



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Εντατικοπαραμορφωσιακή Ανάλυση Συστημάτων Υπογείων
Ανοιγμάτων με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων»

ΞΗΡΟΥΔΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Γ. Εξαδάκτυλος, Καθηγητής (επιβλέπων)

Ζ. Αγιουτάντης, Καθηγητής

Κ. Προβιδάκης, Αν. Καθηγητής

ΧΑΝΙΑ
Οκτώβριος 2004

Περίληψη

Η εργασία αυτή έχει ως αντικείμενο την μελέτη της εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης συστημάτων πολλαπλών υπογείων ανοιγμάτων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.

Η πρόβλεψη της μεταβολής του πεδίου των τάσεων και των μετατοπίσεων που προκαλούνται από υπόγειες εκμεταλλεύσεις και σήραγγες, είναι αναγκαία κατά τον σχεδιασμό οποιουδήποτε υπόγειου έργου.

Η ανάλυση του προβλήματος έγινε με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, και συγκεκριμένα με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων, για ελαστικό και ισότροπο μέσο σε δύο διαστάσεις. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε ως βάση ο ήδη υπάρχων, στη διεθνή βιβλιογραφία, αλγόριθμος TWODD (*Crouch&Starfield, 1990*). *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*)

Καταυτόν τον τρόπο κατασκευάστηκαν:

- κώδικας στο υπολογιστικό πακέτο MATLAB με βάση τον ήδη υπάρχοντα αλγόριθμο
- ειδικός κώδικας συνοριακών στοιχείων για την περίπτωση αντί-επίπεδης παραμόρφωσης (anti-plane strain)
- προεπεξεργαστής για τη γρήγορη εισαγωγή των συνόρων των εκσκαφών μέσω του σχεδιαστικού προγράμματος AUTOCAD
- μετά-επεξεργαστής για παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τη μορφή διαγραμμάτων και ισοχρωματικών επιφανειών κ.λπ.

Η δέσμη προγραμμάτων που δημιουργήθηκε μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για το σχεδιασμό υπογείων έργων σε γραμμικά ελαστικά πετρώματα και για την ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων παραμορφώσεων ή τάσεων σε σήραγγες για την εκτίμηση των επί τόπου τάσεων και του μέτρου ελαστικότητας της βραχώμαζας.

Πρόλογος

Για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής θα ήθελα πρωταρχικά να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου για την πολύτιμη συμβολή, στους :

- **Στον κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο**, Καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας αυτής, για την άριστη συνεργασία που είχαμε και τις πολύτιμες συμβουλές κατά τη πραγματοποίησή της.
- **Στον κ. Ζαχαρία Αγιουτάντη**, Καθηγητή για το χρόνο που διέθεσε στη διόρθωση και στην εξέταση της παρούσας εργασίας αλλά και για τις χρήσιμες πληροφορίες του.
- **Στον κ. Κωνσταντίνο Προβιδάκη**, Αναπληρωτή Καθηγητή για το χρόνο που διέθεσε στη διόρθωση και στην εξέταση της παρούσας εργασίας .

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του εργαστηρίου «Μελέτης και Σχεδιασμού Γεωεκμεταλλεύσεων», **Βασίλη Ασημίδη, Παντελή Λιόλιο και Πρεπή Μπαραδάκη** για τη βοήθειά τους πάνω στις εντολές του προγράμματος MATLAB, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές τους, που ήταν καθοριστικές για την υλοποίηση της εργασίας αυτής. Επίσης, καθοριστικές ήταν οι παρατηρήσεις του **Γιώργου Σαράτση** για την μορφοποίηση της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την **Μαρία Τσούτσουβα** για την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά τη δημιουργία του κώδικα TWODD στο MATLAB, αλλά και για την ηθική και ψυχολογική υποστήριξη κατά την αντιμετώπιση των όποιων δυσκολιών.

Χανιά, Οκτώβρης 2004

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων & Σχημάτων	VI
1. Εισαγωγή	1
2. Θεωρία Ελαστικότητας	3
2.1 Τάση	4
2.2 Διανύσματα Επιφανειακής Τάσης.....	6
2.3 Παραμόρφωση.....	6
2.4 Καταστατικός Νόμος του Hooke.....	8
2.5 Ελαστικότητα σε Δύο Διαστάσεις.....	10
2.5.1 Επίπεδη Τάση.....	10
2.5.2 Επίπεδη Παραμόρφωση	11
2.5.3 Μετασχηματισμός Συντεταγμένων.....	12
2.6 Ανοίγματα σε Άπειρο Ελαστικό Μέσο.....	14
3. Μέθοδος των Ασυνεχών Μετατοπίσεων	18
3.1. Εισαγωγή.....	19
3.2. Μέθοδος των Ασυνεχών Μετατοπίσεων.....	24
3.3. Γενίκευση της Μεθόδου	28
3.4. Εσωτερικά/ Εξωτερικά Προβλήματα.....	32
3.5. Σύστημα Επίλυσης	33
3.6. Αντί – Επίπεδη Φόρτιση	34
4. Πρόγραμμα Επίλυσης	39
4.1. Εισαγωγή	40
4.2. Εισαγωγή Δεδομένων	42
4.2.1. Σχεδιασμός στο AutoCAD.....	42
4.2.2. Εισαγωγή Γεωμετρίας	44
4.2.3. Παράμετροι Υλικού, Συνοριακές Συνθήκες και Τάσεις	46
4.3. Επίλυση	46
4.4. Εξαγωγή Αποτελεσμάτων	47

4.4.1. Πίνακες Αποτελεσμάτων	47
4.4.2. Γραφικές Παραστάσεις	52
5. Υπολογιστικά Παραδείγματα	53
5.1. Εισαγωγή	54
5.2. Ανοίγματα Απλών Διατομών	54
5.2.1. Κυκλικό Άνοιγμα.....	54
5.2.2. Τετραγωνικό Άνοιγμα	60
5.2.3. Ελλειπτικό Άνοιγμα	63
5.3. Εντατική Κατάσταση Λόγω Ύπαρξης Περισσοτέρων Ανοιγμάτων	65
6. Συμπεράσματα – Προτάσεις	69
Βιβλιογραφία	72
Παράρτημα Α	73

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 3:

3.1 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα Αριθμητικών Μεθόδων.....	23
--	----

Κεφάλαιο 4:

4.1 Δεδομένα Εισόδου.....	48
4.2 Γεωμετρία Συνοριακών Στοιχείων – Συνοριακές Συνθήκες.....	50
4.3 Αποτελέσματα στα Κέντρα των Συνοριακών Στοιχείων.....	50
4.4 Αποτελέσματα-Συνοριακές Συνθήκες σε Αντί-Επίπεδη Φόρτιση	51

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 2:

2.1 Τανυστής Τάσεων στο Oxy	4
2.2 Σύμβαση Πρόσημων των Τάσεων	5
2.3 Διάνυσμα Επιφανειακής Τάσης.....	6
2.4 Διατμητική Παραμόρφωση	7
2.5 Θεώρηση Επίπεδης Τάσης	11
2.6 Μετασχηματισμός Συντεταγμένων	13
2.7 Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων για τις Τάσεις	13

Κεφάλαιο 3:

3.1 Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Γεωμηχανικών Προβλημάτων.....	20
3.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	21
3.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών	21
3.4 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων	22
3.5 Ασυνέχεια Εντός Απειρου Ελαστικού Μέσου.....	25
3.6 Ασυνεχείς Μετατοπίσεις D_x και D_y	26
3.7 Καμπυλόγραμμο Σύνορο.....	29
3.8 Περιγραφή Κλειστού Περιγράμματος	32
3.9 Αντί-Επίπεδη Φόρτιση.....	35

Κεφάλαιο 4:

4.1	Δενδρόγραμμα Ροής Προγράμματος DDBE2D	41
4.2	Διακριτοποίηση Συνόρου	42
4.3	Σχεδιασμός Ανοίγματος στο AutoCAD.....	43
4.4	Σταθεροποίηση Εσωτερικής Περιοχής	43
4.5	Μελέτη Μέσα στο Σώμα σε Συγκεκριμένες Κατευθύνσεις.....	44
4.6	Τριγωνικό Πλέγμα Γύρω από Κυκλικό Άνοιγμα	45
4.7	Τριγωνικό Πλέγμα Γύρω από Ευθύγραμμη Ρωγμή	45

Κεφάλαιο 5:

5.1	Διαγράμματα Σύγκρισης Τάσεων με την Λύση Kirsch. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με 12 Στοιχεία.....	54
5.2	Διαγράμματα Σύγκρισης Μετατοπίσεων. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με (12) Στοιχεία	55
5.3	Διαγράμματα Σύγκρισης Τάσεων με την Λύση Kirsch. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με 24 Στοιχεία.....	55
5.4	Διαγράμματα Σύγκρισης Μετατοπίσεων. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με (24) Στοιχεία	56
5.5	Διαγράμματα Σύγκρισης Τάσεων με την Λύση Kirsch. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με 96 Στοιχεία	56
5.6	Διαγράμματα Σύγκρισης Μετατοπίσεων. Για Άνοιγμα Σχεδιασμένο με (96) Στοιχεία.	57
5.7	Κύριες Τάσεις σ_1 - σ_2 Γύρω από Κυκλικό Άνοιγμα.....	58
5.8	Μετατόπιση στα Σύνορα του Ανοίγματος.....	59
5.9	Τάσεις σ_s και σ_n στα Σύνορα του Ανοίγματος	59
5.10	Μετατοπίσεις u_x - u_y , σε Τετραγωνικό Άνοιγμα.....	60
5.11	Σύγκριση Μέγιστης Κύριας Τάσης	61
5.12	Σύγκριση Ελάχιστης Κύριας Τάσης	61
5.13	Μετατοπίσεις στο Σύνορο του Τετραγωνικού Ανοίγματος	62
5.14	Σύγκριση Μέγιστης Κύριας Τάσης Για Ελλειπτικό Άνοιγμα.....	63
5.15	Σύγκριση Ελάχιστης Κύριας Τάσης Για Ελλειπτικό Άνοιγμα.....	63
5.16	Μετατοπίσεις Λόγω ύπαρξης Δύο Τετραγωνικών Ανοιγμάτων.....	65
5.17	Υπέρθωση των Τάσεων Στην Περιοχή του Στύλου.....	66

5.18 Διακριτοποίηση Περιοχής με Πολλαπλά Ανοίγματα.....	67
5.19 Κύριες Τάσεις Κατά την Ανάπτυξη της Μεθόδου Θαλάμων και Στύλων.....	67

Παράρτημα:

A.1 Ακανόνιστη Διατομή.....	74
A.2 Κύριες Τάσεις γύρω από Ακανόνιστο Άνοιγμα.....	74
A.3 Κύριες Τάσεις σε Αψιδωτό Άνοιγμα.....	75
A.4 Κύριες Τάσεις σε Ημικυκλικό Άνοιγμα.....	75
A.5 Μετατοπίσεις στον x και τον y άξονα, του Προγράμματος «Phases».....	76
A.6 Υπολογισμός Κυρίων Τάσεων με το Πρόγραμμα «Phases».....	76
A.7 Τρόπος Φόρτισης Ανοίγματος σε Αντί Επίπεδο Τασικό Πεδίο.....	77
A.8 Μετατόπιση Κατά τον Άξονα Z	77
A.9 Αντί-Επίπεδες Τάσεις σ_{xz} - σ_{yz}	77

Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή

1. Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή εξετάζεται το εντατικό πεδίο και οι μετατοπίσεις γύρω από ανοίγματα με διάφορες διατομές που χρησιμοποιούνται στην πράξη, με την βοήθεια των αριθμητικών μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα εξετάζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις, στην περίπτωση διάνοιξης εκσκαφών μέσα σε γραμμικά ελαστικό και συνεχές πέτρωμα, σε δύο διαστάσεις.

Η επίλυση αυτών των προβλημάτων έγινε με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και συγκεκριμένα των ασυνεχών μετατοπίσεων. Η μέθοδος αυτή είναι αποτελεσματική στην ανάλυση της εντατικής κατάστασης υπόγειων εκσκαφών σε άπειρο ελαστικό μέσο. Επιπλέον παρουσιάζει το συγκριτικό πλεονέκτημα, του ότι υποβαθμίζει τις διαστάσεις του προβλήματος και έτσι χρειάζεται λιγότερο υπολογιστικό χρόνο και χώρο, έχοντας παράλληλα συγκρίσιμη ακρίβεια με τις υπόλοιπες αριθμητικές μεθόδους.

Για τον σκοπό αυτής της εργασίας κατασκευάστηκε υπολογιστικό πρόγραμμα σε γλώσσα «Matlab», βασισμένο στο πρόγραμμα «TWODD» (*Crouch & Starfield, 1990*). Η εισαγωγή της γεωμετρίας γίνεται με την βοήθεια του σχεδιαστικού πακέτου «AutoCAD», με τον τρόπο αυτό γίνεται απλούστερη η εισαγωγή των δεδομένων του προβλήματος. Στο πρόγραμμα αυτό συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση αντί-επίπεδης φόρτισης.

Για την επαλήθευση της ορθότητας των λύσεων του προγράμματος έγινε σύγκριση με την αναλυτική λύση του Kirsch, με τις ημι-αναλυτικές λύσεις των μιγαδικών δυναμικών (*Λιόλιος, 2002*) αλλά και με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από άλλες αριθμητικές μεθόδους (Phases).

Κεφάλαιο 2^ο:
Θεωρία της Ελαστικότητας

2. Θεωρία της Ελαστικότητας

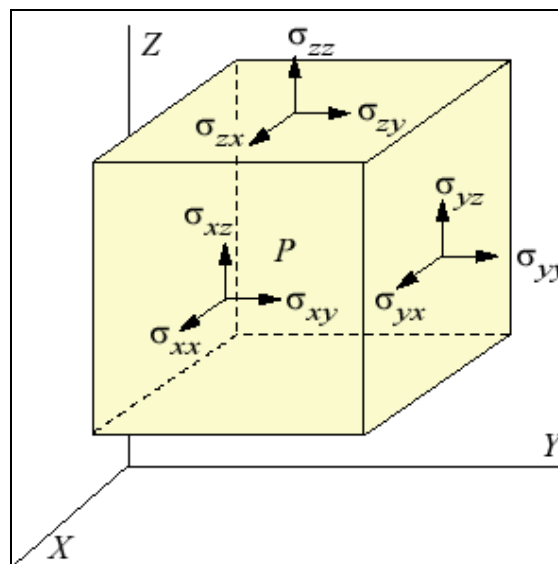
2.1 Τάση

Η τάση είναι μια βασική έννοια στην μηχανική και χρησιμοποιείται για να εκφράσει ποσοτικά τις δυνάμεις που διαβιβάζονται μέσω ενός στερεού, συνεχούς σώματος. Η τάση σε οποιοδήποτε επιφάνεια ορίζεται ως η ασκούμενη δύναμη δια το εμβαδόν της επιφάνειας και μετράται σε μονάδες Pa (N/m²).

$$\sigma_i = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta s} \quad (2.1)$$

Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο περιγράφεται από ένα τανυστή δευτέρας τάξεως, ο οποίος αποτελείται από εννέα συνιστώσες (σχήμα 2.1) και συμβολίζεται με σ_{ij} και για το σύστημα συντεταγμένων Oxy και δίδεται από την εξής σχέση:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

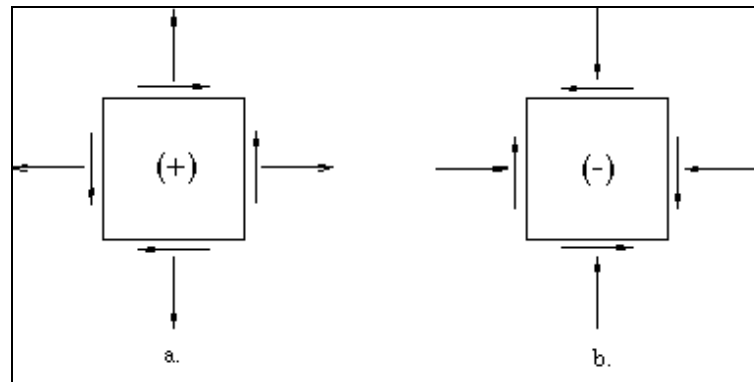


Σχήμα 2.1: Τανυστής τάσεων στο Oxy

Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή ($i = j$) είναι οι ορθές τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} και είναι θετικές όταν είναι εφελκυστικές. Ενώ οι υπόλοιποι όροι του τανυστή ($i \neq j$) είναι οι διατμητικές τάσεις που δρουν στα τρία επίπεδα του σχήματος 2.1. Για να είναι το σώμα σε ισορροπία (μηδενικές ροπές), πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2 \text{ ή } 3) \quad (2.3)$$

Οι διατμητικές τάσεις, είναι θετικές εάν ενεργούν στη θετική ισότιμη κατεύθυνση (x, y, z) στην εξωτερική (θετική πλευρά) ή εάν ενεργούν αντίθετα της θετικής φοράς στην εσωτερική (αρνητική πλευρά).



