαθμίδων δομής ασύμμετρου δένδρου (skew tree).



Σχ. 2.16. Ελεγκτής δομής δυαδικού δένδρου (binary tree). Κάθε βαθμίδα έχει δύο εισόδους.

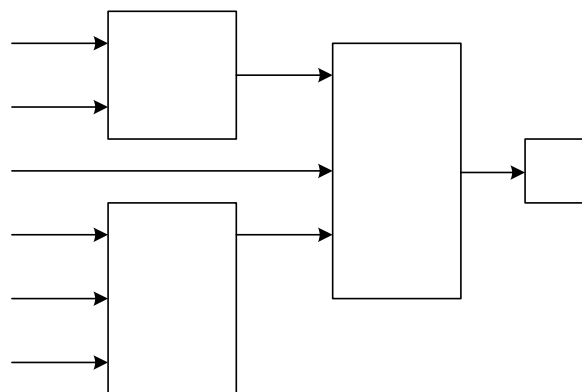
Επίπ
ελέγ
2



Σχ. 2.17. Ελεγκτής πέντε βαθμίδων, δομής ασυμμετρικού δυαδικού δένδρου (skew-binary tree). Ο αριθμός των εισόδων ανά βαθμίδα αυξάνεται κατά ένα

Επίπεδο ελέγχου 1 u_1
Επίπεδο ελέγχου 2 u_2

Επί
ελέ



Σχ. 2.18. Ελεγκτής δύο βαθμίδων δομής τριαδικού δένδρου (ternary tree). Κάθε βαθμίδα έχει τρεις εισόδους.

e_1 Επίπεδο ελέγχου u_1

3. Ασυνέπεια ασαφούς λογικής

Το παράδειγμα πάνω στο οποίο θα εργαστούμε αφορά σε ασαφή ελεγκτή προσαρτημένο σε ένα όχημα που δεν έχει τη δυνατότητα να στρίψει. Σε κάποια απόσταση μπροστά από το όχημα υπάρχει ένα εμπόδιο και ο ελεγκτής πρέπει να οδηγήσει το όχημα μπροστά από το εμπόδιο χωρίς να το ακουμπήσει. Ο ελεγκτής λαμβάνει ως εισόδους τις μεταβλητές “Ταχύτητα” οχήματος και “Εγγύτητα” ως προς το ακίνητο εμπόδιο. Ως έξοδο παράγει το φρενάρισμα που θα χρειαστεί να πραγματοποιηθεί, προκειμένου το όχημα να αποφύγει τη σύγκρουση με το εμπόδιο. Αυτή η μεταβλητή εξόδου θα μπορούσε για παράδειγμα να ερμηνευτεί η επιβαλλόμενη πίεση στο φρένο.

3.1. Ανασκόπηση των ασυνεπειών που εντοπίστηκαν.

Η βασική απαίτηση του ελέγχου είναι πως όσο η ταχύτητα του οχήματος και η εγγύτητα του εμποδίου μεγαλώνει, ο ελεγκτής πρέπει να δίνει εντολή για όλο και περισσότερο φρένο. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε έναν ασαφή ελεγκτή ο οποίος, παρόλο που διαθέτει κανόνες που ικανοποιούν τη βασική αρχή, δε δίνει πάντα τις σωστές εντολές στο όχημα.

Για λόγους απλότητας επελέγησαν μόνο τρεις λεκτικές τιμές για τις μεταβλητές “Ταχύτητα” και “Εγγύτητα”, ενώ οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι όλες τριγωνικής μορφής για υπολογιστική ευκολία.

Χρησιμοποιήσαμε ως μέθοδο σύνθεσης των ασαφών συνόλων την max-min (Παράγραφος 2.5.4.), γιατί αυτή χρησιμοποιείται ευρέως. Διαπιστώθηκε πως όσο οι αριθμητικές τιμές των εισόδων ενεργοποιούν έναν κανόνα, τα αποτελέσματα συμβαδίζουν με την βασική απαίτηση του ελέγχου που περιγράψαμε πιο πάνω. Όταν, όμως, ενεργοποιούνται ταυτόχρονα δύο κανόνες, υπάρχουν περιπτώσεις που αποκλίνουν από την βασική απαίτηση.

Έστω ότι η μία από τις μεταβλητές εισόδου λαμβάνει αριθμητική τιμή (έστω e_1) που ανήκει σε περιοχή αλληλοκάλυψης των συναρτήσεων συμμετοχής μ_1 και μ_2 δύο

λεκτικών τιμών, ενώ η άλλη είσοδος λαμβάνει τιμές (έστω e_2) που ανήκουν σε περιοχή που η συνάρτηση συμμετοχής μ_3 είναι φθίνουσα. Λόγω του ότι οι συναρτήσεις είναι τριγωνικές ισχύουν: $\mu_1 = a_1 e_1 + b_1$, $\mu_2 = a_2 e_1 + b_2$, $\mu_3 = a_3 e_2 + b_3$. Εάν η απόλυτη τιμή της αρνητικής κλίσης της ευθείας μ_3 ($|a_3|$) είναι μικρότερη από την θετική εκ των δύο ευθειών, που σχηματίζουν την περιοχή αλληλοκάλυψης, κλίση (έστω η a_2 της μ_2), τότε όσο αυξάνεται η τιμή της δεύτερης εισόδου, τόσο μικρότερη είναι η έξοδος του κανόνα (έστω y) που συσχετίζει τις λεκτικές τιμές που περιγράφονται από τις συναρτήσεις μ_2 και μ_3 αντίστοιχα. Συμβολίζοντας με \uparrow και \downarrow τις τάσεις αύξησης και μείωσης, αντίστοιχα, έχουμε:

$(\uparrow e_2 \Rightarrow \downarrow \mu_3(e_2) \Rightarrow \downarrow \min\{\mu_3(e_2), \mu_2(e_1)\} \stackrel{a_3 < a_2}{=} \mu_3(e_2) \Rightarrow \downarrow y)$, όπου y είναι η τιμή της επιβράδυνσης (φρένο).

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε μαθηματικά ότι η αποσαφηνισμένη έξοδος μειώνεται όταν οι εισοδοί αυξάνονται, ολοκληρώσαμε την κατασκευή του απλού αυτού ελεγκτή έτσι ώστε να είναι κατάλληλος για την εξέταση της εγκυρότητας των υποθέσεων που διατυπώθηκαν παραπάνω.

Στη συνέχεια, μεταβάλαμε τη μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής των λεκτικών τιμών των μεταβλητών του συστήματος ελέγχου 1 και ελέγξαμε τα νέα αποτελέσματα. Αφού εντοπίσαμε τη βέλτιστη μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής, κατασκευάσαμε βάσει αυτήν έναν νέο ελεγκτή δύο βαθμίδων (Παράγραφος 2.5) και ελέγξαμε τη συμπεριφορά του.

3.2. Έλεγχος συμπεριφοράς ελεγκτή 1 (Μη συμμετρικού, μίας βαθμίδας).

3.2.1. Συναρτήσεις συμμετοχής εισόδων-εξόδου ελεγκτή 1.

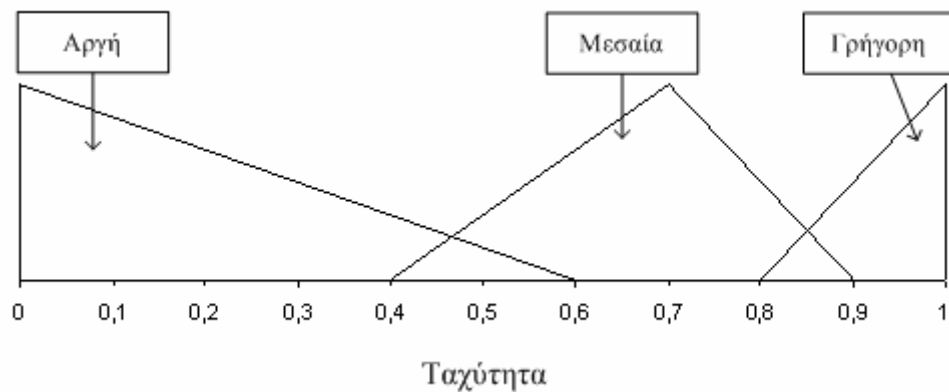
Οι τρεις λεκτικές τιμές για κάθε μία από τις δύο εισόδους είναι:

► Για την μεταβλητή “Ταχύτητα” οι τιμές είναι: Αργή(1), Μεσαία(2), Γρήγορη(3).

► Για την μεταβλητή “Εγγύτητα” οι τιμές είναι: Μικρή(1), Μέτρια(2), Μεγάλη(3).

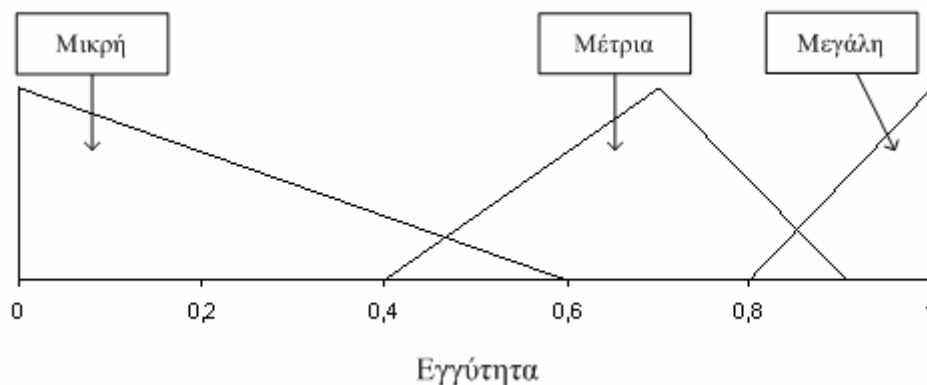
Ενώ για την έξοδο “Φρένο” οι λεκτικές τιμές είναι πέντε: Καθόλου(1), Λίγο(2), Μέτρια(3), Πολύ(4), Πάρα πολύ(5).

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι συναρτήσεις συμμετοχής των λεκτικών μεταβλητών των εισόδων και της εξόδου του ελεγκτή 1 για κανονικοποιημένες τιμές $x_{norm} \in [0,1]$. Η κανονικοποίηση των τιμών απλοποιεί κατά πολύ το σύστημα.



