

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Ελαστική ανάλυση σταδιακής εξόρυξης  
αβαθούς σήραγγας με την μέθοδο  
των πεπερασμένων στοιχείων**

***Γεώργιος Ε. Μπαράκος***

Εξεταστική Επιτροπή

Γεώργιος Εξαδάκτυλος, Καθηγητής Π.Κ., (επιβλέπων)

Ζαχαρίας Αγιουτάντης, Καθηγητής Π.Κ.

Ιωάννης Βαρδουλάκης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.



# Περίληψη

Η εργασία αυτή ασχολείται με την μελέτη της μεταβολής της εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης υπόγειου ανοίγματος σε μικρό βάθος από την επιφάνεια του εδάφους, κατά την διάνοιξη αυτού σε τρία στάδια.

Στο μεν πρώτο στάδιο υπολογίζεται η εντατική κατάσταση της αδιάρρηκτης εδαφοβραχώμαζας υπό την επίδραση βαρυτικής φόρτισης, στο δεύτερο στάδιο μελετάται η συμπεριφορά του μοντέλου κατά την φάση της εκσκαφής, με μέσα υποστήριξης, ενώ στο τρίτο στάδιο εξετάζεται η συμπεριφορά του μοντέλου κατά την υποστήριξη του εσκαμμένου τμήματος της σήραγγας, καθώς και η περαιτέρω εκσκαφή μικρού ανυποστήρικτου τμήματος της σήραγγας.

Η ανάλυση του προβλήματος έγινε με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, για ιδεατά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο μέσο, σε δύο διαστάσεις. Για τις ανάγκες της ανάλυσης αυτής κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος στο υπολογιστικό πακέτο MATLAB, στον οποίο η γεωμετρία του μοντέλου εισάγεται μέσω του σχεδιαστικού προγράμματος AutoCAD, ενώ τον ρόλο της φόρτισης έχει το βάρος των υπερκείμενων της εκσκαφής πετρωμάτων.

Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με το εμπορικό υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων PHASES.

# Abstract

The case study of this project is the analysis of the deformation state of a shallow tunneling excavation taking place in three stages.

In the first stage, the analysis of the deformation state is that of an intact rock model, while on the second stage the model is being studied through a supported excavation phase. In the third stage, the already excavated part of the tunnel is being supported, while a new small unsupported part of the rock is in process of excavation.

The analysis of the specific problem has been accomplished with the use of the finite element method. The two-dimensional finite element model was considered to be a homogeneous, isotropic elastic rock mass. In need of the analysis, a MATLAB code was constructed. The geometry of the model was inserted in the MATLAB code using the AutoCAD designing program. The model was in reaction of gravitational forces.

To conclude, there has been made a comparison between the results of the finite element analysis and PHASES, that is an already built program in finite elements, in order to test whether the code is correct or incorrect.

# Πρόλογος

Για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου για την πολύτιμη συμβολή τους :

- Στον κ. Εξαδάκτυλο Γεώργιο, Καθηγητή και επιβλέποντα της διπλωματικής αυτής εργασίας, για την άριστη συνεργασία που είχαμε και τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη πραγματοποίησή της.
- Στον κ. Αγιουτάντη Ζαχαρία, Καθηγητή, για τον χρόνο που διέθεσε στη διόρθωση και εξέταση της παρούσας εργασίας, αλλά και για τις χρήσιμες πληροφορίες του.
- Στον κ. Βαρδουλάκη Ιωάννη, Καθηγητή, για το χρόνο που διέθεσε στη διόρθωση και εξέταση της παρούσας εργασίας, αλλά και για τις χρήσιμες πληροφορίες του.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τους επιστημονικούς συνεργάτες και τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του εργαστηρίου Μελέτης & Σχεδιασμού Εκμεταλλεύσεων Ασημίδη Βασίλη, Λιόλιο Παντελή, Ξηρουδάκη Γιώργο και Σαράτση Γιώργο για την πολύτιμη βοήθειά τους στην κατανόηση λειτουργίας των προγραμμάτων MATLAB και PHASES, καθώς και για τις γνώστικές παρεμβάσεις τους στο αντικείμενο, που ήταν καθοριστικές για την υλοποίηση της εργασίας αυτής.

Τέλος, οφείλω τεράστια ευγνωμοσύνη στην οικογένειά μου, χωρίς την ηθική συμπαράσταση και υλική υποστήριξη των οποίων δεν θα πραγματοποιούσα την φιλοδοξία μου να σπουδάσω.

Χανιά, Ιανουάριος 2005

Μπαράκος Ε. Γεώργιος

Αφιερώνεται

στον πατέρα μου Ελευθέριο,  
την μητέρα μου Μαρία,  
την αδερφή μου Ελισάβετ.

# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
Περίληψη στα Αγγλικά (Abstract).....	ii
Πρόλογος.....	iii
Περιεχόμενα.....	v
Κατάλογος σχημάτων και πινάκων.....	viii
<b>1. Εισαγωγή.....</b>	<b>1</b>
1.1 Γενικά.....	1
1.2 Αντικείμενο μελέτης.....	2
<b>2. Καταστατικές εξισώσεις των γεωυλικών.....</b>	<b>3</b>
2.1 Συμπεριφορά των γεωυλικών.....	3
2.2 Ορισμός της τάσης (stress).....	5
2.3 Τανυστής των τάσεων (stress tensor).....	5
2.4 Ορισμός της παραμόρφωσης (strain).....	7
2.5 Τανυστής των παραμορφώσεων (strain tensor).....	7
2.6 Γραμμική Ελαστικότητα (Νόμος του Hooke).....	9
2.6.1 Θεώρηση της επίπεδης ελαστικότητας.....	11
2.6.2 Σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης.....	12
2.6.3 Σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης.....	12
2.6.4 Μητρώα παραμέτρων του υλικού.....	13
<b>3. Αριθμητικές Μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γεωμηχανικής.....</b>	<b>14</b>
3.1 Μέθοδοι προσεγγιστικής επίλυσης προβλημάτων πεδίου.....	14
3.2 Οι κυριότερες αριθμητικές μέθοδοι στην γεωμηχανική.....	14

3.2.1 Μέθοδοι των Πεπερασμένων Στοιχείων (Μ.Π.Σ.).....	17
3.2.2 Μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών (Μ.Π.Δ.).....	17
3.2.3 Μέθοδοι των Συνοριακών Στοιχείων (Μ.Σ.Σ.).....	18
3.2.4 Μέθοδοι των Διακριτών Στοιχείων (Μ.Δ.Σ.).....	18
3.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μεθόδων αριθμητικής επίλυσης...	19
<b>4. Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.....</b>	<b>21</b>
4.1 Η αρχή της μεθόδου.....	21
4.2 Ιστορικά στοιχεία.....	21
4.2.1 Η προσέγγιση της περιμέτρου του κύκλου.....	21
4.2.2 Χρονική αναδρομή στην ανάπτυξη της μεθόδου.....	23
4.3 Θεμελιώδη βήματα της μεθόδου.....	24
4.4 Διαίρεση του πεδίου.....	24
4.4.1 Είδη στοιχείων.....	25
4.4.2 Στοιχεία σε μια διάσταση.....	25
4.4.3 Στοιχεία σε δυο διαστάσεις.....	26
4.4.4 Στοιχεία σε τρεις διαστάσεις.....	27
4.4.5 Μέγεθος των στοιχείων.....	28
4.4.6 Αριθμός των στοιχείων.....	29
4.5 Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Πεδίου με την Μέθοδο των Πεπε- ρασμένων Στοιχείων .....	30
4.5.1 Παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.....	30
4.5.2 Ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.....	31
4.5.3 Υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.....	31
4.6 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα μιας διάστασης.....	32
4.7 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα δυο διαστάσεων.....	34
4.8 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα τριων διαστάσεων.....	37
4.9 Φόρτιση των υλικών, αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	39
4.10 Τύποι συνοριακών συνθηκών.....	42
4.10.1 Συνθήκες Dirichlet (essential boundary conditions).....	42
4.10.2 Συνθήκες Neumann (natural boundary conditions).....	42
4.11 Μετασχηματισμός συντεταγμένων.....	44
4.12 Επίλυση σε επίπεδο στοιχείου.....	45



4.12.1 Καταστατικές εξισώσεις.....	45
4.12.2 Δυναμική Ενέργεια.....	47
4.12.3 Μητρώο Ακαμψίας.....	47
4.13 Επίλυση σε επίπεδο σώματος.....	49
<b>5. Προγραμματισμός των Πεπερασμένων Στοιχείων στο Matlab.....</b>	<b>52</b>
5.1 Το λογισμικό πακέτο MATLAB.....	52
5.2 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία στο MATLAB.....	52
5.3 Στάδιο Προ-επεξεργασίας (Pre-Processor).....	54
5.3.1 Εισαγωγή της γεωμετρίας.....	54
5.3.2 Κατασκευή σταδίων εκσκαφής.....	57
5.3.3 Διακριτοποίηση του πεδίου.....	58
5.3.4 Εισαγωγή συνοριακών συνθηκών.....	60
5.3.4.1 Συνθήκες Dirichlet.....	61
5.3.4.2 Συνθήκες Neumann.....	61
5.3.5 Παράμετροι του προβλήματος.....	62
5.4 Στάδιο Κύριας Επεξεργασίας (Processor).....	63
5.4.1 Υπέρθεση μεταξύ των σταδίων.....	63
5.4.2 Υπολογισμός και συναρμολογή διανυσμάτων και μητρώων.....	64
5.4.3 Περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.....	66
5.5 Στάδιο Μετά-Επεξεργασίας (Post-Processor).....	68
<b>6. Αποτελέσματα και συγκρίσεις.....</b>	<b>69</b>
6.1 Αποτελέσματα.....	69
6.2 Σύγκριση με το πρόγραμμα PHASES.....	74
6.3 Γραφικές παραστάσεις.....	77
6.4 Παρατηρήσεις.....	81
<b>7. Συμπεράσματα και Προτάσεις.....</b>	<b>82</b>
7.1 Συμπεράσματα.....	82
7.2 Προτάσεις.....	84
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>85</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Γραφικές παραστάσεις για διάφορες περιπτώσεις συμπεριφοράς των γεωυλικών..	4
2.2	Συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy.....	6
3.1	Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γεωμηχανικής.....	16
4.1	Το πρόβλημα της προσέγγισης της περιμέτρου του κύκλου.....	22
4.2	Είδη στοιχείων μιας διάστασης.....	25
4.3	Είδη στοιχείων δυο διαστάσεων.....	26
4.4	Είδη στοιχείων τριων διαστάσεων.....	27
4.5	Διαβάθμιση των στοιχείων στο χωρίο.....	28
4.6	Παράσταση της ακρίβειας της λύσης συναρτήσει του αριθμού των στοιχείων..	29
4.7	Πακτωμένη δοκός που δέχεται αξονική φόρτιση P.....	32
4.8	Διακριτοποίηση της δοκού σε πεπερασμένα στοιχεία.....	32
4.9	Τριγωνικό τρικομβικό στοιχείο σε δισδιάστατο πεδίο επίλυσης.....	34
4.10	Τετρακομβικό στοιχείο τριων διαστάσεων.....	37
4.11	Επιβολή συνοριακών συνθηκών σε μοντέλο σήραγγας και αξιοποίηση της συμ- μετρίας ως προς τον άξονα των $y$ .....	40
4.12	Σύνδεση των επιμέρους εξισώσεων των στοιχείων.....	49
5.1	Δομημένος πίνακας που περιγράφει την γεωμετρία του αρχείου <code>dxf_read</code> .....	55
5.2	Σύνθετο πεδίο αποτελούμενο από τα υποπεδία $p1$ και $p2$ όπου ισχύει η φόρμου- λα $p1-p2$ .....	56
5.3	Η αντιστοίχιση των υποπεδίων στο ολικό πεδίο του προβλήματος.....	57
5.4	Διακριτοποίηση σε τριγωνικά στοιχεία βάσει του αλγόριθμου Delaunay.....	58
5.5	Επιβολή συνοριακών συνθηκών στο πεδίο του προβλήματος.....	67
6.1	Η κατακόρυφη μετατόπιση στο πρώτο στάδιο εκσκαφής.....	70
6.2	Η κατακόρυφη τροπή στο πρώτο στάδιο εκσκαφής.....	70
6.3	Η κατακόρυφη τάση στο πρώτο στάδιο εκσκαφής.....	70

6.4	Η κατακόρυφη μετατόπιση στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής.....	71
6.5	Η κατακόρυφη τροπή στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής.....	71
6.6	Η κατακόρυφη τάση στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής.....	71
6.7	Η κατακόρυφη μετατόπιση στο τρίτο στάδιο εκσκαφής.....	72
6.8	Η κατακόρυφη τροπή στο τρίτο στάδιο εκσκαφής.....	72
6.9	Η κατακόρυφη τάση στο τρίτο στάδιο εκσκαφής.....	72
6.10	Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο πρώτο στάδιο.....	73
6.11	Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο δεύτερο στάδιο.....	73
6.12	Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο τρίτο στάδιο.....	73
6.13	Η κατακόρυφη μετατόπιση για το πρώτο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	74
6.14	Η κατακόρυφη τάση για το πρώτο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	74
6.15	Η κατακόρυφη μετατόπιση για το δεύτερο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	75
6.16	Η κατακόρυφη τάση για το δεύτερο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	75
6.17	Η κατακόρυφη μετατόπιση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	76
6.18	Η κατακόρυφη τάση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής (PHASES).....	76
6.19	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην επιφάνεια του εδάφους (πρώτο στάδιο).....	77
6.20	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην επιφάνεια του εδάφους (δεύτερο στάδιο).....	78
6.21	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην επιφάνεια του εδάφους (τρίτο στάδιο).....	78
6.22	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην στέψη του ανοίγματος (πρώτο στάδιο).....	79
6.23	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην στέψη του ανοίγματος (δεύτερο στάδιο).....	79
6.24	Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης x στην στέψη του ανοίγματος (τρίτο στάδιο).....	80

# Κατάλογος Πινάκων

3.1 Πλεονεκτήματα & Μειονεκτήματα των μεθόδων.....	19
--	----

# Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

## Εισαγωγή

### 1.1 Γενικά

Η κατασκευή τεχνικών έργων, όπως η όρυξη σιηράγγων, η εκσκαφή πρανών, επιχωμάτων κλπ., εμφανίζεται σχεδόν παράλληλα με την ιστορία του ανθρώπινου γένους. Με την εξέλιξη της τεχνολογίας ανά τους αιώνες, αυξήθηκε και η πολυπλοκότητα των έργων. Η διαδικασία κατασκευής υπόγειων ανοιγμάτων, για παράδειγμα, ξεκίνησε από την εποχή που ο άνθρωπος έφτιαξε τα πρώτα του εργαλεία και άρχισε την εκσκαφή σπηλαίων για να κατοικήσει. Στην σημερινή εποχή, οι σήραγγες, μήκους χιλιομέτρων, αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των γεωτεχνικών κατασκευών, είτε πρόκειται για σήραγγες που χρησιμοποιούνται σε οδικά και σιδηροδρομικά δίκτυα, είτε πρόκειται για έργα προσπέλασης και εκμετάλλευσης υπόγειων κοιτασμάτων.

Ωστόσο, η διατάραξη της συνέχειας των γεωυλικών, προκαλεί μεταβολές στο εντατικό πεδίο των δυνάμεων, των τάσεων και των παραμορφώσεων στα περιβάλλοντα της κατασκευής πετρώματα. Για την ασφαλή κατασκευή και την εύρωστη λειτουργία τέτοιων έργων, θα πρέπει οι μηχανικοί που ασχολούνται με το έργο να γνωρίζουν το εντατικοπαραμορφωσιακό πεδίο γύρω από αυτό πριν, κατά την διάρκεια και μετά την κατασκευή αυτού. Για την κατανόηση των φαινομένων αυτών, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των δυνάμεων, των τάσεων, των μετατοπίσεων καθώς και των ανηγμένων παραμορφώσεων σε φυσικά υλικά κάτω από δεδομένες συνθήκες. Η γνώση των παραμέτρων αυτών των γεωυλικών μπορεί να οδηγήσει στο βέλτιστο αποτέλεσμα όχι μόνο από πλευράς ασφάλειας, αλλά και από πλευράς μείωσης του κόστους σε επιτρεπτά επίπεδα.

Ιδιαίτερα στον τομέα της όρυξης σηράγγων (διαμπερή ανοίγματα) και στοών (τυφλά ανοίγματα), η επαρκής γνώση του εντατικού πεδίου βοηθάει σημαντικά στην αποτροπή μεγάλων κινδύνων τόσο στην φάση της διάνοιξης, όσο και στην συνέχεια κατά την χρήση αυτών.

Σημαντικό εργαλείο για την παρατήρηση και την καλύτερη δυνατή ανάπτυξη των γεωτεχνικών έργων και δή των σηράγγων, αποτελούν οι διάφορες αριθμητικές μέθοδοι προσεγγιστικής επίλυσης μοντέλων που θα αναπτυχθούν στα επόμενα κεφάλαια.

## **1.2 Αντικείμενο μελέτης**

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή ενός κώδικα στο περιβάλλον του προγράμματος Matlab για την μελέτη της εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης αβαθούς σήραγγας με την βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Στα επόμενα κεφάλαια αναπτύσσεται η θεωρία της ελαστικής συμπεριφοράς των γεωϋλικών στα οποία πραγματοποιείται η διάνοιξη της σήραγγας, η θεωρία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, η διαδικασία κατασκευής ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων στο MATLAB, τα αποτελέσματα της εφαρμογής του κώδικα και η σύγκριση αυτών με το πρόγραμμα PHASES, καθώς και κάποια συμπεράσματα και προτάσεις που προέκυψαν από την μελέτη του προβλήματος.

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

### Καταστατικές εξισώσεις των γεωυλικών

#### 2.1 Συμπεριφορά των γεωυλικών

Όπως και σε πάρα πολλές άλλες εφαρμογές, έτσι και στην παρούσα μελέτη, θεωρείται ότι η εδαφοβραχώμαζα συμπεριφέρεται ως συνεχές μέσο. Όταν το συνεχές μέσο υποβάλλεται σε φόρτιση δυνάμεων η εντατική του κατάσταση μεταβάλλεται.

Οι σχέσεις που συνδέουν το αίτιο (δύναμη) με το αποτέλεσμα (παραμόρφωση), κατά την φόρτιση ενός συνεχούς σώματος, είναι, συνήθως, χρονικά ανεξάρτητες, αναφέρονται δε και ως εξισώσεις τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης και είναι της γενικής μορφής :

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \quad [2.1]$$

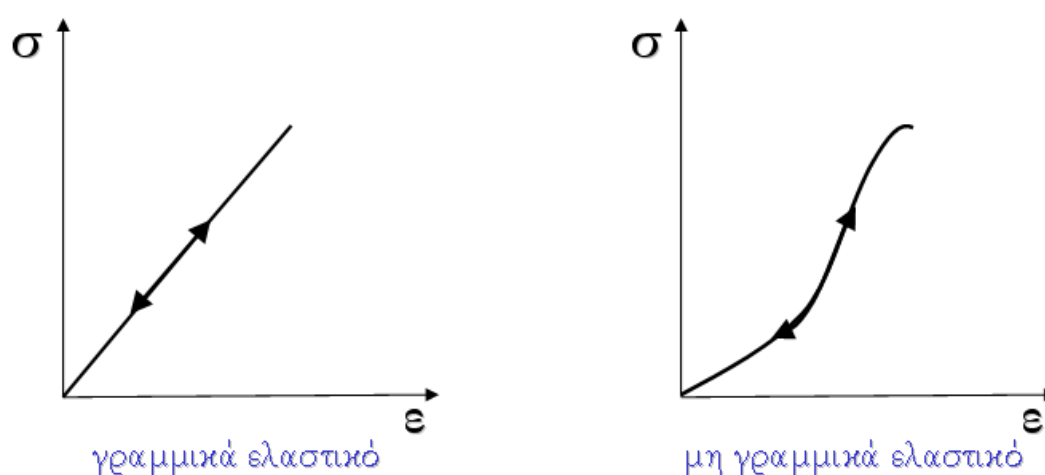
Λόγω της πολυπλοκότητας των γεωυλικών και του τρόπου αντίδρασης τών σε επιβολή δυνάμεων, η μελέτη της εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης αυτών μπορεί να γίνει με υπέρθεση διαφόρων πρότυπων (μοντέλων) ανάλογα με την περιοχή τάσεων – παραμορφώσεων που μελετάται. Η πολυπλοκότητα αυτή των γεωυλικών οφείλεται στην ύπαρξη ανισοτροπίας και ανομοιογένειας μέσα στο ίδιο υλικό. Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης τα γεωυλικά θεωρούνται ομογενή και ισότροπα στον χώρο. Σε κάθε μορφή συμπεριφοράς υλικού αντιστοιχούν διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις.

Οι καταστατικές εξισώσεις που διέπουν τον τρόπο συμπεριφοράς των υλικών απλοποιούνται σε ορισμένες περιπτώσεις με την εισαγωγή ορισμένων παραδοχών, ή / και μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά. Τα μοντέλα που κατασκευάζονται για να

περιγράψουν ένα γεωυλικό μπορούν να είναι γραμμικά ή μη γραμμικά, ανάλογα με το αν η καταστατική εξίσωση που τα διέπει είναι γραμμική ή μη γραμμική.

Τα περισσότερα των προβλημάτων, μπορούν να προσομοιωθούν ως γραμμικά αν θεωρήσουμε ότι έχουν γραμμική φυσική συμπεριφορά. Στην πραγματικότητα, όμως, όλα σχεδόν τα προβλήματα που υπάρχουν είναι μη γραμμικά. Η διαφορά μεταξύ γραμμικής και μη γραμμικής επίλυσης κάποιου προβλήματος, καθορίζει κατά πόσο η επιλογή της πρώτης, μπορεί να δώσει σωστά αποτελέσματα για το πρόβλημα ή όχι. Όταν η απόκλιση μεταξύ των δυο λύσεων είναι μικρή, τότε είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος σαν γραμμικό. Πολλές φορές όμως, το πρόβλημα είναι έντονα μη γραμμικό και κατά συνέπεια, η επίλυσή του με γραμμικά μοντέλα δεν είναι εφικτή.

Τυπικές γραφικές παραστάσεις των σχέσεων τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης για γραμμικά και μη γραμμικά ελαστικά παρουσιάζονται στο σχήμα 2.1 :



Σχήμα 2.1 : Γραφικές παραστάσεις για διάφορες περιπτώσεις συμπεριφοράς των γεωυλικών<sup>[19]</sup>

Στην συνέχεια, και πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των καταστατικών εξισώσεων που διέπουν την γραμμική ελαστική συμπεριφορά των υλικών, χρειάζεται να δοθούν πρώτα οι ορισμοί της τάσης και της παραμόρφωσης, καθόσον αποτελούν βασικούς όρους των εξισώσεων αυτών.



## 2.2 Ορισμός της τάσης

Η τάση (stress) είναι το κύριο μέγεθος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση της εντατικής κατάστασης ενός σώματος. Η έννοια της μέγιστης δυνατής τάσης εκφράζει ένα μέτρο αντοχής ενός σώματος για δεδομένη καταπόνηση<sup>[19]</sup>. Η τάση εκφράζεται από τον λόγο της δύναμης ( $f$ ) που ασκείται σε μια επιφάνεια προς το εμβαδό της επιφάνειας αυτής ( $A$ ) :

$$\sigma = \frac{f}{A} , [Pa = 1 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{kg}{cm^2}] \quad [2.2]$$

Οι μονάδες της τάσης είναι μονάδες πίεσης. Στο μετρικό σύστημα η τάση εκφράζεται σε μονάδες *Pascal* (βλ. εξίσωση 2.2). Κατα το παρελθόν, η συνήθης μετρική έκφραση της τάσης ήταν σε  $kg/cm^2$  (βλ. εξίσ. 2.2).

Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος, άρα και η τάση είναι επίσης διανυσματικό μέγεθος ( $\sigma_{ij}$ ). Αναλύεται στην κάθετη (ορθή ή κάθετη τάση) και την οριζόντια συνιστώσα (διατμητική τάση).

## 2.3 Τανυστής των τάσεων

Οι τάσεις που ασκούνται σε ένα σημείο ενός σώματος εκφράζονται από τον τανυστή των τάσεων (stress tensor). Ο τανυστής των τάσεων συμβολίζεται με  $\sigma_{ij}$ , αποτελείται δε, από εννέα συνιστώσες.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [2.3]$$

Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή ( $i = j$ ) αποτελούν τις ορθές τάσεις ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) και είναι θετικές όταν είναι εφελκυστικές. Για να είναι το σώμα σε ισορροπία θα πρέπει οι υπόλοιποι όροι του τανυστή ( $i \neq j$ ) να είναι ίσοι :

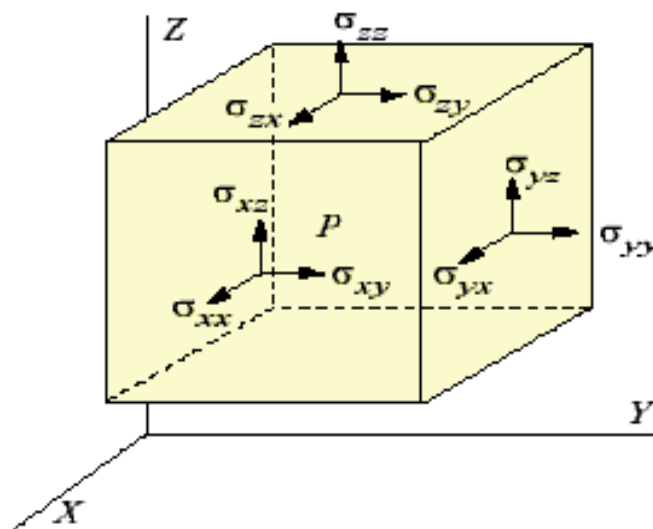
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad [2.4]$$

Οι συνιστώσες του τανυστή τάσης θα πρέπει επίσης να ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \beta_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \beta_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \beta_z &= 0\end{aligned}\quad [2.5]$$

όπου οι όροι  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  είναι δυνάμεις, οι οποίες είναι γνωστές για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι εξισώσεις (2.5) είναι εξισώσεις ισορροπίας. Από τις εννέα συνιστώσες που έχει ο τανυστής τάσης (βλ. σχ. 2.2) μόνο έξι από αυτές είναι ανεξάρτητες :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy}\end{aligned}\quad [2.6]$$



Σχήμα 2.2 : Συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy<sup>[21]</sup>.

## 2.4 Ορισμός της ανηγμένης παραμόρφωσης

Η έννοια της ανηγμένης παραμόρφωσης (strain) χρησιμοποιείται για να διευκρινίσει τον τρόπο με τον οποίο ένα στερεό, συνεχές σώμα παραμορφώνεται όταν υποβάλλεται σε ένα εντατικό πεδίο.