Σχήμα 2.2: Σύμβαση πρόσημων των τάσεων

Επίσης οι συνιστώσες του τανυστή τάσης πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Οι εξισώσεις 2.2 είναι οι εξισώσεις ισορροπίας. Από τις εννέα συνιστώσες που έχει ο τανυστής τάσης μόνο έξι από αυτές είναι ανεξάρτητες:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \text{ και } \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$$

2.2. Διάνυσμα Επιφανειακής Τάσης

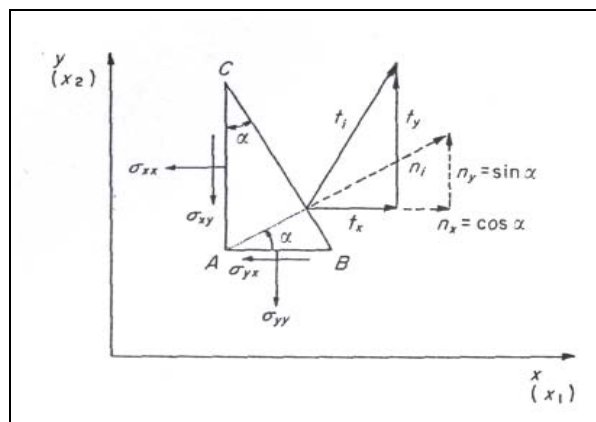
Σε πολλές εφαρμογές, είναι συχνά απαραίτητο να υπολογιστούν οι τάσεις που ενεργούν σε ένα επίπεδο αυθαίρετου προσανατολισμού ως προς $Oxyz$. Οι τάσεις αυτές είναι διάνυσμα που καλείται διάνυσμα ελκυστού (traction vector) με συμβολισμό $t_j = (t_x, t_y, t_z)$ και μπορεί να προσδιορισθεί με το εσωτερικό γινόμενο του τανυστή τάσης με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου (εξίσωση του Cauchy):

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.5)$$

Στις δύο διαστάσεις ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha \\ t_y &= \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου: α η γωνία που φαίνεται στο σχήμα 2.3 που ακολουθεί:



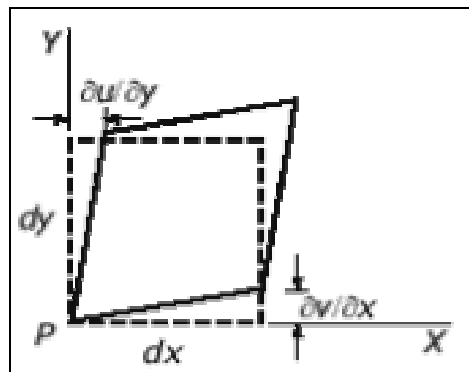
Σχήμα 2.3: Διάνυσμα επιφανειακής τάσης
(Crouch & Starfield, 1990)

2.3. Παραμόρφωση

Η έννοια της παραμόρφωσης χρησιμοποιείται για την ποσοτικοποίηση των αλλαγών του όγκου και του σχήματος ενός στερεού, συνεχούς σώματος όταν αυτό υποβάλλεται σε ένα εντατικό πεδίο. Η παραμόρφωση αντιπροσωπεύει την αλλαγή της γεωμετρίας και εμφανίζεται όταν διάφορα σημεία στο σώμα μετατοπίζονται το ένα σχετικά με το άλλο.

Υπάρχουν δύο τύποι παραμόρφωσης με τους οποίους μπορεί να παραμορφωθεί ένα στερεό σώμα και αυτοί είναι:

- Η ορθή παραμόρφωση, η οποία αντιπροσωπεύει την αλλαγή του μήκους ενός μικρού γραμμικού στοιχείου δια το μήκος του, δηλ. είναι ένα αδιάστατο μέγεθος.
- Η διατμητική παραμόρφωση δίδεται με την αλλαγή της γωνίας (σε rad) μεταξύ δύο μικρών γραμμικών στοιχείων που ήταν αρχικά κάθετα μεταξύ τους (σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Διατμητική παραμόρφωση

Η κατάσταση της παραμόρφωσης σε ένα σημείο σε ένα σώμα ορίζεται από τον ταυοστή των τροπών και καθορίζεται από τις μετατοπίσεις $u_i = (u_x, u_y, u_z)$, ως εξής:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (2.7) \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}\end{aligned}$$

Οι ορθές τροπές είναι θετικές όταν υπάρχει αύξηση του μήκους, ενώ οι διατμητικές τροπές είναι θετικές όταν μια γωνιά μεταξύ δυο αρνητικών ή δύο θετικών αξόνων μικραίνει.

Από τις σχέσεις 2.7 φαίνεται ότι οι έξι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή των τροπών προκύπτουν από τις τρεις συνιστώσες της μετατόπισης. Έτσι πρέπει να επιβληθούν κάποιοι περιορισμοί ώστε να είναι συμβατές οι τροπές. Οι εξισώσεις που ακολουθούν εξασφαλίζουν το συμβιβαστούν των τροπών και είναι:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.4. Καταστατικός Νόμος του Hooke

Ελαστική συμπεριφορά παρουσιάζει ένα σώμα, το οποίο όταν αφαιρεθούν οι τάσεις που του ασκούνται, τότε αυτό επανέρχεται στις αρχικές του διαστάσεις.

Η κλασσική θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας είναι βασισμένη σε μια γενίκευση του νόμου του Hooke, η οποία αρχικά διατυπώθηκε για ένα μονοδιάστατο φορέα. Ο νόμος αυτός αποκαλείται γενικευμένος Hooke και δηλώνει ότι σε κάθε σημείο ενός τρισδιάστατου, γραμμικά ελαστικού σώματος τα έξι συστατικά του τανυστή τάσης, σ_{ij} , συσχετίζονται γραμμικά με τα έξι συστατικά του τανυστή των τροπών ε_{ij} . Οι σταθερές αναλογίας που σχετίζουν τα δύο αυτά μεγέθη, αφορούν τις ιδιότητες του υλικού και είναι (Αγιουτάντης, 2002):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl} \quad (2.9)$$

Ο C_{ijkl} είναι ένας τανυστής τέταρτης τάξης με 81 όρους, όπου 36 από αυτούς είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Όλοι οι όροι του τανυστή αυτού μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των ελαστικών σταθερών του Lamé (λ, μ), στην περίπτωση του ομογενούς και ισότροπου υλικού.

Υπάρχουν άλλες τρεις ελαστικές σταθερές που χρησιμοποιούνται και σχετίζονται με τις δύο αυτές παραμέτρους, οι οποίες είναι:

➤ Ο λόγος του Poisson, $\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$, είναι αδιάστατος και κυμαίνεται στα

πετρώματα από 0.20-0.35.

➤ Το μέτρο ελαστικότητας του Young, E , που στην γενική περίπτωση ορίζεται από την κλίση της τάσης – ανηγμένης τροπής και έχει διαστάσεις τάσης.

➤ Το μέτρο διάτμησης ή μέτρο ακαμψίας, $G = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu}$.

Έτσι οι σχέσεις που ισχύουν μεταξύ τάσεων-παραμορφώσεων για ένα ισότροπο, γραμμικά ελαστικό υλικό μπορούν να γραφτούν με την μορφή:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Από τις σχέσεις 2.10 εάν είναι γνωστές οι παραμορφώσεις και ζητούνται οι τάσεις προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{xx} + \nu (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\
\sigma_{yy} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{yy} + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\
\sigma_{zz} &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{zz} + \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\
\sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\
\sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} \\
\sigma_{yz} &= 2G \varepsilon_{yz}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.5. Ελαστικότητα σε Δύο Διαστάσεις

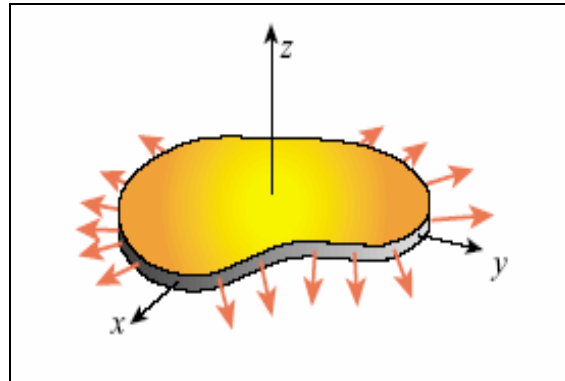
Η μελέτη των περισσότερων προβλημάτων στην μηχανική σε τρεις διαστάσεις, είναι πολύ δύσκολη. Έτσι η επίλυση τους γίνεται σε δύο διαστάσεις παίρνοντας ορισμένες παραδοχές. Οι παραδοχές αυτές είναι: Η παραδοχή επίπεδης τάσης και η παραδοχή της επίπεδης παραμόρφωσης, οι οποίες αναλύονται παρακάτω:

2.5.1. Επίπεδη Τάση

Ως επίπεδη τάση, καλείται ένα πεδίο τάσης δυο διαστάσεων όπου όλες οι τάσεις που συνδέονται με την τρίτη διάσταση είναι μηδέν. Έτσι στο επίπεδο Oxy οι τάσεις $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ είναι μηδέν. Έτσι στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις 2.10 γίνονται:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Η παραδοχή αυτή χρησιμοποιείται στην περίπτωση που η τρίτη διάσταση (z) είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις (σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Θεώρηση επίπεδης τάσης