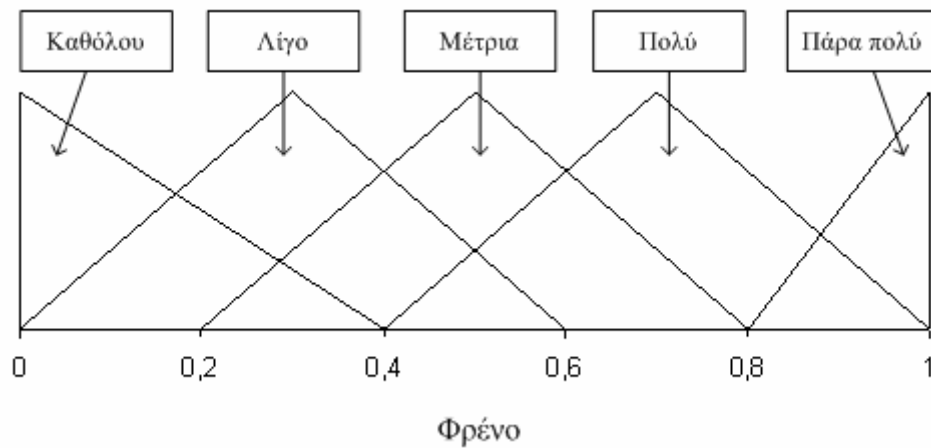
Σχήμα 3.1. Μορφή της εισόδου “Ταχύτητα” του ελεγκτή 1.

Για να γίνει αντιληπτή η έννοια των τιμών του άξονα x του διαγράμματος της συνάρτησης συμμετοχής της μεταβλητής “εγγύτητα”, αρκεί να ειπωθεί ότι η τιμή 0 εισάγεται στην περίπτωση που το εμπόδιο είναι τόσο μακριά που δεν υπάρχει λόγος το όχημα να φρενάρει, ενώ η τιμή 1 όταν το εμπόδιο εμφανιστεί ακριβώς δίπλα στο όχημα.



Σχήμα 3.2. Μορφή της εισόδου “Εγγύτητα” του ελεγκτή 1.

Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η αποσαφηνισμένη τελική έξοδος εκφράζει την επιβαλλόμενη πίεση στο φρένο. Οι συναρτήσεις συμμετοχής των λεκτικών τιμών της είναι της μορφής:



Σχήμα 3.3. Μορφή της εξόδου “Φρένο” του ελεγκτή 1.

3.2.2. Κανόνες ελέγχου ελεγκτή 1

Οι κανόνες του συστήματος είναι εννιά και συμμετρικοί.

1. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι αργή(1) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μικρή(1) τότε το όχημα δεν θα φρενάρει καθόλου(1).
2. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι αργή(1) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μέτρια(2) τότε το όχημα θα φρενάρει λίγο(2).
3. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι αργή(1) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μεγάλη(3) τότε το όχημα θα φρενάρει μέτρια(3).
4. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι μεσαία(2) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μικρή(1) τότε το όχημα θα φρενάρει λίγο(2).
5. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι μεσαία(2) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μέτρια(2) τότε το όχημα θα φρενάρει μέτρια(3).
6. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι μεσαία(2) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μεγάλη(3) τότε το όχημα θα φρενάρει πολύ(4).
7. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι γρήγορη(3) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μικρή(1) τότε το όχημα θα φρενάρει μέτρια(3).

8. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι γρήγορη(3) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μέτρια(2) τότε το όχημα θα φρενάρει πολύ(4).
9. Εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι γρήγορη(3) και η εγγύτητα του ως προς το εμπόδιο μεγάλη(3) τότε το όχημα θα φρενάρει πάρα πολύ(5).

Η βάση κανόνων υπό μορφή πίνακα είναι:

		Ταχύτητα		
		Αργή(1)	Μεσαία(2)	Γρήγορη(3)
Εγγύτητα	Μικρή(1)	Καθόλου(1)	Λίγο(2)	Μέτρια(3)
	Μέτρια(2)	Λίγο(2)	Μέτρια(3)	Πολύ(4)
	Μεγάλη(3)	Μέτρια(3)	Πολύ(4)	Πάρα πολύ(5)

Πίνακας 3.1. Η βάση κανόνων του ελεγκτή 1.

3.2.3. Κατηγοριοποίηση περιπτώσεων αστοχιών ελεγκτή 1

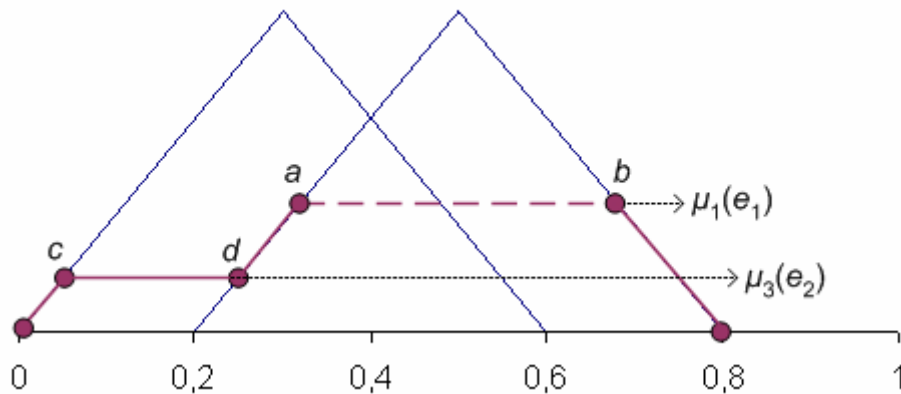
Θα συγκρίνουμε τα συμπεράσματα του ελεγκτή 1 για διάφορα ζεύγη τιμών εισόδου. Έστω ότι στα ζεύγη αυτά, η μεταβλητή “Εγγύτητα” λαμβάνει σταθερή αριθμητική τιμή (e_1) που ανήκει σε περιοχή αλληλοκάλυψης των συναρτήσεων συμμετοχής δύο λεκτικών τιμών. Έτσι, η τιμή e_1 ενεργοποιεί δύο κανόνες, που θεωρούμε ότι έχουν διαφορετικά Τότε μέλη. Στην μεταβλητή “Ταχύτητα” δίνονται αριθμητικές τιμές (e_2) που μετά την κανονικοποίηση προκύπτουν μικρότερες αυτών της μεταβλητής “Εγγύτητα” και ενεργοποιούν μόνο έναν κανόνα.

Οι αριθμητικές εισοδοί μετατρέπονται σε ασαφή σύνολα και έστω το αποτέλεσμα: “Εγγύτητα” = $\{(2, \mu_2(e_2)), (3, \mu_3(e_2))\}$ και Ταχύτητα = $\{(1, \mu_1(e_1))\}$. Εάν θεωρήσουμε $\mu_1(e_1) < \max\{\mu_2(e_2), \mu_3(e_2)\}$ και $\mu_1(e_1) > \min\{\mu_2(e_2), \mu_3(e_2)\}$, η ασαφής έξοδος που προκύπτει με βάση την max-min σύνθεση θα έχει τη μορφή μίας εκ των δύο παρακάτω περιπτώσεων (Σχ. 3.4, 3.5).

Περίπτωση Α

Εάν $\mu_2(e_2) > \mu_3(e_2)$, τότε η ασαφής έξοδος είναι: “Φρένο” = $\{(1, \mu_3(e_2)), (2, \mu_1(e_1))\}$.

Στο Σχ. 3.4 δίνεται η έξοδος γραφικά.

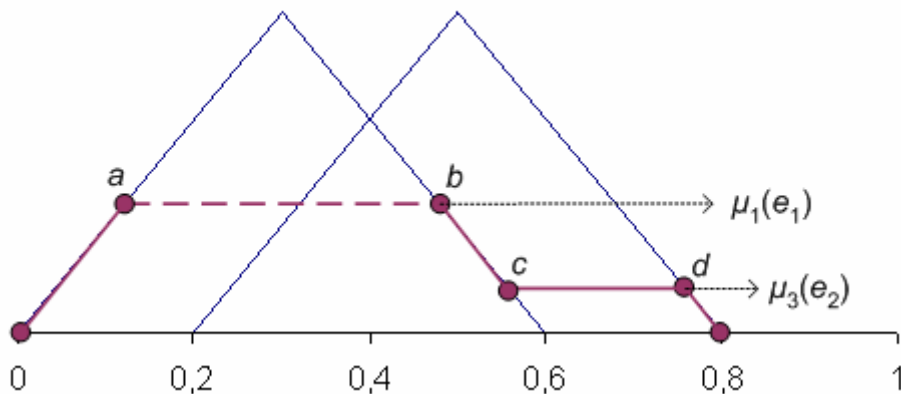


Σχ. 3.4. Σύνολο μορφής Α: “Φρένο” = $\{(1, \mu_3(e_2)), (2, \mu_1(e_1))\}$.

Περίπτωση Β

Εάν $\mu_2(e_2) < \mu_3(e_2)$, τότε η ασαφής έξοδος είναι: “Φρένο” = $\{(1, \mu_1(e_1)), (2, \mu_3(e_2))\}$.

Γραφικά είναι:



Σχ. 3.5. Σύνολο μορφής Β: “Φρένο” = $\{(1, \mu_1(e_1)), (2, \mu_3(e_2))\}$.

Για την αποσαφήνιση της εξόδου χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της μεθόδου Κέντρου Βάρους. Το αποτέλεσμα αυτής της μεθόδου είναι μία αριθμητική τιμή, έστω x^{COG} . Εάν σχεδιάσουμε την ευθεία: $x = x^{\text{COG}}$, τότε η επιφάνεια που περιγράφει την ασαφή έξοδο χωρίζεται σε δύο επιφάνειες του ίδιου εμβαδού. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, συμπεραίνουμε τα εξής:

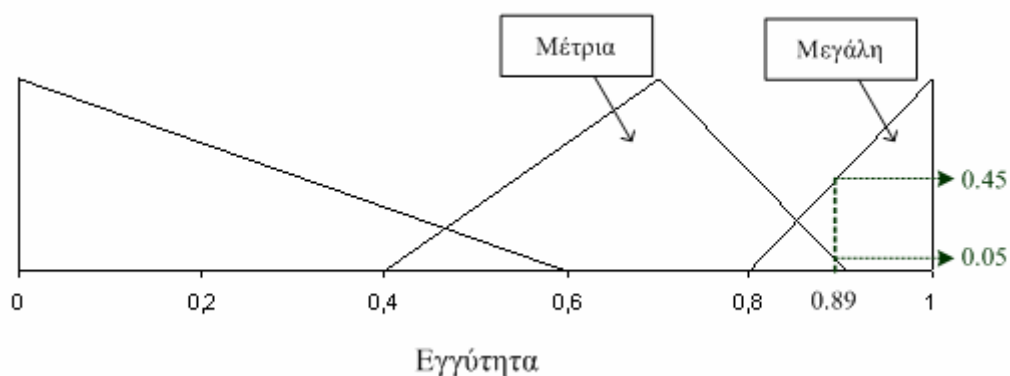
► Όταν η ασαφής έξοδος είναι της μορφής B (Σχ.3.5), και η μεταβλητή “Ταχύτητα” λαμβάνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, οι οποίες, όμως, ανήκουν σε περιοχή που αντιστοιχεί σε αύξουσα συνάρτηση συμμετοχής, η τελική έξοδος μειώνεται.