Η ανηγμένη παραμόρφωση αντιπροσωπεύει μια αλλαγή της γεωμετρίας και εμφανίζεται όταν διάφορα σημεία στο σώμα μετατοπίζονται το ένα σε σχέση με το άλλο (βλ. εξ. 2.7). Η παραμόρφωση ενός σώματος χαρακτηρίζεται από δύο τύπους παραμορφώσεων, των ορθών και των διατμητικών. Η ορθή παραμόρφωση αντιπροσωπεύει τον λόγο της αλλαγής του μήκους ενός μικρού γραμμικού στοιχείου προς το μήκος του, δηλαδή είναι ένα αδιάστατο μέγεθος. Η διατμητική παραμόρφωση δίδεται με την αλλαγή της γωνίας (σε ακτίνια - rad) μεταξύ δύο μικρών γραμμικών στοιχείων που ήταν αρχικά κάθετα μεταξύ τους.

$$\varepsilon = \frac{l_a - l_r}{l_r} \quad [2.7]$$

όπου,

- $\varepsilon$  είναι η γραμμική ανηγμένη παραμόρφωση
- $l_a$  είναι η αρχική απόσταση μεταξύ δυο σημείων
- $l_r$  είναι η τελική απόσταση μεταξύ των δυο σημείων

Στα περισσότερα προβλήματα εφαρμοσμένης μηχανικής, οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές ποσότητες.

## 2.5 Τανυστής των παραμορφώσεων

Η κατάσταση της παραμόρφωσης σε ένα σημείο ενός σώματος ορίζεται από τον τανυστή των τροπών (strain tensor). Ο τανυστής των τροπών συμβολίζεται με  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad [2.8]$$

και καθορίζεται από τις μετατοπίσεις  $u_i=(u_x, u_y, u_z)$ , με την παραδοχή απειροστών τροπών :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad [2.9]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad [2.10]$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \quad [2.11]$$

## 2.6 Γραμμική Ελαστικότητα (Νόμος του Hooke)

Όταν σε ένα σώμα ασκούνται τάσεις, τότε η εντατικοπαραμορφωσιακή του κατάσταση μεταβάλλεται. Όταν αφαιρεθούν οι τάσεις που ασκούνται σε αυτό και το σώμα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση, τότε παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά.

Η κλασική θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας είναι βασισμένη σε μια γενίκευση του νόμου του Hooke, η οποία αρχικά διατυπώθηκε για ένα ελατήριο. Ο νόμος αυτός αποκαλείται γενικευμένος νόμος του Hooke και διατυπώνει ότι σε κάθε σημείο ενός τρισδιάστατου, γραμμικά ελαστικού σώματος οι έξι όροι του τανυστή τάσης,  $\sigma_{ij}$ , συσχετίζονται γραμμικά με τους έξι αντίστοιχους όρους του τανυστή των τροπών  $\varepsilon_{ij}$ . Οι σταθερές αναλογίας που σχετίζουν τις δύο παραμέτρους, αφορούν τις ιδιότητες του υλικού, και είναι<sup>[19]</sup> :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \times \varepsilon_{kl} \quad [2.12]$$

όπου, ο  $C$  είναι ένας τανυστής τέταρτης τάξης με 81 όρους. Επειδή όμως οι όροι  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{ij}$  είναι συμμετρικοί τανυστές δεύτερης τάξης, από τους 81 όρους του τανυστή μόλις 36 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Όλοι οι όροι του τανυστή  $C$  μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των ελαστικών σταθερών του Lamé ( $\lambda, \mu$ ), στην περίπτωση ενός ομογενούς και ισότροπου υλικού. Υπάρχουν άλλες τρεις ελαστικές σταθερές που χρησιμοποιούνται και σχετίζονται με τις δύο αυτές παραμέτρους. Αυτές είναι :

- Το  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young (Young's modulus)
- Το  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson (Poisson's ratio)
- Το  $G$  είναι το μέτρο διάτμησης ή μέτρο ακαμψίας (shear modulus)
- Το  $K$  είναι το μέτρο συμπίεσης (bulk modulus)

Το μέτρο ελαστικότητας του Young εκφράζει την αντίσταση στην παραμόρφωση ενός υλικού, όμοια με την αντίσταση ενός ελατηρίου που συμπιέζεται ή εκτείνεται. Στην γενική περίπτωση ορίζεται από την κλίση της τάσης – ανηγμένης παραμόρφωσης και έχει διαστάσεις τάσης :

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad [2.13]$$

Ο λόγος του Poisson εκφράζει την πλευρική παραμόρφωση ενός υλικού, λόγω καταπόνησης σε μια διεύθυνση<sup>[19]</sup>. Ορίζεται από τον λόγο της εγκάρσιας ( $-\varepsilon_x$ ) προς την αξονική ( $+\varepsilon_y$ ) ανηγμένη παραμόρφωση, είναι αδιάστατος αριθμός και κυμαίνεται από  $-1 < \nu < 0.5$  :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad [2.14]$$

Τα μέτρα  $\lambda$ ,  $G$ ,  $K$  σχετίζονται με τα  $E$  και  $\nu$  βάσει των ακόλουθων σχέσεων :

$$\lambda = \frac{\nu \times E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad [2.15]$$

Έτσι, μπορούν να περιγραφούν οι σχέσεις μεταξύ τάσεων - παραμορφώσεων για ένα γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \times (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \times (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu \times (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad [2.16]$$

Μπορεί να φανεί στις τρεις πρώτες, από αυτές τις εξισώσεις, ότι η τιμή του μέτρου του Young,  $E$ , καθορίζει την τιμή της ορθής παραμόρφωσης στην κατεύθυνση μιας εφαρμοσμένης ορθής τάσης. Εάν  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , η πρώτη εκ των εξισώσεων θα δίνει την απλοποιημένη μορφή του νόμου του Hooke :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad [2.17]$$

Ομοίως, ο λόγος του Poisson καθορίζει την τιμή της παραμόρφωσης σε διευθύνσεις κάθετες της ασκούμενης τάσης. Έτσι εάν ισχύει  $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0$ , τότε:

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\nu \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\nu \varepsilon_{xx}. \quad [2.18]$$

Οι τελευταίες τρεις σχέσεις από τις (2.16) δείχνουν ότι οι ορθές τάσεις δεν παράγουν καμία διατμητική παραμόρφωση, έτσι και οι τρεις πρώτες δείχνουν ότι οι διατμητικές τάσεις δεν παράγουν καμία ορθή παραμόρφωση. Επιπλέον, οι διατμητικές τάσεις (και παραμορφώσεις) είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους και συνδέονται οι διατμητικές τάσεις με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις με το μέτρο  $G$ .

Από τις σχέσεις 2.16 εάν είναι γνωστές οι παραμορφώσεις και ζητούνται οι τάσεις προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{xx} + \nu (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{yy} + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{zz} + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= 2G \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad [2.19]$$

### 2.6.1 Θεώρηση της επίπεδης ελαστικότητας

Στο μοντέλο της επίπεδης ελαστικότητας η τρίτη διάσταση θεωρείται είτε πολύ μικρή (οπότε γίνεται θεώρηση επίπεδης τάσης - plane stress), είτε πολύ μεγάλη (όποτε γίνεται θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης - plane strain), σε σχέση με τις άλλες δυο διαστάσεις του προβλήματος<sup>[15]</sup>. Γίνεται, ακόμη, η παραδοχή ότι το υλικό είναι ομοιόμορφο κατά την τρίτη διάσταση του.

Έτσι, αν υπάρχουν επιβαλλόμενες δυνάμεις (loading), η φόρτιση είναι ομοιόμορφη κατά την τρίτη διάσταση και δεν υπάρχουν τροποποιήσεις στο εντατικοπαραμορφω-

σιακό πεδίο στην τρίτη διάσταση. Πιο συγκεκριμένα, για προβλήματα με θεώρηση επίπεδης τάσης ισχύουν οι παραδοχές :

$$\sigma_{xz} = 0 \quad \sigma_{yz} = 0 \quad \sigma_z = 0 \quad [2.20]$$

ενώ σε προβλήματα με θεώρηση επίπεδης παραμόρφωσης ισχύουν οι παραδοχές :

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad \varepsilon_{yz} = 0 \quad \varepsilon_z = 0 \quad [2.21]$$

### 2.6.2 Σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης

Για απειροστές παραμορφώσεις ισχύουν οι σχέσεις :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad [2.22]$$

### 2.6.3 Σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad [2.23]$$

όπου  $c_{ij}$  ( $c_{ji} = c_{ij}$ ) είναι σταθερές ενός ορθότροπου μέσου. Οι σταθερές αυτές μπορούν να εκφραστούν μέσω των παραμέτρων  $E$ ,  $\nu$  και  $G$  του υλικού όπου, ανάλογα με την προαναφερθήσα θεώρηση, θα ισχύουν οι σχέσεις :

- για επίπεδη τάση (plane stress)

$$c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad c_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad c_{12} = \nu \times c_{11} = \nu \times c_{22}, \quad c_{33} = G \quad [2.24]$$

- για επίπεδη παραμόρφωση (plane strain) ( $\nu_{23} = \nu_{12}$ )

$$c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2}, \quad c_{22} = \frac{E(1-\nu^2)}{(1+\nu)(1-\nu-2\nu^2)}, \quad c_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu-2\nu^2}, \quad c_{33} = G \quad [2.25]$$



για ένα ισότροπο υλικό ισχύουν οι εξής παραδοχές :

$$E = E_1 = E_2, \quad \nu = \nu_{12} = \nu_{21}, \quad c_{12} = c_{21}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad [2.26]$$

#### 2.6.4 Μητρώο ακαμψίας του υλικού

Το μητρώο ακαμψίας του υλικού προκύπτει από τις παραμέτρους  $E$  και  $\nu$ . Τα στοιχεία που πληρούν τον πίνακα  $D$  εξαρτώνται από την θεώρηση της λύσης του προβλήματος με βάση την επίπεδη τάση ή την επίπεδη παραμόρφωση.

Στην περίπτωση θεώρησης της επίπεδης τάσης, για ορθότροπο υλικό δυο διαστάσεων, ο πίνακας  $D$  δίνεται από την εξίσωση (2.27), ενώ στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, για το ίδιο υλικό, ο πίνακας  $D$  δίνεται από την σχέση (2.28) :

$$[D] = \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad [2.27]$$

$$[D] = \left( \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad [2.28]$$

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

### Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γεωμηχανικής

#### 3.1 Μέθοδοι προσεγγιστικής επίλυσης προβλημάτων πεδίου

Οι πρώτες, χρονικά, αριθμητικές τεχνικές πρόβλεψης και μελέτης των εντατικών καταστάσεων σε γεωτεχνικά έργα, χρησιμοποιούσαν μεθόδους οριακής ισορροπίας (limit equilibrium methods), οι οποίες και θεωρούνται προσεγγιστικές μέθοδοι (Lambe and Whitman, 1979).

Εν συνεχεία, χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι αναλυτικής επίλυσης (closed form solutions) των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα σύνθετα αυτά φαινόμενα, εξετάζοντας την συμπεριφορά διακριτών τεμαχίων (π.χ. σφήνες πετρώματος σε πρανή) με βάση την ισορροπία τάσεων ή δυνάμεων.

Το κύριο μειονέκτημα των μεθόδων αυτών θεωρείται το γεγονός ότι, παρόλο που χρησιμοποιούν συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων, δεν λαμβάνουν υπόψιν τις παραμορφώσεις των υλικών λόγω των δυνάμεων αυτών.

#### 3.2 Οι κυριότερες αριθμητικές μέθοδοι στην γεωμηχανική

Οι πρώτες εφαρμογές αριθμητικών μεθόδων σε προβλήματα γεωμηχανικής εμφανίστηκαν αμέσως μετά την ανάπτυξη της αντίστοιχης μεθοδολογίας σε άλλα πεδία, όπως στην ρευστομηχανική, την μηχανική των πετρελαίων κλπ. Τα τελευταία χρόνια, η αλματώδης ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων, ταυτόχρονα με τη μείωση των τιμών τους, κάτι το οποίο τα καθιστά προσιτά, κατέστησε

ευρεία την χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης σε προβλήματα ελέγχου συμπεριφοράς των γεωυλικών.

Οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν πλέον ένα σημαντικό εργαλείο για τους μηχανικούς, αφενός μεν κατά τη φάση του σχεδιασμού, αφετέρου δε κατά τη φάση της εκτελέσεως ενός έργου, με ταυτόχρονη ικανότητα από το χρήστη να επεμβαίνει σε οποιαδήποτε φάση του έργου (στις σήραγγες, κατά τη φάση της εκσκαφής ή της υποστήριξης), με την προϋπόθεση ότι εφαρμόζεται σωστά, λαμβάνονται, δηλαδή, υπόψιν κατά περίπτωση οι δυνατότητες και οι περιορισμοί της κάθε μεθόδου.

Η αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ενός προβλήματος πεδίου με καθορισμένες συνοριακές συνθήκες έχει μία και μοναδική λύση. Πρέπει, όμως, σε κάθε περίπτωση να γίνεται μία ανάλυση ευαισθησίας (ή σταθερότητας) της μεθόδου, ούτως ώστε να εξασφαλίζεται ότι για μικρές διακυμάνσεις των παραμέτρων του προβλήματος δεν προκύπτουν μεγάλες διακυμάνσεις των υπολογιζόμενων μεγεθών.

Χαρακτηριστικά, αναφέρονται και περιγράφονται επιγραμματικά οι κυριότερες των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων (βλ. σχ. 3.1) <sup>[19]</sup> :

- μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method)
- μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite difference method)
- μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (boundary element method)
- μέθοδος των διακριτών (ή διακεκριμένων) στοιχείων (distinct element method)
- υβριδικές μέθοδοι (hybrid methods), οι οποίες συνδυάζουν χαρακτηριστικά από δύο ή περισσότερες μεθόδους



Σχήμα 3.1 : Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων γεωμηχανικής

### 3.2.1 Μέθοδοι των Πεπερασμένων Στοιχείων (Μ.Π.Σ.)

Στις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, το πεδίο (domain) το οποίο μελετάται, διαιρείται σε επιμέρους τμήματα καθορισμένης γεωμετρίας (στοιχεία). Τα στοιχεία αυτά, περαιτέρω ανάλυση των οποίων γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο, είναι μονοδιάστατα, δισδιάστατα ή τρισδιάστατα. Ο αριθμός των διαστάσεων των στοιχείων αυτών είναι συνήθως αντίστοιχος με τον αριθμό των διαστάσεων του υπο μελέτη χωρίου (μονοδιάστατο, δισδιάστατο ή τρισδιάστατο πεδίο αντίστοιχα)..

Το κάθε στοιχείο αποτελείται από κόμβους. Η συμπεριφορά κάθε τμήματος περιγράφεται μέσα από διαφορικές εξισώσεις. Με την εξασφάλιση των απαιτήσεων συνέχειας και ισορροπίας μεταξύ των στοιχείων του πεδίου, υπάρχει μοναδική λύση στο γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (Becker, 1992, Hoek et al., 1991).

Οι μέθοδοι Π.Σ. ανήκουν στις μεθόδους μεταβολών και περιλαμβάνουν την μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων (weighted residuals), κ.λ.π. Οι άγνωστες ζητούμενες ποσότητες υπολογίζονται στους κόμβους του κάνναβου των πεπερασμένων στοιχείων και μέσω γραμμικών ή μη γραμμικών συναρτήσεων παρεμβολής υπολογίζονται στα υπολοίπα σημεία του μέσου. Σημειώνεται επίσης ότι οι Μ.Π.Σ. αποτελούν γενικότερες μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. <sup>[19]</sup>

### 3.2.2 Μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών (Μ.Π.Δ.)

Στις μεθόδους αυτές το υπο μελέτη πεδίο διαιρείται σε έναν κάνναβο σημείων (κόμβων) ομοιόμορφο ως προς τις στοιχειώδεις διαστάσεις (αποστάσεις μεταξύ των κόμβων στις κύριες κατευθύνσεις του χώρου). Η διαφορική εξίσωση εκφράζεται βάσει της τιμής της συνάρτησης σε κάθε σημείο του κάνναβου, καθώς και βάσει των παραγώγων της συνάρτησης γύρω από κάθε σημείο. Οι Μ.Π.Δ. διακρίνονται ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού των παραγώγων σε κάθε σημείο του κάνναβου (forward, backward, κ.λ.π.). Οι ζητούμενες ποσότητες βρίσκονται σε κάθε σημείο του κάνναβου με την επίλυση του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων, το οποίο προκύπτει από την διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων σε διακριτή μορφή στους κόμβους.

### **3.2.3 Μέθοδοι των Συνοριακών Στοιχείων (Μ.Σ.Σ.)**

Στις μεθόδους αυτές το σύνορο κάθε ομοιογενούς περιοχής του χωρίου (boundary) διαιρείται σε γραμμικά ή επιφανειακά στοιχεία για δισδιάστατα και τρισδιάστατα προβλήματα αντίστοιχα. Συνεπώς, οι διαστάσεις του μοντέλου είναι μειωμένες κατά μια σε σχέση με τις αντίστοιχες που προκύπτουν από την διακριτοποίηση του χωρίου με πεπερασμένα στοιχεία. Οι μέθοδοι αυτοί εφαρμόζονται κυρίως για την επίλυση προβλημάτων με γραμμική συμπεριφορά των υλικών. Σε μη γραμμικές περιπτώσεις επιβάλλεται επιπλέον διακριτοποίηση του χώρου. Οι άγνωστες ποσότητες υπολογίζονται στο κέντρο βάρους κάθε συνοριακού στοιχείου και εν συνεχεία, με κατάλληλες σχέσεις υπολογίζονται στα εσωτερικά σημεία του μέσου. Οι Μ.Σ.Σ. ανήκουν στις ολοκληρωτικές μεθόδους και περιλαμβάνουν την άμεση, μικτή και έμμεση μέθοδο.

### **3.2.4 Μέθοδοι των Διακριτών Στοιχείων (Μ.Δ.Σ.)**

Στις μεθόδους αυτές ο χώρος θεωρείται βασικά ασυνεχής και εξετάζονται μεταξύ άλλων οι κινητικές παράμετροι (γραμμικές και στροφικές) κάθε στοιχείου, η δυνατότητα μετατόπισης αυτού, οι τριβές μεταξύ γειτονικών στοιχείων βάσει κατάλληλων κριτηρίων, ενδεχομένως η δυνατότητα θραύσης στοιχείων, κ.λ.π.

### 3.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μεθόδων αριθμητικής επίλυσης

Ξεχωριστά, κάθε μέθοδος έχει ορισμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα (βλ.πιν 3.1) :

Πίνακας 3.1: Πλεονεκτήματα & Μειονεκτήματα των μεθόδων

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων	Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών
<b>Πλεόνεκτήματα μεθόδων</b>		
Μεγάλη ακρίβεια	Μεγάλη ακρίβεια	Εννοιολογική απλότητα
Ευκολία στην χρήση	Μικρότερες απαιτήσεις για υπολογιστική μνήμη	Απλούστερες εξισώσεις
Διαχείριση πολύπλοκων γεωμετριών	Μη παραγωγή περιττών πληροφοριών	Ευκολία στον προγραμματισμό
Δυνατότητα λύσης μη γραμμικών προβλημάτων	Εύκολία στον σχεδιασμό και την εισαγωγή της γεωμετρίας	Μεγάλη ταχύτητα εκτέλεσης
Ευρέως δοκιμασμένες προσεγγίσεις	Μείωση των διαστάσεων του προβλήματος	-
Ακρίβεια αποτελεσμάτων σε περιοχές συγκέντρωσης τάσεων	Ακρίβεια αποτελεσμάτων σε περιοχές συγκέντρωσης τάσεων (ύπαρξη ασυνεχειών)	-
<b>Μειονεκτήματα μεθόδων</b>		
Δυσκολία στην δημιουργία πλέγματος	Πολύπλοκες εξισώσεις	Δυσλειτουργία σε πολύπλοκες γεωμετρίες
Μεγάλες απαιτήσεις για υπολογιστική μνήμη	Δυσλειτουργία σε μη γραμμικά προβλήματα	Μεγάλες απαιτήσεις για υπολογιστική μνήμη
Επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων	Ανάγκη επίλυσης μικρότερων συστημάτων αλλά οι πίνακες που χρησιμοποιούνται είναι πυκνότεροι (populated matrices)	Μη ικανοποιητική ακρίβεια αποτελεσμάτων σε περιοχές συγκέντρωσης τάσεων
Παραγωγή περιττών πληροφοριών	Δυσλειτουργία στην επίλυση μικρών στοιχείων, όπου οι κόμβοι είναι πολύ κοντά μεταξύ τους	-

Το μεγάλο πλεονέκτημα των αριθμητικών μεθόδων είναι η δυνατότητα διεξαγωγής αντίστροφης ανάλυσης. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται ακρίβεια στην επίλυση του προβλήματος και επίτευξη των συνθηκών ασφαλείας με το μικρότερο οικονομικό κόστος (Κωμοδρόμος, 1999).

Αξίζει, όμως, να σημειωθεί ότι καμία από τις μεθόδους δεν θεωρείται κατάλληλη για την επίλυση του συνόλου των δυνατών προβλημάτων. Κάθε μέθοδος παρουσιάζει θετικά και αρνητικά στοιχεία ως προς την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Έτσι, πολλές φορές, είναι απαραίτητος είτε ο συνδυασμός είτε η σύγκριση περισσότερων της μιας μεθόδων, για την επίτευξη του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος.



## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

### Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

#### 4.1 Η αρχή της μεθόδου

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση περίπλοκων προβλημάτων μηχανικής.

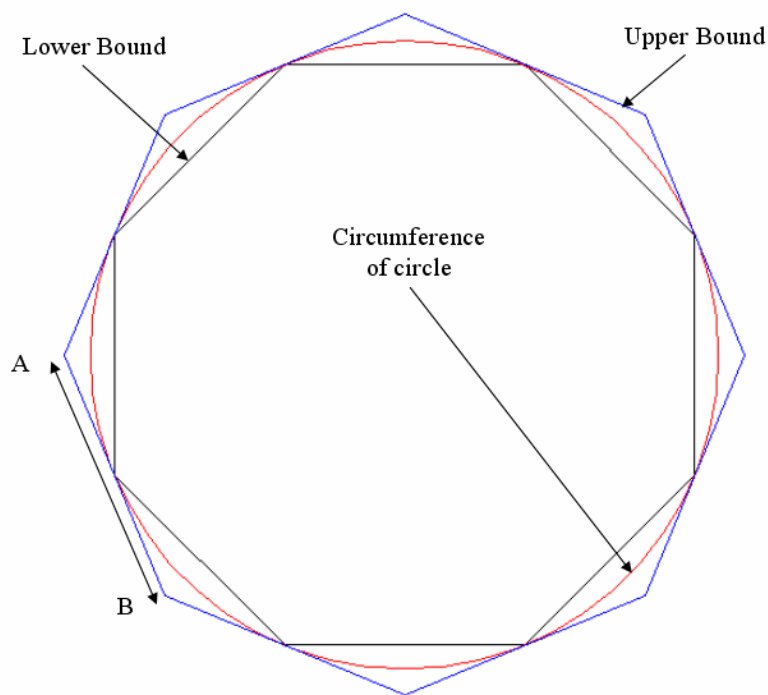
Στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η λύση του εκάστοτε προβλήματος προκύπτει από την διατύπωση συστημάτων εξισώσεων σε υποπεριοχές του πεδίου στο οποίο έγκειται το πρόβλημα (σε αντίθεση με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και των συνοριακών στοιχείων), και την κατόπιν συναρμολόγησή τους σε ένα καθολικό σύστημα για όλο το πεδίο που θα δώσει την τελική λύση του προβλήματος. Οι εξισώσεις που διατυπώνονται σε επίπεδο στοιχείου, καθώς και ο τρόπος συναρμολογής αυτών αναφέρονται εκτενώς στις επόμενες παραγράφους.

#### 4.2 Ιστορικά στοιχεία

##### 4.2.1 Η προσέγγιση της περιμέτρου του κύκλου

Ο όρος πεπερασμένα στοιχεία (finite elements) χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Clough το 1960 σε μια μελέτη εντατικής κατάστασης με χρήση τριγωνικών στοιχείων. Ωστόσο, η ιδέα που διέπει την μέθοδο είχε χρησιμοποιηθεί από την αρχαιότητα ακόμη. Ένα παράδειγμα αυτής της ιδέας, είναι η προσέγγιση της περιμέτρου του κύκλου με την θεώρηση αυτού σαν ένα πολύγωνο με μεγάλο αριθμό μικρών ισομηκών ευθύγραμμων τμημάτων σαν πλευρές (βλ. σχήμα 4.1).

Η προσέγγιση της περιμέτρου του κύκλου προέκυψε από την μέση τιμή των μηκών δυο πολυγώνων τα οποία εφάπτονταν στον κύκλο το ένα εξωτερικά και το άλλο εσωτερικά αυτού, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1. Το εξωτερικό πολύγωνο αποτελεί το άνω όριο (upper bound) του κύκλου, ενώ το εσωτερικό πολύγωνο είναι το κάτω όριο (lower bound) του κύκλου. Όσα πιο πολλά είναι τα τμήματα στα οποία χωρίζονται (διακριτοποιούνται) τα πολύγωνα αυτά, τόσο προσεγγίζει η λύση της μέσης τιμής αυτών στην πραγματική τιμή της περιμέτρου του κύκλου<sup>[14]</sup>.



Σχήμα 4.1 : Το πρόβλημα της προσέγγισης της περιμέτρου του κύκλου

#### 4.2.2 Χρονική αναδρομή στην ανάπτυξη της μεθόδου

Τα πεπερασμένα στοιχεία, με την σύγχρονη μορφή τους, πρωτοεμφανίστηκαν το 1943, σε μια μελέτη του Γάλλου Courant (Desai & Abel, 1972) με χρήση συνεχών εξισώσεων κλαδικής μορφής σε τριγωνικά στοιχεία. Η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου πραγματοποιήθηκε το 1956 από τους Turner, Clough, Martin και Torpp, για την ανάλυση στατικών και δυναμικών προβλημάτων στην αεροναυπηγική <sup>[14]</sup>. Έκτοτε, σε διάστημα μιας δεκαετίας, η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, με την ονομασία που τους έδωσε ο Clough το 1960, επεκτάθηκε και σε άλλα πεδία της θεωρητικής και εφαρμοσμένης μηχανικής<sup>[14]</sup>5τ.

Με την πάροδο των χρόνων, η μεθοδολογία των πεπερασμένων στοιχείων υπέστη σημαντικές βελτιώσεις. Ο Przemieniecki το 1968 έδειξε ότι η μέθοδος είναι εφαρμόσιμη σε προβλήματα ανάλυσης τάσεων. Οι Zienkiewicz και Cheung διατύπωσαν το 1967 μια εκτεταμένη ερμηνεία της μεθόδου και απέδειξαν την εφαρμοσιμότητά της σε κάθε γενικό πρόβλημα πεδίου. Η θεώρηση αυτή των πεπερασμένων στοιχείων οδήγησε στην κατασκευή των εξισώσεων, που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο, με την βοήθεια μεθόδων σταθμισμένων υπολοίπων (weighted residual methods) όπως είναι η μέθοδος Galerkin, η μέθοδος Petrov-Galerkin, καθώς και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Τα περισσότερα των βιβλίων, δημοσιεύσεων και συνεδρίων που έχουν ως κύριο αντικείμενο τα πεπερασμένα στοιχεία περιέχουν την βασική θεωρία της μεθόδου, τις εξισώσεις που διέπουν τα πεπερασμένα στοιχεία, εφαρμογές αυτών σε προβλήματα γεωμηχανικής, ρευστομηχανικής, θερμοδυναμικής κ.α., καθώς και αλγόριθμους επίλυσης διαφόρων προβλημάτων σε γλώσσες προγραμματισμού H/Y (Fortran 77).