2.5.2. Επίπεδη Παραμόρφωση

Ένα σώμα λέγεται ότι είναι σε κατάσταση επίπεδης παραμόρφωσης στο σύστημα Oxy , εάν η συνιστώσα της μετατόπισης του διανύσματος u_i , είναι μηδέν στον z άξονα (u_z) και οι συνιστώσες u_x και u_y είναι ανεξάρτητες από τη συντεταγμένη z . Από τις (2.7) προκύπτουν οι παραμορφώσεις $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$, ενώ οι μη μηδενικές τροπές είναι ανεξάρτητες από τον άξονα z και δίδονται ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Από τις σχέσεις αυτές εύκολα προκύπτει η συνθήκη συμβιβαστούν των τροπών σε δύο διαστάσεις (Εξαδάκτυλος, 2001):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

Οι τάσεις στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης συνδέονται με τις τροπές σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\
\sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\
\sigma_{zz} &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\
\sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

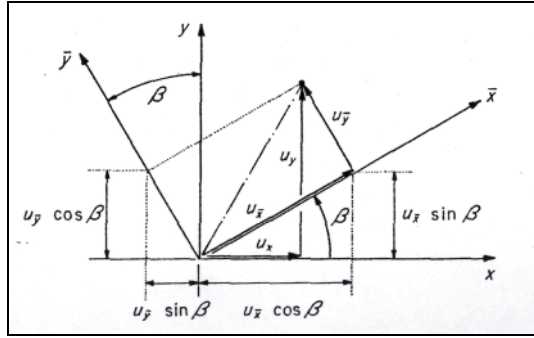
Από τις δυο τελευταίες λύσεις φαίνεται ότι τα αποτελέσματα που παράγονται είναι διαφορετικά για τις δυο θεωρήσεις, παρόλο αυτά υπάρχει μια συσχέτιση των αποτελεσμάτων θέτοντας $\nu = \frac{\nu'}{\nu' + 1}$ και $G = G'$, που φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2 G' \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu'}{1-\nu'} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2 G'} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu'}{\nu'+1} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.5.3. Μετασχηματισμός Συντεταγμένων

Στις περισσότερες εφαρμογές της μηχανικής είναι απαραίτητη η χρήση δύο διαφορετικών Καρτεσιανών συστημάτων (σχήμα 2.6).

Οι μετατοπίσεις u_x και u_y του συστήματος αναφοράς Oxy μπορούν να υπολογιστούν από τις συνιστώσες u'_x και u'_y του συστήματος αναφοράς $Ox'y'$, χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις (2.17) που προκύπτουν από το σχήμα 2.6 (ευθύς μετασχηματισμός):



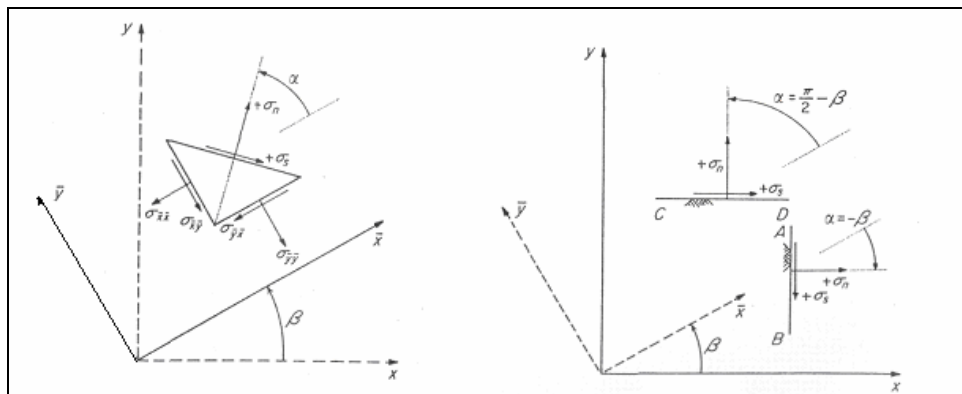
Σχήμα 2.6: Μετασχηματισμός συντεταγμένων
(Crouch & Starfield, 1990)

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x \cos \beta - u'_y \sin \beta \\ u_y &= u'_x \sin \beta + u'_y \cos \beta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Αντίστοιχα μπορούν να προκύψουν οι μετατοπίσεις του συστήματος $Ox'y'$ από τις μετατοπίσεις του Oxy , με τον αντίστροφο μετασχηματισμό που είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x \cos \beta + u_y \sin \beta \\ u'_y &= -u_x \sin \beta + u_y \cos \beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ο υπολογισμός των μετασχηματισμών των τάσεων σε δύο διαστάσεις φαίνεται στο σχήμα 2.7 και τις σχέσεις 2.19:



Σχήμα 2.7: Μετασχηματισμοί συντεταγμένων για τις τάσεις.
(Crouch & Starfield, 1990)

$$\begin{aligned} \sigma_s &= (\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \sin a \cos a - \sigma'_{xy} (\cos^2 a - \sin^2 a) \\ \sigma_n &= \sigma'_{xx} \cos^2 a + 2\sigma'_{xy} \sin a \cos a + \sigma'_{yy} \sin^2 a \end{aligned} \quad (2.19)$$

Από το σχήμα 2.7 β και την σχέση 2.19 προκύπτουν οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων για τις τάσεις.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma'_{xx} \cos^2 \beta - 2\sigma'_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma'_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma'_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ \sigma_{yy} &= \sigma'_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma'_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma'_{yy} \cos^2 \beta\end{aligned}\quad (2.20)$$

Ενώ αντίστοιχα ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma'_{yy} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\ \sigma'_{xy} &= \sigma'_{yx} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\end{aligned}\quad (2.21)$$

2.6. Ανοίγματα σε Άπειρο Ελαστικό Μέσο

Εκσκαφές μέσα σε πετρώματα γίνονται για διάφορους λόγους, όπως είναι η εκμετάλλευση υπογείων κοιτασμάτων, γεωτρήσεις είτε για την δημιουργία υπόγειων οδικών σηράγγων. Τα ανοίγματα που κατασκευάζονται έχουν διάφορες διατομές ανάλογα με την χρήση που προορίζονται. Μερικές από τις πιο κοινές διατομές που χρησιμοποιούνται στην διάνομιξη υπόγειων εκσκαφών είναι:

- οι κυκλικές ή ημικυκλικές
- οι ελλειπτικές,
- οι ορθογωνικές,
- οι τραπεζοειδείς
- οι αψιδωτές
- καθώς και συνδυασμός αυτών.

Ανεξάρτητα της χρήσης και της γεωμετρίας, η ύπαρξη ενός ανοίγματος έχει σαν αποτέλεσμα την διαταραχή του αρχικού εντατικού πεδίου. Λόγω αυτού δημιουργούνται παραμορφώσεις που μπορούν να οδηγήσουν σε αστοχία του υλικού. Πρέπει να σημειωθεί ορισμένες περιπτώσεις από της μεθόδους εκμετάλλευσης αφήνεται το πέτρωμα να παραμορφωθεί ελεύθερα αμέσως μετά την εξόρυξη του μεταλλεύματος (μέθοδοι κατακρήμνισης οροφής), αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις χρειάζεται υποστήριξη του ανοίγματος.

Για τον λόγω αυτό είναι απαραίτητη η μελέτη των τάσεων πριν και μετά την διάνοιξη των ανοιγμάτων. Οι τάσεις στα υπόγεια ανοίγματα οφείλονται κυρίως σε (Αγιουτάντης, 2002):

- Σε βαρυτικές τάσεις, δηλαδή τάσεις που προκαλεί η μάζα των υπερκειμένων λόγω του πεδίου βαρύτητας: $\sigma_v = \gamma h$, γ το ειδικό βάρος του πετρώματος και h το ύψος των υπερκειμένων.
- Στην δράση τεκτονικών δυνάμεων.
- Οι παραμένουσες τάσεις που προκαλούνται από φυσικές και χημικές διεργασίες όπως την ανομοιομορφη ψύξη του μάγματος.