► Όταν η ασαφής έξοδος είναι της μορφής A (Σχ.3.4), και η μεταβλητή “Ταχύτητα” λαμβάνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, οι οποίες, όμως, ανήκουν σε περιοχή που αντιστοιχεί σε φθίνουσα συνάρτηση συμμετοχής, η τελική έξοδος μειώνεται.

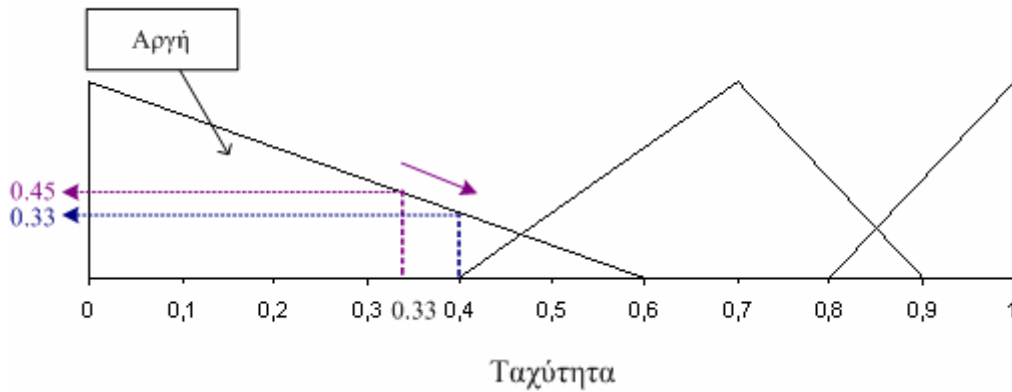
3.2.4. Αριθμητικό παράδειγμα αστοχίας ελεγκτή 1

Έστω ότι εισάγουμε την τιμή 0.89 ($0.8 < 0.89 < 0.9$) στην μεταβλητή “Εγγύτητα”. Η είσοδος αυτή μετατρέπεται στο ασαφές σύνολο: $\text{Εγγύτητα} = \{(\text{Μέτρια}, 0.05), (\text{Μεγάλη}, 0.45)\}$.

Το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να λάβει τιμές η είσοδος “Ταχύτητα” ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις που τέθηκαν παραπάνω, είναι το $[0.33 \ 0.40]$. Καταλήγουμε, λοιπόν, να εξετάζουμε την συμπεριφορά του ελεγκτή για τα εξής δύο ζεύγη εισόδων: $(\text{Εγγύτητα}, \text{Ταχύτητα}) = (0.89, 0.33)$ και $(\text{Εγγύτητα}, \text{Ταχύτητα}) = (0.89, 0.40)$



Σχήμα 3.6. Μετατροπή της αριθμητικής εισόδου: “Εγγύτητα”=0.89 σε ασαφές σύνολο.



Σχήμα 3.7 Αύξηση της αριθμητικής τιμής της μεταβλητής “Ταχύτητα” από 0.33 σε 0.4 αντιστοιχεί σε μείωση του βαθμού συμμετοχής της εισόδου στην λεκτική τιμή “Αργή”.

Για αυτά τα ζεύγη τιμών οι κανόνες που ενεργοποιούνται είναι:

1. Εάν η ταχύτητα είναι αργή(1) και η εγγύτητα μέτρια(2) τότε το όχημα θα φρενάρει λίγο(2) (κανόνας 122).
2. Εάν η ταχύτητα είναι αργή(1) και η εγγύτητα μεγάλη(3) τότε το όχημα θα φρενάρει μέτρια(3) (κανόνας 133).

Εξετάζουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις:

(Εγγύτητα, Ταχύτητα) = (0.89, 0.33)

Με βάση τη max-min σύνθεση και για τις τιμές: “Εγγύτητα”= 0.89 και “Ταχύτητα”= 0.33, ο κανόνας 122 αποδίδει στην λεκτική τιμή “Λίγο” της εξόδου βαθμό αληθείας: $\mu_{\text{Λίγο}}(\text{Φρένο}) = \min\{\mu_{\text{Αργή}}(0.33), \mu_{\text{Μέτρια}}(0.89)\} = \min\{0.45, 0.05\} = 0.05$.

Για το ίδιο ζεύγος τιμών, ο κανόνας 133 αποδίδει στην λεκτική τιμή “Μέτρια” της εξόδου βαθμό αληθείας: $\mu_{\text{Μέτρια}}(\text{Φρένο}) = \min\{\mu_{\text{Αργή}}(0.33), \mu_{\text{Μεγάλη}}(0.89)\} = \min\{0.45, 0.45\} = 0.45$.

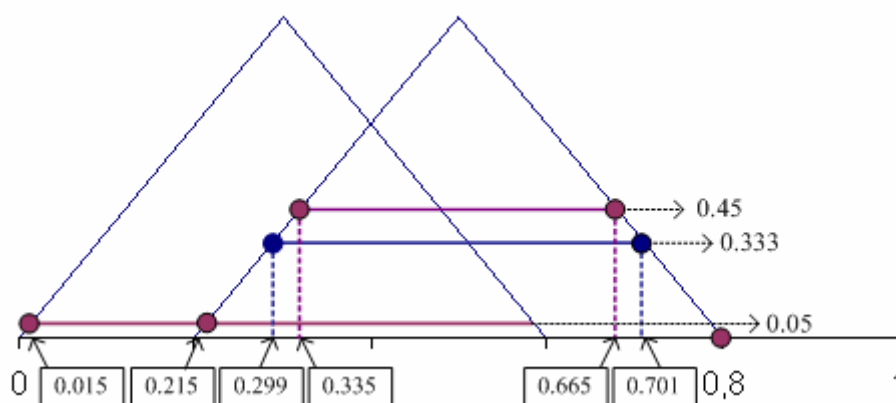
Άρα, το ασαφές σύνολο που ορίζει την έξοδο είναι: “Φρένο” = {(Λίγο, 0.05), (Μέτρια, 0.45)}.

$$(\text{Εγγύτητα}, \text{Ταχύτητα}) = (0.89, 0.40)$$

Για το δεύτερο ζεύγος εισόδων: “Εγγύτητα”= 0.89 και “Ταχύτητα”=0.40 > 0.33, ο κανόνας 122 αποδίδει στην λεκτική τιμή “Λίγο” της εξόδου βαθμό αληθείας: $\mu_{\text{Λίγο}}(\text{Φρένο}) = \min\{\mu_{\text{Αργή}}(0.40), \mu_{\text{Μέτρια}}(0.89)\} = \min\{0.33, 0.05\} = 0.05$.

Ο κανόνας 133, αντίστοιχα, αποδίδει στην λεκτική τιμή “Μέτρια” της εξόδου βαθμό αληθείας: $\mu_{\text{Μέτρια}}(\text{Φρένο}) = \min\{\mu_{\text{Αργή}}(0.40), \mu_{\text{Μεγάλη}}(0.89)\} = \min\{0.33, 0.45\} = 0.33$.

Άρα, το ασαφές σύνολο που ορίζει την έξοδο είναι: “Φρενο’” = {(Λίγο, 0.05), (Μέτρια, 0.33)}. Οι ασαφείς εξόδου



Σχήμα 3.8. Γραφική αναπαράσταση της ασαφούς εξόδου του ελεγκτή 1 για εισόδους (0.89, 0.33) και (0.89, 0.4) αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τον τύπο της μεθόδου αποσαφήνισης Κέντρου βάρους για τις δύο ασαφείς εξόδους έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{“Φρένο”} &= \frac{\int_0^1 x \mu(x) dx}{\int_0^1 \mu(x) dx} = \\
&= \frac{\int_0^{0.015} [x \cdot (3.33x)] dx + \int_{0.015}^{0.215} (0.05 \cdot x) dx + \int_{0.215}^{0.335} [x \cdot (3.33x - 0.67)] dx}{\int_0^{0.015} (3.33x) dx + \int_{0.015}^{0.215} 0.05 dx + \int_{0.215}^{0.335} (3.33x - 0.67) dx + \int_{0.335}^{0.665} 0.45 dx + \int_{0.665}^1 (-3.33x + 2.666) dx} + \\
&\quad + \frac{\int_{0.335}^{0.665} (0.45 \cdot x) dx + \int_{0.665}^1 [x \cdot (-3.33x + 2.666)] dx}{\int_0^{0.015} (3.33x) dx + \int_{0.015}^{0.215} 0.05 dx + \int_{0.215}^{0.335} (3.33x - 0.67) dx + \int_{0.335}^{0.665} 0.45 dx + \int_{0.665}^1 (-3.33x + 2.666) dx} = \\
&= \frac{3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0.015} + 0.05 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.215}^{0.335} - 0.67 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.335}}{3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.015} + 0.05 [x]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.335} - 0.67 [x]_{0.215}^{0.335} + 0.45 [x]_{0.335}^{0.665} - 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.665}^1 + 2.666 [x]_{0.665}^1} + \\
&\quad + \frac{0.45 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.335}^{0.665} - 3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.665}^1 + 2.666 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.665}^1}{3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.015} + 0.05 [x]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.335} - 0.67 [x]_{0.215}^{0.335} + 0.45 [x]_{0.335}^{0.665} - 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.665}^1 + 2.666 [x]_{0.665}^1} = \\
&= \frac{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-6}) + (0.05 \cdot 0.023) + (3.33 \cdot 0.00921) - (0.67 \cdot 0.033)}{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-5}) + (0.05 \cdot 0.2) + (3.33 \cdot 0.033) - (0.67 \cdot 0.12) + (0.45 \cdot 0.33) - (3.33 \cdot 0.2788) + (2.666 \cdot 0.335)} + \\
&\quad + \frac{(0.45 \cdot 0.165) - (3.33 \cdot 0.2353) + (2.666 \cdot 0.2788)}{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-5}) + (0.05 \cdot 0.2) + (3.33 \cdot 0.033) - (0.67 \cdot 0.12) + (0.45 \cdot 0.33) - (3.33 \cdot 0.2788) + (2.666 \cdot 0.335)} = \\
&= \frac{3.63 \cdot 10^{-7} + 0.00115 + 0.03066 - 0.02211 + 0.07425 - 0.7835 + 0.74328}{0.00037 + 0.01 + 0.10989 - 0.0804 + 0.1485 - 0.9284 + 0.89311} = \\
&= \frac{0.04373}{0.15307} \cong 0.2857.
\end{aligned}$$