Σήμερα, η συγκεκριμένη μέθοδος θεωρείται μια από τις καλύτερες αριθμητικές μεθόδους, σημαντικά γρήγορη και εφαρμόσιμη σε ένα ευρύτατο πεδίο προβλημάτων της μηχανικής.

### 4.3 Θεμελιώδη βήματα της μεθόδου

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται σε τρία βασικά βήματα για την περάτωσή της:

- Πρώτο βήμα είναι η διαίρεση του πεδίου μιας, δύο, ή τριων διαστάσεων, σε επιμέρους μικρότερα τμήματα, κατά τρόπο τέτοιο ώστε να αντιπροσωπεύεται με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια η γεωμετρία του προβλήματος σε συνάρτηση με την επικείμενη λύση αυτού.
- Δεύτερο βήμα είναι η προσέγγιση της λύσης, σε κάθε τμήμα του πεδίου, σαν γραμμικός συνδυασμός των τιμών σε συγκεκριμένα σημεία (κόμβοι) και των συναρτήσεων μορφής (shape functions) που ορίζονται για κάθε κόμβο.
- Τρίτο βήμα είναι η παραγωγή αλγεβρικής σχέσης μεταξύ των τιμών στους κόμβους (nodes) κατά την επίλυση σε κάθε τμήμα και η συνένωση των επιμέρους τμημάτων για να επιτευχθεί η επίλυση του συνόλου.

### 4.4 Διαίρεση του πεδίου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η υποδιαίρεση ενός δεδομένου πεδίου ορισμού (domain) σε απλούστερης γεωμετρίας υποπεδία. Τα υποπεδία αυτά καλούνται ‘στοιχεία’ (elements) και αποτελούν το βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου. Η διαίρεση του πεδίου έχει δύο πλεονεκτήματα (IGE, 2003):

- Επιτρέπει την αντιπροσώπευση, με μεγάλη ακρίβεια, περίπλοκων γεωμετρικών σχημάτων και δίνει την δυνατότητα συνυπολογισμού των ιδιοτήτων ανόμοιων υλικών.
- Επιτρέπει την προσέγγιση της λύσης σε κάθε στοιχείο, σε ένα συνεχές κλειστής μορφής πολύγωνο, και ως εκ τούτου, την γνώση του αριθμητικού αποτελέσματος των παραμέτρων σε κάθε στοιχείο, άρα σε οποιοδήποτε μέρος, του πεδίου ορισμού του προβλήματος.

Η διαίρεση ενός πεδίου με απροσδιόριστο αριθμό βαθμών ελευθερίας σε στοιχεία βοηθά επίσης στον προσδιορισμό πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας, οι οποίοι είναι το σύνολο των άγνωστων μεταβλητών που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο.

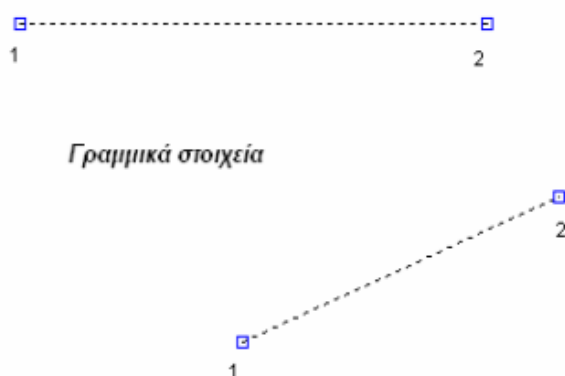
Ωστόσο, η κατάλληλη εκλογή του τύπου των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν για την διαίρεση του πεδίου εξαρτάται από διάφορους παράγοντες που, όμως, σαν κοινό παρανομαστή έχουν την καλύτερη δυνατή προσομοίωση του πεδίου από τα στοιχεία αυτά.

#### 4.4.1 Είδη στοιχείων

Το είδος των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν εξαρτάται κύρια από την διαστασιολόγηση του προβλήματος και τις διαστάσεις που απαιτούνται για την περιγραφή του προβλήματος. Ορισμένα από τα βασικότερα είδη στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην μέθοδο παρουσιάζονται στα επόμενα σχήματα.

#### 4.4.2 Στοιχεία σε μια διάσταση

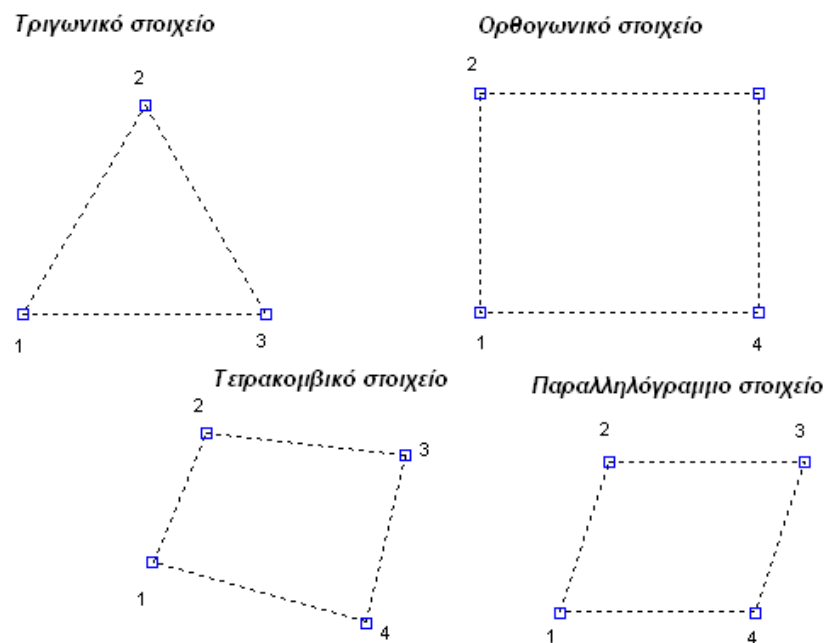
Όταν η γεωμετρία του προβλήματος ή το υλικό ή και άλλες παράμετροι (όπως η τάση, η παραμορφωση, η θερμοκρασία) μπορούν να περιγραφούν στα πλαίσια μιας κύριας διάστασης, τότε για την διακριτοποίηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν μονοδιάστατα ή γραμμικά στοιχεία (βλ. σχ 4.2)



Σχήμα 4.2 : Είδη στοιχείων μιας διάστασης

#### 4.4.3 Στοιχεία σε δυο διαστάσεις

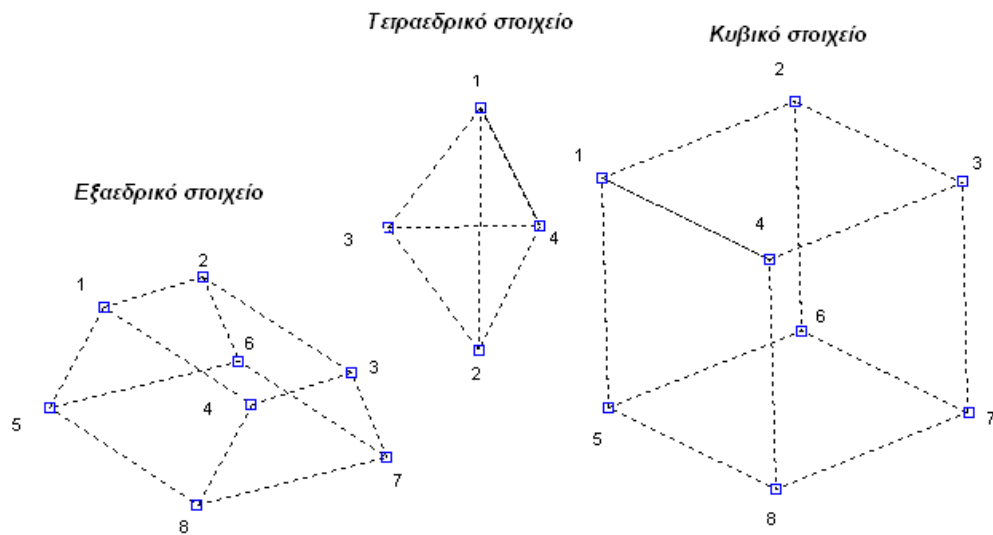
Αντίστοιχα, σε προβλήματα στα οποία είναι ενδεδειγμένη η χρήση δυο διαστάσεων, η σε γεωμετρίες στις οποίες η τρίτη διάσταση είναι σημαντικά μικρότερη των υπολοίπων δυο, τότε χρησιμοποιούνται δισδιάστατα στοιχεία.(βλ. σχ. 4.3). Τα ευρέως χρησιμοποιούμενα στοιχεία σε αυτήν την κατηγορία είναι τα τριγωνικά. Ωστόσο, χρησιμοποιούνται αρκετά και τα ορθογωνικά αλλά και τα τετρακομβικά και τα παραλληλόγραμμα, τα οποία, αν και μπορούν να προκύψουν από δυο ή τέσσερα τριγωνικά στοιχεία εν τι ενώσει αυτών, μπορούν να αποδειχτούν καλύτερη επιλογή σε ορισμένες περιπτώσεις.



Σχήμα 4.3 : Είδη στοιχείων δυο διαστάσεων

#### 4.4.4 Στοιχεία σε τρεις διαστάσεις

Τέλος, αν το πρόβλημα προς επίλυση πρέπει να αντιμετωπιστεί σε πεδίο τριών διαστάσεων, χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα τρισδιάστατα στοιχεία (βλ. σχ. 4.4), όπως κυβικά, τετραεδρικά ή εξαεδρικά στοιχεία. Η χρήση τρισδιάστατου χωρίου είναι δυσκολότερη σε σχέση με το γραμμικό ή το δισδιάστατο πεδίο, παρόλα αυτά σε ορισμένα προβλήματα γεωμηχανικής πλησιάζει πιο πολύ στην πραγματική λύση του προβλήματος και αποφεύγει παραδοχές που στις άλλες δυο περιπτώσεις αυξάνουν τις πιθανότητες εσφαλμένων αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

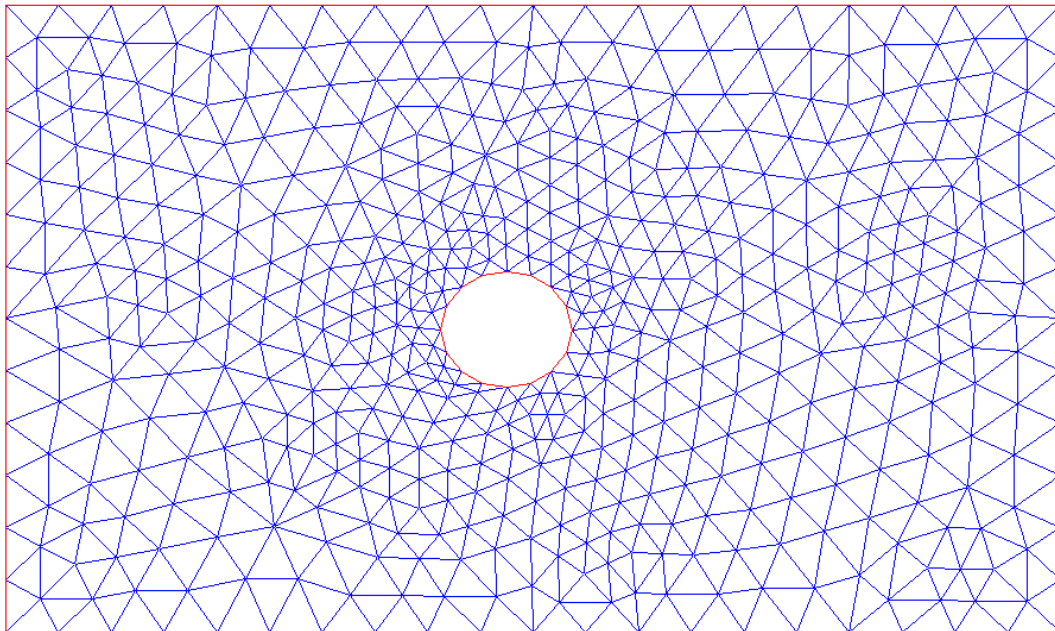


Σχήμα 4.4 : Είδη στοιχείων τριων διαστάσεων

#### 4.4.5 Μέγεθος των στοιχείων

Το μέγεθος των στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται το πρόβλημα είναι πλέον σημαντικό για την βέλτιστη προσέγγιση της λύσης του εκάστοτε προβλήματος. Όσο πιο μικρό το μέγεθος των στοιχείων, τόσο πιο ακριβή είναι τα αποτελέσματα που επιτυγχάνουμε. Ωστόσο, δεν πρέπει να παραγνωριστεί το γεγονός ότι μικρότερα στοιχεία, άρα και περισσότερα τον αριθμό, εξυπακούεται μεγαλύτερο χρόνο υπολογισμού. Θεμιτή, άρα, είναι η χρήση στοιχείων διαφορετικού μεγέθους μεταξύ των μέσα σε ένα πρόβλημα.

Η συνήθης πρακτική είναι η χρήση μεγάλων στοιχείων στις περιοχές του χωρίου όπου δεν είναι απαραίτητη η μεγάλη ακρίβεια αποτελεσμάτων, και η χρήση μικρότερων και περισσότερων στοιχείων κοντά στις μεγάλης σημασίας περιοχές του πεδίου του εκάστοτε προβλήματος όπως είναι, για παράδειγμα, το άνοιγμα μιας κυκλικής σήραγγας σε έδαφος (βλ. σχ. 4.5), όπου κοντά στο άνοιγμα η διακριτοποίηση θα είναι λεπτομερέστερη από ότι στο υπόλοιπο πεδίο.



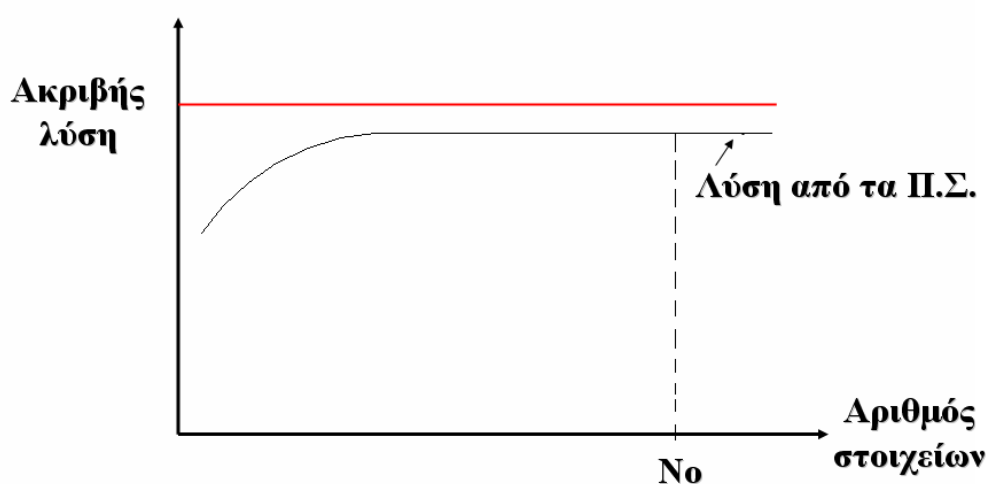
Σχήμα 4.5 : Διαβάθμιση των στοιχείων στο πεδίο



#### 4.4.6 Αριθμός των στοιχείων

Ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην διακριτοποίηση του προβλήματος είναι απο τις πιο σημαντικές παραμέτρους της διακριτοποίησης. Μεγάλος αριθμός στοιχείων κάνει ακριβέστερη την προσέγγιση στην λύση του προβλήματος, αυξάνει όμως και τον χρόνο υπολογισμού των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, οι οποίες είναι πολλαπλάσιες των κόμβων των στοιχείων.

Για κάθε πρόβλημα, όμως, αποδεικνύεται ότι πέρα από κάποιον βέλτιστο αριθμό στοιχείων, η ακρίβεια της λύσης δεν αλλάζει σημαντικά με την περαιτέρω αύξηση των στοιχείων (βλ. σχ. 4.6). Έτσι σε κάθε πρόβλημα ξεχωριστά προσδιορίζεται ο βέλτιστος αριθμός πεπερασμένων στοιχείων που θα δώσει την ακριβέστερη λύση.



Σχήμα : 4.6 Γραφική παράσταση της ακρίβειας της λύσης συναρτήσει του αριθμού των στοιχείων

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι, για λογιστικούς λόγους, τόσο τα στοιχεία, όσο και οι κόμβοι αριθμούνται. Ωστόσο η αρίθμηση τους δεν διέπεται από κάποιον κανόνα, αλλά είναι τελείως αυθαίρετη. Όμως, ανάλογα με την αρίθμηση, διαμορφώνεται και η χρήση υπολογιστικής μνήμης.

## 4.5 Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Πεδίου με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις πεδίου χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- τις παραβολικές
- τις ελλειπτικές
- τις υπερβολικές

Το πεδίο επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων μπορεί να είναι μονοδιάστατο, δυο ή και τριών διαστάσεων. Στην παράγραφο αυτή παρατίθενται παραδείγματα των τριών ειδών μερικών διαφορικών εξισώσεων για προβλήματα πεδίου δυο διαστάσεων.

### 4.5.1 Παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

Οι παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν φαινόμενα ροής μάζας ή ενέργειας επι ενός πεδίου (domain) ορισμένου σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η γενική μορφή των εξισώσεων αυτών, είναι η ακόλουθη:

$$c \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla(k \cdot \nabla \Phi) + a \cdot \nabla \Phi + b \Phi + s \quad , \quad \text{με} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \quad [4.1]$$

όπου

- c είναι ο συντελεστής χωρητικότητας του πεδίου (capacity coefficient)
- k είναι ο συντελεστής διαπερατότητας ή αγωγιμότητας του πεδίου (permeability or conductivity coefficient)
- a είναι ο συντελεστής μεταγωγής του πεδίου (convection coefficient)
- b είναι ο συντελεστής ακτινοβολίας (radiation coefficient)
- s είναι όρος που εκφράζει οποιαδήποτε πηγή διαταραχής στο πεδίο της  $\Phi$  (source term).

Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4.1) δίνει το πεδίο κατανομής της συνάρτησης  $\Phi$  εντός μιας οριοθετημένης περιοχής κλειστού συνόρου και την μεταβολή της ως προς το χρόνο.

Σε περίπτωση κατά την οποία ο συντελεστής χωρητικότητας είναι μηδέν, η εξίσωση (4.1) μετατρέπεται από παραβολική σε ελλειπτική και η λύση της δίνει το πεδίο κατανομής της  $\Phi$  μέσα στην περιοχή του πεδίου το οποίο είναι στατικό και ανεξάρτητο του χρόνου.

#### 4.5.2 Ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

Οι ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι της γενικής μορφής :

$$\nabla(k \cdot \nabla \Phi) + a \cdot \nabla \Phi + b\Phi + s = 0 \quad [4.2]$$

και ουσιαστικά εκφράζουν ένα στατικό πεδίο κατανομής της συναρτησης  $\Phi$  επί του χωρίου.

#### 4.5.3 Υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

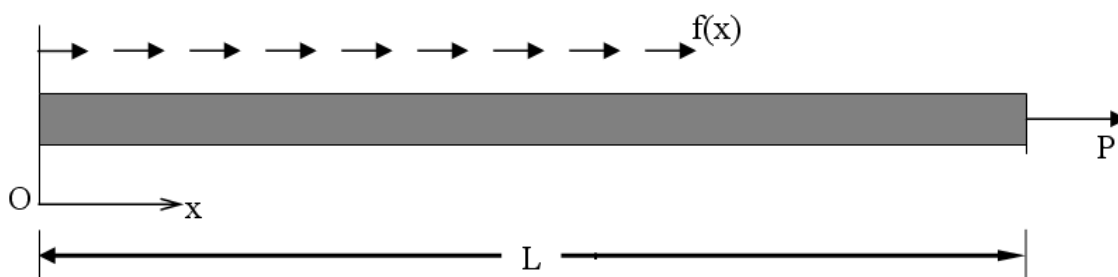
Τέλος, οι υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, είναι της γενικής μορφής :

$$c \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla(k \cdot \nabla \Phi) + a \cdot \nabla \Phi + b\Phi + s \quad [4.3]$$

και εκφράζουν μια κυματοειδή κατανομή της  $\Phi$  στο πεδίο και ως εκ τούτου ονομάζονται και εξισώσεις κύματος ή κυματισμού.

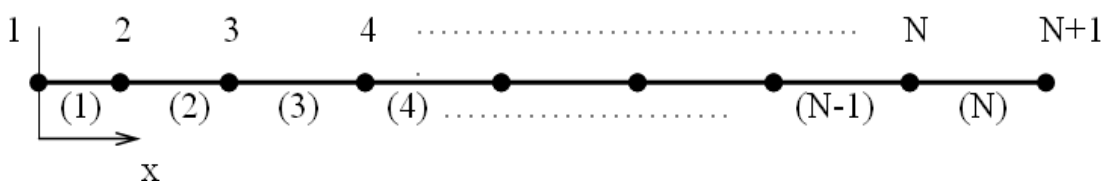
#### 4.6 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα μιας διάστασης

Στην περίπτωση μονοδιάστατων προβλημάτων τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι γραμμικά. Έστω ότι το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι μιας δοκού, πακτωμένης στο αριστερό της άκρο, η οποία δέχεται αξονική φόρτιση  $\{P\}$  στο δεξί της άκρο, ενώ κατά μήκος της εξασκείται ομοιόμορφη αξονική φόρτιση  $f(x)$  (βλ. σχ.4.7).



Σχήμα 4.7 : Πακτωμένη δοκός που δέχεται αξονική φόρτιση  $P$

Το πεδίο επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα είναι το μήκος της δοκού, το οποίο διαιρείται σε επιμέρους τμήματα μήκους. Δημιουργείται ένα σύνολο σημείων (βλ. σχ. 3.8) τα οποία προσδιορίζονται από τα άκρα του κάθε στοιχείου (κόμβοι). Επί των κόμβων αυτών υπολογίζονται οι τιμές της αξονικής μετατόπισης  $u(x)$ .



Σχήμα 4.8 : Διακριτοποίηση της δοκού σε πεπερασμένα στοιχεία

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, κάθε στοιχείο περιλαμβάνει δυο κόμβους (βλ. σχ. 3.8) και η λύση κατά μήκος αυτου εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi = a_1 + a_2 x \quad [4.4]$$

η οποία ορίζει τον καταμερισμό των αγνώστων μεταβλητών στο μονοδιάστατο στοιχείο μήκους  $L$  (βλ. σχ. 4.7 & 4.8). Το στοιχείο έχει δυο κόμβους  $i$  και  $j$  που βρίσκονται σε αποστάσεις  $x_i$  και  $x_j$  αντίστοιχα, από την αρχή των συντεταγμένων. Αντικαθιστώντας την τιμή του  $\Phi$  σε κάθε κόμβο στην εξίσωση [4.1] υπολογίζεται ότι :

$$a_1 = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{L} \quad [4.5]$$

$$a_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \quad [4.6]$$

Αντικαθιστώντας τις [4.5] και [4.6] στην εξίσωση [4.4] προκύπτει η εξίσωση :

$$\Phi = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{L} + \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} x \quad [4.7]$$

η οποία, διαχωρίζοντας τους όρους  $\Phi_i$  και  $\Phi_j$ , δίνει την εξίσωση :

$$\Phi = \frac{x_j - x}{L} \Phi_i + \frac{x - x_i}{L} \Phi_j \quad [4.8(\alpha)]$$

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = \sum_{i=1}^2 \Phi_i N_i^e \quad [4.8(\beta)]$$

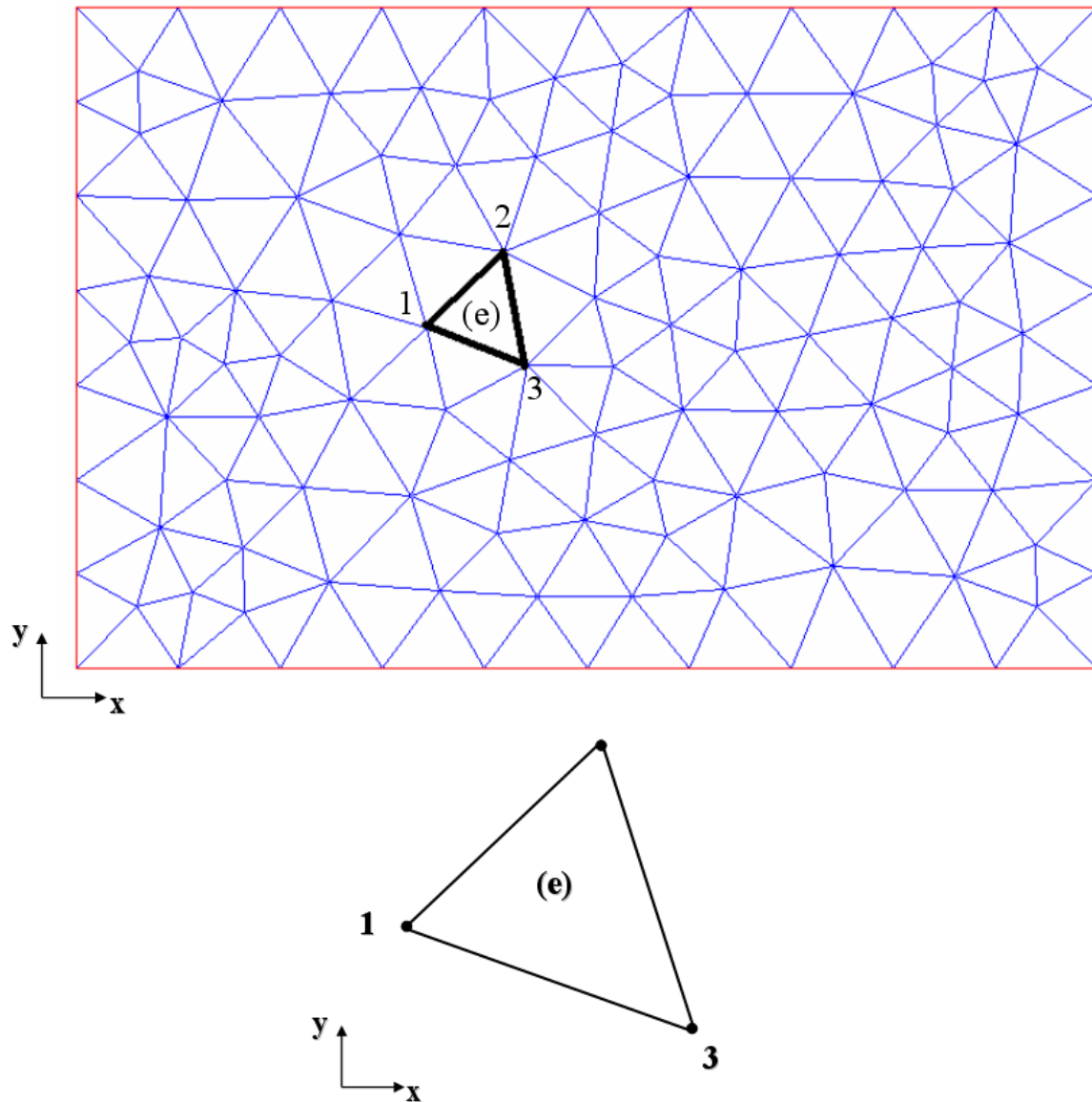
και σε γενική μορφή :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i^e \quad [4.9]$$

όπου οι  $N_i$  και  $N_j$  είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις παρεμβολής των κόμβων  $i$  και  $j$  αντίστοιχα, ορισμένες στην περιοχή του στοιχείου, και ονομάζονται συναρτήσεις μορφής (shape functions). Χρησιμοποιούνται ως συντελεστές βάρους για τους αντίστοιχους κόμβους και για τους οποίους ισχύουν. Οι συναρτήσεις  $N_i$  και  $N_j$  μπορούν επίσης να εκφραστούν σε τοπικές και αδιαστασοποιημένες συντεταγμένες. Ο αριθμός των κόμβων, και κατ'επέκταση των αντίστοιχων συναρτήσεων μορφής  $n$ , ορίζεται ως «αριθμός γεωμετρικών βαθμών ελευθερίας» του στοιχείου και καθορίζει την τάξη του στοιχείου.