Οι οριζόντιες τάσεις εξαρτώνται από τις κατακόρυφες σύμφωνα με την σχέση:

$$\sigma_h = K \sigma_v \quad (2.22)$$

όπου K ο συντελεστής πλευρικής ώθησης που συνδέεται με τον λόγω του poisson με την σχέση:

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.23)$$

ο λόγος του Poisson ν και το K θεωρητικά κυμαίνονται :

$$0 \leq \nu \leq 0.5 \Rightarrow 0 \leq K \leq 1$$

Για την μοντελοποίηση του προβλήματος των υπόγειων εκσκαφών έχουν αναπτυχθεί αναλυτικές λύσεις βασισμένες στην θεώρηση γραμμικής ελαστικότητας, για ανοίγματα με απλές γεωμετρίες σε άπειρο ομογενές και ισότροπο μέσο, στην περίπτωση των δύο διαστάσεων. Με βάση αυτές τις παραδοχές, για την απλή γεωμετρία του κυκλικού

ανοίγματος, βρέθηκαν αναλυτικές λύσεις από τον Kirsch (Αγιουτάντης, 2002) οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \left[\frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} \right] \left[1 - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] + \left[\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \right] \left[1 - \frac{4\alpha^2}{r^2} + \frac{3\alpha^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left[\frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} \right] \left[1 + \frac{\alpha^2}{r^2} \right] - \left[\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \right] \left[1 + \frac{3\alpha^4}{r^4} \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left[\frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \right] \left[1 + \frac{2\alpha^2}{r^2} - \frac{3\alpha^4}{r^4} \right] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (2.24)$$

όπου:

σ_v η κατακόρυφη τάση

σ_h η οριζόντια τάση

α η ακτίνα του ανοίγματος

r η απόσταση από το κέντρο του ανοίγματος

θ η γωνία από τον άξονα x

όσον αφορά τις μετατοπίσεις οι σχέσεις που ισχύουν είναι (Αγιουτάντης, 2002):

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{P\alpha^2}{4Gr} \left[(1+k) - (1-k) \left\{ 4(1-\nu) - \frac{\alpha^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right] \\ u_\theta &= \frac{P\alpha^2}{4Gr} \left[(1-k) \left[2(1-2\nu) + \frac{\alpha^2}{r^2} \right] \sin 2\theta \right]\end{aligned}\quad (2.25)$$

όπου G το μέτρο διάτμησης

Οι αναλυτικές λύσεις είναι χρήσιμες για την εκτίμηση της εντατικής κατάστασης σε υπόγεια έργα. Εκτός αυτού η ύπαρξη αναλυτικών λύσεων σε στοιχειώδη προβλήματα μπορεί να είναι χρήσιμο στην ανάπτυξη και επαλήθευση των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης, ώστε να μπορέσουν να μελετηθούν περιπλοκότερα προβλήματα στην γεωμηχανική, όπως στην περίπτωση που υπάρχουν παραπάνω από ένα ανοίγματα (π.χ. δίδυμες σήραγγες-υπόγειες εκμεταλλεύσεις).

Η θεώρηση του συνεχούς μέσου είναι μια εξιδανικευμένη παραδοχή καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις στα πετρώματα στα οποία διανοίγονται τα ανοίγματα, υπάρχουν περιοχές με διαφορετικές ιδιότητες από το κυρίως πέτρωμα (συνήθως ασθενέστερες), τέτοιες περιοχές είναι η ύπαρξη ρωγμών, ρηγμάτων και διακλάσεων που με μια λέξη περιγράφονται ως ασυνέχειες. Οι ασυνέχειες δημιουργούνται λόγω της στρωσιγένειας των σχηματισμών που προήλθαν από ιζηματογενή πετρώματα, από χημική ή φυσική αποσάθρωση, είτε λόγω τεκτονικής .

Για την ανάλυση των περιπτώσεων ύπαρξης: είτε περισσότερων από του ενός ανοιγμάτων, είτε για την ανάλυση από την επίδραση ασυνεχειών τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκαν οι αριθμητικές μέθοδοι, καθώς οι αναλυτικές λύσεις είναι δύσκολο να βρεθούν σε αυτές τις περιπτώσεις.

Κεφάλαιο 3^ο:
Μέθοδος των Ασυνεχών Μετατοπίσεων

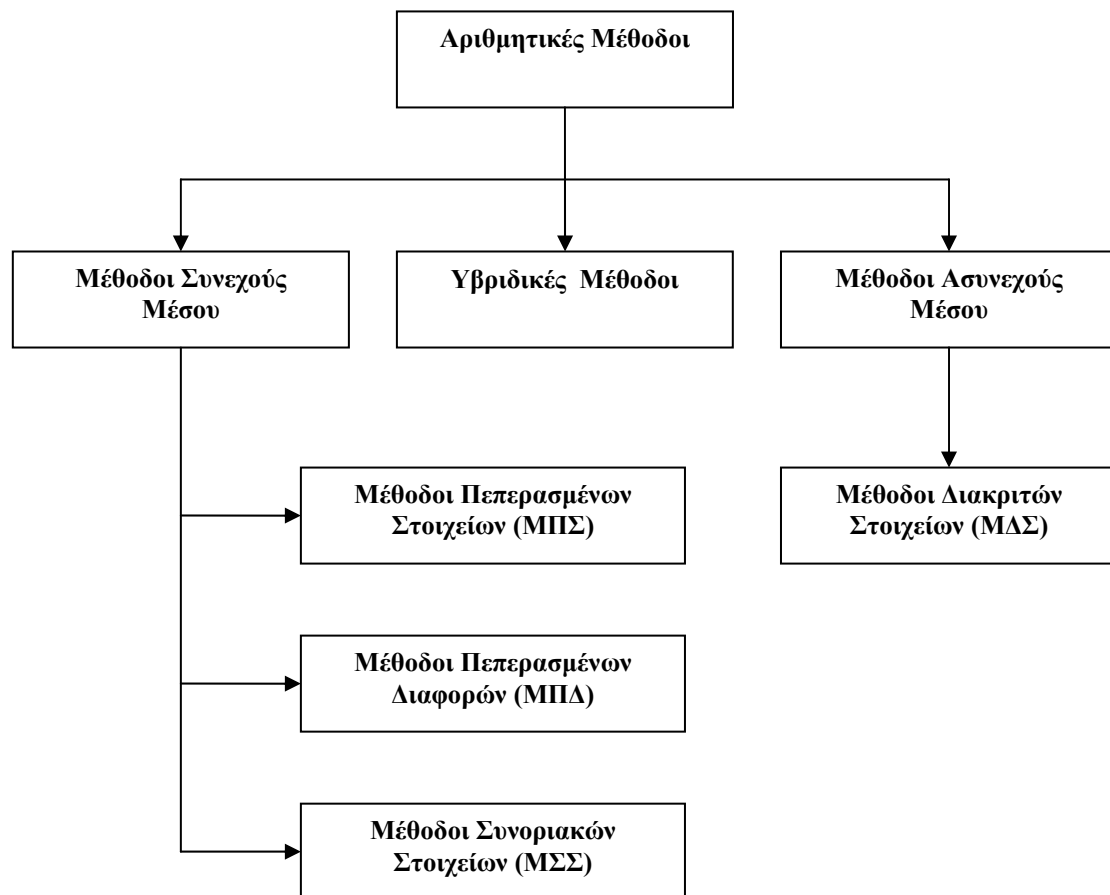
3. Μέθοδος των Ασυνεχών Μετατοπίσεων

3.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, όπου η τεχνολογία εξόρυξης έχει αναπτυχθεί και συνεχώς δημιουργούνται καινούριες μέθοδοι διάνοιξης εκσκαφών, γίνεται απαραίτητη η μελέτη και η πρόβλεψη της εντατικής κατάστασης γύρω από τα ανοίγματα. Η ανάλυση αυτή μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους: τις αναλυτικές και τις αριθμητικές.

Οι αναλυτικές λύσεις έχουν μελετηθεί διεξοδικά και λόγω του ότι χρησιμοποιούν πολύπλοκα μαθηματικά, είναι δύσκολο να επιλύσουν περίπλοκα προβλήματα. Γι' αυτό το λόγο τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί και διαδοθεί οι αριθμητικές μέθοδοι, οι οποίες μπορούν να επιλύσουν σύνθετα προβλήματα γρήγορα και με ακρίβεια συγκρίσιμη με των αναλυτικών.

Οι πιο γνωστές από τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τα προβλήματα γεωμηχανική φαίνονται στο δενδρόγραμμα του σχήματος 3.1:

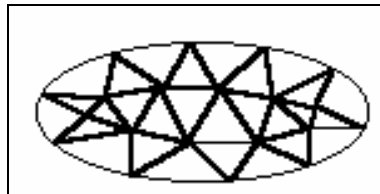


Σχήμα 3.1: Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης γεωμηχανικών προβλημάτων
(Αγιουτάντης, 2002)

Τα βασικότερα χαρακτηριστικά των μεθόδων αυτών είναι:

➤ **Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ):**

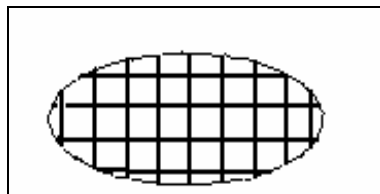
Στην μέθοδο αυτή όλη η περιοχή R διαιρείται σε ένα δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων (σχήμα 3.2). Στους κόμβους του πλέγματος που δημιουργείται, λύνεται ένα σύστημα αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και που εξασφαλίζουν την ισορροπία μεταξύ των στοιχείων. Οι λύσεις στην ενδιάμεση περιοχή των στοιχείων υπολογίζεται με παρεμβολή (γραμμική ή μη-γραμμική). Στις δύο διαστάσεις τα στοιχεία μπορούν να είναι: Τρι-κομβικά (τριγωνικά) – Τέτρα-κομβικά – Πολύ-κομβικά ή και συνδυασμός αυτών.