“Φρενο’”=

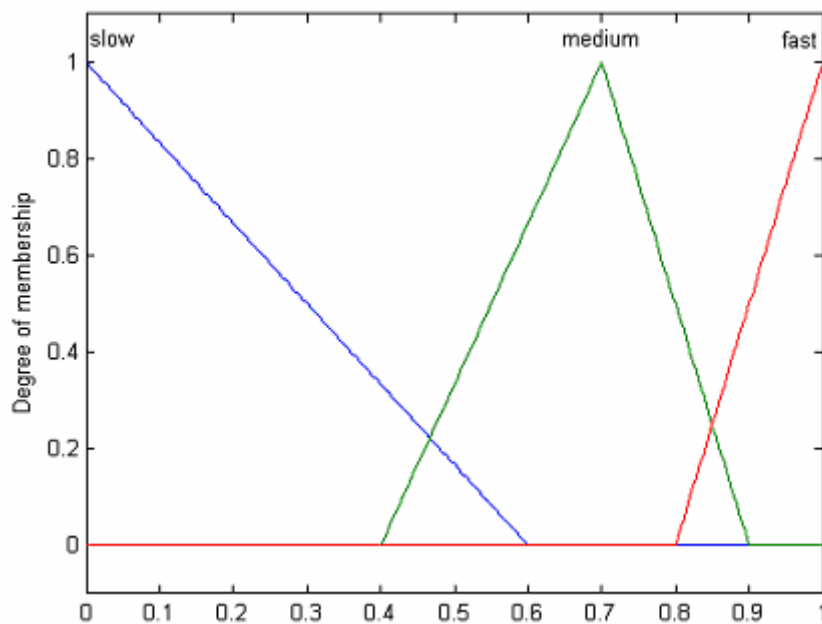
$$\begin{aligned}
 & \int_0^{0.015} [x \cdot (3.33x)] dx + \int_{0.015}^{0.215} (0.05 \cdot x) dx + \int_{0.215}^{0.301} [x \cdot (3.33x - 0.67)] dx \\
 = & \frac{\int_0^{0.015} (3.33x) dx + \int_{0.015}^{0.215} 0.05 dx + \int_{0.215}^{0.301} (3.33x - 0.67) dx + \int_{0.301}^{0.699} 0.333 dx + \int_{0.699}^1 (-3.33x + 2.666) dx}{\int_{0.015}^{0.7} (0.333 \cdot x) dx + \int_{0.7}^1 [x \cdot (-3.33x + 2.666)] dx} + \\
 & \int_0^{0.015} (3.33x) dx + \int_{0.015}^{0.215} 0.05 dx + \int_{0.215}^{0.301} (3.33x - 0.67) dx + \int_{0.301}^{0.699} 0.333 dx + \int_{0.699}^1 (-3.33x + 2.666) dx = \\
 = & \frac{3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0.015} + 0.05 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.215}^{0.301} - 0.67 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.301}}{3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.015} + 0.05 [x]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.301} - 0.67 [x]_{0.215}^{0.301} + 0.333 [x]_{0.301}^{0.699} - 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.699}^1 + 2.666 [x]_{0.699}^1} + \\
 & \frac{0.333 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.301}^{0.699} - 3.33 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.699}^1 + 2.666 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.699}^1}{3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.015} + 0.05 [x]_{0.015}^{0.215} + 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.215}^{0.301} - 0.67 [x]_{0.215}^{0.301} + 0.333 [x]_{0.301}^{0.699} - 3.33 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.699}^1 + 2.666 [x]_{0.699}^1} = \\
 = & \frac{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-6}) + (0.05 \cdot 0.023) + (3.33 \cdot 0.0058) - (0.67 \cdot 0.0221)}{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-5}) + (0.05 \cdot 0.2) + (3.33 \cdot 0.0221) - (0.67 \cdot 0.086) + (0.333 \cdot 0.398) - (3.33 \cdot 0.2556) + (2.666 \cdot 0.301)} + \\
 & \frac{(0.333 \cdot 0.199) - (3.33 \cdot 0.2194) + (2.666 \cdot 0.2556)}{(3.33 \cdot 11 \cdot 10^{-5}) + (0.05 \cdot 0.2) + (3.33 \cdot 0.0221) - (0.67 \cdot 0.086) + (0.333 \cdot 0.398) - (3.33 \cdot 0.2556) + (2.666 \cdot 0.301)} = \\
 = & \frac{3.63 \cdot 10^{-7} + 0.00115 + 0.01931 - 0.01481 + 0.06626 - 0.7306 + 0.6814}{0.00037 + 0.01 + 0.07359 - 0.05762 + 0.13253 - 0.8511 + 0.8024} = \\
 = & \frac{0.02271}{0.11017} = 0.2061 < 0.2857.
 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι οι υποθέσεις μας περί αστοχιών του ασαφούς ελεγκτή ευσταθούν, καθώς στο παραπάνω παράδειγμα η έξοδος μειώνεται παρόλο που η μία αριθμητική είσοδος παραμένει σταθερή και η δεύτερη αυξάνεται.

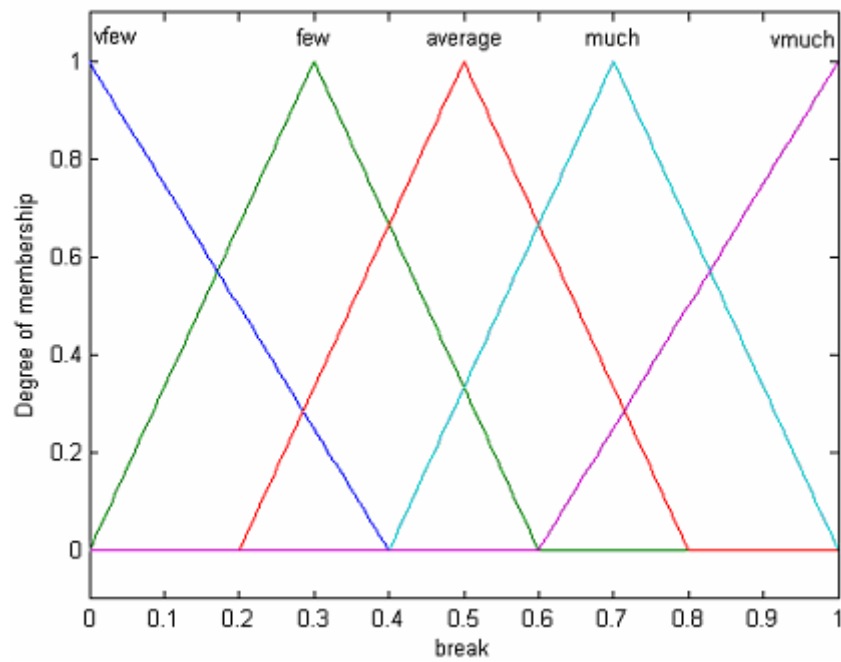
3.2.5. Χρήση της γλώσσας Προγραμματισμού Matlab για τον εντοπισμό αστοχιών του ελεγκτή 1.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα συμπεράσματα του ελεγκτή της Παραγράφου 3.2 για πολλά διαφορετικά ζεύγη τιμών εισόδου, γίνεται χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab. Η Matlab δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να κατασκευάσει έναν ασαφή ελεγκτή του οποίου τα χαρακτηριστικά εισάγονται εύκολα μέσω των παραθύρων διαλόγου του γραφικού περιβάλλοντος της ασαφούς εργαλειοθήκης της.

Οι συναρτήσεις συμμετοχής, λοιπόν, των λεκτικών τιμών των εισόδων και της εξόδου του είναι της μορφής των Σχ. 3.9, 3.10 αντίστοιχα.

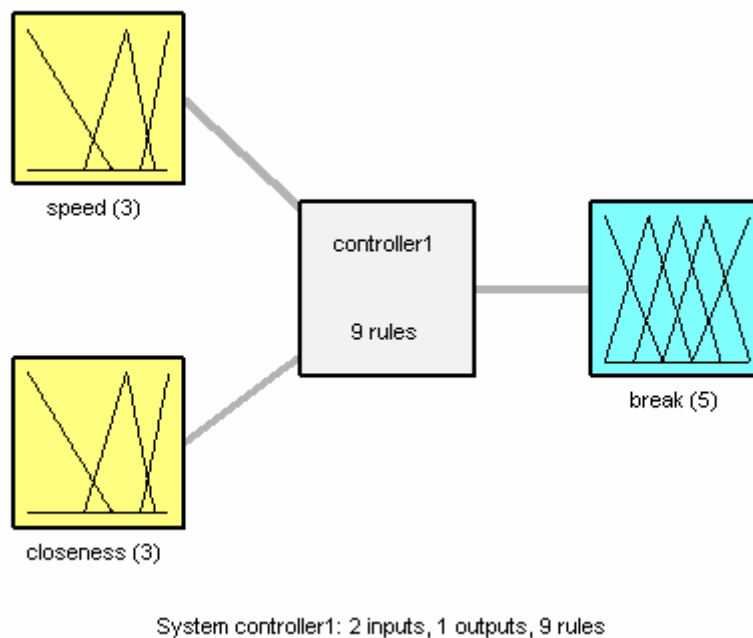


Σχ. 3.9. Διάγραμμα των μεταβλητών εισόδου του ελεγκτή 1.



Σχ. 3.10. Διάγραμμα της μεταβλητής εξόδου του ελεγκτή 1.

Τα χαρακτηριστικά του συστήματος ελέγχου 1 που αναπτύχθηκε στην Matlab παρουσιάζονται στο Σχ. 3.11.



Σχ. 3.11. Ο ελεγκτής 1.

Έπειτα, δημιουργούμε ένα M-file, το οποίο εισάγει στον ελεγκτή όλα τα ζεύγη τιμών από 0 έως 1 με βήμα 0.01. Τις εξόδους της αποθηκεύει σε ένα πίνακα διαστάσεων 100×100 με το όνομα out. Το αρχείο είναι:

```
out=zeros(100,100);
for i=1:100
    for y=1:100
        out(i,y)=evalfis([i/100;y/100],controller1);
    end
end
```

Καλούμε το αρχείο στο παράθυρο εντολών της Matlab και λαμβάνουμε τον πίνακα out. Παρακάτω παρουσιάζονται τμήματα του πίνακα που περιέχουν διαδοχικά στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν την αναμενόμενη αυξητική πορεία που επιβάλει η λογική. Τα στοιχεία αυτά είναι τα ελαφρώς χρωματισμένα. Να σημειωθεί ότι το στοιχείο out[89 33], για παράδειγμα, αναφέρεται στην έξοδο του ελεγκτή για εισόδους: Ταχύτητα=0.89 και Εγγύτητα=0.33.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
48	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638
49	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926
50	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165
51	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347	0.29347
52	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505	0.29505
53	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29624	0.29613	0.29601
54	0.29729	0.29729	0.29729	0.29729	0.29729	0.29729	0.29729	0.29729	0.29722	0.29715	0.29706	0.29698
55	0.29805	0.29805	0.29805	0.29805	0.29805	0.29805	0.298	0.29796	0.2979	0.29785	0.29778	0.29772
56	0.29874	0.29874	0.29874	0.29874	0.29871	0.29869	0.29866	0.29862	0.29859	0.29855	0.29851	0.29846
57	0.29919	0.29919	0.29917	0.29916	0.29914	0.29912	0.2991	0.29908	0.29905	0.29903	0.299	0.29897
58	0.2996	0.29959	0.29958	0.29957	0.29957	0.29956	0.29955	0.29953	0.29952	0.29951	0.2995	0.29948
59	0.2998	0.29979	0.29979	0.29979	0.29978	0.29978	0.29977	0.29977	0.29976	0.29975	0.29975	0.29974

Πίνακας 3.2. Τμήμα 1 του πίνακα out του ελεγκτή 1.