#### 4.7 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα δυο διαστάσεων

Στην περίπτωση του δισδιάστατου προβλήματος, το κάθε στοιχείο περιλαμβάνει τρεις ή τέσσερις κόμβους (βλ. σχ. 4.9).



Σχήμα 4.9 : Τριγωνικό τρικομβικό στοιχείο σε δισδιάστατο πεδίο επίλυσης

Η συνάρτηση παρεμβολής ενός στοιχείου που περιλαμβάνει τρεις κόμβους εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\Phi(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad [4.10]$$

Αν  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$ ,  $\Phi_k$  είναι οι τιμές της  $\Phi$  στους κόμβους 1, 2, 3 του στοιχείου αντίστοιχα, θα έχουμε ένα σύστημα γραμμικών συναρτήσεων :

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \Phi(x_i, y_i) = c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i \\ \Phi_j &= \Phi(x_j, y_j) = c_1 + c_2 x_j + c_3 y_j \\ \Phi_k &= \Phi(x_k, y_k) = c_1 + c_2 x_k + c_3 y_k\end{aligned}\tag{4.11}$$

και σε μητρωική μορφή :

$$\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}\tag{4.12}$$

ενώ, οι τιμές των όρων  $a_1$ ,  $a_2$  και  $a_3$  θα είναι :

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(a_i \Phi_i + a_j \Phi_j + a_k \Phi_k)}{2A^e} \\ c_2 &= \frac{(b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k)}{2A^e} \\ c_3 &= \frac{(c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k)}{2A^e}\end{aligned}\tag{4.13}$$

όπου  $A^e$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου, προκύπτει από την εξίσωση :

$$A^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j)\tag{4.14}$$

και :

$$\begin{aligned}a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_j - x_i\end{aligned}\tag{4.15}$$

με βάση τις εξισώσεις [4.10] και [4.13] η συνάρτηση παρεμβολής μορφοποιείται ως εξής :

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k = \sum_{i=1}^3 \Phi_i N_i^e\tag{4.16}$$

όπου :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2A^e} \\ N_j &= \frac{(a_j + b_j x + c_j y)}{2A^e} \quad \rightarrow \quad N_i^e = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y) , \quad i=1,2,3 \quad [4.17] \\ N_k &= \frac{(a_k + b_k x + c_k y)}{2A^e} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι συναρτήσεις παρεμβολής ενός δισδιάστατου στοιχείου είναι της γενικής μορφής :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i^e \quad [4.18]$$

όπου  $\Phi_i$  είναι οι τιμές της συνάρτησης στο σημείο  $(x_i, y_i)$  και  $N_i$  οι συναρτήσεις μορφής που ικανοποιούν την εξής σχέση :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad [4.19]$$



#### 4.8 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία σε προβλήματα τριων διαστάσεων

Στην περίπτωση προβλήματος πεδίου με τρεις διαστάσεις, το κάθε στοιχείο περιλαμβάνει τέσσερις, έξι ή οκτώ κόμβους. Η συνάρτηση παρεμβολής ενός στοιχείου που περιλαμβάνει τέσσερις κόμβους (βλ. σχ. 4.10) εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad [4.20]$$

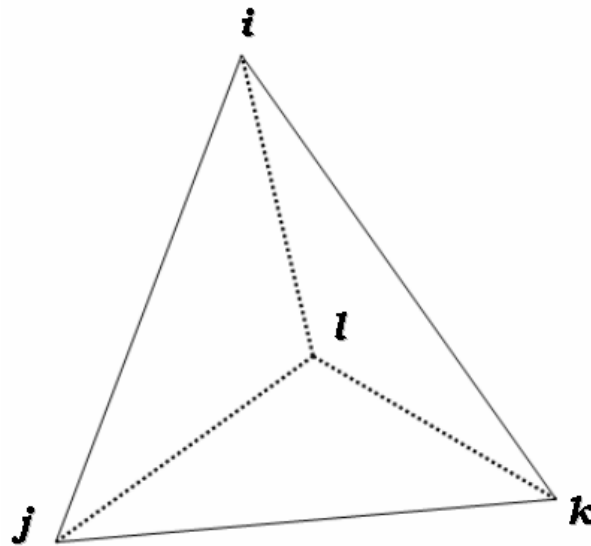
η οποία μπορεί να εκφραστεί με τους όρους των κομβικών τιμών της  $\Phi$  και τις κομβικές συναρτήσεις μορφής ως εξής :

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + N_l \Phi_l = [N] \{\Phi\} \quad [4.21]$$

ενώ, οι συναρτήσεις μορφής δίνονται από την γενική εξίσωση :

$$N_n = \frac{(a_n + b_n x + c_n y + d_n z)}{6V} \quad , \quad n = i, j, k, l \quad [4.22]$$

όπου  $V$  είναι ο όγκος του τετραεδρικού στοιχείου.



Σχήμα. 4.10 Τετρακομβικό στοιχείο τριων διαστάσεων

Οι όροι  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$  είναι οι συναρτήσεις των κομβικών συντεταγμένων και έχουν την γενική μορφή :

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \quad d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} \quad [4.23]$$

Επομένως επιβεβαιώνεται ότι οι συναρτήσεις μορφής κατασκευάζονται ώστε να ορίζουν την μεταβολή των διαφόρων παραμέτρων στην γεωμετρία κάθε στοιχείου. Ο υπολογισμός των συναρτήσεων μορφής μπορεί να γίνει με δυο τρόπους:

- εμπειρικά (με επισκόπηση, με δοκιμή και λάθος κλπ)
- με επίλυση αριθμητικών συστημάτων των μορφών που φαίνονται στις σχέσεις που περιγράφηκαν παραπάνω.

#### 4.9 Φόρτιση των υλικών, αρχικές και συνοριακές συνθήκες

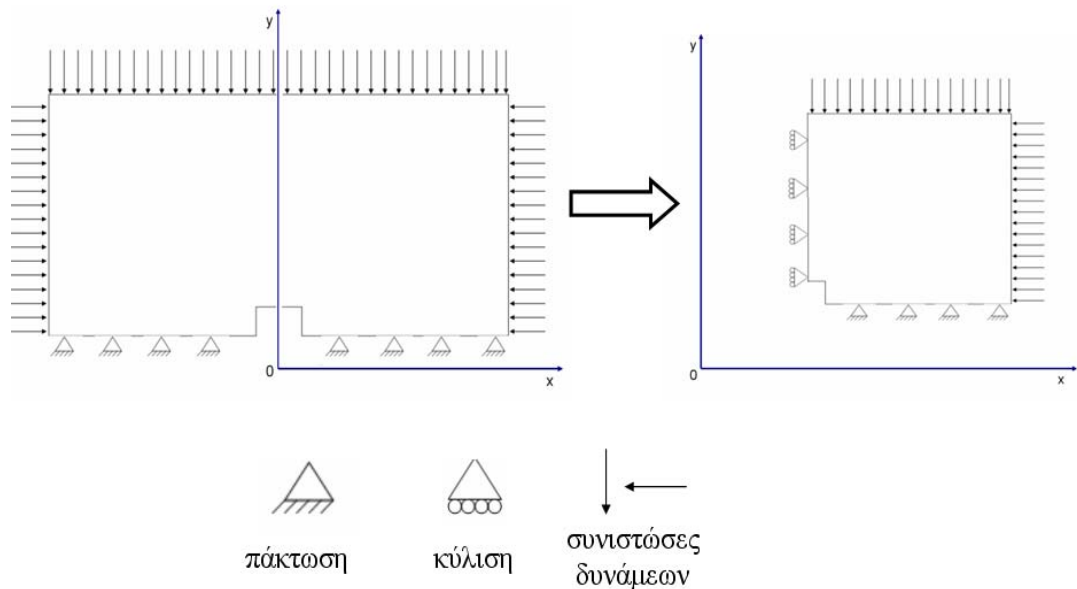
Μετά την διαίρεση του χωρίου σε υποπεδία και την δημιουργία των καταστατικών εξισώσεων που τα διέπουν, προσαρτώνται στο μοντέλο που έχει κατασκευαστεί οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες (boundary conditions). Η εισαγωγή των αρχικών και συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος πεδίου.

Σε ένα πρόβλημα επίλυσης πεδίου ροής απαιτούνται τόσο οι τιμές της συνάρτησης  $\Phi$  σε όλο το πεδίο για χρόνο  $t=0$  (αρχική συνθήκη), όσο και οι συναρτήσεις που δίνουν τις τιμές αυτής ή της καθετης βαθμίδας της στους συνοριακούς κόμβους του πεδίου για κάθε χρονική στιγμή  $t$  (συνοριακές συνθήκες). Σε αυτή την περίπτωση όπου απαιτούνται αρχικές και συνοριακές συνθήκες, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών.

Αντίθετα, αν ο χρόνος δεν επηρεάζει την λύση του προβλήματος (δηλαδή δεν υπάρχει χρονοεξαρτώμενος όρος στη διαφορική εξίσωση), τότε απαιτούνται μόνο συνοριακές συνθήκες και το πρόβλημα είναι συνοριακών τιμών.

Σκοπός της εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών είναι κατ'αρχήν να αποδώθούν δυνάμεις και τάσεις στο μοντέλο που έχει κατασκευαστεί, και κατά δεύτερον να επιβληθούν περιοριστικές δυνάμεις, ώστε να κρατηθεί το μοντέλο σε ισορροπία. Η εφαρμογή αυτών διαφέρει από μοντέλο σε μοντέλο ανάλογα με την γεωμετρία, τον τρόπο φόρτισης και το επιθυμητό αποτέλεσμα του προβλήματος. Στο σχήμα 4.11 φαίνονται οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται σε ένα μοντέλο σήραγγας δυο διαστάσεων με τετραγωνικό άνοιγμα, όπου, με κατάλληλη χρήση συνοριακών συνθηκών, μπορεί να αξιοποιηθεί η συμμετρία ορθογωνικού μοντέλου.

Η αξιοποίηση της συμμετρίας καθίσταται σημαντική διότι δύναται να λυθεί το μισό πρόβλημα, αντί όλου, με επακόλουθη την μείωση κατά το ήμισυ των πράξεων και του χρόνου επίλυσης του προβλήματος.



Σχήμα 4.11 Επιβολή συνοριακών συνθηκών σε μοντέλο σήραγγας και αξιοποίηση της συμμετρίας ως προς τον άξονα των  $y$ .

Η φόρτιση του διαιρεμένου πεδίου, που αντιπροσωπεύει το υλικό, δύναται να επιτευχθεί με έναν ή περισσότερους από τους ακόλουθους τρόπους<sup>[19]</sup> :

- επιβολή δυνάμεων πεδίου στην μάζα του στοιχείου (πχ. βαρυτικές δυνάμεις, body forces).
- επιβολή σημειακών δυνάμεων στους κόμβους του στοιχείου (κομβικές δυνάμεις, nodal forces).
- επιβολή κατανεμημένων δυνάμεων στις πλευρές του στοιχείου (επιφανειακές δυνάμεις, traction forces).
- επιβολή μετατοπίσεων στους κόμβους του στοιχείου.

Οι βαρυτικές δυνάμεις εφαρμόζονται σε περιπτώσεις βραχομάζας, υπόγειων ανοιγμάτων και λοιπών προβλημάτων γεωμηχανικής. Από την άλλη, οι κομβικές δυνάμεις εφαρμόζονται σε μοντέλα υλικών όπου η φόρτιση είναι σημειακή. Οι δυνάμεις επιφάνειας έχουν εφαρμογή σε δοκίμια υλικών ή όπου αλλού δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι προαναφερθέντες τρόποι φόρτισης.

Η επιβολή μετατοπίσεων στους συνοριακούς κόμβους εφαρμόζεται όταν έχουμε ενδεδειγμένη συμμετρία στο μοντέλο (βλέπε σχήμα 4.11), όπου κατά την περίπτωση αυτή οι μετατοπίσεις είναι μηδενικές στην διάσταση που είναι κάθετη στο σύνορο. Εφόσον δηλαδή έχουμε συμμετρία του μοντέλου ως προς τον άξονα  $y$ , τότε, επάνω στο σύνορο η μετατόπιση ως προς την διάσταση  $x$  θα είναι μηδενική ( $dx=0$ ) και αντιστρόφως. Η αξιοποίηση της συμμετρίας, όπως προαναφέρθη, και η κατάλληλη χρήση συνοριακών συνθηκών, δύναται να μειώσει σε σημαντικό βαθμό τον αριθμό των στοιχείων, κατά συνέπεια και των κόμβων στο χωρίο, με αποτέλεσμα να μειωθεί αισθητά και ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος. Επίσης η επιβολή μηδενικών μετατοπίσεων στα σύνορα του χωρίου έχει εφαρμογή και στην περίπτωση κατά την οποία το μοντέλο εκτείνεται προς το άπειρο. Για παράδειγμα, σε ένα υπόγειο άνοιγμα όπου οι διαστάσεις του μοντέλου ως προς τον άξονα  $x$  εκτείνονται στο άπειρο, προκείμενου να μην δημιουργηθεί ένα μοντέλο άπειρων διαστάσεων, το οποίο δεν θα έχει δυνατότητα λύσης, εφαρμόζονται μηδενικές μετατοπίσεις ως προς τον άξονα  $y$ , όπως και προηγουμένως, σε μια απόσταση από το άνοιγμα αρκετά μεγάλη, σε σχέση με τις διαστάσεις του ίδιου του ανοίγματος. Αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας των συνοριακών συνθηκών, είναι να μειωθεί και σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος.

Στην περίπτωση κατά την οποία φορτίζεται ένα σώμα και όλοι του οι κόμβοι είναι ελεύθεροι να κινηθούν, τότε δεν υφίσταται παραμόρφωση, αλλά απλή μετακίνηση (ή στροφή). Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος, διότι το φαινόμενο δεν υπακούει στην ίδια καταστατική εξίσωση<sup>[19]</sup>.

#### 4.10 Τύποι συνοριακών συνθηκών

Δεδομένων των προαναφερθέντων, υπάρχουν τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών<sup>[19]</sup> :

- Προσδιορισμός της ζητούμενης παραμέτρου (μετατόπισης). Οι συνθήκες αυτές ονομάζονται γεωμετρικές (geometric or forced boundary conditions) και είναι γνωστές ως συνθήκες Dirichlet.
- Προσδιορισμός της μεταβολής της ζητούμενης παραμέτρου (παράγωγος της μετατόπισης). Οι συνθήκες αυτές ονομάζονται φυσικές συνοριακές συνθήκες (slope or gradient, natural boundary conditions) και είναι γνωστές ως συνθήκες Neumann.
- Προσδιορισμός και των δυο παραπάνω παραμέτρων ή μικτές συνθήκες.

##### 4.10.1 Συνθήκες Dirichlet

Οι συνθήκες Dirichlet (essential boundary conditions) προδιαγράφουν άμεσα την συνάρτηση  $\Phi$  στους συνοριακούς κόμβους ορίζοντας την τιμή της λύσης σε αυτούς. Στην περίπτωση κατά την οποία, το πρόβλημα διέπεται από παραμέτρους ελαστικότητας, οι γεωμετρικές συνθήκες δίνονται από τις εξής εκφράσεις μορφής<sup>[19]</sup> :

$$\begin{aligned}u_x &= u_0 \\u_y &= v_0\end{aligned}\tag{4.24}$$

όπου  $u_x$  και  $u_y$  είναι οι μετατοπίσεις στους κόμβους, ενώ  $u_0$  και  $v_0$  είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες προκαθορισμένων μετατοπίσεων που επιβάλλονται στον κόμβο.

##### 4.10.2 Συνθήκες Neumann

Οι συνθήκες Neumann (natural boundary conditions) προδιαγράφουν την κάθετη βαθμίδα της  $\Phi$  στους συνοριακούς κόμβους ορίζοντας την τιμή των χωρικών παραγώγων της λύσης στους κόμβους αυτούς. Έτσι, όπου εμφανίζεται η παράγωγος της λύσης σε περιοχή του συνόρου, αντικαθίσταται η τιμή της όπως αυτή ορίζεται στην συνθήκη Neumann.

Αντίστοιχα με τις γεωμετρικές συνθήκες, σε προβλήματα ελαστικότητας, οι φυσικές συνθήκες δίνονται από τις εκφράσεις μορφής:

$$\begin{aligned} f_x &= f_0 \\ f_y &= w_0 \end{aligned} \quad [4.25]$$

όπου  $f_x$  και  $f_y$  είναι οι κομβικές δυνάμεις, ενώ  $f_0$  και  $w_0$  είναι οι αντίστοιχες προκαθορισμένες συνιστώσες δυνάμεων που επιβάλλονται στον κόμβο.

Γενικά, οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν μια γενική συνθήκη συνέχειας του πεδίου επίλυσης, η οποία, για τους συνοριακούς κόμβους, διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} p(x_b, y_b, t, \Phi) + q(x_b, y_b, t) \cdot \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \nabla \Phi \cdot \vec{n} &= 0 \Leftrightarrow \\ p(x_b, y_b, t, \Phi) + q(x_b, y_b, t) \cdot \left( k_x \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_y \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad [4.26]$$

όπου  $p$  και  $q$  είναι ειδικές χρονοεξαρτώμενες παράμετροι συνοριακών τιμών και ανάλογα τις τιμές που λαμβάνουν, καθορίζουν το είδος των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος.

Όταν η παράμετρος  $q$  λαμβάνει τιμή μηδέν τότε οι συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet λαμβάνουν την μορφή

$$p(x_b, y_b, t, \Phi) = 0 \quad [4.27]$$

εκφράζοντας έτσι προδιαγεγραμμένη τιμή για την συνάρτηση πεδίου  $\Phi$  για κάθε  $t$ .

Σε αυτή την περίπτωση, η παράμετρος  $p$  ορίζεται ως εξής:

$$p(x_b, y_b, t, \Phi) = \Phi - g(x_b, y_b, t) \quad [4.28]$$

και ο όρος  $g$  στην παραπάνω εκφραση καθορίζει την προδιαγεγραμμένη τιμή της  $\Phi$ .

Σε αντίθετη περίπτωση, ισχύουν φυσικές συνοριακές συνθήκες με τον λόγο των παραμέτρων  $p$  και  $q$  να δίνει την προδιαγεγραμμένη τιμή της καθετης βαθμίδας της  $\Phi$  επι του τμήματος συνόρου για το οποίο διατυπώνονται οι συνοριακές συνθήκες:

$$-\frac{p(x_b, y_b, t, \Phi)}{q(x_b, y_b, t)} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = \left( k_x \cos \theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_y \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad [4.29]$$

#### 4.11 Μετασχηματισμός συντεταγμένων

Σύμφωνα με τον Αγιουτάντη (2002), οι συναρτήσεις μορφής συνήθως εκφράζονται σε κάποιο αυθαίρετο σύστημα τοπικών συντεταγμένων (local coordinates) σε αντιδιαστολή με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων (global coordinates). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι συναρτήσεις μορφής που διέπουν το στοιχείο να εξαρτώνται μόνο από την σχετική γεωμετρία αυτού και όχι από την θέση του στον χώρο.

Ο μετασχηματισμός του συστήματος συντεταγμένων, από τοπικό σε καθολικό, βασίζεται στην σχέση :

$$dA = dx \times dy = |J| \times ds \times dt \quad [4.30]$$

όπου J είναι η Ιακωβιανή του συστήματος (Jacobian matrix).

Η Ιακωβιανή υπολογίζεται βάσει των συναρτήσεων μορφής που συνδέονται με το στοιχείο και για τις οποίες απαιτείται διαφορίση. Χρησιμοποιείται στην διαδικασία αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων του κάθε στοιχείου ξεχωριστά και κατά συνέπεια όλου του πεδίου επίλυσης.



#### 4.12 Επίλυση σε επίπεδο στοιχείου

Η επίλυση του προβλήματος πεδίου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται πρώτα σε επίπεδο στοιχείου και στην συνέχεια σε όλο το πεδίο. Η βασική εξίσωση που διέπει το κάθε στοιχείο, όπως υπολογίστηκε στις προηγούμενες παραγράφους και για τις τρεις διαστάσεις (βλ. εξισώσεις 4.9 , 4.18 & 4.21), είναι :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i N_i^e \quad [4.31]$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη που εκφράζεται στην εξίσωση [4.19].

Έστω, ότι υφίσταται η περίπτωση δισδιάστατου τριγωνικού στοιχείου με τρεις κόμβους και ότι επιδιώκεται, με την βοήθεια της Μ.Π.Σ. να επιλυθεί το πρόβλημα της ελαστικότητας ενός υλικού. Σημειώνεται ότι το επίπεδο τριγωνικό στοιχείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας (δύο ανά κόμβο).

##### 4.12.1 Καταστατικές εξισώσεις

Η καταστατική εξίσωση συμπεριφοράς του ελαστικού υλικού, η οποία συνδέει το αίτιο (τάση) με το αποτέλεσμα (μετατόπιση), παρίσταται από την σχέση μορφής :

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \quad [4.32]$$

η οποία μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως εξής :

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad [4.33]$$

όπου ο πίνακας  $[E]$  παριστάνει το μητρώο των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού.

Οι εξισώσεις που συνδέουν την παραμόρφωση με την μετατόπιση, με βάση τον ορισμό της γραμμικής παραμόρφωσης, είναι οι εξής :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \quad [4.34]$$

Η εξίσωση [4.34] μετασχηματίζεται με βάση το τοπικό σύστημα συντεταγμένων και τους βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου. Στην περίπτωση του τριγωνικού στοιχείου, που έχουμε δυο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο  $(x, y)$ , ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}\end{aligned}\quad [4.35]$$

Στην παραπάνω εξίσωση [4.35] οι μερικές παράγωγοι της μορφής  $\partial s / \partial x$  δεν είναι ορισμένες. Με την χρήση του κανόνα της αλυσίδας καθορίζονται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right] = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{|J|} \left[ \sum \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right] \quad [4.36]$$

Επομένως, οι σχέσεις της εξίσωσης [3.34] δύναται να εκφραστεί σαν συνάρτηση των συντεταγμένων  $s, t$  της Ιακωβιανής και των καθολικών συντεταγμένων  $x_i, y_i$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει μια σχέση της μορφής :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad [4.37]$$

όπου

- $\{\varepsilon\}$  είναι ο πίνακας των παραμορφώσεων με διαστάσεις  $[3 \times 1]$
- $\{q\}$  είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους με διαστάσεις  $[n \times 1]$
- $[B]$  είναι ο πίνακας συσχετισμού με διαστάσεις  $[3 \times n]$
- $n$  είναι οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου

#### 4.12.2 Δυναμική Ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια του κάθε στοιχείου προκύπτει από το άθροισμα της εσωτερικής ενέργειας και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων που επιδρούν στο στοιχείο, σύμφωνα με την σχέση :

$$\Delta \text{δυναμική Ενέργεια} = \text{Εσωτερική Ενέργεια} - \text{Έργο Δυνάμεων} \quad [4.38]$$

Η σχέση [4.38] μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής :

$$\Pi_p = \iiint_V \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} dx dy dz - \iiint_V \{F\} dx dy dz - \iint_A \{T\} dx dy - \sum_i F_i u_i \Rightarrow \quad [4.39]$$

$$\Pi_p = \int_V \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV - \int_V \{F\} dV - \int_A \{T\} dS - \sum_i F_i u_i \quad [4.40]$$

όπου ο πρώτος όρος περιγράφει την δυναμική ενέργεια, ο δεύτερος όρος περιγράφει το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις πεδίου, ο τρίτος όρος περιγράφει το έργο που παράγεται από τις τάσεις ή τις κατανεμημένες δυνάμεις που ασκούνται σε ακμές (edge loads) ή επιφάνειες (face or surface loads), και ο τελευταίος όρος περιγράφει το έργο που παράγεται από τις σημειακές δυνάμεις.

#### 4.12.3 Μητρώο Ακαμψίας

Η διαφορίση της εξίσωσης [4.36] οδηγεί στην ελαχιστοποίηση της δυναμικής ενέργειας :

$$\delta \Pi_p = 0 \rightarrow \frac{\partial \Pi_p}{\partial \{q\}} = 0 \quad [4.41]$$

Από τις εξισώσεις [4.33], [4.37] και [4.40] προκύπτει :

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV = \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV = \frac{h}{2} \iint \{q\}^T [B]^T [C] [B] \{q\} dx dy = \\ &= \frac{h}{2} \{q\}^T \iint [B]^T [C] [B] dx dy \{q\} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \end{aligned} \quad [4.42]$$

όπου

$$K = h \iint_A [B]^T [C] [B] dx dy \quad [4.43]$$

- $h$  είναι το πάχος του στοιχείου
- $A$  είναι το εμβαδό του στοιχείου (βλ. εξίσωση 4.14)
- $[K]$  είναι το μητρώο ακαμψίας του κάθε στοιχείου (element stiffness matrix)

Το μητρώο ακαμψίας συνδέει το αίτιο (δύναμη) με το αποτέλεσμα (μετατόπιση) σε επίπεδο στοιχείου. Οι συντελεστές του μητρώου  $[K]$  αποτελούν ισοδύναμες σταθερές ιδεατών ελατηρίων, τα οποία συνδέουν τους κόμβους (βαθμούς ελευθερίας) του στοιχείου μεταξύ τους.

Η συνάθροιση των μητρώων ακαμψίας όλων των στοιχείων δίνουν το καθολικό μητρώο ακαμψίας του πεδίου (global stiffness matrix).

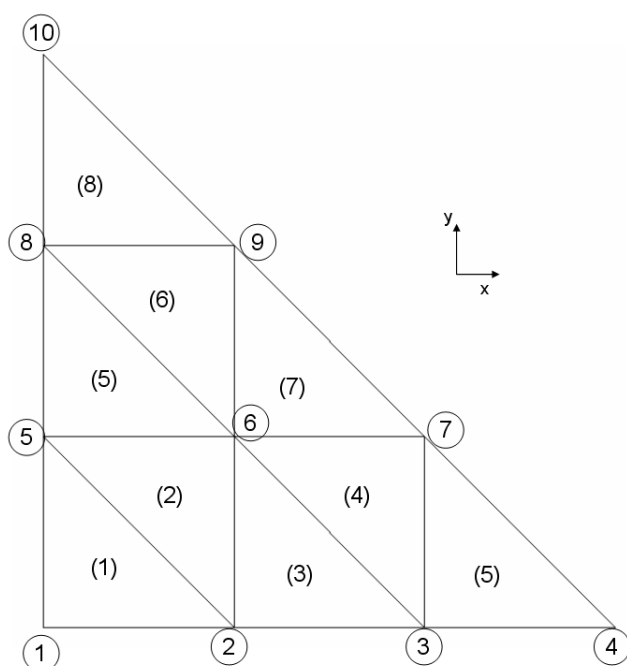
### 4.13 Επίλυση σε επίπεδο σώματος

Απο τις προαναφερθείσες συναρτήσεις μορφής προκύπτει ότι από κάθε επίλυση σε επίπεδο στοιχείου, προκύπτει μια εξίσωση της μορφής :

$$\{F\} = [K]\{q\} \quad [4.44]$$

όπου  $\{F\}$  είναι το αίτιο (επιβαλλόμενη δύναμη στο στοιχείο) και  $\{q\}$  είναι το αποτέλεσμα (η μετατόπιση που υφίσταται το στοιχείο). Η συνιστώσα  $[K]$ , που αποτελεί το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου, αναλύθηκε διεξοδικά στην προηγούμενη παράγραφο (βλ. § 4.12).