Σχήμα 3.2: Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Martel, 2003)

➤ **Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (ΜΠΔ):**

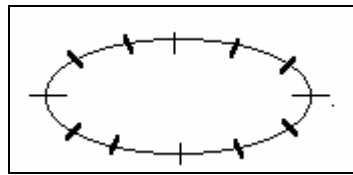
Ο χώρος στην περίπτωση αυτή διαιρείται σε ένα ομοιόμορφο κάνναβο στοιχείων (σχήμα 3.3). Έτσι η λύση προκύπτει από την λύση αλγεβρικών εξισώσεων σε κάθε σημείο του καννάβου. Η διαφορική εξίσωση σε κάθε κόμβο εκφράζεται με βάση την συνάρτηση σε αυτό το σημείο και την παράγωγο (πεπερασμένη διαφορά) της συνάρτησης γύρω από το σημείο αυτό.



Σχήμα 3.3: Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Martel, 2003)

➤ **Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ):**

Η μέθοδος αυτή ανήκει στις ολοκληρωτικές μεθόδους. Στην περίπτωση αυτή μόνο η περιοχή του συνόρου διαιρείται σε γραμμικά στοιχεία (ή επιφανειακά στοιχεία στην περίπτωση 3^{ων} διαστάσεων), όπου οι άγνωστες τιμές υπολογίζονται στο κέντρο του κάθε στοιχείου από την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων, ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες σε κάθε στοιχείο του συνόρου C. Οι τιμές στο υπόλοιπο μέσο προσδιορίζονται από τις υπολογισμένες τιμές στο σύνορο με την χρήση κατάλληλων σχέσεων.



Σχήμα 3.4: Μέθοδος συνοριακών στοιχείων (Martel, 2003)

➤ **Μέθοδοι Διακριτών Στοιχείων:**

Οι μέθοδοι αυτοί διαφέρουν από όλες τις προηγούμενες, καθώς όλος ο χώρος θεωρείται ασυνεχής. Στην περίπτωση αυτή εξετάζονται: οι κινητικές παράμετροι του κάθε στοιχείου, οι δυνατότητα μετατόπισης και οι τριβές μεταξύ των στοιχείων.

➤ **Υβριδικές Μέθοδοι:**

Οι μέθοδοι αυτοί προκύπτουν από συνδυασμό των προηγούμενων.

Η κάθε μια από τις παραπάνω μεθόδους, μπορεί να επιλεγεί για την επίλυση των γεωτεχνικών προβλημάτων, ανάλογα με τις δυνατότητες, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα στο συγκεκριμένο πεδίο που εξετάζεται (πίνακας 3.1).

Μ.Π.Σ.	Μ.Σ.Σ.	Μ.Π.Δ.
Πλεονεκτήματα		
Πολύ καλή ακρίβεια	Μειώνει τις διαστάσεις του προβλήματος	Εννοιολογική Απλότητα
Ευέλικτη η χρήση της	Μικρότερη απαίτηση υπολογιστικής μνήμης	Απλά μαθηματικά
Μπορεί να διαχειρισθεί διάφορες γεωμετρίες	Δεν παράγει περιττή πληροφορία	Εύκολος ο προγραμματισμός της
Δυνατότητα λύσης μη γραμμικών προβλημάτων	Εύκολος ο σχεδιασμός και εισαγωγή της γεωμετρίας	
Ευρέως δοκιμασμένες προσεγγίσεις	Καλή Ακρίβεια	
Καλή συμπεριφορά σε περιοχές με συγκεντρώσεις τάσεων	Καλή στην περίπτωση συγκεντρώσεων τάσεων (ύπαρξη ασυνεχειών)	
Μειονεκτήματα		
Δυσκολία Δημιουργίας πλέγματος	Χρησιμοποιεί περίπλοκα μαθηματικά	Δεν είναι κατάλληλη για πολύπλοκες γεωμετρίες
Χρειάζεται επίλυση μεγάλων αλγεβρικών συστημάτων	Μη αποτελεσματική σε μη γραμμικά προβλήματα	Απαιτεί πολύ υπολογιστικό χώρο
Καταλαμβάνει μεγάλο υπολογιστικό χώρο	Χρειάζεται επίλυση μικρότερων συστημάτων αλλά οι πίνακες που χρησιμοποιούνται είναι πυκνότεροι (populated matrices)	Όχι τόσο καλή μέθοδος στην περίπτωση συγκεντρώσεων τάσεων
Παράγει επιπλέον πληροφορία	Δεν είναι καλή στην επίλυση πολύ λεπτών κελιών	

Πίνακας 3.1: Πλεονεκτήματα μειονεκτήματα αριθμητικών μεθόδων
(Martel, 2003)

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι μια γρήγορη μέθοδος η οποία έχει αρκετά ακριβή αποτελέσματα σε προβλήματα της γραμμικής ελαστικότητας και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί των ΜΠΣ και ΜΠΔ. Επίσης στην περίπτωση που μελετούνται περιπτώσεις όπου το μέσο περιέχει και ασυνέχειες, τότε οι ΜΣΣ υπερτερούν των άλλων μεθόδων. Αντίθετα η ΜΠΣ χρησιμοποιείται σε περιπλοκότερα προβλήματα όπως προβλήματα σε πλαστικό μέσο και για ετερογενή μέσα.

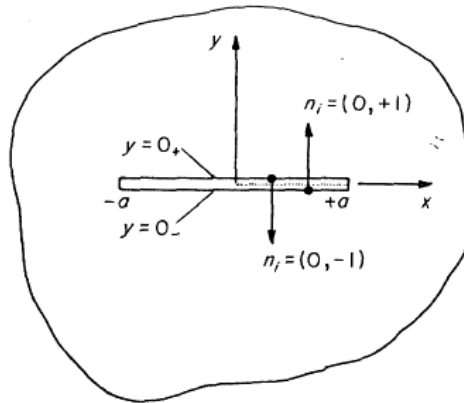
Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων είναι κατάλληλη για την εντατικοπαραμορφωσιακή ανάλυση συστημάτων υπόγειων έργων σε ελαστικό άπειρο μέσο.

Στην συνέχεια θα αναπτυχθεί η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων, η οποία είναι μια από τις μεθόδους των συνοριακών στοιχείων και βασίζεται στην ύπαρξη αναλυτικής λύσης για ασυνέχεια στην οποία εφαρμόζεται σταθερή ασυνεχή μετατόπιση (constant displacement discontinuity). Οι ΜΣΣ που υπάρχουν είναι (Hoek *et al* 1995):

- Η έμμεση μέθοδος των φανταστικών τάσεων (fictitious stress methods), η οποία πήρε το όνομα της από το ότι στο πρώτο βήμα χρησιμοποιούνται (‘‘εικονικές’’) τάσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες από τις οποίες υπολογίζονται στην συνέχεια οι πραγματικές τάσεις.
- Η άμεση μέθοδος, η οποία χρησιμοποιεί ευθέως τις συνοριακές συνθήκες για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων και
- Η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων (Displacement Discontinuity), ονομάστηκε έτσι γιατί υπολογίζει τις λύσεις σε ρωγμή που οι επιφάνειες τις μετατοπίζονται ξεχωριστά.

3.2 Μέθοδος Ασυνεχών Μετατοπίσεων σε Άπειρο Ελαστικό Μέσο

Το πρόβλημα, της σταθερής ασυνεχούς μετατόπισης κατά μήκος ενός πεπερασμένου ευθύγραμμου τμήματος στο επίπεδο Oxy , εντός ενός άπειρου ελαστικού μέσου, καθορίζεται από τη συνθήκη ότι οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς παντού εκτός από το ευθύγραμμο τμήμα όπου διακόπτεται η συνέχεια αυτή. Εάν το ευθύγραμμο στοιχείο θεωρηθεί σαν μια ευθύγραμμη με διεύθυνση κατά μήκος του άξονα x ($|x| < a, y = 0_+$), τότε επί του τμήματος αυτού διακρίνονται δύο επιφάνειες: Η μία βρίσκεται στη θετική πλευρά του άξονα y και συμβολίζεται ως $y = 0_+$ ενώ η άλλη βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του άξονα y και συμβολίζεται ως $y = 0_-$.