	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	0.28638	0.28638	0.28638	0.28638	0.30427	0.32023	0.33451	0.34729	0.36132	0.3751	0.38908
49	0.28926	0.28926	0.28926	0.28926	0.30558	0.32026	0.33487	0.34917	0.36329	0.37716	0.39118
50	0.29165	0.29165	0.29165	0.29165	0.307	0.32198	0.33668	0.35108	0.36529	0.37925	0.39331
51	0.29347	0.29347	0.29323	0.29298	0.3084	0.32346	0.33824	0.3527	0.367	0.38103	0.39513
52	0.29489	0.29472	0.29452	0.29431	0.30981	0.32495	0.3398	0.35435	0.36872	0.38283	0.39697
53	0.29588	0.29574	0.29558	0.29541	0.31098	0.32617	0.34109	0.35569	0.37013	0.38431	0.39847
54	0.29688	0.29677	0.29665	0.29652	0.31215	0.32741	0.34238	0.35705	0.37155	0.38579	0.39998
55	0.29764	0.29756	0.29747	0.29737	0.31305	0.32835	0.34338	0.35809	0.37264	0.38693	0.40114
56	0.29841	0.29836	0.2983	0.29823	0.31395	0.3293	0.34438	0.35914	0.37374	0.38808	0.4023
57	0.29894	0.2989	0.29886	0.29881	0.31457	0.32995	0.34506	0.35985	0.37448	0.38885	0.40309
58	0.29946	0.29944	0.29942	0.2994	0.31518	0.3306	0.34574	0.36056	0.37523	0.38963	0.40388
59	0.29973	0.29972	0.29971	0.2997	0.3155	0.33093	0.34608	0.36093	0.37561	0.39003	0.40429
60	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582	0.33126	0.34643	0.36129	0.37599	0.39043	0.40469
61	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582	0.33126	0.34643	0.36129	0.37599	0.39043	0.40469
62	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582	0.33126	0.34643	0.36129	0.37599	0.39043	0.40469

Πίνακας 3.3. Τμήμα 2 του πίνακα out του ελεγκτή 1.

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
76	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582
77	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582
78	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582
79	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582
80	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.31582
81	0.31787	0.31787	0.31787	0.31833	0.31885	0.31939	0.32	0.32065	0.32138	0.32217	0.34466
82	0.33632	0.33632	0.33632	0.33632	0.33632	0.33632	0.33741	0.33856	0.33986	0.34125	0.36256
83	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.3557	0.35754	0.37778
84	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.37668	0.39399
85	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.41757
86	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.42332	0.43907
87	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.4443	0.44246	0.45581
88	0.46368	0.46368	0.46368	0.46368	0.46368	0.46368	0.46259	0.46144	0.46014	0.45875	0.47283
89	0.48213	0.48213	0.48213	0.48167	0.48115	0.48061	0.48	0.47935	0.47862	0.47783	0.49273
90	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.51582
91	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.51582

Πίνακας 3.4. Τμήμα 3 του πίνακα out του ελεγκτή_1.

Όπως διαπιστώνεται, τα ζεύγη των εισόδων στα οποία αντιστοιχούν τα παραπάνω παράδοξα αποτελέσματα, επαληθεύουν τις διαισθητικές διαπιστώσεις της Παραγράφου 3.1.

3.3. Πώς η μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής επηρεάζει την συμπεριφορά και την επίδοση ενός ελεγκτή μίας βαθμίδας.

Για να μπορέσουμε να εξαλείψουμε τα παράδοξα αποτελέσματα του ελεγκτή 1 αρκεί να μεταβάλουμε τις συναρτήσεις συμμετοχής των λεκτικών τιμών των εισόδων και της εξόδου του. Η μορφή αυτών των συναρτήσεων συμμετοχής επηρεάζουν σαφώς την συμπεριφορά και επίδοση του ελεγκτή. Καταρχήν, όμως, ας αναφέρουμε τις σημαντικές παραμέτρους που χαρακτηρίζουν μία συνάρτηση συμμετοχής [6]. Οι παρακάτω ορισμοί αναφέρονται σε τριγωνικές συναρτήσεις, για λόγους απλότητας.

Σημείο μέγιστου βαθμού συμμετοχής (peak value).

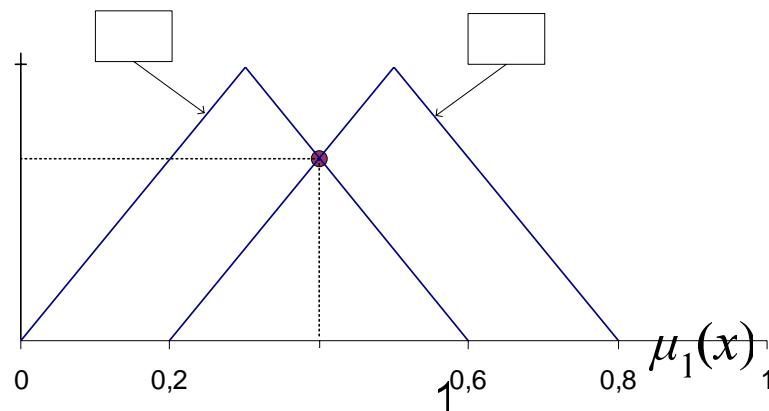
Έστω $\mu_i(x)$ η συνάρτηση συμμετοχής της λεκτικής τιμής i μίας εκ των μεταβλητών εισόδου που παίρνει τιμές σε ένα σύνολο X (Σχ. 2.10). Το $x_{\text{peak}} \in X$ που αντιστοιχεί σε $\mu_i(x_{\text{peak}})=1$ ονομάζεται σημείο μέγιστου βαθμού συμμετοχής (peak value) της λεκτικής τιμής i .

Αριστερό και δεξιό πλάτος (left and right width).

Αριστερό πλάτος μίας τριγωνικής συνάρτησης ονομάζεται το μήκος του διαστήματος από το σημείο μέγιστου βαθμού συμμετοχής ως την τιμή $x_L \in X$ για την οποία ισχύουν: $x_L < x_{\text{peak}}$ και $\mu(x_L)=0$. Ομοίως, δεξιό πλάτος μίας τριγωνικής συνάρτησης ονομάζεται το μήκος του διαστήματος από το σημείο μέγιστου βαθμού συμμετοχής ως την τιμή $x_R \in X$ για την οποία ισχύουν: $x_R > x_{\text{peak}}$ και $\mu(x_R)=0$. Συμμετρική είναι μία τριγωνική συνάρτηση για την οποία ισχύει: Αριστερό πλάτος = Δεξιό πλάτος.

Σημεία τομής συναρτήσεων συμμετοχής (cross-points).

Έστω $\mu_1(x)$ και $\mu_2(x)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής των λεκτικών τιμών 1 και 2 αντίστοιχα, μίας εκ των μεταβλητών εισόδου ενός ελεγκτή. Σημείο τομής (cross-point) των $\mu_1(x)$ και $\mu_2(x)$ ονομάζεται η τιμή $x_{\text{cross}} \in X$ για την οποία ισχύει: $\mu_1(x_{\text{cross}}) = \mu_2(x_{\text{cross}}) > 0$. (Σχ. 3.10), ενώ ως επίπεδο αυτού του σημείου τομής (cross-point level) ορίζεται ο βαθμός συμμετοχής $\mu_1(x_{\text{cross}}) = \mu_2(x_{\text{cross}})$.



Σχ.3.12. Το σημείο τομής (cross-point) των συναρτήσεων $\mu_1(x)$ και $\mu_2(x)$.

Δύο διαδοχικές συναρτήσεις συμμετοχής θα πρέπει να έχουν κοινές περιοχές. Εάν αυτό δεν ισχύει, τότε οι συναρτήσεις δεν επικαλύπτονται με αποτέλεσμα να υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x_a \in X$ ανάμεσά τους, για την οποία είναι $\mu_i(x_a) = 0, \forall i$, όπου i οι λεκτικές τιμές της μεταβλητής. Έστω ελεγκτής με μία είσοδο. Εάν η είσοδος λάβει την τιμή x_a , τότε κανένας κανόνας δεν ενεργοποιείται, αφού η τιμή x_a συμμετέχει σε κάθε λεκτική τιμή με βαθμό 0. Δεν είναι, επομένως, δυνατή η εξαγωγή συμπεράσματος.

Ο Boverie [7] αναφέρει ότι οι βέλτιστες τιμές των παραπάνω παραμέτρων δύο διαδοχικών συμμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής είναι:

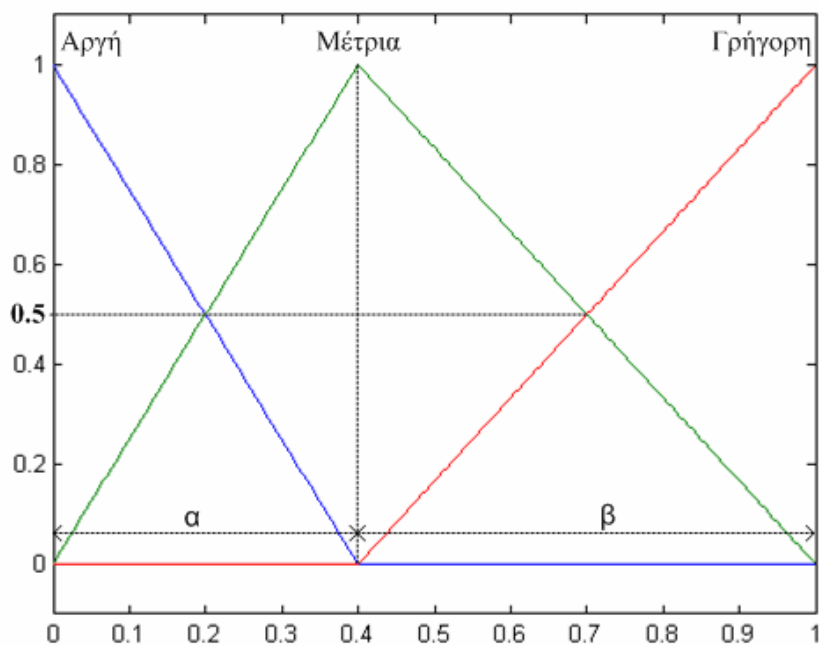
- Αριθμός σημείων τομής των συναρτήσεων (cross-point ratio) = 1 και
- Επίπεδο σημείου τομής (cross-point level) = 0.5.