Για την επίλυση όλου του σώματος, πρέπει να γίνει συνάθροιση των εξισώσεων αυτών (assembly of element equations), με γνώμονα την σύνδεση των επιμέρους εξισώσεων συνέχειας που επηρεάζουν κάθε κόμβο και, μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, να γίνει επίλυση του τελικού γραμμικού συστήματος. Το γραμμικό αυτό σύστημα είναι  $n$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους, όπου  $n$ , όπως αναφέρθη και παραπάνω, είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου.



Για την κατανόηση της διαδικασίας αυτής, θεωρούνται δέκα (10) γειτονικά μεταξύ τους στοιχεία με αρίθμηση κόμβων (βλ. σχ.4.12). Με την υπόθεση ότι με  $q_{ix}$  συμβολίζεται ο βαθμός ελευθερίας κατά  $x$  στον κόμβο  $i$  και με  $q_{iy}$  συμβολίζεται ο βαθμός ελευθερίας κατά  $y$  στον κόμβο  $i$ , οι εξισώσεις για κάθε στοιχείο δίνονται από το σύστημα των εξισώσεων :

Σχήμα 4.12 : Σύνδεση των επιμέρους εξισώσεων των στοιχείων

Για το στοιχείο (1) (κόμβοι 1,2,5) :

[illegible]

Για το στοιχείο (2) (κόμβοι 2,5,6) :

$$\begin{aligned}
& K_{11}^{(2)} q_{2x} + K_{12}^{(2)} q_{2y} + K_{13}^{(2)} q_{5x} + K_{14}^{(2)} q_{5y} + K_{15}^{(2)} q_{6x} + K_{16}^{(2)} q_{6y} = f_{2x}^{(2)} \\
& K_{21}^{(2)} q_{2x} + K_{22}^{(2)} q_{2y} + K_{23}^{(2)} q_{5x} + K_{24}^{(2)} q_{5y} + K_{25}^{(2)} q_{6x} + K_{26}^{(2)} q_{6y} = f_{2y}^{(2)} \\
& \dots\dots\dots \\
& K_{61}^{(2)} q_{2x} + K_{62}^{(2)} q_{2y} + K_{63}^{(2)} q_{5x} + K_{64}^{(2)} q_{5y} + K_{65}^{(2)} q_{6x} + K_{66}^{(2)} q_{6y} = f_{6y}^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Για το στοιχείο (3) (κόμβοι 2,3,6) :

$$\begin{aligned}
& K_{11}^{(3)} q_{2x} + K_{12}^{(3)} q_{2y} + K_{13}^{(3)} q_{3x} + K_{14}^{(3)} q_{3y} + K_{15}^{(3)} q_{6x} + K_{16}^{(3)} q_{6y} = f_{2x}^{(3)} \\
& K_{21}^{(3)} q_{2x} + K_{22}^{(3)} q_{2y} + K_{23}^{(3)} q_{3x} + K_{24}^{(3)} q_{3y} + K_{25}^{(3)} q_{6x} + K_{26}^{(3)} q_{6y} = f_{2y}^{(3)} \\
& \dots\dots\dots \\
& K_{61}^{(3)} q_{2x} + K_{62}^{(3)} q_{2y} + K_{63}^{(3)} q_{3x} + K_{64}^{(3)} q_{3y} + K_{65}^{(3)} q_{6x} + K_{66}^{(3)} q_{6y} = f_{6y}^{(3)}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

.....

.....

.....

Για το στοιχείο (8) (κόμβοι 8,9,10) :

$$\begin{aligned}
& K_{11}^{(8)} q_{8x} + K_{12}^{(8)} q_{8y} + K_{13}^{(8)} q_{9x} + K_{14}^{(8)} q_{9y} + K_{15}^{(8)} q_{10x} + K_{16}^{(8)} q_{10y} = f_{8x}^{(8)} \\
& K_{21}^{(8)} q_{8x} + K_{22}^{(8)} q_{8y} + K_{23}^{(8)} q_{9x} + K_{24}^{(8)} q_{9y} + K_{25}^{(8)} q_{10x} + K_{26}^{(8)} q_{10y} = f_{8y}^{(8)} \\
& \dots\dots\dots \\
& K_{61}^{(8)} q_{8x} + K_{62}^{(8)} q_{8y} + K_{63}^{(8)} q_{9x} + K_{64}^{(8)} q_{9y} + K_{65}^{(8)} q_{10x} + K_{66}^{(8)} q_{10y} = f_{10y}^{(8)}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Γενικά, για το στοιχείο (n) (κόμβοι i,j,k) :

$$\begin{aligned}
& K_{11}^{(n)} q_{ix} + K_{12}^{(n)} q_{iy} + K_{13}^{(n)} q_{jx} + K_{14}^{(n)} q_{jy} + K_{15}^{(n)} q_{kx} + K_{16}^{(n)} q_{ky} = f_{ix}^{(n)} \\
& K_{21}^{(n)} q_{ix} + K_{22}^{(n)} q_{iy} + K_{23}^{(n)} q_{jx} + K_{24}^{(n)} q_{jy} + K_{25}^{(n)} q_{kx} + K_{26}^{(n)} q_{ky} = f_{iy}^{(n)} \\
& \dots\dots\dots \\
& K_{61}^{(n)} q_{ix} + K_{62}^{(n)} q_{iy} + K_{63}^{(n)} q_{jx} + K_{64}^{(n)} q_{jy} + K_{65}^{(n)} q_{kx} + K_{66}^{(n)} q_{ky} = f_{ky}^{(n)}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι κάθε στοιχείο επιδρά στα υπόλοιπα στοιχεία με τα οποία και συνορεύει, ενώ δέχεται και επιρροή αντίστοιχα από αυτά στην διαμόρφωση των επιμέρους εξισώσεων.

Η κατάρθρωση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν στο κεφάλαιο αυτό, και οι οποίες διέπουν τα στοιχεία του πεδίου αποτελούν την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

# Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

## Προγραμματισμός των Πεπερασμένων Στοιχείων στο Matlab

### 5.1 Το λογισμικό πακέτο MATLAB

Το MATLAB είναι ένα λογισμικό το οποίο χρησιμοποιείται σε διάφορες περιοχές τεχνολογικών και επιστημονικών εφαρμογών. Δεν είναι γλώσσα προγραμματισμού υπολογιστή, όμως κάνει σχεδόν ότι κάνει μια τέτοια γλώσσα (πχ. Fortran, C, Pascal). Έχει γραφεί σε αυτοματοποιημένη βάση και δεν απαιτεί γνώση σε βάθος των λειτουργικών αρχών του προγραμματισμού σε Η/Υ που απαιτείται στις περισσότερες των γλωσσών προγραμματισμού. Ο αριθμητικός υπολογισμός στο MATLAB χρησιμοποιεί συλλογές γραμμένων μαθηματικών υπορουτίνων. Το πακέτο περιέχει επίσης Graphical User Interface (GUI) καθώς και τρισδιάστατη αναπαράσταση γραφικών.

Γενικά, το MATLAB αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για πράξεις με διανύσματα (vectors) και μητρώα (matrices). Για τον λόγο αυτό, το λογισμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί επωφελώς ως εργαλείο επίλυσης στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

### 5.2 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία στο MATLAB

Η δομή του αλγόριθμου που κατασκευάστηκε με βάση την ανάλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων διακρίνεται σε τρία στάδια επεξεργασίας :

- Το στάδιο της Προ-επεξεργασίας (Pre-processor unit)
- Το στάδιο της κύριας επεξεργασίας (Processor unit)
- Το στάδιο της μετα-επεξεργασίας (Post-processor unit)



Σε κάθε στάδιο λαμβάνουν χώρα οι αντίστοιχες διαδικασίες :

- Στο στάδιο της προ-επεξεργασίας :
  - ο Ανάγνωση των δεδομένων εισόδου
  - ο Καθορισμός των μεγεθών (sizes) των αντίστοιχων παρατάξεων (arrays)
  - ο Δημιουργία γεωμετρίας των σταδίων εκσκαφής του μοντέλου
  - ο Διακριτοποίηση του μοντέλου
- Στο στάδιο της κύριας επεξεργασίας :
  - ο Έλεγχος αριθμού σταδίου εκσκαφής
  - ο Αν το τρέχον στάδιο είναι το πρώτο :
    - Υπολογισμός των διανυσμάτων και των μητρώων κάθε στοιχείου
    - Συγκρότηση των διανυσμάτων και των μητρώων των στοιχείων στο συστημικό διάνυσμα και μητρώο
    - Συνάθροιση στο καθολικό σύστημα εξισώσεων
    - Εφαρμογή φορτίσεων και συνοριακών συνθηκών σε κάθε στοιχείο
    - Επίλυση της μητρωικής εξίσωσης ως προς τις κύριες κομβιακές μεταβλητές
    - Υπολογισμός των δευτερευουσών μεταβλητών
    - Αντιστοίχιση κόμβων και κομβιακών μεταβλητών
    - Αποθήκευση όλων των πληροφοριών του τρέχοντος σταδίου
  - ο Αν το τρέχον στάδιο είναι άλλο :
    - Αντιστοίχιση των κόμβων του τρέχοντος σταδίου με τους κόμβους του προηγούμενου σταδίου (υπέρθυση σταδίων).
    - Μεταφορά των αποθηκευμένων πληροφοριών των κόμβων του προηγούμενου σταδίου στους κόμβους του τρέχοντος σταδίου.
    - Μηδενισμός των διανυσμάτων και μητρώων που κατασκευάστηκαν από το προηγούμενο στάδιο
    - Επαναυπολογισμός των τοπικών και καθολικών διανυσμάτων και μητρώων.
    - Υπολογισμός των νέων κύριων και δευτερευουσών μεταβλητών
    - Αντιστοίχιση κόμβων και κομβιακών μεταβλητών
    - Αποθήκευση όλων των πληροφοριών του τρέχοντος σταδίου
- Στο στάδιο της μετά-επεξεργασίας :
  - ο Σχεδίαση και / ή εκτύπωση των αποτελεσμάτων σε κάθε στάδιο εκσκαφής.

### 5.3 Στάδιο Προ-επεξεργασίας

Οι κύριες παράμετροι εισόδου που χρειάζονται για τον προγραμματισμό με πεπερασμένα στοιχεία είναι :

- Η γεωμετρία του πεδίου
- Ο αριθμός των στοιχείων του συστήματος
- Οι συντεταγμένες κάθε κόμβου στο γενικό (global) σύστημα συντεταγμένων
- Το είδος κάθε στοιχείου
- Οι συνοριακές συνθήκες
- Οι παράμετροι του προβλήματος

Στο πρώτο στάδιο γίνεται η ανάγνωση των δεδομένων που περιγράφουν το πρόβλημα από γεωμετρικής και παραμετρικής άποψης. Τα δεδομένα αυτά είναι η γεωμετρία του πεδίου επίλυσης, οι φυσικές παράμετροι του μέσου που εμφανίζονται στη βασική διαφορική εξίσωση ως συντελεστές των όρων της, καθώς και στους καταστατικούς νόμους που περιγράφουν το πρόβλημα πεδίου το οποίο επιλύεται.

#### 5.3.1 Εισαγωγή της γεωμετρίας

Η εισαγωγή και η περιγραφή της γεωμετρίας μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή στο MATLAB ενός συμβατού με τα δεδομένα, δομημένου πίνακα. Η διαδικασία αυτή είναι εύκολο να γίνει άμεσα, καθορίζοντας τον πίνακα για απλές γεωμετρίες, ωστόσο, για πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα είναι επίπονη εργασία. Γι' αυτό το λόγο κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος εισαγωγής της γεωμετρίας του πεδίου (`dxs_read.m`) στο MATLAB, ο οποίος παρέχει την δυνατότητα ανάγνωσης παραμετρικών αρχείων σε μορφή DXF.

Τα αρχεία αυτά προκύπτουν από εφαρμογή σχεδιαστικών πακέτων όπως το AutoCAD, όπου η σχεδίαση ακόμη και πολύπλοκων γεωμετρικών σχημάτων είναι πιο ευκολη διαδικασία. Αναγκαία προϋπόθεση για την συμβατότητα του αλγόριθμου αυτού είναι η σχεδίαση στο AutoCAD των σχημάτων με κλειστά περιγράμματα (`p_lines`). Ο αλγόριθμος αναγνωρίζει τις συντεταγμένες των `p_lines` και κατασκευάζει

έναν πίνακα  $[gd]$  ο οποίος εισάγεται στο MATLAB και έχει την μορφή που φαίνεται στο σχήμα 5.1 :

n	{	2	2	2	.....
		n	n	n	.....
		x(beg)	x(beg)	x(beg)	.....
		.....	.....	.....	.....
		.....	.....	.....	.....
n	{	.....	.....	.....	.....
		y(beg)	y(beg)	y(beg)	.....
		.....	.....	.....	.....
		.....	.....	.....	.....

Σχήμα 5.1 : Δομημένος πίνακας που περιγράφει την γεωμετρία του αρχείου dxf\_read

Στον πίνακα (βλ. σχ. 5.1) κάθε στήλη αντιστοιχεί και σε ένα κλειστό γεωμετρικό περίγραμμα, ενώ κάθε γραμμή περιέχει συγκεκριμένες πληροφορίες για την γεωμετρία του πεδίου. Η πρώτη γραμμή περιέχει μόνο τον αριθμό δυο (2), ο οποίος αντιστοιχεί στον κωδικό πολυγωνικής κλειστής καμπύλης για το πρόγραμμα. Η δεύτερη γραμμή περιέχει τον αριθμό  $n$  των γραμμικών τμημάτων (segments) που καθορίζουν το κάθε κλειστό περίγραμμα.

Οι επόμενες  $n$  τον αριθμό γραμμές, όπου  $n$  ο αριθμός των τμημάτων, περιέχουν τις  $x$  συντεταγμένες των αρχικών σημείων του κάθε τμήματος, ενώ οι επόμενες,  $n$  τον αριθμό γραμμές, περιέχουν τις  $y$  συντεταγμένες των αρχικών σημείων του κάθε τμήματος αντίστοιχα.

Εκτός του παραμετρικού πίνακα γεωμετρίας  $[gd]$  υπάρχουν ακόμη δυο εντολές του MATLAB οι οποίες αφορούν την περιγραφή της εσωτερικής δομής του ολικού χωρίου ως προς τα υποπεδία που το αποτελούν.

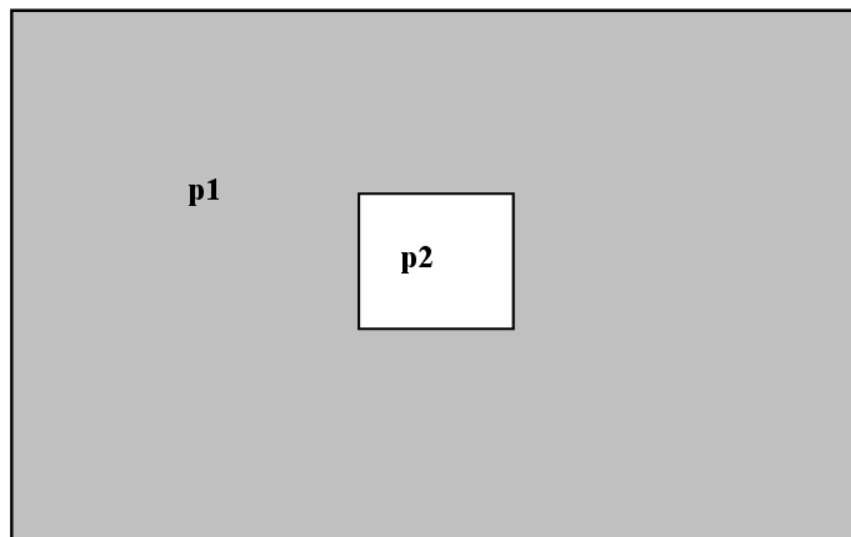
Πιο συγκεκριμένα, η παράμετρος  $[ns]$  δίνει έναν αριθμητικό πίνακα του οποίου κάθε στήλη αντιστοιχεί στον συνδυασμό των αριθμών διπλής ακρίβειας (double-precision)

των χαρακτήρων που αποτελούν την συμβολοσειρά του ονόματος - ετικέτας (label) ενός συγκεκριμένου υποπεδίου όπως ο πίνακας αυτός υπολογίζεται από την εντολή 'double' του MATLAB. Το όνομα του υποπεδίου ορίζεται από τον χρήστη (πχ.  $p1$ ).

Η δεύτερη παράμετρος που περιγράφει την δομή του ολικού πεδίου είναι η  $[sf]$ , η οποία καθορίζει την σύνθεση μεταξύ των υποπεδίων. Αν, για παράδειγμα, υπάρχουν δυο υποπεδία ( $p1$ ,  $p2$ , με το  $p2$  να περικλείεται μέσα στο  $p1$ ) στην συνολική γεωμετρία του χωρίου, μπορεί να οριστεί η φόρμουλα :

$$sf = 'p1 - p2' \quad [5.1]$$

ώστε να προστεθεί το υποπεδίο  $p1$  και να αφαιρεθεί το υποπεδίο  $p2$  από το ολικό χωρίο (βλ.σχ 5.2)



Σχήμα 5.2 : Σύνθετο πεδίο αποτελούμενο από τα υποπεδία  $p1$  και  $p2$   
όπου ισχύει η φόρμουλα  $p1-p2$

Οι πληροφορίες του πίνακα  $[gd]$  και των παραμέτρων  $sf$  και  $ns$  αναλύεται περισσότερο εκτελώντας την εντολή αποδόμησης του πίνακα γεωμετρίας  $decs_g$  και η οποία εξάγει ένα μητρώο  $[g]$ , που είναι ο αναλυτικός πίνακας της γεωμετρίας.

### 5.3.2 Κατασκευή σταδίων εκσκαφής

Στο πρόβλημα που μελετάται στην εργασία αυτή, η συμπεριφορά του μοντέλου εκσκαφής προσδιορίζεται σε φάσεις (στάδια εκσκαφής).

Στο πρώτο στάδιο το μοντέλο του γεωυλικού είναι αδιάρρηκτο. Στο δεύτερο στάδιο λαμβάνει χώρα η πρώτη φάση εκσκαφής ενός τμήματος του υπόγειου ανοίγματος και παράλληλα τοποθετούνται μέτρα υποστήριξης με την μορφή συνοριακών συνθηκών. Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο εκσκάπτεται επιπλέον τμήμα του ανοίγματος το οποίο παραμένει ανυποστήρικτο.

Η γεωμετρία των τριων σταδίων, που εφαρμόζονται στον συγκεκριμένο κώδικα του προγράμματος, δημιουργείται βάσει της σχέσης (5.1) για τα υποπεδία  $p_i$ . Συγκεκριμένα, στα τρία στάδια εφαρμόζονται οι αντίστοιχες σχέσεις (βλ. σχ. 5.3) :

- για το πρώτο στάδιο :

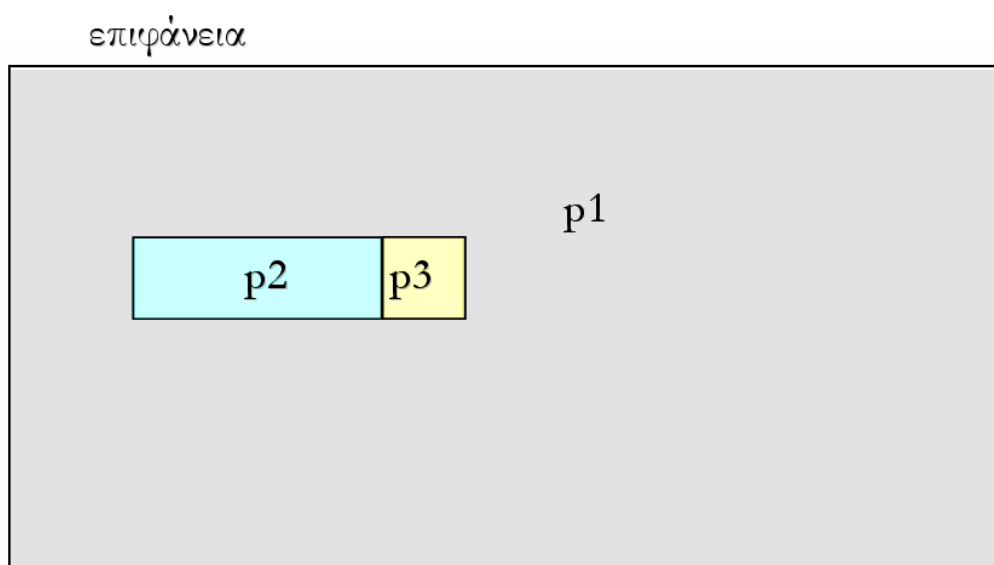
$$sf = p1 + p2 + p3' \quad [5.2]$$

- για το δεύτερο στάδιο :

$$sf = p1 - p2 + p3' \quad [5.3]$$

- για το τρίτο στάδιο :

$$sf = p1 - p2 - p3' \quad [5.4]$$

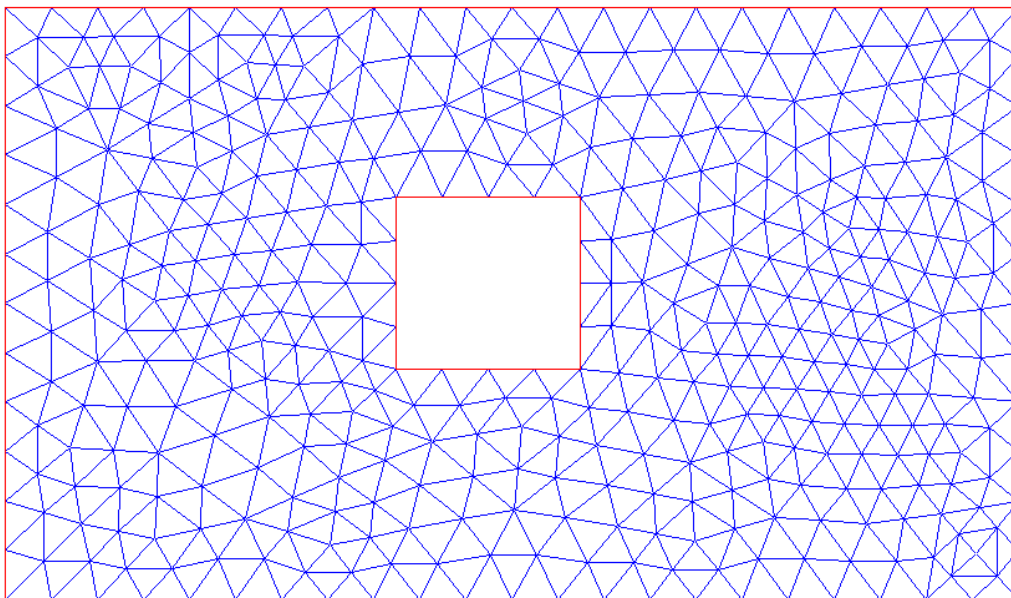


Σχήμα 5.3 : Η αντιστοίχιση των υποπεδίων στο ολικό πεδίο του προβλήματος

### 5.3.3 Διακριτοποίηση του πεδίου

Στην συνέχεια γίνεται η διακριτοποίηση του πεδίου σε πεπερασμένα στοιχεία. Όπως και η εισαγωγή της γεωμετρίας, έτσι και η διακριτοποίηση του χωρίου μπορεί να γίνει άμεσα με εφαρμογή κατάλληλων μεν, πολύπλοκων δε, εξισώσεων. Ωστόσο είναι ευκολότερη και προτιμότερη η αυτόματη διακριτοποίηση με την εφαρμογή της εντολής *'initmesh'* από τη βιβλιοθήκη εντολών *pdetool*. Πύκνωση του πλέγματος δύναται να γίνει με την εντολή *'refinemesh'*.

Η εντολή θέτει σε εφαρμογή έναν αλγόριθμο τριγωνοποίησης του Delaunay, διακριτοποιώντας το ορισμένο πεδίο σε τριγωνικά-τριομβικά στοιχεία (βλ. σχ. 5.4). Η διαστασιολόγηση των τριγωνικών στοιχείων εξαρτάται από ορίσματα εισόδου όπως είναι η τιμή του μέγιστου μήκους πλευράς τριγωνικού στοιχείου *'Hmax'* και ο ρυθμός ανάπτυξης του πλέγματος *'Hgrad'* από τα σύνορα προς το εσωτερικό του πεδίου, ο οποίος ορίζεται από τον λόγο του αριθμού των κόμβων στα σύνορα προς τον αριθμό των κόμβων που δημιουργούνται στο εσωτερικό του πεδίου λαμβάνοντας τιμές μεγαλύτερες από 1 και μικρότερες από 2.



Σχήμα 5.4 : Διακριτοποίηση σε τριγωνικά στοιχεία βάσει του αλγόριθμου Delaunay

Στην περίπτωση κατά την οποία με την εκτέλεση της εντολής *'initmesh'*, δεν καθορίζονται αυτές οι παράμετροι, τότε το μέγιστο μήκος πλευράς τριγωνικού στοιχείου εκτιμάται αυτόματα από τον αλγόριθμο τριγωνοποίησης για δεδομένη εξ'ορισμού τιμή του ρυθμού ανάπτυξης πλέγματος που είναι ίση με 1,3. Η διακριτοποίηση κοντά σε ανοίγματα είναι πυκνότερη από ότι σε άλλες περιοχές του πεδίου (βλ. § 4.4.5).

Με εφαρμογή της εντολής προκύπτουν τρεις αριθμητικοί πίνακες, οι  $[p]$ ,  $[e]$  και  $[t]$ , οι οποίοι και περιγράφουν τις παραμέτρους του πλέγματος των τριγωνικών στοιχείων που έχει δημιουργηθεί.

Ο πίνακας  $[p]$  είναι ο πίνακας των κόμβων του πλέγματος. Αποτελείται από δύο γραμμές και τόσες στήλες όσοι είναι και οι κόμβοι του πλέγματος. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα περιέχονται οι συντεταγμένες  $x$  των αντιστοιχών κόμβων, ενώ στην δεύτερη γραμμή περιέχονται οι αντίστοιχες συντεταγμένες  $y$ .

Ο πίνακας  $[e]$  είναι ο πίνακας των ακμών (edges) που δημιουργήθηκαν κατά μήκος των τμημάτων των συνόρων, και οι οποίες ακμές είναι στην ουσία πλευρές τριγωνικών στοιχείων που εφάπτονται επί των τμημάτων των συνόρων. Ο πίνακας αποτελείται από επτά γραμμές και τόσες στήλες όσες είναι οι δημιουργηθείσες ακμές επί των συνόρων του πεδίου (η κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ακμή).