Σχήμα 3.5: Ασυνέχεια εντός άπειρου ελαστικού μέσου
(Crouch & Starfield, 1990)

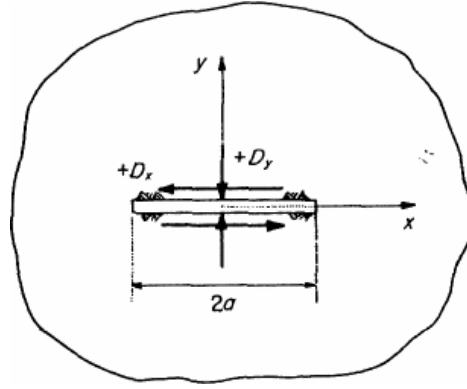
Η ασυνεχής μετατόπισης $D_i = (D_x, D_y)$, είναι η σχετική μετατόπιση δύο σημείων παράπλευρα της ασυνέχειας και προσδιορίζεται από την σχέση (Crouch & Starfield 1990):

$$D_i = u_i(x_1, 0_-) - u_i(x_1, 0_+) \quad (3.1)$$

ή

$$\begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \\ D_y &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Επειδή μεταβλητές u_x και u_y είναι θετικές κατά μήκος των θετικών διευθύνσεων των συντεταγμένων x και y συνεπάγεται ότι οι θετικές διευθύνσεις των D_x και το D_y είναι αυτές που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα (3.6). Πρέπει να σημειωθεί ότι μια θετική τιμή του D_y υποδηλώνει ότι οι δύο πλευρές της ρωγμής επικαλύπτονται, κάτι τέτοιο είναι εκ φύσεως αδύνατο να γίνει στην πραγματικότητα, ωστόσο αυτή η δυσκολία θα μπορούσε να ξεπεραστεί, θεωρώντας ότι η ρωγμή έχει ένα πεπερασμένο πάχος (μικρό σε σχέση με το μήκος της) μεγαλύτερο από το μέγεθος της συνιστώσας της ασυνεχούς μετατόπισης D_y .

Σχήμα 3.6: Ασυνεχείς μετατοπίσεις D_x και D_y

(Crouch & Starfield, 1990)

Οι αναλυτικές λύσεις των μετατοπίσεων και των τάσεων κατά την εφαρμογή σταθερών ασυνεχών μετατοπίσεων, δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις (Crouch & Starfield 1990):

$$u_x = D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \quad (3.3)$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}]$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x [-yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2GD_y [-yf_{,xyy}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Η συνάρτηση Green $f(x, y)$ σε αυτές τις εξισώσεις είναι η εξής:

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (3.5)$$

Οι μερικές παράγωγοί της συνάρτησης f , πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης είναι:

$$\begin{aligned}
 F2(x, y) = f_{,x} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \\
 F3(x, y) = f_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\
 F4(x, y) = f_{,xy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\
 F5(x, y) = f_{,xx} = -f_{,yy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\
 F6(x, y) = f_{,xyy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \\
 F7(x, y) = f_{,yyy} &= \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{x+a}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Οι μετατοπίσεις που δίδονται από τις σχέσεις 3.3 είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε σημείο του άπειρου μέσου, εκτός από την περίπτωση που το ευθύγραμμο τμήμα $|x| < a, y = 0$, διασχίζεται εγκάρσια. Για τον προσδιορισμό των μετατοπίσεων στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_{x_{y \rightarrow 0\pm}}^{\lim} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_y &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_{y_{y \rightarrow 0\pm}}^{\lim} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Οι περιοριστικές τιμές των τόξων εφαπτομένης που χρησιμοποιούνται στην συνάρτηση f καθορίζονται μέσα από τη σχέση:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0_{\pm} \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0_{+} \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0_{-} \end{cases} \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στην 3.7, μπορούν να υπολογιστούν οι συνιστώσες των μετατοπίσεων πάνω στην ασυνέχεια.

Ο υπολογισμός των τάσεων κατά μήκος της γραμμής $y = 0$, γίνεται με παρόμοια διαδικασία χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.4

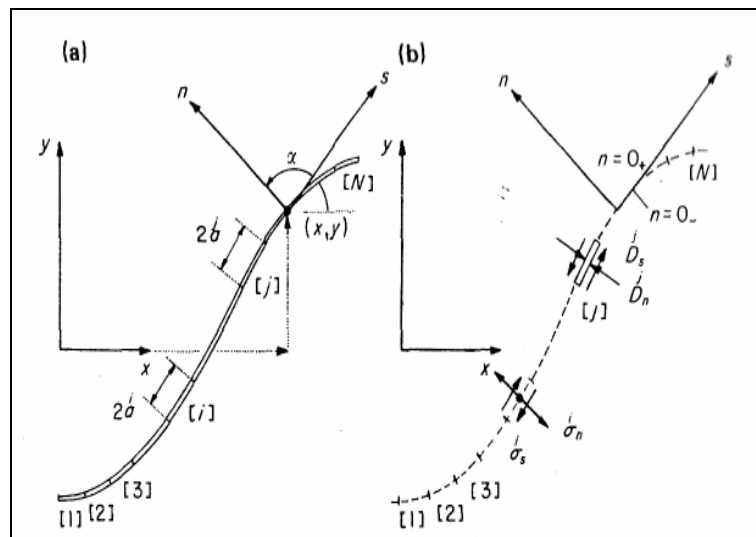
$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,0) &= \frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x,0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Στην μέθοδο αυτή, από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι οι μετατοπίσεις είναι ασυνεχείς πάνω στα σύνορα, αντιθέτως οι τάσεις είναι συνεχείς.

3.3 Γενίκευση της Μεθόδου

Η προηγούμενη ανάλυση αφορά την περίπτωση όπου μελετούνται ευθύγραμμα σύνορα. Στην ενότητα αυτή υπολογίζεται ο συντελεστής επίδρασης στην γενικότερη περίπτωση όπου τα γραμμικά στοιχεία σχηματίζουν καμπυλόγραμμα σύνορα (ρωγμές – ανοίγματα) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7. Σε αυτήν την περίπτωση οι ασυνεχείς μετατοπίσεις ($\overset{j}{D}_s$ και $\overset{j}{D}_n$) των στοιχείων προσδιορίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συντεταγμένες s και n του κάθε στοιχείου όπως υποδεικνύεται στις σχέσεις 3.10.

$$\begin{aligned}\overset{j}{D}_s &= \overset{j-}{u}_s - \overset{j+}{u}_s \\ \overset{j}{D}_n &= \overset{j-}{u}_n - \overset{j+}{u}_n\end{aligned}\quad (3.10)$$



Σχήμα 3.7:Καμπυλόγραμμο σύνορο

(Crouch & Starfield, 1990)

Οι συνιστώσες της μετατόπισης u_s^j και u_n^j , είναι θετικές στις θετικές κατευθύνσεις των s και n , ανεξάρτητα από το εάν εξετάζεται η θετική ή την αρνητική επιφάνεια της ρωγμής. Συνεπώς από τις σχέσεις 3.10, προκύπτει ότι η ορθή συνιστώσα της μετατόπισης D_n^j είναι θετική εάν οι δύο επιφάνειες της ρωγμής μετατοπίζονται η μια προς την άλλη. Ομοίως, και η διατμητική συνιστώσα D_s^j είναι θετική εάν η θετική επιφάνεια της ρωγμής κινείται προς τα αριστερά σε σχέση με την αρνητική επιφάνεια (σχήμα 3.7 b).

Η επίδραση στο κέντρο του γραμμικού στοιχείου i , από την ύπαρξη μιας ασυνεχούς μετατόπισης που εφαρμόζεται στο στοιχείο j μπορεί να υπολογιστεί από την ανάλυση της ενότητας 3.2, με κατάλληλο μετασχηματισμό των εξισώσεων ανάλογα με τη θέση και τον προσανατολισμό του ευθύγραμμου τμήματος που μελετάται. Έτσι οι διατμητικές και οι ορθές τάσεις οι οποίες ενεργούν στο μέσο του i στοιχείου (σχήμα 3.7 b) βρίσκονται από:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 : N \quad (3.11)$$

*όπου A_{ss}^{ij} κτλ. είναι οι συνοριακοί συντελεστές επίδρασης των τάσεων.

Έτσι αν εφαρμοστεί μια στοιχειακή ασυνεχής μετατόπιση σε κάθε ένα από τα N στοιχεία του συνόρου, τότε η επίδραση στο στοιχείο i υπολογίζεται από το άθροισμα της επίδρασης του κάθε στοιχείου με βάση την σχέση:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 : N \quad (3.12)$$

Στην περίπτωση που προσδιορίζονται οι τιμές των τάσεων σ_s^i και σ_n^i για κάθε στοιχείο, τότε οι ασυνεχείς μετατοπίσεις (D_s^j, D_n^j) υπολογίζονται από την λύση του γραμμικού συστήματος ($2N \times 2N$) που δημιουργείται από την εφαρμογή των σχέσεων 3.12 για κάθε στοιχείο ($j = 1 : N$). Έπειτα οι μετατοπίσεις και οι τάσεις σε οποιοδήποτε σημείο του μέσου, υπολογίζονται με την αρχή της υπέρθεσης.