Στην παρούσα εργασία, για ευκολία, ονομάζουμε τις συναρτήσεις με τα παραπάνω χαρακτηριστικά “απολύτως” συμμετρικές. Ο Boverie αναφέρει ότι η χρήση τέτοιου είδους συναρτήσεων οδηγεί σε λιγότερες αστοχίες και μείωση του υπολογιστικού χρόνου. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, η χρήση τέτοιων συναρτήσεων συμμετοχής αποτελεί το μοναδικό τρόπο αποφυγής αποκλίσεων σε ελεγκτές τύπου Mamdani ενός επιπέδου. Για ελεγκτές, όμως, περισσότερων επιπέδων δεν ισχύει κάτι τέτοιο.

x_{cross}

3.4. Έλεγχος συμπεριφοράς ελεγκτή 2 (μίας βαθμίδας με συμμετρικές συναρτήσεις συμμετοχής).

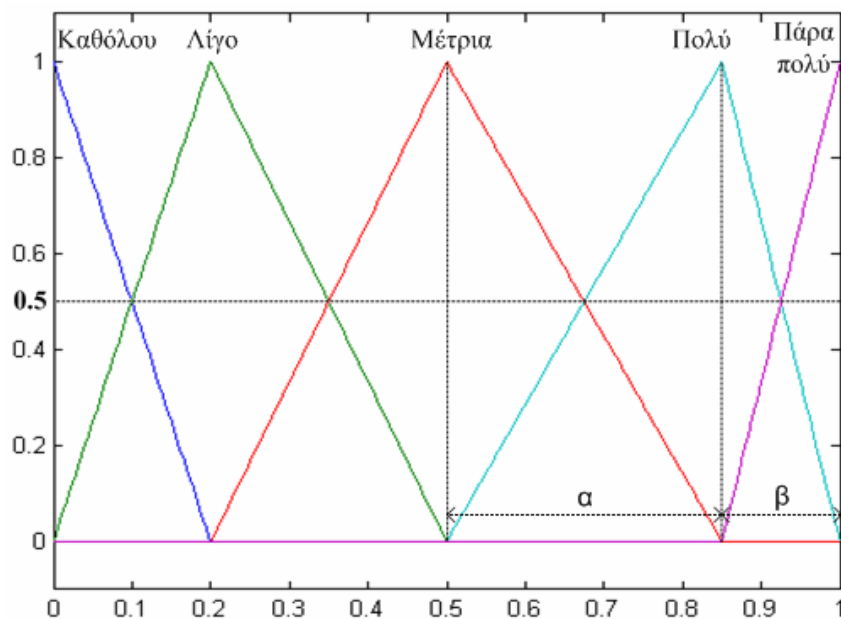
Κατασκευάζουμε τον ελεγκτή 2, του οποίου οι συναρτήσεις συμμετοχής των λεκτικών τιμών των μεταβλητών εισόδων και εξόδου ικανοποιούν τις συνθήκες που αναφέρει ο Boverie αλλά δεν είναι συμμετρικές. Τον εισάγουμε στην ασαφή εργαλειοθήκη της Matlab για να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του. Τα χαρακτηριστικά του είναι:



Σχ. 3.13. Διάγραμμα της μεταβλητής εισόδου του ελεγκτή 2.

Όπου α = αριστερό πλάτος (left width) της λεκτικής τιμής “Μεσαία” = δεξιό πλάτος (right width) της συνάρτησης συμμετοχής της λεκτικής τιμής “Αργή”.

Ενώ, β = δεξιό πλάτος της λεκτικής τιμής “Μεσαία” = αριστερό πλάτος της συνάρτησης συμμετοχής της λεκτικής τιμής “Γρήγορη”. Κάθε ζεύγος διαδοχικών συναρτήσεων έχει ένα σημείο τομής, με επίπεδο 0.5.



Σχ. 3.14. Διάγραμμα της μεταβλητής εξόδου του ελεγκτή 2.

Καλούμε πάλι το M-file στο παράθυρο εντολών της Matlab και λαμβάνουμε τον νέο πίνακα out. Παρατηρούνται, όμως, και πάλι ασυνέπειες στα αποτελέσματα του ελεγκτή 2. Παρακάτω παρατίθεται ένα από τα τμήματα του πίνακα που περιέχουν διαδοχικά στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν αυξητική πορεία.

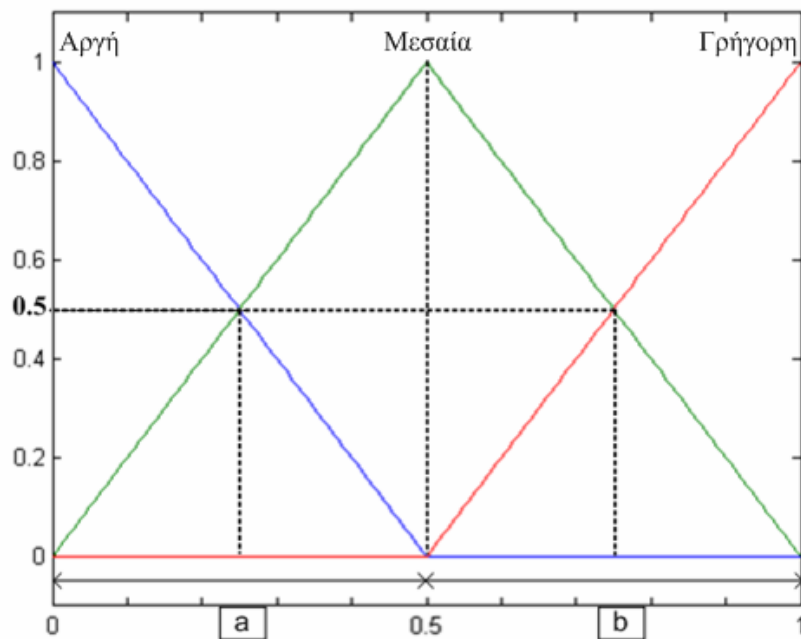
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
13	0.35186	0.35189	0.35191	0.35193	0.35194	0.35196	0.35198	0.35199	0.35202	0.35203	0.35206	0.35208
14	0.35762	0.35756	0.3575	0.35744	0.35739	0.35734	0.3573	0.35726	0.35723	0.3572	0.35718	0.35716
15	0.35756	0.36272	0.36258	0.36246	0.36235	0.36224	0.36215	0.36206	0.36199	0.36191	0.36185	0.3618
16	0.3575	0.36258	0.36719	0.36702	0.36685	0.36671	0.36656	0.36643	0.36632	0.36621	0.36612	0.36795
17	0.35744	0.36246	0.36702	0.37113	0.37092	0.37073	0.37055	0.37038	0.37023	0.37009	0.37212	0.37396
18	0.35739	0.36235	0.36685	0.37092	0.3746	0.37437	0.37416	0.37396	0.37379	0.37581	0.37785	0.37971
19	0.35734	0.36224	0.36671	0.37073	0.37437	0.37767	0.37743	0.37721	0.37941	0.38145	0.38352	0.3854
20	0.3573	0.36215	0.36656	0.37055	0.37416	0.37743	0.38038	0.38258	0.38481	0.38687	0.38895	0.39086
21	0.35726	0.36206	0.36643	0.37038	0.37396	0.37721	0.38258	0.38792	0.39017	0.39226	0.39437	0.39629
22	0.35723	0.36199	0.36632	0.37023	0.37379	0.37941	0.38481	0.39017	0.39533	0.39744	0.39957	0.40151
23	0.3572	0.36191	0.36621	0.37009	0.37581	0.38145	0.38687	0.39226	0.39744	0.40263	0.40479	0.40675
24	0.35718	0.36185	0.36612	0.37212	0.37785	0.38352	0.38895	0.39437	0.39957	0.40479	0.40982	0.41181
25	0.35716	0.3618	0.36795	0.37396	0.37971	0.3854	0.39086	0.39629	0.40151	0.40675	0.41181	0.41689
26	0.35716	0.36363	0.3698	0.37583	0.3816	0.3873	0.39278	0.39823	0.40348	0.40874	0.41382	0.41892
27	0.35879	0.36528	0.37146	0.37751	0.38329	0.38901	0.3945	0.39997	0.40524	0.41052	0.41562	0.42075
28	0.36044	0.36694	0.37313	0.3792	0.385	0.39073	0.39624	0.40173	0.40701	0.41232	0.41744	0.42258

Πίνακας 3.5. Τμήμα του πίνακα out του ελεγκτή 2.

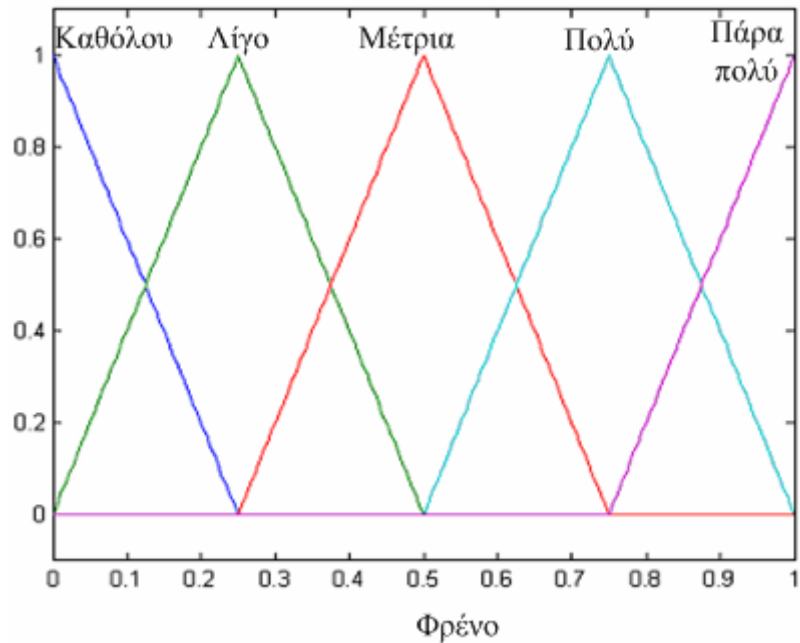
3.5. Έλεγχος συμπεριφοράς ελεγκτή 3 (μίας βαθμίδας με “απολύτως” συμμετρικές συναρτήσεις συμμετοχής).

Η χρήση “απολύτως” συμμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής (Παράγραφος 3.4.2) αποκλείει την ύπαρξη περιπτώσεων της Παραγράφου 3.1 και επομένως ασυνεπειών στα αποτελέσματα του ελεγκτή, όπως αποδεικνύεται παρακάτω.

Ο “απολύτως” συμμετρικός ελεγκτής που αντικαθιστά τον ελεγκτή 1 περιγράφεται από δύο εισόδους με συναρτήσεις συμμετοχής της μορφής του Σχ. 3.15 και μία έξοδο με συναρτήσεις συμμετοχής της μορφής του Σχ. 3.16.