Στη πρώτη και δεύτερη γραμμή κάθε στήλης, περιέχονται ακέραιοι αριθμοί, δείκτες των κόμβων που καταλαμβάνουν τα δύο άκρα της αντίστοιχης ακμής, και αντιστοιχούν σε αύξοντες αριθμούς στηλών του πίνακα  $[p]$ . Στην τρίτη και τέταρτη γραμμή κάθε στήλης περιέχονται τιμές για τα άκρα της αντίστοιχης ακμής μεταξύ 0 και 1, οι οποίες εξαρτώνται από τις σχετικές αποστάσεις των άκρων αυτών από το κέντρο του αντίστοιχου τριγωνικού στοιχείου και χρησιμοποιούνται ως συντελεστές παρεμβολής. Στην πέμπτη γραμμή περιέχεται ο αύξων αριθμός του τμήματος του συνόρου στο οποίο ανήκει η αντίστοιχη, με την στήλη, ακμή και ο οποίος αντιστοιχεί σε αριθμό στήλης του πίνακα γεωμετρίας  $[g]$ . Στην έκτη και έβδομη γραμμή, περιέχονται οι αύξοντες αριθμοί των υποπεδίων τα οποία διαχωρίζονται από την ακμή, με τη θέση του μηδενικού αύξοντα αριθμού να καθορίζει κατά ανάλογο, με τον πίνακα γεωμετρίας, τρόπο το αν η ακμή ανήκει σε εξωτερικό σύνορο ή περίγραμμα οπής.

Ο πίνακας  $[t]$  είναι ο πίνακας των τριγωνικών στοιχείων που συνθέτουν το πλέγμα. Αποτελείται από τέσσερις γραμμές και αριθμό στηλών αντίστοιχο με τα στοιχεία. Στις τρεις πρώτες γραμμές κάθε στήλης, περιέχονται οι δείκτες των κόμβων (αύξοντες αριθμοί στηλών του πίνακα  $p$ ) που καταλαμβάνουν τις κορυφές του τριγωνικού στοιχείου (στο οποίο αντιστοιχεί η συγκεκριμένη στήλη) με φορά αρίθμησης παράλληλη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Η τετάρτη γραμμή της κάθε στήλης του πίνακα, περιέχει τον αύξοντα αριθμό υποπεδίου στο οποίο ανήκει το τριγωνικό στοιχείο που αντιστοιχεί στη στήλη αυτή. Εννοείται φυσικά ότι η καταχώριση στην τέταρτη στήλη δεν μπορεί να είναι μηδέν, διότι μηδενικός αύξων αριθμός υποπεδίου, αντιστοιχεί σε κενό εντός του οποίου δεν δημιουργείται πλέγμα στοιχείων.

#### 5.3.4 Εισαγωγή συνοριακών συνθηκών

Σε αυτό το στάδιο εισάγονται επίσης οι αρχικές και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που μπορεί να μην χαρακτηρίζουν τις ιδιότητες αυτού καθ'αυτού του πεδίου, αλλά αποτελούν βασικά συστατικά για τον πλήρη ορισμό του προβλήματος έτσι ώστε να προκύψει ένα ολοκληρωμένο αριθμητικό μοντέλο η επίλυση του οποίου οδηγεί τελικά στη λύση του προβλήματος πεδίου που εξετάζεται. Η εισαγωγή των συνθηκών επιτυγχάνεται με την χρήση εξωτερικών αρχείων κώδικα (*m-files*) τα οποία έχουν γραφτεί και αποθηκευτεί στο περιβάλλον του MATLAB. Σε κάθε στάδιο εκσκαφής εισάγονται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την επίλυση του μοντέλου.

Οι συνοριακές συνθήκες περιλαμβάνουν, όπως αναλύθηκε στην θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων, τις εξωτερικές δυνάμεις (load) που εφαρμόζονται στο πρόβλημα και τις συνθήκες ισορροπίας του πεδίου (πχ. αγκύρωση κατώτερων ή / και πλευρικών κόμβων, κλπ). Επιγραμματικά, οι συνοριακές συνθήκες είναι οι γεωμετρικές (Dirichlet), οι φυσικές συνοριακές συνθήκες (Neumann) και ο συνδυασμός των δυο<sup>[19]</sup>.



#### 5.3.4.1 Συνθήκες Dirichlet

Οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες (Dirichlet) στον προγραμματισμό των πεπερασμένων στοιχείων, για δισδιάστατα προβλήματα γεωμηχανικής, προσδιορίζουν την μετατόπιση κόμβων σε σημεία, σε σύνολο σημείων, ή σε τμήματα συνόρων του πεδίου επίλυσης. Συνήθως εφαρμογή τους είναι ο μηδενισμός των μετατοπίσεων σε τμήματα συνόρων του πλέγματος. Ορίζονται, για παράδειγμα, ως :

$$\begin{array}{ll} Dx_{(beg)} = 0 & \text{και} \quad Dy_{(beg)} = 0 \\ Dx_{(end)} = 0 & Dy_{(end)} = 0 \end{array} \quad [5.5]$$

σε συγκεκριμένα γραμμικά τμήματα (segments). Οι δείκτες 'beg' και 'end' στην παραπάνω εξίσωση ορίζονται σύμφωνα με τον γεωμετρικό πίνακα και εκφράζουν το αρχικό και τελικό κομβικό σημείο κάθε γραμμικού τμήματος αντίστοιχα. Η εφαρμογή, συνεπώς, των εντολών είναι η μηδενική μετατόπιση από το αρχικό μέχρι και το τελικό σημείο κατά τον άξονα των x ή τον άξονα των y αντίστοιχα.

#### 5.3.4.2 Συνθήκες Neumann

Οι φυσικές συνοριακές συνθήκες (Neumann) στον προγραμματισμό των πεπερασμένων στοιχείων, για δισδιάστατα προβλήματα γεωμηχανικής, προσδιορίζουν την παράγωγο της μετατόπισης κόμβων σε σημεία, σε τμήματα συνόρων του πεδίου επίλυσης.

Φυσικές συνοριακές συνθήκες είναι η φόρτιση του εκάστοτε υλικού με σημειακές δυνάμεις ή δυνάμεις κατανεμημένης φόρτισης επί μήκος συνόρου. Η σημειακή φόρτιση σε έναν κόμβο στοιχείου του πεδίου του προβλήματος ορίζεται, για παράδειγμα, ως :

$$\begin{array}{l} f_x = f_{x0} \\ f_y = f_{y0} \end{array} \quad [5.6]$$

Με κατάλληλο σύστημα εξισώσεων οι δυνάμεις αυτές μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε κόμβο κάθε στοιχείου του πεδίου ή στο κέντρο βάρους κάθε στοιχείου του πλέγματος. Αντίστοιχα με τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες, σε κάθε στάδιο εκσκαφής εισάγονται οι κατάλληλες συνθήκες Neumann για την επίλυση του μοντέλου.

### 5.3.5 Παράμετροι του προβλήματος

Τέλος, οι παράμετροι του προβλήματος, οι ιδιοτιμές του υλικού, μπορούν να εισαχθούν στην αρχή του κώδικα ή δύναται να καλείται ο χρήστης να τις εισάγει κατά την εφαρμογή του προγράμματος. Η δεύτερη εκδοχή είναι προτιμότερη, δίνοντας στον χρήστη την δυνατότητα να εισάγει διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους, προσαρμόζοντας το πρόβλημα στα εκάστοτε ζητούμενα. Οι τιμές των παραμέτρων εισάγονται εξωτερικά του αρχείου με την χρήση στο αρχείο της εντολής *'input'* όπου το πρόγραμμα καλεί τον χρήστη να τις εισάγει. Οι παράμετροι του προβλήματος που μελετάται στην εργασία αυτή είναι :

- Το μέτρο ελαστικότητας ( $E$ ) του Young σε  $MPa$
- Ο λόγος του Poisson ( $\nu$ )
- Το ειδικό βάρος του υλικού ( $\gamma$ ) σε  $MN/m^3$

## 5.4 Στάδιο Κύριας Επεξεργασίας

Οι τιμές των παραμέτρων του πλέγματος και ο πίνακας γεωμετρίας, αποτελούν την γεωμετρική βάση δεδομένων του αριθμητικού μοντέλου. Η πληροφορία, ωστόσο, που παρέχεται από το σύστημα των παραμετρικών πινάκων, δεν επαρκεί για την επίλυση του προβλήματος. Απαιτούνται επιπλέον οι μαθηματικές εξισώσεις και οι παράμετροι αυτών, που σχετίζονται με το κάθε στοιχείο του πεδίου και υπεισέρχονται στην διατύπωση των εξισώσεων διακριτοποίησης και στην επίλυση τους ώστε να προκύψει η τελική λύση. Οι παράμετροι αυτές είναι οι εξής:

- Οι συναρτήσεις μορφής του κάθε στοιχείου
- Οι βαθμίδες των συναρτήσεων μορφής του κάθε στοιχείου

### 5.4.1 Υπέρθεση μεταξύ των σταδίων

Στο σημείο αυτό, στον αλγόριθμο, υπεισέρχεται η προυποθετή απόφαση *if*, η οποία εντοπίζει σε ποιο στάδιο εκσκαφής εφαρμόζονται οι υπολογισμοί των μητρώων και των διανυσμάτων.

Αν εξετάζεται το πρώτο στάδιο εκσκαφής, τότε δίνεται η εντολή για την κατάστρωση των συναρτήσεων. Γίνεται επίλυση των εξισώσεων και αποθηκεύονται οι τιμές των αποτελεσμάτων. Τα εξαγόμενα αποτελέσματα είναι οι τάσεις ( $\sigma_{ij}$ ), οι τροπές ( $\epsilon_{ij}$ ), οι μετατοπίσεις ( $u_{ij}$ ) και οι κομβικές δυνάμεις (nodal forces).

Αν το στάδιο είναι άλλο από το πρώτο, τότε λαμβάνει πρώτα χώρα η αντιστοίχιση των κόμβων του προηγούμενου σταδίου με τους κόμβους του τρέχοντος σταδίου. Η διαδικασία αυτή καλείται υπέρθεση μεταξύ των σταδίων. Η αντιστοίχιση γίνεται διότι από στάδιο σε στάδιο η γεωμετρία του πεδίου αλλάζει (βλ. § 5.3.2), κάποια στοιχεία αφαιρούνται από το πλέγμα του πεδίου επίλυσης, με αποτέλεσμα να αλλάζει και η αρίθμηση των κόμβων των υπόλοιπων στοιχείων σε σχέση με την αντίστοιχη αρίθμηση αυτών στο προηγούμενο στάδιο.

Στο νέο στάδιο, πριν από κάθε υπολογισμό, οι κόμβοι των στοιχείων που δεν αφαιρέθηκαν, βρίσκονται στην αρχική τους θέση. Στους κόμβους αυτούς γίνεται εφαρμογή

των αποτελεσμάτων των μεταβολών των μετατοπίσεων από το προηγούμενο στάδιο, ώστε η επίλυση να ξεκινήσει από εκεί που σταμάτησε στο προηγούμενο στάδιο.

Από τις μεταβολές των μετατοπίσεων ( $\Delta U_{ij}$ ) υπολογίζονται οι τάσεις, οι τροπές και οι κομβικές δυνάμεις σε επίπεδο στοιχείου. Οι τιμές αυτές εφαρμόζονται στους αντίστοιχους κόμβους του τρέχοντος σταδίου και αθροίζονται στις νέες τιμές που προκύπτουν από την νέα επίλυση του τρέχοντος σταδίου. Ο υπολογισμός των μεταβλητών που ανεφέρθησαν, αναλύεται στις επόμενες ενότητες.

#### 5.4.2 Υπολογισμός και συναρμολογή διανυσμάτων και μητρώων

Οι συναρτήσεις μορφής, που περιγράφησαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιούνται στην συγκρότηση των διανυσμάτων και των μητρώων που διέπουν κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Η εφαρμογή του συστήματος των συναρτήσεων μορφής με τα δεδομένα εισόδου οδηγεί στην κατασκευή των διανυσμάτων και μητρώων κάθε ενός στοιχείου, τα οποία, εν συνεχεία, συναρμολογούνται ώστε να προκύψει το καθολικό διάνυσμα και μητρώο του βήματος φόρτισης. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να καθοριστεί που πρέπει να τοποθετηθεί το μητρώο κάθε στοιχείου στο καθολικό σύστημα. Τα διανύσματα και μητρώα που πρέπει να υπολογιστούν είναι τα εξής :

- Πίνακας των συναρτήσεων μορφής (N matrix)
- Πίνακας συντελεστών των συναρτήσεων μορφής (Shape Matrix)
- Πίνακας συντελεστών των βαθμίδων των συναρτήσεων μορφής (B matrix)
- Ιακωβιανός πίνακας αλλαγής συστήματος συντεταγμένων (Jacob)
- Ο πίνακας ακαμψίας του πεδίου επίλυσης (Stiffness matrix)
- Το διάνυσμα φόρτισης του πεδίου επίλυσης (Load Vector)

Ο πίνακας '*N matrix*' είναι ο πίνακας των συναρτήσεων μορφής που διέπουν το πρόβλημα. Περιέχει τις συναρτήσεις μορφής για κάθε κόμβο του στοιχείου. Για τριγωνικό – τρικομβικό στοιχείο ο πίνακας αυτός έχει διαστάσεις  $6 \times 2$  και έχει την μορφή :

$$N(x) = \frac{1}{2 \times A} \times \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \quad [5.7]$$

Ο πίνακας ‘*Shape Matrix*’, αντιστοιχίζει τετραγωνικούς υποπίνακες σε όλα τα στοιχεία του πεδίου, που περιέχουν τους συντελεστές των όρων των συναρτήσεων μορφής του αντίστοιχου στοιχείου.

Ο πίνακας ‘*B matrix*’ αντιστοιχίζει σε όλα τα στοιχεία του πεδίου αντίστοιχους τετραγωνικούς υπόπίνακες (2 x 6) των συντελεστών των όρων των βαθμίδων των συναρτήσεων μορφής.

Ο πίνακας ‘*Jacob*’ αντιστοιχίζει τον Ιακωβιανό πίνακα μετασχηματισμού του στοιχείου από το γενικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y) στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) του στοιχείου.

Ο πίνακας ‘*stiffness matrix*’ του πεδίου περιέχει υποπίνακες ακαμψίας για κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Οι υποπίνακες αυτοί είναι τετραγωνικοί (6 x 6). Η εξίσωση που δίνει τον πίνακα ακαμψίας για κάθε στοιχείο (element stiffness matrix) είναι :

$$K^e = \frac{1}{2} \times |J| \times [B^e]^T \times [D^e] \times [B^e] \quad [5.8]$$

όπου, |J| είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα,  $[B^e]$  είναι ο πίνακας  $[B]$  του στοιχείου,  $[B^e]^T$  είναι ο ανάστροφος του πίνακα  $[B]$  και  $[D^e]$  είναι ο πίνακας των παραμέτρων του υλικού. Ο πίνακας ακαμψίας του ολικού πεδίου επίλυσης (global stiffness matrix) προκύπτει από την συναρμολογή των επιμέρους τοπικών μητρώων ακαμψίας των στοιχείων.

Το διάνυσμα ‘*Load Vector*’ είναι το διάνυσμα που εκφράζει την επιβολή φορτίσεων στο πεδίο του προβλήματος. Συναρμολογείται από τα διανύσματα φόρτισης κάθε

στοιχείου του πλέγματος. Η εξίσωση που δίνει το διάνυσμα φόρτισης για κάθε στοιχείο (element load vector) είναι :

$$Load\ vector = w^e + \text{φυσικές συνοριακές συνθήκες (Neumann)} \quad [5.9]$$

όπου το  $w^e$  εκφράζει τις εξωτερικές δυνάμεις που συμμετέχουν στην φόρτιση του στοιχείου και δίνεται από την εξίσωση :

$$w^e = \frac{1}{2} \times |J| \times [N] \times f_w \quad [5.10]$$

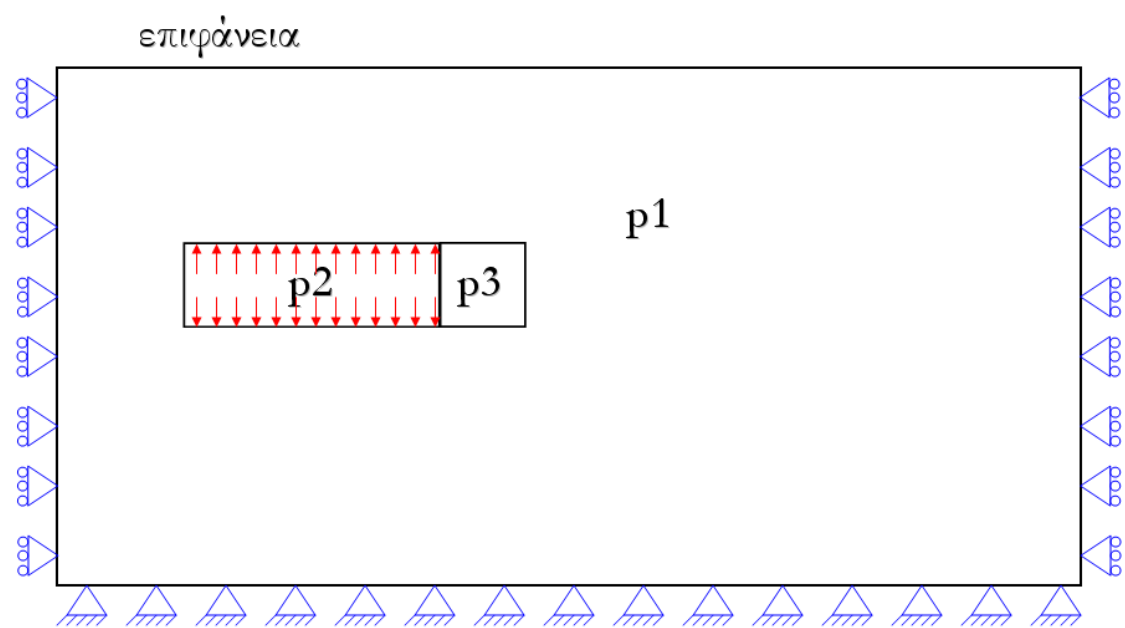
όπου,  $|J|$  είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα,  $[N]$  είναι ο πίνακας των συναρτήσεων μορφής του στοιχείου και  $[f_w]$  είναι ένας πίνακας διαστάσεων  $2 \times 1$ , όπου στην πρώτη γραμμή είναι η τιμή της  $x$  συνιστώσας και στην δεύτερη γραμμή είναι η τιμή της  $y$  συνιστώσας του διανύσματος της δύναμης που επιβάλλεται στο στοιχείο.

### 5.4.3 Περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι όλα τα διανύσματα και τα μητρώα που κατασκευάζονται με σκοπό την επίλυση του προβλήματος, μηδενίζονται στην αρχή κάθε σταδίου ώστε να επαναυπολογιστούν με βάση τα νέα δεδομένα που υπεισέρχονται στο τρέχον στάδιο εκσκαφής. Έτσι, στο νέο στάδιο γίνεται επανακατασκευή των διανυσμάτων και των μητρώων και νέα επίλυση του συστήματος των εξισώσεων.

Η διαδικασία, της οποίας προηγήθηκε η περιγραφή, λαμβάνει χώρα για τρία, τον αριθμό, στάδια. Το αρχικό στάδιο εκσκαφής, όπου το υλικό παραμένει αδιάρρηκτο, υποβάλλεται μόνο σε βαρυτικές φορτίσεις (gravity load). Στα επόμενα δυο στάδια εκσκαφής αφαιρούνται τμήματα του υλικού (βλ. § 5.3.2), ενώ το μοντέλο φορτίζεται με βαρύτητα. Στα δυο αυτά στάδια εκσκαφής εφαρμόζονται μέτρα υποστήριξης, με την μορφή φυσικών συνοριακών συνθηκών, στα τοιχώματα (οροφή και δάπεδο) του ανοίγματος  $p_2$  (βλ. σχ. 5.5). Τέλος, οι συνθήκες Dirichlet εφαρμόζονται στο δεξιό και το αριστερό όριο του μοντέλου για μηδενική μετατόπιση στον  $x$  άξονα (κύλιση), και

στο κάτω όριο του μοντέλου για μηδενική μετατόπιση στον  $x$  και τον  $y$  άξονα (πάκτωση) αντίστοιχα (βλ. σχ. 5.5). Με την διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται η συρρίκνωση της γεωμετρίας του άπειρου, στην πραγματικότητα, μέσου σε πεπερασμένο. Ουσιαστικά, δηλαδή, η εντατική κατάσταση μακριά από το άνοιγμα δεν επηρεάζει, ούτε επηρεάζεται από πεδία δυνάμεων.



Σχήμα 5.5 : Επιβολή συνοριακών συνθηκών στο πεδίο του προβλήματος

## 5.5 Στάδιο Μετά-Επεξεργασίας

Η εισαγωγή των κατάλληλων παραμέτρων στο πρόγραμμα εκκινεί την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και την εξαγωγή, σε μητρώα και / ή σε γραφήματα, των αποτελεσμάτων του προβλήματος. Στην διαδικασία αυτή χρήσιμη είναι η εντολή `plot` που περιέχεται στο Graphical User Interface (GUI) του MATLAB.

Από την επίλυση του προβλήματος πεδίου προκύπτουν, όπως αναφέρθη, οι τιμές των τάσεων ( $\sigma_{ij}$ ), των τροπών ( $\varepsilon_{ij}$ ) και των μετατοπίσεων ( $u_{ij}$ ) στους κόμβους των στοιχείων. Η γραφική αναπαράσταση των τιμών αυτών γίνεται, ξεχωριστά για κάθε στάδιο, στο επόμενο κεφάλαιο.



# Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>

## Αποτελέσματα και συγκρίσεις

### 6.1 Αποτελέσματα

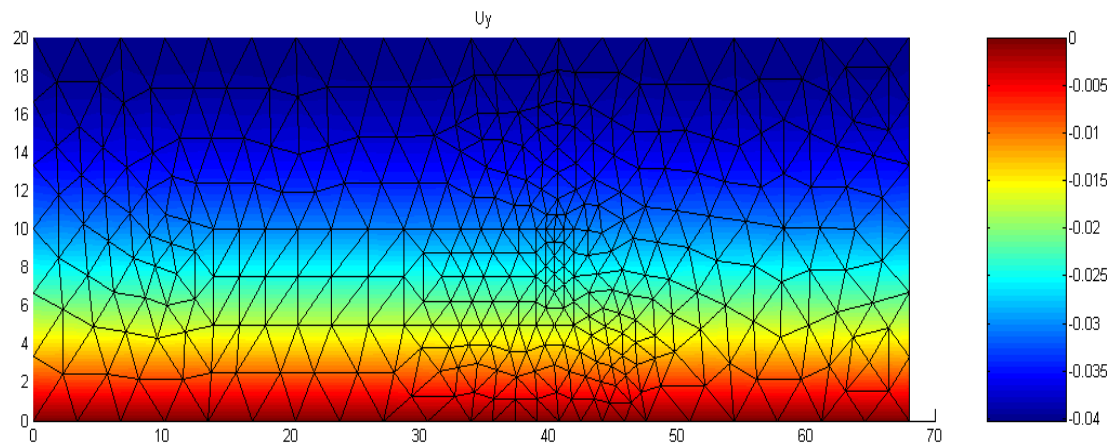
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αναπαρίστανται, με την βοήθεια χρωματικού κώδικα, οι κατακόρυφες τάσεις, οι κατακόρυφες τροπές και οι κατακόρυφες μετατοπίσεις στο πεδίο, για όλα τα στάδια εκσκαφής. Στο τέλος της ενότητας απεικονίζονται και οι μορφές που έχει πάρει το πεδίο στα τρία στάδια, μετά την επίλυση.