Σχ. 3.15. Διάγραμμα της μεταβλητής εισόδου “Ταχύτητα” του ελεγκτή 3.

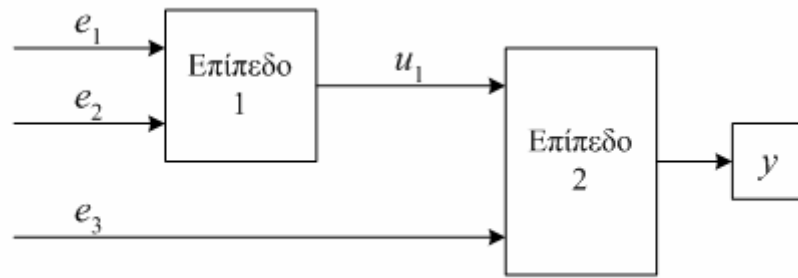


Σχ. 3.16. Διάγραμμα της μεταβλητής εξόδου του ελεγκτή 3.

Εισάγοντας τα νέα δεδομένα κατά την κατασκευή του ελεγκτή 3, διαπιστώνουμε πως όλα τα διαδοχικά στοιχεία του πίνακα out, που αποτελούν τις εξόδους κάθε συνδυασμού εισόδων από 0 έως 1 με βήμα 0.01, ακολουθούν αυξητική πορεία. Δεν παρατηρείται, δηλαδή, κανένα παράδοξο αποτέλεσμα.

3.6. Έλεγχος συμπεριφοράς ελεγκτή 4 (δύο βαθμίδων με απολύτως συμμετρικές συναρτήσεις συμμετοχής).

Στην Παράγραφο (3.5) διαπιστώθηκε πως η επιλογή “απολύτως” συμμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής έχει ως αποτέλεσμα την εξάλειψη των αστοχιών του ελεγκτή μίας βαθμίδας. Θέλουμε να διαπιστώσουμε εάν ισχύει το ίδιο και στα συστήματα ελέγχου περισσότερων βαθμίδων. Κατασκευάζουμε έναν νέο ασαφή ελεγκτή της μορφής του Σχ. 3.17 προσαρτημένο πάλι σε αυτόματο όχημα που δεν έχει τη δυνατότητα να στρίψει.



Σχ. 3.17. Ελεγκτής δύο βαθμίδων, δομής ασύμμετρου δυαδικού δένδρου.

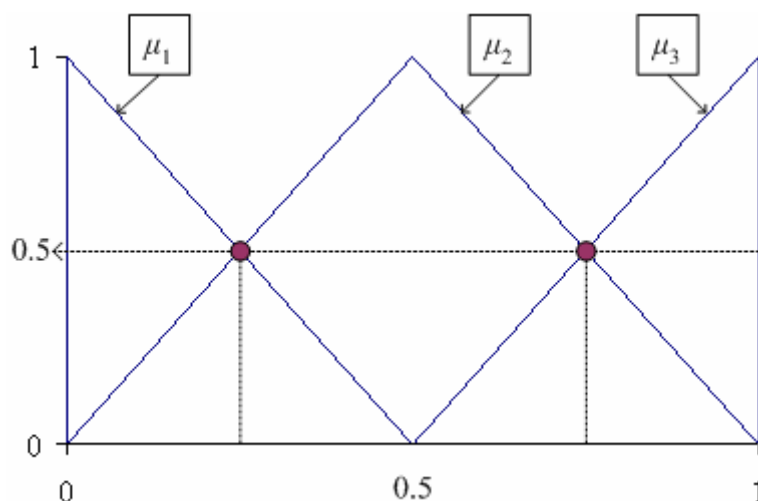
Σε αναλογία με τον ελεγκτή 1, οι μεταβλητές του νέου συστήματος έχουν την εξής φυσική σημασία:

- e_1 = Εγγύτητα ακίνητου εμποδίου.
- e_2 = Μέγεθος ακίνητου εμποδίου
- e_3 = Ταχύτητα οχήματος
- u_1 = Ανάγκη αποφυγής ακίνητου εμποδίου
- y = Φρενάρισμα οχήματος

Όλες οι μεταβλητές έχουν τον ίδιο αριθμό λεκτικών τιμών των οποίων, μάλιστα, οι συναρτήσεις συμμετοχής είναι “απολύτως” συμμετρικές της ίδιας μορφής. Η επιλογή αυτή έγινε για λόγους απλότητας. Οι τρεις λεκτικές τιμές για κάθε μία από τις μεταβλητές είναι:

- Για την μεταβλητή “Εγγύτητα” οι τιμές είναι: Μικρή(1), Μέτρια(2), Μεγάλη(3).
- Για την μεταβλητή “Μέγεθος” οι τιμές είναι: Μικρό(1), Μεσαίο(2), Μεγάλο(3).
- Για την μεταβλητή “Ταχύτητα” οι τιμές είναι: Αργή(1), Μεσαία(2), Γρήγορη(3).
- Για την ενδιάμεση μεταβλητή “Ανάγκη αποφυγής” οι τιμές είναι: Μικρή(1), Μέτρια(2), Μεγάλη(3).
- Ενώ για την μεταβλητή εξόδου “Φρένο” οι τιμές είναι: Λίγο(1), Μέτρια(2), Πολύ(3).

Στο Σχ. 3.18 παρουσιάζεται η μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής κάθε μεταβλητής για κανονικοποιημένες τιμές $x_{norm} \in [0,1]$.



Σχ. 3.18. Μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής κάθε μεταβλητής του ελεγκτή_4 δύο βαθμίδων.

Οι κανόνες του συστήματος είναι $R=2 \cdot 3^2=18$ συνολικά σε αριθμό και συμμετρικοί. Οι κανόνες των επιπέδων 1 και 2 παρουσιάζονται στους πίνακες 3.6 και 3.7 αντίστοιχα

		Εγγύτητα		
		Μικρή(1)	Μέτρια(2)	Μεγάλη(3)
Μέγεθος	Μικρό(1)	Μικρή(1)	Μικρή(1)	Μέτρια(2)
	Μεσαίο(2)	Μικρή(1)	Μέτρια(2)	Μεγάλη(3)
	Μεγάλο(3)	Μέτρια(2)	Μεγάλη(3)	Μεγάλη(3)

Πίνακας 3.6. Βάση κανόνων της πρώτης βαθμίδας του ελεγκτή 4

		Ανάγκη αποφυγής		
		Μικρή(1)	Μέτρια(2)	Μεγάλη(3)
Ταχύτητα	Αργή(1)	Λίγο(1)	Λίγο(1)	Μέτρια(2)
	Μεσαία(2)	Λίγο(1)	Μέτρια(2)	Πολύ(3)
	Γρήγορη(3)	Μέτρια(2)	Πολύ(3)	Πολύ(3)

Πίνακας 3.7. Βάση κανόνων της δεύτερης βαθμίδας του ελεγκτή 4

Θα συγκρίνουμε τα συμπεράσματα του ελεγκτή 4 για διάφορες τριάδες τιμών εισόδου. Έστω ότι διατηρούνται σταθερές η “Εγγύτητα” (e_1) και το “Μέγεθος” (e_2) του εμποδίου αλλά αυξάνεται η “Ταχύτητα” του οχήματος (e_3). Διατηρείται, δηλαδή, σταθερή η έξοδος της πρώτης βαθμίδας του ελεγκτή, που αντιστοιχεί στην τιμή της ενδιάμεσης μεταβλητής u_1 , και αυξάνεται η είσοδος e_3 .

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά του συστήματος ελέγχου και μετά την διερεύνηση που πραγματοποιείται, διαπιστώνεται ότι η έξοδος δεν είναι πάντα αύξουσα συνάρτηση των αριθμητικών τιμών των εισόδων.

Έστω οι αριθμητικές τιμές των βασικών εισόδων του ελεγκτή 4: “Εγγύτητα”= 0.05 και “Μέγεθος”= 0.45. Τα ασαφή σύνολα στα οποία αντιστοιχούν είναι: “Εγγύτητα”= {(Μικρή, 0.9), (Μέτρια, 0.1)} και “Μέγεθος”= {(Μικρό, 0.1), (Μεσαίο, 0.9)}. Η σύνθεση των αποτελεσμάτων των ενεργοποιημένων κανόνων παράγει την έξοδο της πρώτης φάσης: “Ανάγκη αποφυγής”= {(Μικρή, 0.9), (Μέτρια, 0.1)}. Έστω, επίσης, ότι η βασική είσοδος της δεύτερης βαθμίδας παίρνει την αριθμητική τιμή 0.333 που αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο: “Ταχύτητα”= {(Αργή, 0.334), (Μεσαία, 0.666)}. Η max-min σύνθεση δίνει ως έξοδο: “Φρένο₁”= {(Λίγο, 0.666), (Μέτρια, 0.1)}. Εάν αυξήσουμε την είσοδο “Ταχύτητα” σε 0.343, τότε το νέο ασαφές σύνολο που της αντιστοιχεί είναι: “Ταχύτητα”= {(Αργή, 0.314), (Μεσαία, 0.686)}. Η νέα τελική έξοδος είναι: “Φρένο₂”= {(Λίγο, 0.686), (Μέτρια, 0.1)}.

Εφαρμόζοντας τον τύπο της μεθόδου αποσαφήνισης Κέντρου βάρους για τις δύο ασαφείς εξόδους έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \text{“Φρένο”} &= \frac{\int_0^1 x \mu(x) dx}{\int_0^1 \mu(x) dx} = \frac{\int_0^{0.167} (0.666 \cdot x) dx + \int_{0.167}^{0.45} [x \cdot (-2x + 1)] dx + \int_{0.45}^1 (0.1 \cdot x) dx}{\int_0^{0.167} (0.666) dx + \int_{0.167}^{0.45} (-2x + 1) dx + \int_{0.45}^1 0.1 \cdot dx} = \\
 &= \frac{0.666 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.167} - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.167}^{0.45} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.167}^{0.45} + 0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.45}^1}{0.666 \left[x \right]_0^{0.167} - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.167}^{0.45} + \left[x \right]_{0.167}^{0.45} + 0.1 \left[x \right]_{0.45}^1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(0.666 \cdot 0.0139) - 2 \cdot (0.03037 - 0.00155) + (0.10125 - 0.01394) + 0.039875}{(0.666 \cdot 0.167) - 2 \cdot (0.10125 - 0.01394) + (0.45 - 0.167) + 0.055} = \\
&= \frac{0.009284 - 0.05765 + 0.08731 + 0.039875}{0.11122 - 2 \cdot 0.08731 + 0.338} = \frac{0.078819}{0.274602} \square 0.28703
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{“Φρενο’”} &= \frac{\int_0^1 x \mu(x) dx}{\int_0^1 \mu(x) dx} = \frac{\int_0^{0.157} (0.686 \cdot x) dx + \int_{0.157}^{0.45} [x \cdot (-2x + 1)] dx + \int_{0.45}^1 (0.1 \cdot x) dx}{\int_0^{0.157} (0.686) dx + \int_{0.157}^{0.45} (-2x + 1) dx + \int_{0.45}^1 0.1 \cdot dx} = \\
&= \frac{0.686 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.157} - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0.157}^{0.45} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.157}^{0.45} + 0.1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.45}^1}{0.686 [x]_0^{0.167} - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.157}^{0.45} + [x]_{0.157}^{0.45} + 0.1 [x]_{0.45}^1} = \\
&= \frac{(0.686 \cdot 0.0123) - 2 \cdot (0.03037 - 0.00128) + (0.10125 - 0.0123) + 0.039875}{(0.686 \cdot 0.157) - 2 \cdot (0.10125 - 0.0123) + (0.45 - 0.157) + 0.055} = \\
&= \frac{0.008437 - 0.05818 + 0.08895 + 0.039875}{0.107702 - 0.1779 + 0.323 + 0.055} = \frac{0.079082}{0.307802} \square 0.25692 < 0.28703.
\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται, επομένως, ότι ενώ η μία από τις αριθμητικές εισόδους του συστήματος αυξάνεται, η έξοδος μειώνεται.

4. Συμπεράσματα

Όπως έχει, ήδη, αναφερθεί, η ασαφής λογική θεωρείται πλέον ένα από τα πετυχημένα εργαλεία για τη δημιουργία εξελιγμένων συστημάτων ελέγχου. Ο βασικός λόγος της επιτυχίας της είναι η ευκολία χρήσης της. Η εργασία αυτή δεν έρχεται να διαψεύσει κάτι τέτοιο. Σκοπός της είναι να τονίσει ότι η κατασκευή ενός ασαφούς ελεγκτή, και συγκεκριμένα η επιλογή των συναρτήσεων συμμετοχής των λεκτικών τιμών των μεταβλητών του, δεν πρέπει να γίνεται με αυθαίρετο τρόπο. Αποδεικνύεται ότι η χρήση “απολύτως” συμμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής αποτελεί το μοναδικό τρόπο αποφυγής αποκλίσεων στις εξόδους ελεγκτών τύπου Mamdani ενός επιπέδου.

Η χρήση “απολύτως” συμμετρικών συναρτήσεων αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η βέλτιστη δυνατή, χωρίς όμως να γίνεται λόγος για ασυνέπειες αποτελεσμάτων σε περίπτωση μη επιλογής τους κατά την κατασκευή ασαφών συστημάτων ελέγχου τύπου Mamdani.

Στην εργασία δεν μελετήσαμε μόνο τη συμπεριφορά ελεγκτών μίας βαθμίδας. Ελέγξαμε, επίσης, τον τρόπο που η χρήση απολύτως συμμετρικών συναρτήσεων συμμετοχής επηρεάζει ελεγκτές τύπου Mamdani περισσότερων βαθμίδων. Ο ελεγκτής πάνω στον οποίο πειραματιστήκαμε ήταν δύο βαθμίδων και έκανε χρήση της μεθόδου αποσαφήνισης Κέντρου Βάρους, καθώς είναι η πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη. Διαπιστώθηκε πως η χρήση των βέλτιστων συναρτήσεων δεν βελτίωσε την ασυνεπή συμπεριφορά του ελεγκτή.

Ο αριθμός των μεθόδων σύνθεσης και αποσαφήνισης που έχουν πλέον αναπτυχθεί είναι μεγάλος. Ίσως κάποιος συνδυασμός τους να οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά ελεγκτές πολλών βαθμίδων. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν έχει διερευνηθεί προς το παρόν.

Παράρτημα

Κατάλογος του 1992 με δοκιμασμένα στην πράξη ασαφή προϊόντα στην Ιαπωνία και τη Νότια Κορέα.

Προϊόν	Εταιρεία	Ασαφής λογικός ρόλος
Συσκευές κλιματισμού	hitachi Matsushita Mitsubishi Sharp	Εμποδίζει την ταλάντωση θερμοκρασιακής υπερ/υπολειτουργίας και αναλώνει λιγότερη ενέργεια στο άνοιγμα και στο κλείσιμο της συσκευής.
Φρένα αντι-μπλοκ	Nissan	Ελέγχει τα φρένα σε επικίνδυνες καταστάσεις με βάση την ταχύτητα και την επιτάχυνση του αυτοκινήτου και των τροχών.
Αυτόματη μηχανή	Nok/ Nissan	Ελέγχει την έγχυση του καυσίμου και την ανάφλεξη με βάση την ένδειξη του καρμπυρατέρ, την ποσότητα οξυγόνου, τη θερμοκρασία του νερού ψύξης, τις στροφές ανά λεπτό, τον όγκο του καυσίμου, τη γωνία στροφάλου, των αριθμό των οκτανίων και την πίεση πολλαπλής εισαγωγής.
Αυτόματη μετάδοση	Honda Nissan Subaru	Επιλέγει τη σχέση μετάδοσης με βάση το φορτίο της μηχανής, το στυλ οδήγησης και τις συνθήκες του οδοστρώματος.
Χημικός αναμεικτήρας	Fuji Electric	Αναμιγνύει χημικές ουσίες με βάση της εργοστασιακές συνθήκες.
Φωτοαντιγραφικό μηχάνημα	Canon	Ρυθμίζει την τάση του τυμπάνου με βάση την πυκνότητα της εικόνας, τη θερμοκρασία και την υγρασία.
Αυτόματος έλεγχος πορείας	Isuzu Nissan Mitsubishi	Ρυθμίζει την πεταλούδα του καρμπυρατέρ με βάση την ταχύτητα και την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.
Στεγνωτήρες	Matsushita	Μετατρέπει το μέγεθος φορτίου, τον τύπο του υφάσματος και το ρεύμα θερμού αέρα σε χρόνους και τρόπους στεγνώματος.

Έλεγχος ανελκυστήρα	Fujitec Mitsubishi electric Toshiba	Μειώνει το χρόνο αναμονής με βάση τη συχνότητα κλήσεων.
Έλεγχος εργοστασίων	Omron	Καταρτίζει πλάνα εργασίας και στρατηγικές της γραμμής συναρμολόγησης.
Διαγνωστικό σύστημα golf	Maruman Golf	Επιλέγει το μπαστούνι του γκολφ με βάση τη φυσική διάπλαση και τον τρόπο χτυπήματος του παίκτη.
Σύστημα υγείας	Omron	Με περίπου 500 φάξι κανόνες παρακολουθείται και αξιολογείται η κατάσταση υγείας και η βιολογική ικανότητα ενός υπαλλήλου.
Υγραντής	Casio	Ρυθμίζει την υγρασία ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν σε ένα δωμάτιο.
Έλεγχος σφαιρόμυλου	Nippon Steel	Αναμιγνύει τα υλικά τροφοδοσίας και ρυθμίζει τις θερμοκρασίες και τους χρόνους.
Υψικάμινι	Mitsubishi	Αναμιγνύει το τσιμέντο.
Computer	Sony	Αναγνωρίζει χειρόγραφους χαρακτήρες Kanji.
Χαρακτική πλάσματος	Mitsubishi electric	Ρυθμίζει τους χρόνους και τη στρατηγική χάραξης.
Φούρνος μικροκυμάτων	Hitachi Sanyo Sharp Toshiba	Ρυθμίζει και συντονίζει την ισχύ και τους τρόπους ψησίματος.
Ηλεκτρικό ψυγείο	Sharp	Ρυθμίζει το χρόνο απόψυξης και το χρόνο ψύξης ανάλογα με τη χρήση. Ένα νευρωνικό δίκτυο μαθαίνει τις συνήθειες του χρήστη και συντονίζει τους φάξι κανόνες αντίστοιχα.
Χύτρα Ρυζιού	Matsushita Sanyo	Καθορίζει το χρόνο βρασμού ανάλογα με τον ατμό, τη θερμοκρασία και τον όγκο του ρυζιού.

Κάμερα	Canon Minolta	Εντοπίζεται κάθε αντικείμενο οπουδήποτε στο πλαίσιο και ρυθμίζεται η αυτοεστίαση.
Αγορά χρωμαγράφων	Yamaichi	Χειρίζεται επενδυτικά χαρτοφυλάκια στο ιαπωνικό χρηματιστήριο.
Συσκευές τηλεόρασης	Goldstar Samsung Hitachi Sony	Ρυθμίζει το χρώμα και τη φωτεινότητα της οθόνης και σταθεροποιεί την ένταση ανάλογα με τη θέση του θεατή στο δωμάτιο.
Μεταφραστική μηχανή	Epson	Αναγνωρίζει, μεταφράζει λέξεις σε μονάδα μεγέθους μολυβιού.
Ηλεκτρική τοστιέρα	Sony	Ρυθμίζει το χρόνο ψησίματος και τη θέρμανση για κάθε είδος ψωμιού.
Ηλεκτρική σκούπα	Hitachi Matsushita Toshiba	Ρυθμίζει την απορρόφηση ανάλογα με την ποσότητα της σκόνης και τον τύπο του δαπέδου.
Μηχανή βιντεοσκόπησης	Canon Sanyo	Ρυθμίζει την αυτοεστίαση και το φωτισμό.
Μηχανή βιντεοσκόπησης	Matsushita	Αντισταθμίζει και εξαλείφει το τρεμούλιασμα του χεριού και ρυθμίζει την αυτοεστίαση.
Ηλεκτρικό πλυντήριο	Daewoo Goldstar Samsung Hitachi Matsushita Sanyo Sharp	Ρυθμίζει τον τρόπο πλυσίματος ανάλογα με το επίπεδο ρύπων που ανιχνεύει ο αισθητήρας, με τον τύπο του υφάσματος, την ποσότητα των ρούχων και τη στάθμη του νερού. Μερικά μοντέλα χρησιμοποιούν νευρωνικά δίκτυα για το συντονισμό των κανόνωνστις προτιμήσεις του χρήστη.

Βιβλιογραφία

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control* 8, 1965, pp 338-353.
- [2] C. Elkan, "The paradoxical success of fuzzy logic," *IEEE Expert: Intelligent Systems and Their Applications* 9(4), 1994.
- [3] M. Black, "Vagueness: an exercise in logical analysis," *Philosophy of Science* 4, 1937, pp. 427-455.
- [4] B. Kosko, *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*, Hyperion, New York, 1993.
- [5] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Boston, Dordrecht, London, 1996.
- [6] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [7] S. Boverie et al., "Fuzzy logic control compared with other automatic control approaches," *Proceedings 30th IEEE-CDC Conf. Decision and Control*, Brighton, UK, December 11-13, 1991.
- [8] Z. -M. Yeh, K. -H. Li, "A systematic approach for designing multistage fuzzy control systems." *Fuzzy Sets and Systems* 143, 2004, pp. 251-273.