Τα δεδομένα εισόδου στον κώδικα του Matlab είναι τα εξής :

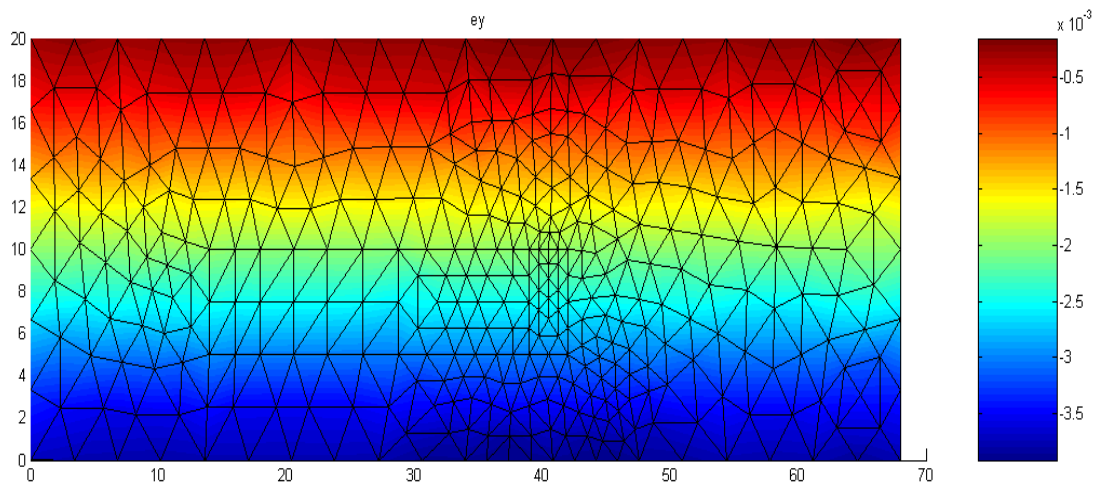
- Διαστάσεις μοντέλου :
  - ο Μήκος πεδίου  $L=68$  m
  - ο Πλάτος πεδίου  $P=20$  m
  - ο Βάθος εκσκαφής σήραγγας  $H=10$  m
  - ο Διάσταση υπόγειου ανοίγματος  $D=5$  m
- Παράμετροι του υλικού :
  - ο Μέτρο ελαστικότητας  $E=100$  MPa
  - ο Λόγος του Poison  $\nu=0.3$
  - ο Ειδικό βάρος γεωυλικού  $\gamma=0,027$  MN/m<sup>3</sup>

Αναλυτικά προκύπτουν :

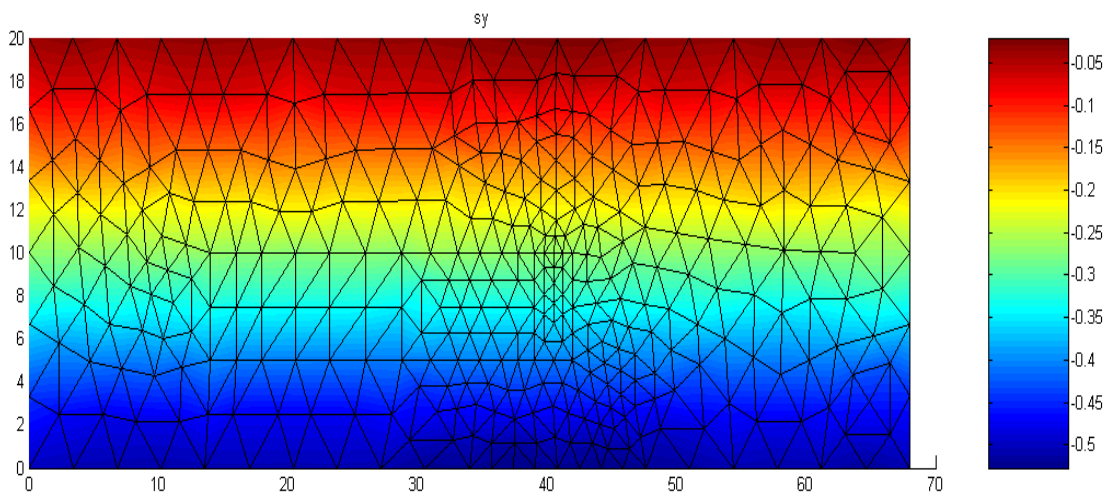
για το πρώτο στάδιο :



Σχήμα 6.1 : Η κατακόρυφη μετατόπιση στο πρώτο στάδιο εκσκαφής

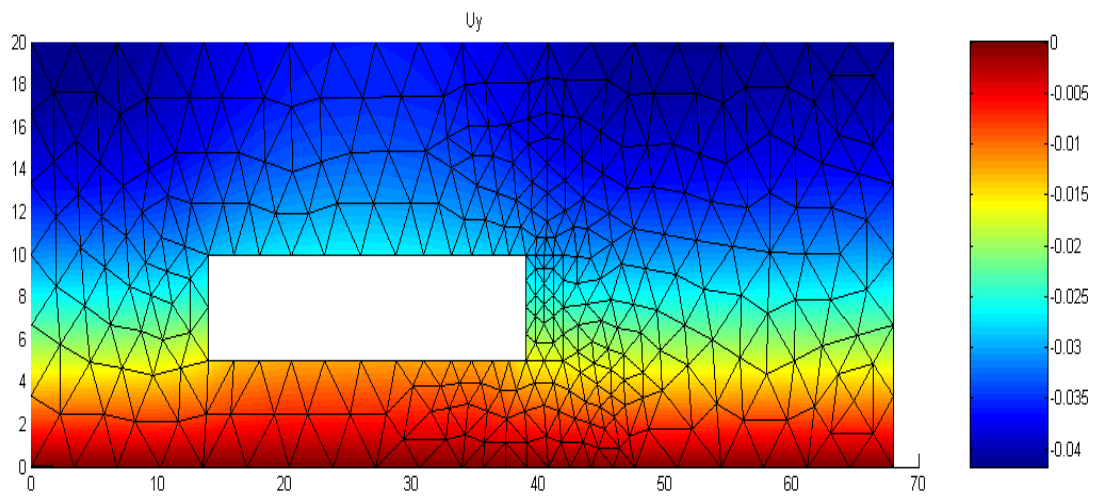


Σχήμα 6.2 : Η κατακόρυφη τροπή στο πρώτο στάδιο εκσκαφής

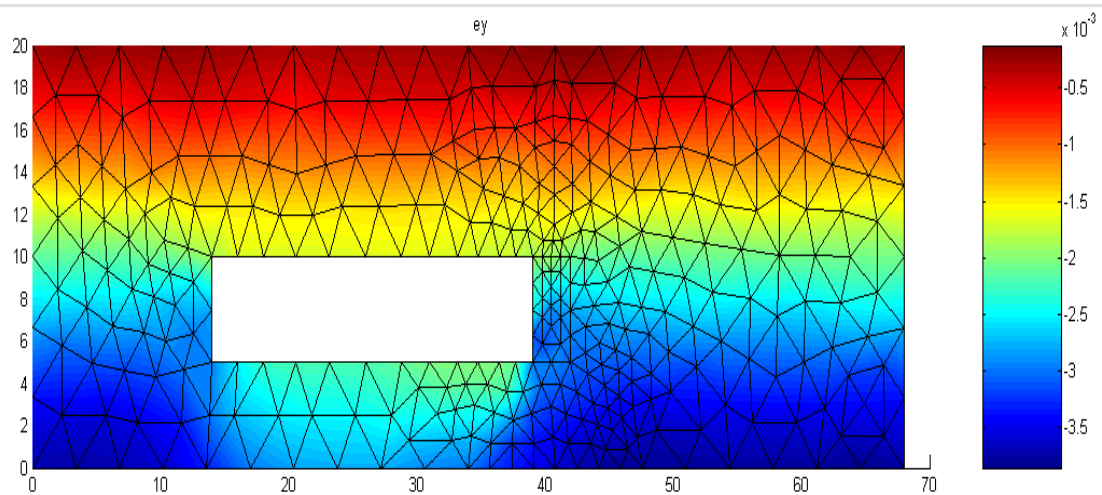


Σχήμα 6.3 : Η κατακόρυφη τάση στο πρώτο στάδιο εκσκαφής

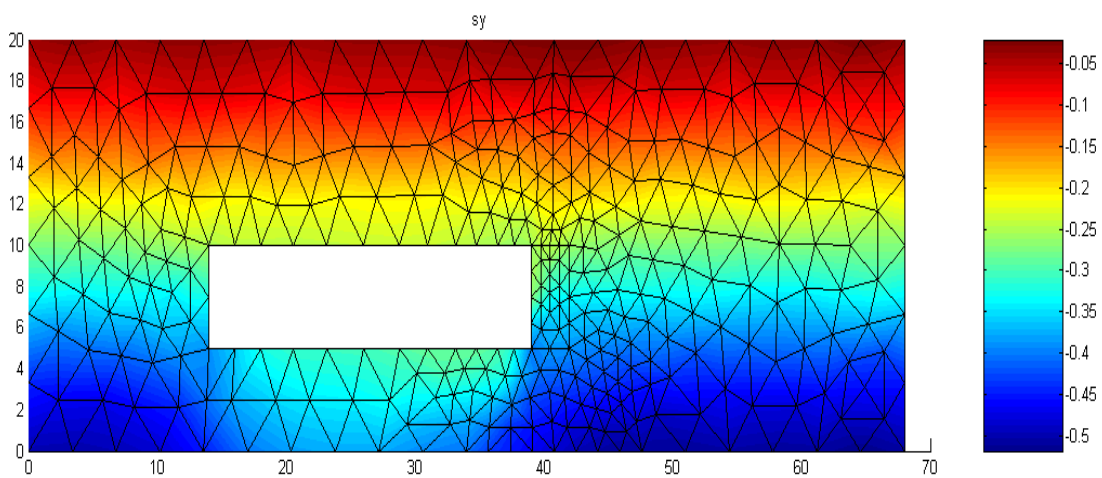
για το δεύτερο στάδιο :



Σχήμα 6.4 : Η κατακόρυφη μετατόπιση στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής

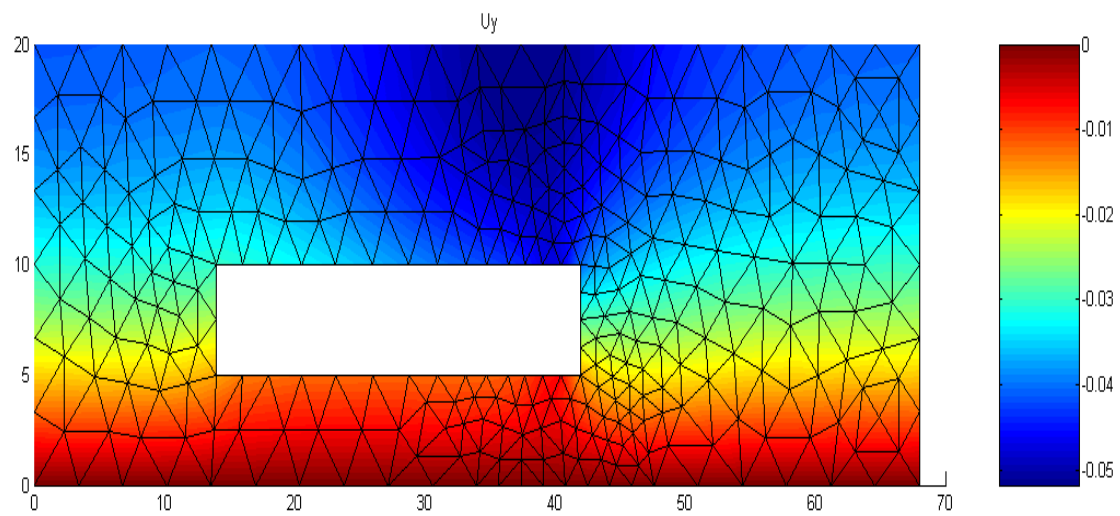


Σχήμα 6.5 : Η κατακόρυφη τροπή στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής

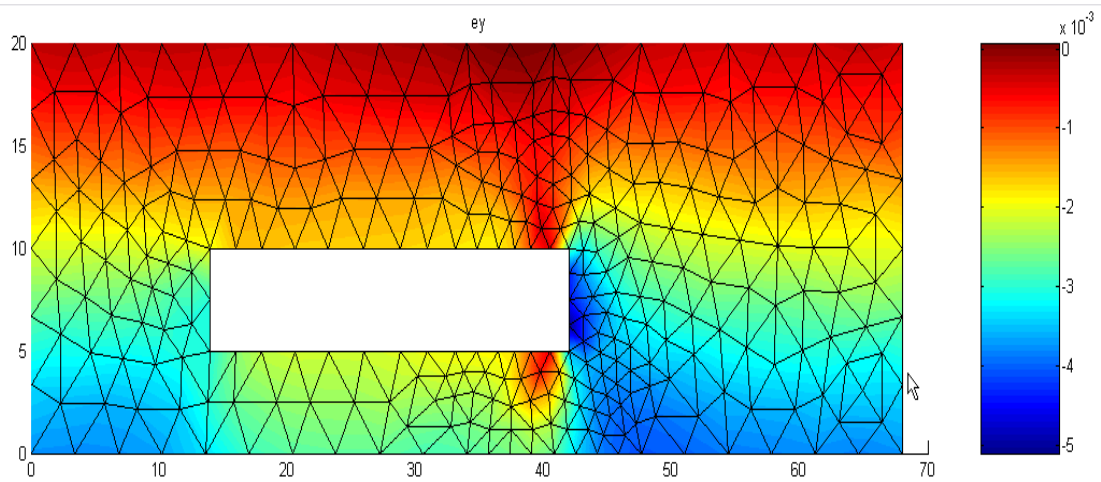


Σχήμα 6.6 : Η κατακόρυφη τάση στο δεύτερο στάδιο εκσκαφής

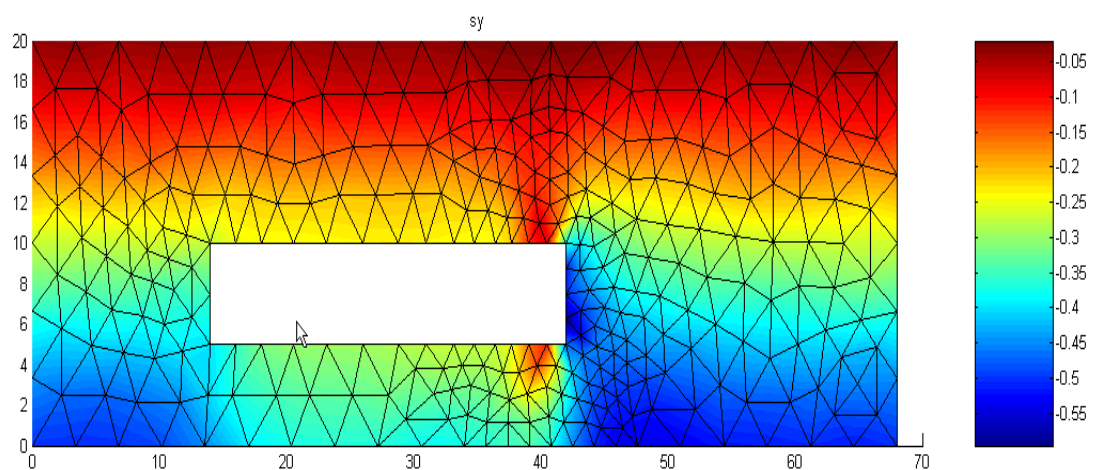
για το τρίτο στάδιο :



Σχήμα 6.7 : Η κατακόρυφη μετατόπιση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής

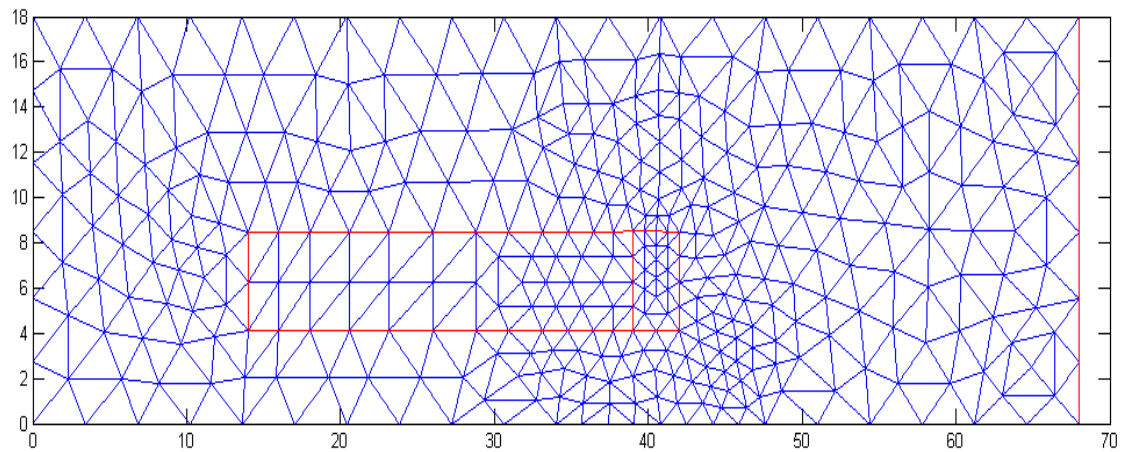


Σχήμα 6.8 : Η κατακόρυφη τροπή για το τρίτο στάδιο εκσκαφής

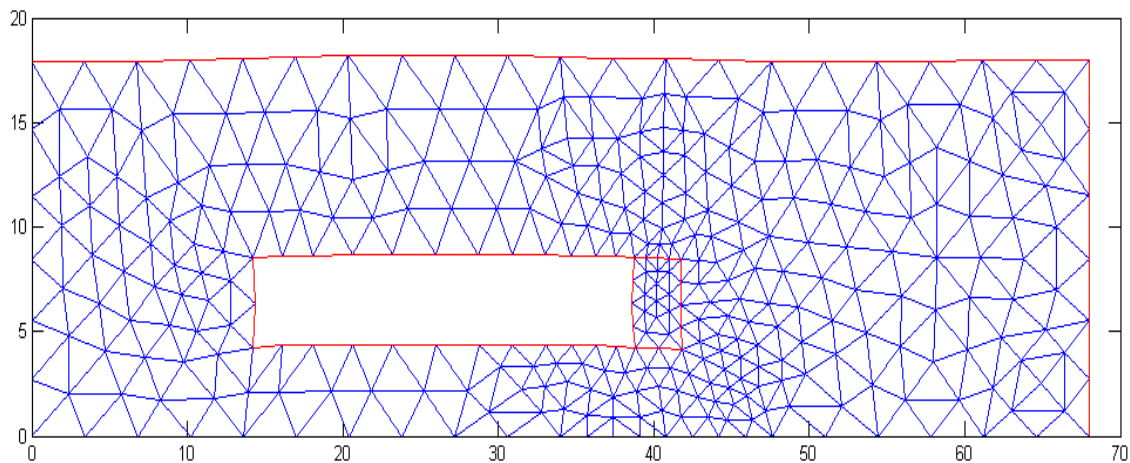


Σχήμα 6.9 : Η κατακόρυφη τάση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής

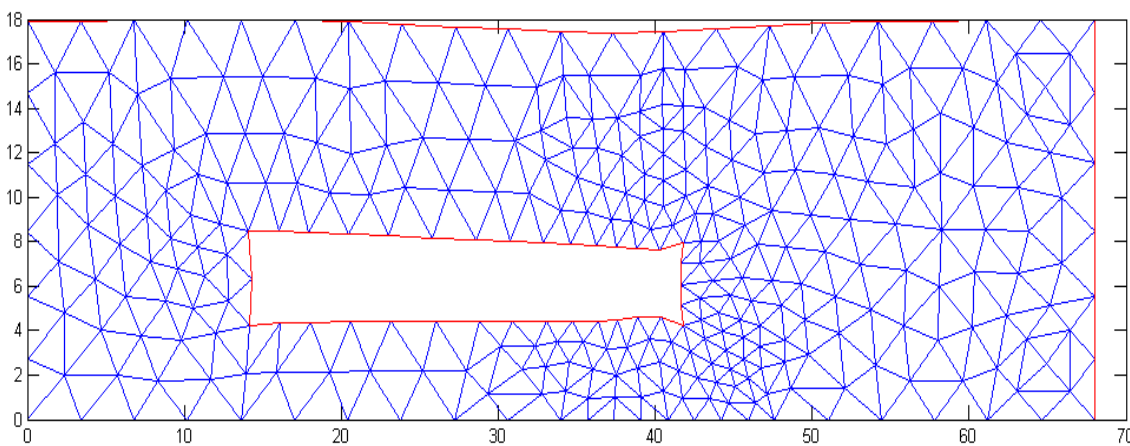
Η μορφή που έχει πάρει το μοντέλο μετά την επίλυση στα τρία στάδια είναι η ακόλουθη. Πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή οι μετατοπίσεις είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του πεδίου, έχουν πολλαπλασιαστεί με έναν συντελεστή  $r = 50$ , ώστε να απεικονίζονται καλύτερα στο γράφημα.



Σχήμα 6.10 : Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο πρώτο στάδιο



Σχήμα 6.11 : Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο δεύτερο στάδιο



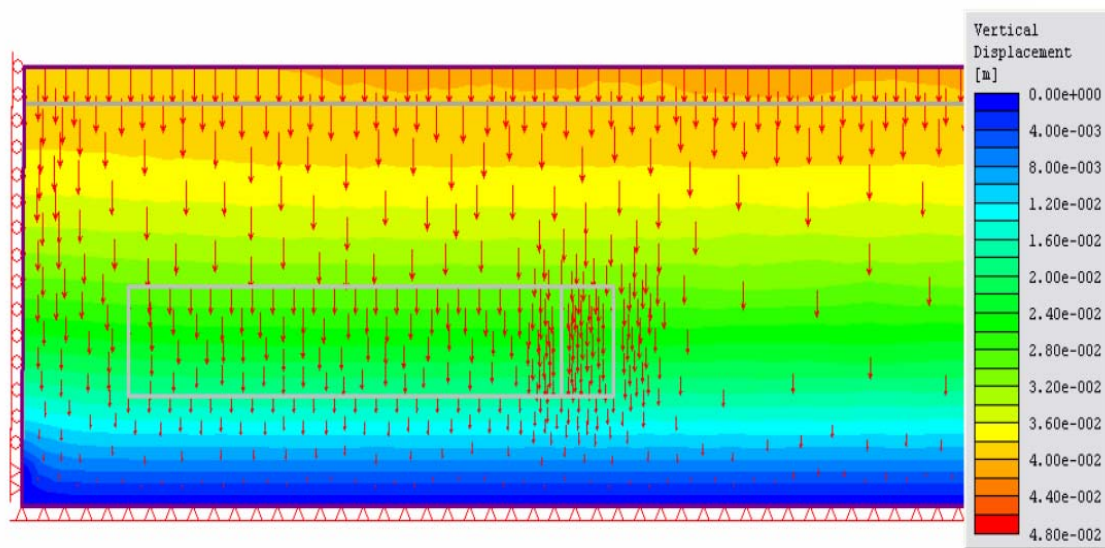
Σχήμα 6.12 : Απεικόνιση της παραμορφωσιακής κατάστασης στο τρίτο στάδιο



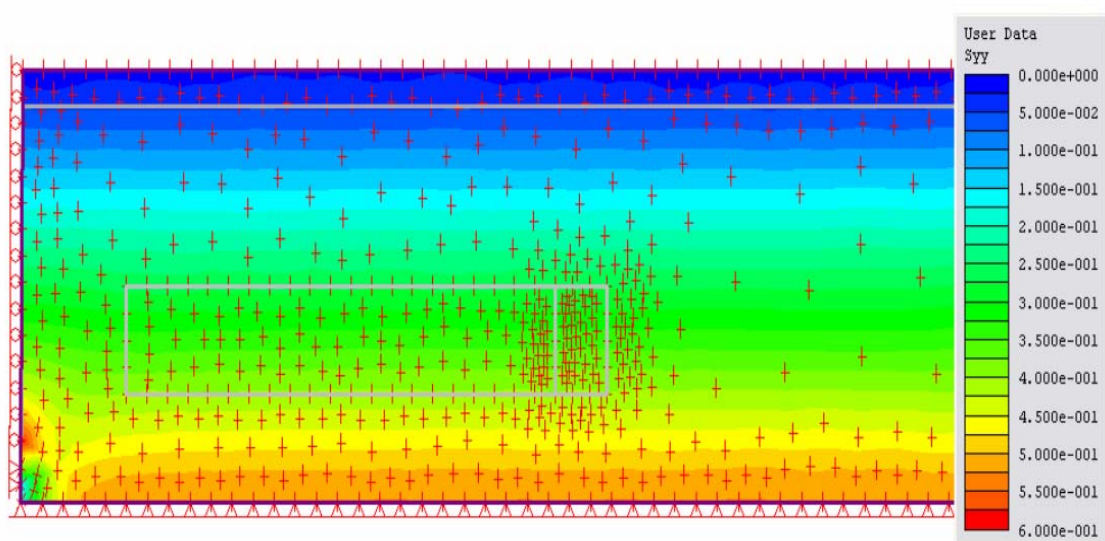
## 6.2 Σύγκριση με το πρόγραμμα PHASES

Τα αποτελέσματα του κώδικα που δημιουργήθηκε στο Matlab, συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που εξάγει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων PHASES, για την ίδια γεωμετρία και τα ίδια ακριβώς δεδομένα εισόδου (βλ. § 6.1). Τα αντίστοιχα αποτελέσματα του PHASES είναι τα εξής :

για το πρώτο στάδιο :

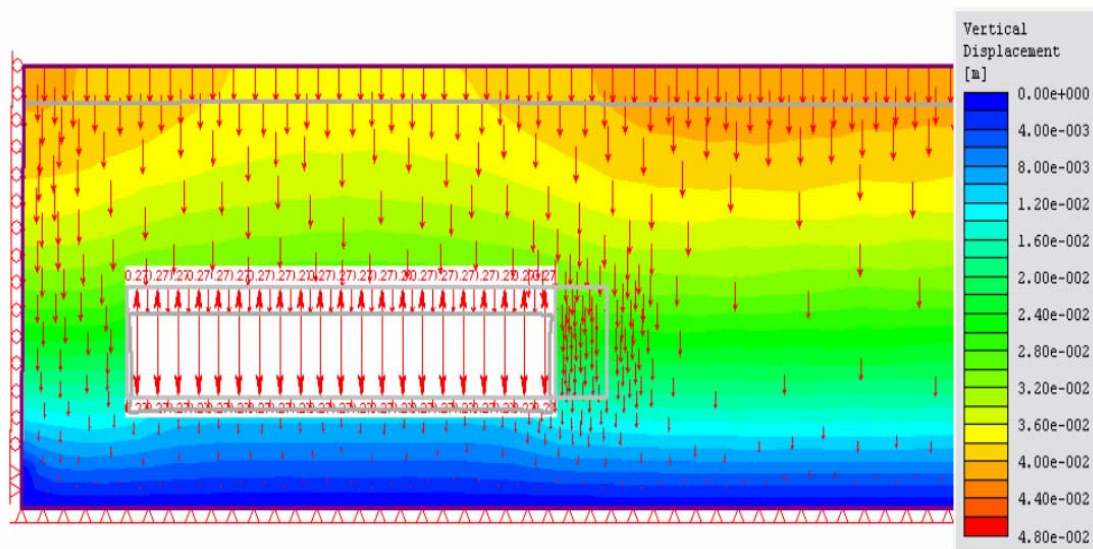


Σχήμα 6.13 : Η κατακόρυφη μετατόπιση για το πρώτο στάδιο εκσκαφής (PHASES)

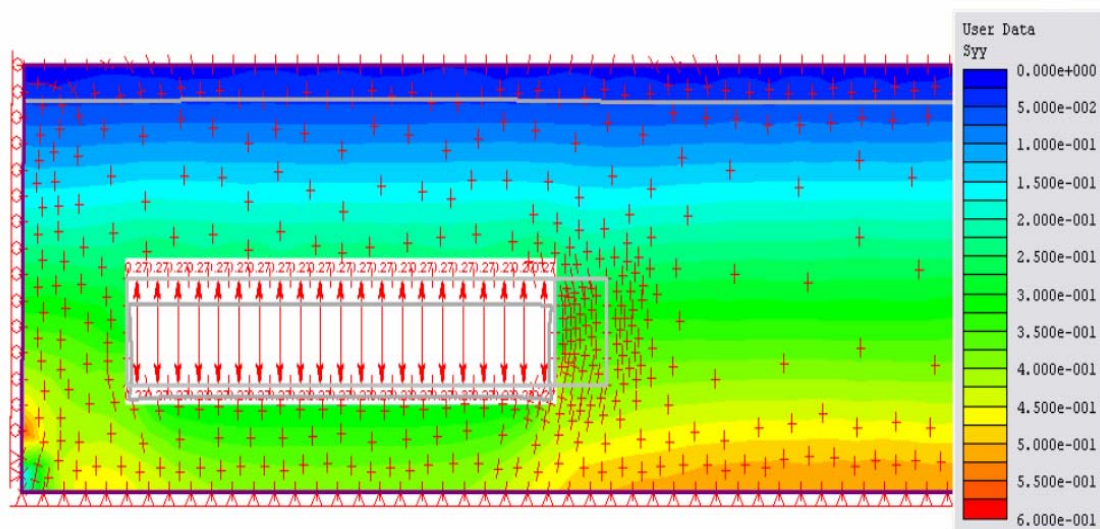


Σχήμα 6.14 : Η κατακόρυφη τάση για το πρώτο στάδιο εκσκαφής (PHASES)

για το δεύτερο στάδιο :

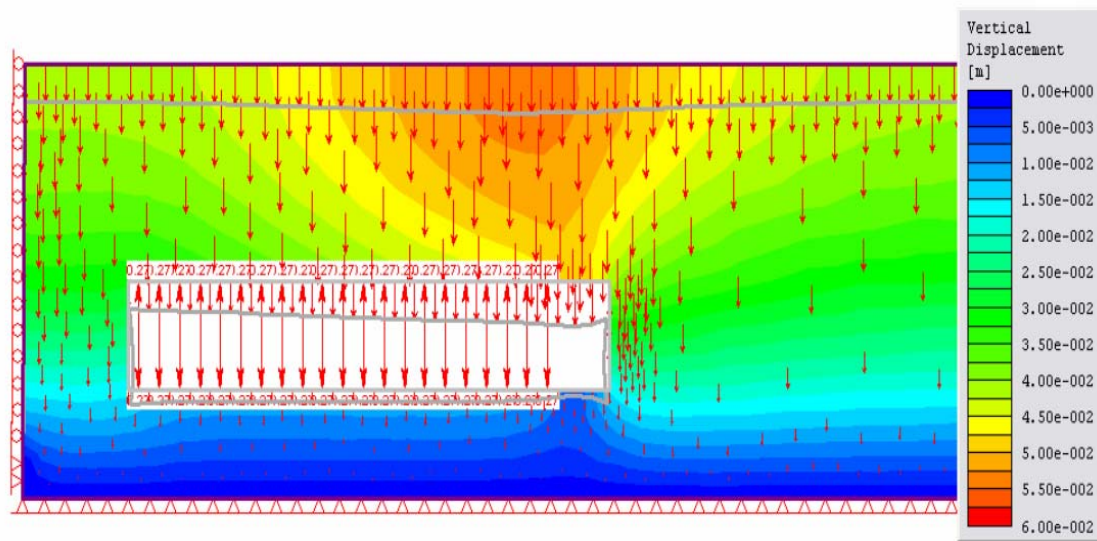


Σχήμα 6.15 : Η κατακόρυφη μετατόπιση για το δεύτερο στάδιο εκσκαφής (PHASES)

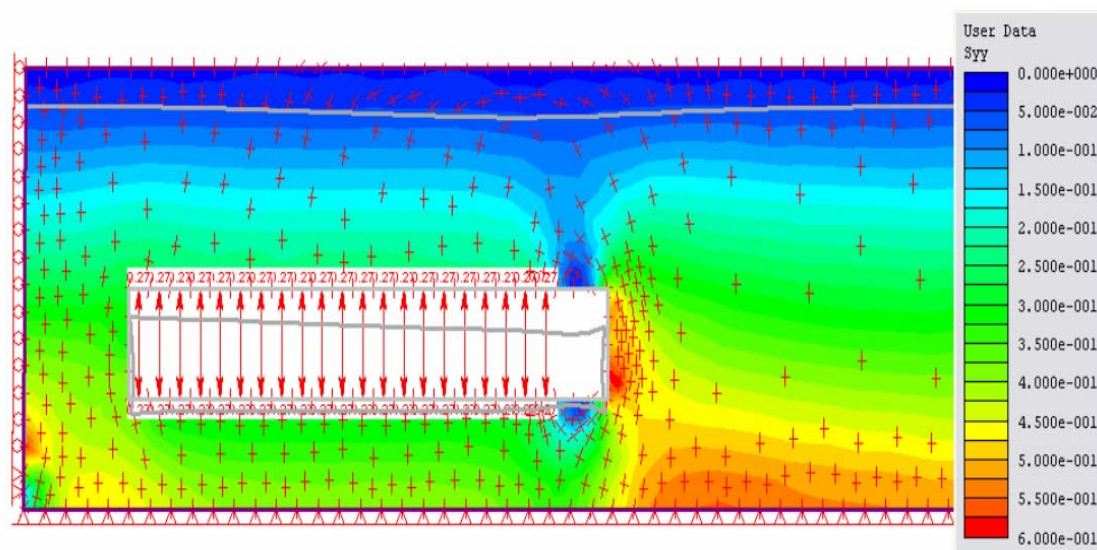


Σχήμα 6.16 : Η κατακόρυφη τάση για το δεύτερο στάδιο εκσκαφής (PHASES)

για το τρίτο στάδιο :



Σχήμα 6.17 : Η κατακόρυφη μετατόπιση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής (PHASES)



Σχήμα 6.18 : Η κατακόρυφη τάση για το τρίτο στάδιο εκσκαφής (PHASES)



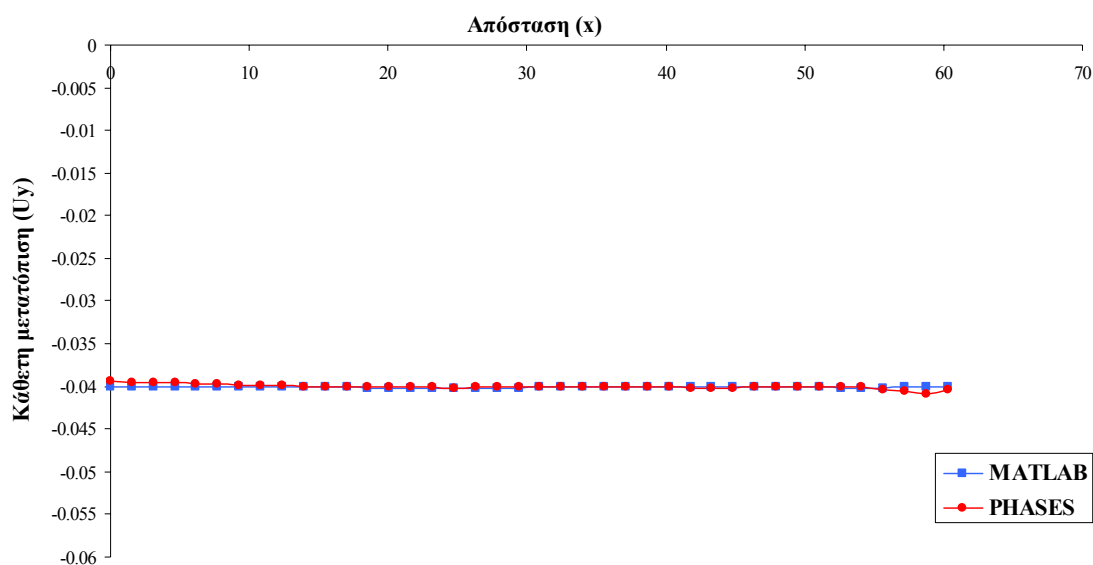
### 6.3 Γραφικές παραστάσεις

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των κατακόρυφων μετατοπίσεων συναρτήσει της απόστασης  $x$ . Οι γραμμές δειγματοληψίας των μετατοπίσεων είναι κατά μήκος της επιφάνειας του εδάφους, και κατά μήκος της στέγης του υπόγειου ανοίγματος. Η δειγματοληψία έγινε τόσο στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων του Matlab, όσο και στο πρόγραμμα PHASES.

Στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν γίνεται σύγκριση των τιμών των μετατοπίσεων στις γραμμές δειγματοληψίας κατά στάδιο εκσκαφής.

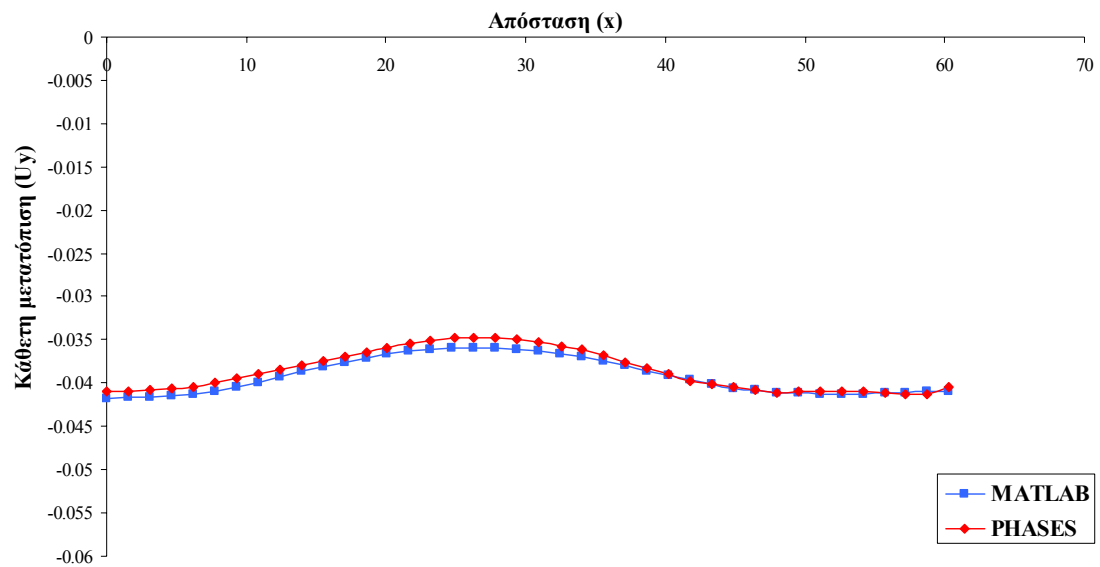
για την γραμμή δειγματοληψίας στην επιφάνεια του εδάφους

- πρώτο στάδιο εκσκαφής :



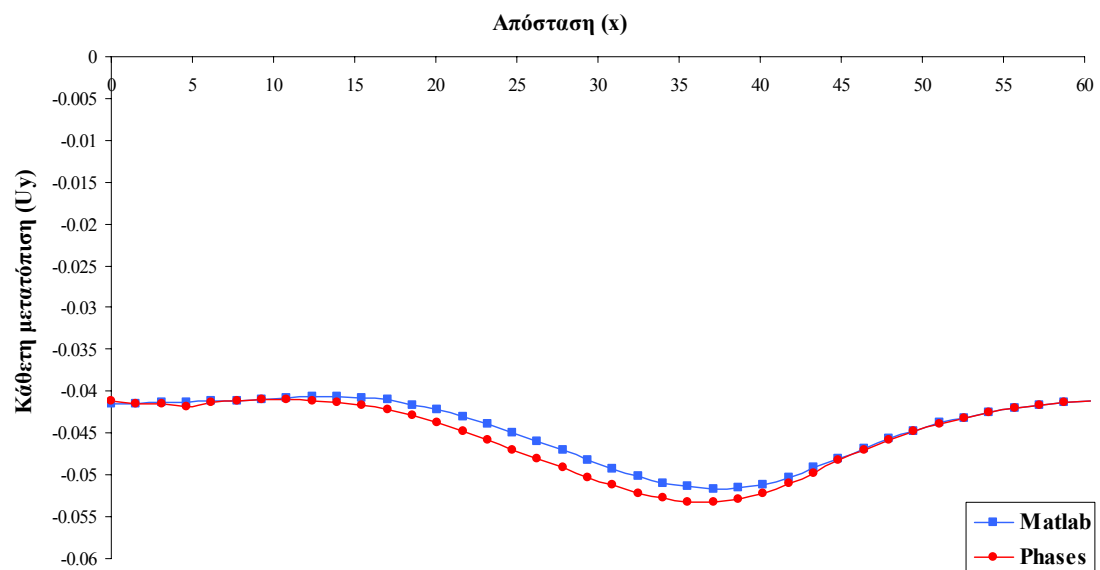
Σχήμα 6.19 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην επιφάνεια του εδάφους (πρώτο στάδιο)

- δεύτερο στάδιο εκσκαφής :



Σχήμα 6.20 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην επιφάνεια του εδάφους (δεύτερο στάδιο)

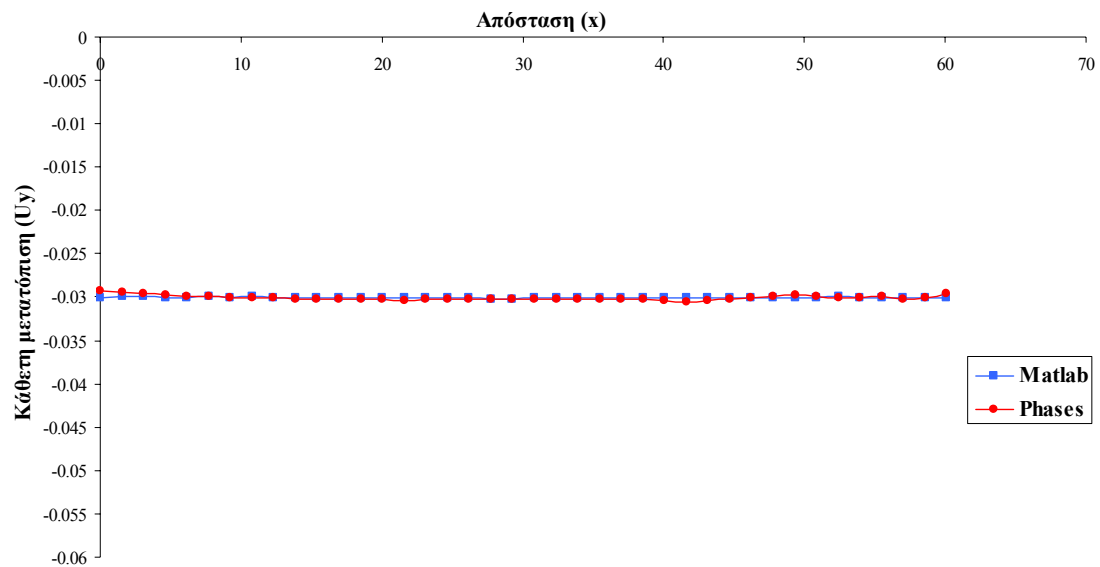
- τρίτο στάδιο εκσκαφής :



Σχήμα 6.21 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην επιφάνεια του εδάφους (τρίτο στάδιο)

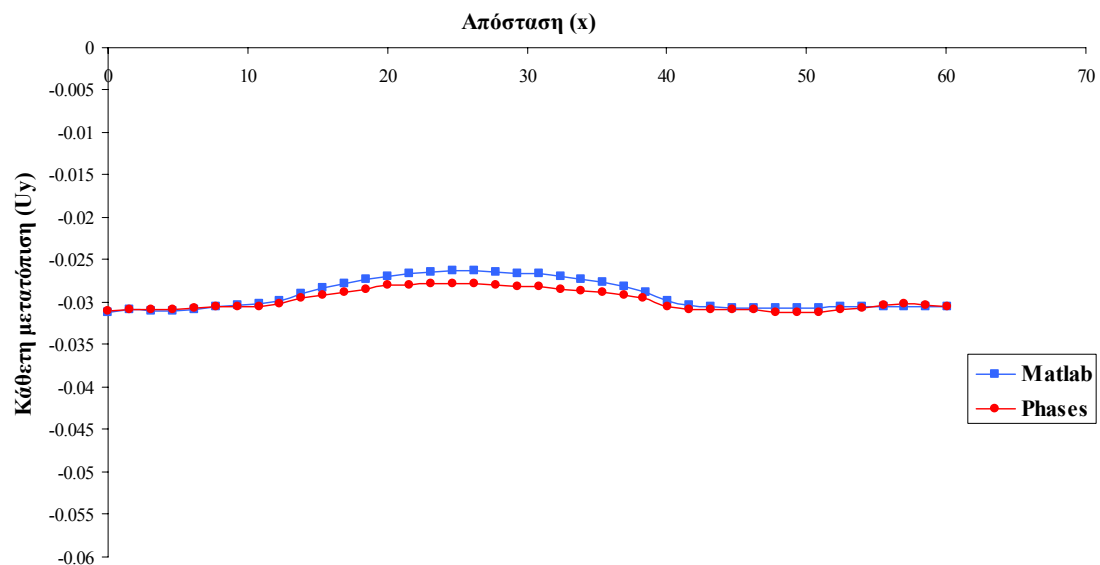
για την γραμμή δειγματοληψίας στην στέψη του ανοίγματος :

- πρώτο στάδιο εκσκαφής :



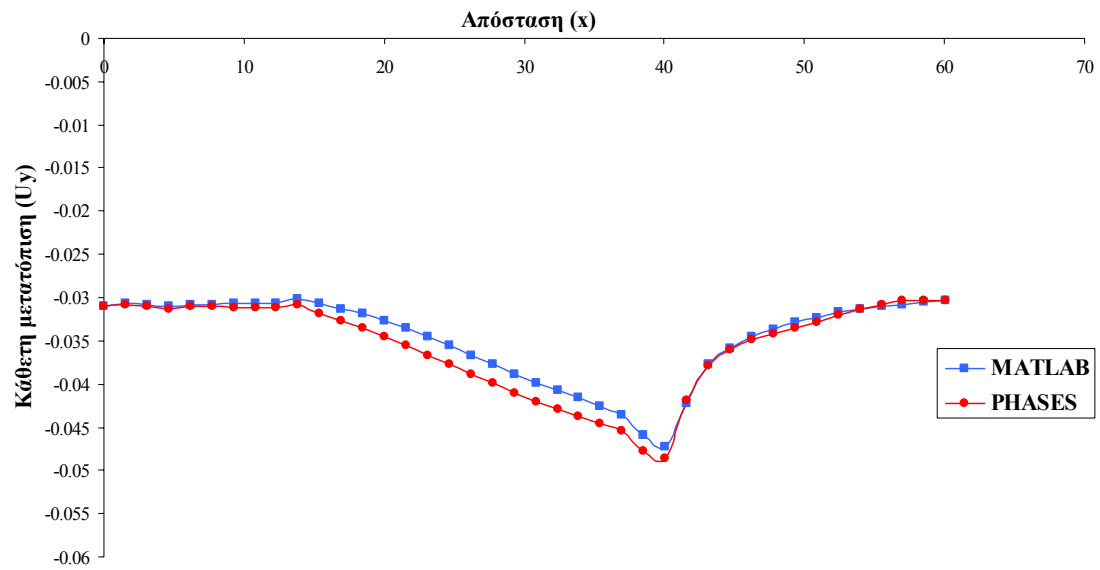
Σχήμα 6.22 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην στέψη του ανοίγματος (πρώτο στάδιο)

- δεύτερο στάδιο εκσκαφής :



Σχήμα 6.23 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην στέψη του ανοίγματος (δεύτερο στάδιο)

- τρίτο στάδιο εκσκαφής :



Σχήμα 6.24 : Γραφική παράσταση της κατακόρυφης μετατόπισης συναρτήσει της απόστασης  $x$  στην στέγη του ανοίγματος (τρίτο στάδιο)

## 6.4 Παρατηρήσεις

Συγκρίνοντας, με την βοήθεια του χρωματικού κώδικα, τις απεικονίσεις του πεδίου των δυο προγραμμάτων (Matlab και PHASES), που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 6.1 και 6.2, παρατηρείται ότι ο αλγόριθμος που κατασκευάστηκε (Matlab), δημιουργεί αποτελέσματα που προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα αντίστοιχα του προγράμματος PHASES.

Η παρατήρηση αυτή θεμελιώνεται και από την σύγκριση, στην ενότητα 6.3, των γραφικών παραστάσεων των κάθετων μετατοπίσεων (vertical displacements) στις γραμμές δειγματοληψίας για όλα τα στάδια εκσκαφής.

Ωστόσο, εντοπίζονται κάποιες ευδιάκριτες διαφορές στις τιμές των μετατοπίσεων ανάμεσα στα δυο προγράμματα. Οι διαφορές αυτές, όμως, είναι της τάξης των χιλιοστών (mm). Προφανώς, οφείλονται στην διαφορετικότητα του PHASES με τον αλγόριθμο που κατασκευάστηκε στο Matlab, καθώς και στην διαφορετική διακριτοποίηση του πεδίου ανάμεσα στις δυο επιλύσεις του προβλήματος.

Στα σχήματα 6.10, 6.11 και 6.12 παρατηρείται η παραμορφωσιακή κατάσταση που έχει επέλθει μετά από την φόρτιση σε κάθε στάδιο. Στο πρώτο στάδιο η παραμόρφωση είναι ομοιόμορφη, κατά μήκος του άξονα  $x$ , καθώς δεν υπάρχει διάρρηξη στο γεωϋλικό. Στο δεύτερο στάδιο η παραμόρφωση συνεχίζεται και η μικρή ανύψωση πάνω από το άνοιγμα οφείλεται στην επιβολή δυνάμεων στήριξης στην οροφή του υπόγειου ανοίγματος. Στο τρίτο στάδιο η καθίζηση και η αστοχία του ανοίγματος είναι ακόμα εντονότερη, κυρίως στο ανυποστήρικτο τμήμα που εκσκάπτεται στο στάδιο αυτό.

Τα ίδια χαρακτηριστικά παρουσιάζονται και στις γραφικές παραστάσεις (βλ. § 6.3).

# Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>

## Συμπεράσματα και Προτάσεις

### 7.1 Συμπεράσματα

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, όπως και άλλες παρόμοιες αριθμητικές μέθοδοι, αποτελεί πλέον ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια των μηχανικών, τόσο για την επίλυση, όσο και για την μοντελοποίηση προβλημάτων στην γεωμηχανική. Ένα από τα πολλά προβλήματα, είναι και η ανάλυση του εντατικοπαραμορφωσιακού πεδίου γύρω από την εκσκαφή υπόγειων ανοιγμάτων.

Τα μοντέλα τα οποία κατασκευάζονται για να προσομοιώσουν προβλήματα γεωμηχανικής δεν αναπαριστούν την πραγματικότητα αλλά δίνουν τα βασικά χαρακτηριστικά της μελετούμενης διαδικασίας που παίζουν σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό και την πρόβλεψη της μηχανικής συμπεριφοράς ενός έργου.

Βοηθάνε την διαίσθηση και τον τρόπο σκέψης του μηχανικού για την εύρεση καλύτερης λύσης με την αναγνώριση σημαντικών για το πρόβλημα φυσικών ποσοτήτων.

Βοηθάνε επίσης στην ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων καθιζήσεων, συγκλίσεων και τάσεων στη γειτονιά υπόγειων έργων και κατόπιν στην εξαγωγή συμπερασμάτων ή και τιμών παραμέτρων του πετρώματος.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο αναλύθηκε στην παρούσα εργασία, επιλύθηκε με την κατασκευή ενός αλγόριθμου βασισμένου στην μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Αν και τα περισσότερα γεωυλικά έχουν συμπεριφορά κάθε άλλη παρά γραμμικά ελαστική, η επίλυση με την θεώρηση των γεωυλικών ως γραμμικά ελαστικά, ομογενή και ισότροπα θεωρήθηκε ως η απλούστερη για μια πρώτη προσέγγιση της μεθοδολογίας των πεπερασμένων στοιχείων και της εφαρμογής αυτών μέσω ενός υπολογιστικού προγράμματος όπως το Matlab.

Η δυσκολότερη διαδικασία ήταν η υπέρθεση των διαφορετικών σταδίων εκσκαφής των γεωυλικών όπου, λόγω της αλλαγής της γεωμετρίας του πεδίου σε κάθε στάδιο, άλλαζε ο αριθμός των στοιχείων του πλέγματος της τριγωνοποίησης και, κατά συνέπεια, η αρίθμηση των κόμβων των στοιχείων. Έτσι, έπρεπε να βρεθεί ο κατάλληλος τρόπος μεταφοράς των τιμών των τάσεων, των μετατοπίσεων, των τροπών και των δυνάμεων από στάδιο σε στάδιο.

Εκ των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι σε μικρά βάθη, κι όταν η εκσκαφή γίνεται σε εδαφικό υλικό, η αυτοϋποστήριξη των υπόγειων ανοιγμάτων είναι αμελητέα, ο χρόνος ζωής είναι σημαντικά μικρός και επιπλέον, το εδαφικό υλικό πρέπει να θεωρηθεί ως ρέον.

Μπορεί να γίνει ακόμα καλύτερη απεικόνιση του μοντέλου του προβλήματος με

- μηδενισμό των τιμών των μετατοπίσεων κατά την υπέρθεση σταδίων
- προσομοίωση της υποστήριξης με χρήση μονοδιάστατων ελατηρίων

## 7.2 Προτάσεις

Ο κώδικας που κατασκευάστηκε μπορεί να αποτελέσει το πρώτο βήμα για την δημιουργία αλγόριθμων που θα μοντελοποιούν την συμπεριφορά εκσκαφής υπόγειων ανοιγμάτων σε πιο περίπλοκα γεωυλικά που διέπονται από ελαστοπλαστική ή τέλεια πλαστική συμπεριφορά και προσεγγίζουν σε μεγαλύτερο βαθμό την πραγματική κατάσταση που λαμβάνει χώρα γύρω από την εκσκαφή μιας σήραγγας ή μιας στοάς.

Συγκεκριμένα, με εφελτήριο την παρούσα μελέτη, έχει ξεκινήσει η μοντελοποίηση της εξόρυξης υπόγειου ανοίγματος σε στάδια σε ελαστικό – τέλεια πλαστικό υλικό που προσομοιώνει τον μηχανισμό αστοχίας του μετώπου σήραγγας όπως έχει προταθεί από τους *Davis et al.* (1980)<sup>[4]</sup> και αναλύεται περαιτέρω από τους *Augarde et al.* (2003)<sup>[1]</sup>.

Επίσης, μπορεί να γίνει μια προσπάθεια για επίλυση του μοντέλου σε τρεις διαστάσεις, κάτι που θα προσέγγιζε περισσότερο την πραγματική κατάσταση του προβλήματος.



# Βιβλιογραφία

## Διεθνής Βιβλιογραφία

- [1] Augarde, C.E., Lyamin, A.V. and Sloan, S.W., (2003), 'Stability of an undrained plane strain heading revisited', Computers and Geotechnics, No 30, pp. 419-430.
- [2] Chen, W.F. and Han, D.J., (1988), 'Plasticity for Structural Engineers', Springer – Verlag New York Inc.
- [3] Chung, J.L., Bing, R.W. and Shean, Y.C., (1999), 'Soil movements around a tunnel in soft soils', Proceedings, National Science Council of R.O.C., Vol. 23, No. 2, pp. 235-247.
- [4] Davis, E.H., Gunn, M.J., Mair, R.J. and Seneviratne, H.N., (1980), 'The Stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material', Geotechnique, No 4, pp. 397-416.
- [5] Desheng, D. and Nguyen-Minh, D., (2003), 'Identification of rock mass properties in elasto-plasticity', Computers and Geotechnics, No 30, pp. 27-40.
- [6] Drescher, A., and Detournay, E., (1993), 'Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials', Geotechnique, No 43, pp. 443-456.
- [7] Fagan, M.J., (1992), 'Finite Element Analysis, Theory and Practice', Longman Group UK.
- [8] Fenner, R.T., (1975), 'Finite Element Methods for Engineers', Imperial College Press.
- [9] Gioda, G., and Locatelli, L., (1999), 'Back Analysis of the measurements during the excavation of a shallow tunnel in sand', International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 23, pp. 1407-1425.
- [10] Hinton, E. and Owen, D.R., (1980), 'An Introduction to Finite Element Computations', Pineridge Press
- [11] Hoek, E., (2004), 'Numerical modeling for shallow tunnels in weak rock', Last reviewed: April, 2004, <http://www.rocscience.com>.

- [12] Jing, L., (2003), 'A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering', International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, No 40, pp. 283-353.
- [13] Novaes De Rezendea, M. and Batista de Paiva, J., (2000), 'A parallel algorithm for stiffness matrix assembling in a shared memory environment', Computers and Structures, No 76, pp. 593-602.
- [14] Rao, S.S., (1989), 'The finite element method in engineering', 2<sup>nd</sup> Edition, Pergamon Press.
- [15] Reddy, J.N., (1984), 'An Introduction to the Finite Element Method', McGraw-Hill Inc.
- [16] Saouma, V.E., (2001), 'Lecture Notes: Finite Element II, Solid Mechanics', University of Colorado, U.S.A.
- [17] Smith, I.M., (1982), 'Programming the Finite Element Method with Application to Geomechanics', John Wiley & Sons Ltd.
- [18] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., (1989), 'The Finite Element Method', 4<sup>th</sup> edition, Vol.1, McGraw-Hill Book Company.

## Ελληνική

- [19] Αγιουτάντης, Ζ.Γ., (2002), 'Στοιχεία Γεωμηχανικής – Μηχανική Πετρωμάτων', Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα.
- [20] Εξαδάκτυλος, Γ. και Σταυροπούλου, Μ., (2004), 'Σχεδιασμός και Μηχανική των Σηράγγων και των Υπογείων Έργων', Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [21] Εξαδάκτυλος, Γ., (2004), 'Εισαγωγή στη θεωρία ελαστικότητας και στη θραυστομηχανική', Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [22] Στειακάκης, Χ. και Αγιουτάντης, Ζ.Γ., (2001), 'Γεωτεχνική Ανάλυση Σηράγγων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων', Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- [23] Φούντας, Γ.Χ., (2003), 'Πεπερασμένα Στοιχεία με το MATLAB', Εκδόσεις Fountas, Αθήνα.