Ενώ στην περίπτωση όπου χρειάζεται να υπολογιστούν οι μετατοπίσεις ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 : N \quad (3.13)$$

*όπου B_{ss}^{ij} κτλ. είναι οι συνοριακοί συντελεστές επίδρασης για τις μετατοπίσεις.

Στην περίπτωση αυτή λόγω του ότι οι μετατοπίσεις είναι ασυνεχείς, χρειάζεται ξεχωριστός υπολογισμός των συντελεστών επίδρασης επάνω στο σύνορο. Πιο συγκεκριμένα χρειάζεται ξεχωριστός υπολογισμός των διαγώνιων όρων ($i = j$) των συντελεστών επιρροής B (σχέσεις 3.14) στην θετική και στην αρνητική επιφάνεια της ασυνέχειας.

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0$$

$$B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, n \rightarrow 0_+ \\ +\frac{1}{2}, n \rightarrow 0_- \end{cases} \quad (3.14)$$

Οι υπολογισμοί που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες σχέσεις αφορούν το τοπικό σύστημα συντεταγμένων κάθε στοιχείου. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι πρακτικότερος ο υπολογισμός να γίνεται ως προς ένα κοινό σύστημα αναφοράς (Oxy).

Οι συντελεστές επίδρασης υπολογίζονται από τις εξισώσεις 3.11 και 3.12, με βάση τον μετασχηματισμό συντεταγμένων (σχέσεις 2.17 & 2.20). Έτσι οι νέοι συντελεστές επιρροής υπολογίζονται από τις σχέσεις 3.15 και 3.16:

$$\begin{aligned} u_x &= D'_x [-(1-2\nu)\sin \beta F'_2 + 2(1-\nu)\cos \beta F'_3 + y'(\sin \beta F'_4 - \cos \beta F'_5)] \\ &\quad + D'_y [-(1-2\nu)\cos \beta F'_2 - 2(1-\nu)\sin \beta F'_3 - y'(\cos \beta F'_4 + \sin \beta F'_5)] \\ u_y &= D'_x [(1-2\nu)\cos \beta F'_2 + 2(1-\nu)\sin \beta F'_3 - y'(\cos \beta F'_4 + \sin \beta F'_5)] \\ &\quad + D'_y [-(1-2\nu)\sin \beta F'_2 + 2(1-\nu)\cos \beta F'_3 - y'(\sin \beta F'_4 - \cos \beta F'_5)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

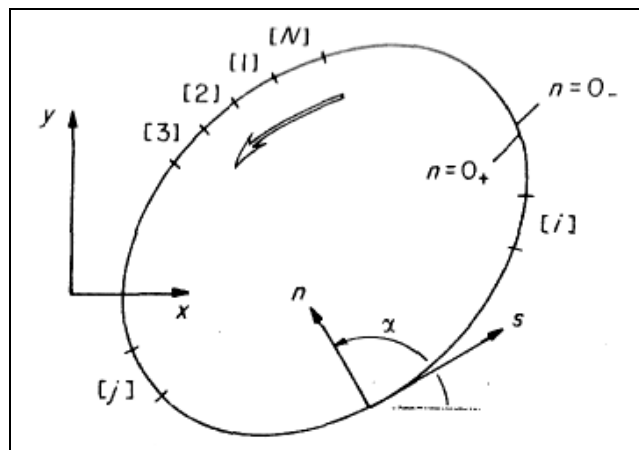
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD'_x [2\cos^2 \beta F'_4 + \sin 2\beta F'_5 + y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)] \\ &\quad + 2GD'_y [-F'_5 + y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)] \\ \sigma_{yy} &= 2GD'_x [2\sin^2 \beta F'_4 - \sin 2\beta F'_5 - y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)] \\ &\quad + 2GD'_y [-F'_5 - y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)] \\ \sigma_{xy} &= 2GD'_x [\sin 2\beta F'_4 - \cos 2\beta F'_5 + y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)] \\ &\quad + 2GD'_y [-y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Οι συντελεστές επιρροής για τις μετατοπίσεις είναι και στην περίπτωση ασυνεχείς, οπότε κάνοντας αντίστοιχους υπολογισμούς με την 3.14 προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} B_{ss}^{ii} &= B_{nn}^{ii} = \pm \frac{1}{2} & \text{για } y' = 0_{\pm} \\ B_{sn}^{ii} &= B_{ns}^{ii} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.4. Εσωτερικά /Εξωτερικά Προβλήματα.

Η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ανοιγμάτων μέσα σε άπειρο ελαστικό μέσο, με ακρίβεια συγκρίσιμη με άλλες αριθμητικές μεθόδους. Για τον σχεδιασμό του ανοίγματος όλα τα στοιχειώδη τμήματα ενώνονται ώστε να δημιουργήσουν ένα κλειστό περίγραμμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8. Μετά τον σχεδιασμό αυτό προκύπτουν δύο επιφάνειες. Η μία είναι η αρνητική επιφάνεια ($n = 0_-$), η οποία καθορίζει το σύνορο του ανοίγματος μέσα σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο (εξωτερικό πρόβλημα), ενώ η άλλη επιφάνεια ($n = 0_+$) καθορίζει το σύνορο ενός πεπερασμένου μέσου (εσωτερικό πρόβλημα).



Σχήμα 3.8: Περιγραφή Κλειστού Περιγράμματος
(Crouch & Starfield, 1990)

Οι ποσότητες (D_s, D_n) έχουν φυσική σημασία μόνο στην περίπτωση που συνεπάρχουν στο ίδιο πρόβλημα η εσωτερική και η εξωτερική περιοχή. Παρόλ' αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ορθών λύσεων με την διαδικασία που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες.

Στην περίπτωση που μελετάται μόνο το εξωτερικό πρόβλημα, είναι απαραίτητη η δημιουργία επιπλέον συνοριακών στοιχείων (το ελάχιστο δύο) στην εσωτερική περιοχή, στα οποία καθορίζονται οι μετατοπίσεις στις αρνητικές πλευρές τους $u_s^- = u_n^- = 0$. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγονται ακανόνιστες μετακινήσεις και περιστροφές της εσωτερικής περιοχής. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να διαπιστωθεί εμπειρικά ότι δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα στα σύνορα (*Crouch & Starfield, 1990*)

Αντίθετα, όταν μελετάτε η εσωτερική περιοχή για την παραγωγή ορθών λύσεων χρειάζεται να σταθεροποιηθούν δύο στοιχεία στο σύνορο.

Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι ιδανική για την επίλυση εξωτερικών προβλημάτων, στα οποία το περίγραμμα C προσδιορίζει το σύνορο μίας κοιλότητας σε ένα άπειρο μέσο.

3.5. Σύστημα Επίλυσης

Για την επίλυση του προβλήματος χρειάζεται να ορισθούν οι συνοριακές συνθήκες σε όλα τα στοιχεία του συνόρου. Οι συνοριακές συνθήκες σε όλα τα προβλήματα συνοριακών συνθηκών μπορούν να δοθούν με τρεις μορφές (*Αγιουτάντης, 2002*), από τις οποίες προσδιορίζονται οι αντίστοιχοι συντελεστές επίδρασης (σχέσεις 3.18-3.20):

➤ **Συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet:**

Στην περίπτωση αυτή προσδιορίζεται η ζητούμενη παράμετρος (μετατόπιση) και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} (u_s)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ (u_n)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

➤ **Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann**

Στης συνοριακές συνθήκες αυτού του τύπου προσδιορίζεται η παράγωγος του ζητούμενου μεγέθους (παράγωγος μετατόπισης \rightarrow τάση).

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ (\sigma_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

➤ **Μικτές συνοριακές συνθήκες:**

Τέλος στις μικτές συνοριακές και οι μετατοπίσεις και οι τάσεις καθορίζονται.

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Οι ποσότητες b_s και b_n αντιπροσωπεύουν τις γνωστές συνοριακές τιμές των τάσεων ή των μετατοπίσεων και οι C_{ss}^{ij} κ.τ.λ. είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές επίδρασης από τις σχέσεις 3.18 ή 3.19.

3.6. Αντί-Επίπεδη Φόρτιση

Στην προηγούμενη ανάλυση αναπτύχθηκε η μέθοδος στην περίπτωση που δρουν τάσεις εντός του επιπέδου μελέτης. Αντίστοιχη διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί στην περίπτωση όπου δρουν διατμητικές τάσεις εκτός επιπέδου.

Στην σχέση 3.21 δίδεται για τέτοιου είδους φόρτισης, η ασυνεχής μετατόπισης D_z , η οποία καθορίζεται σαν η διαφορά της μετατόπισης μεταξύ των δυο επιφανειών του συνοριακού στοιχείου (Martel, 2003, Hirth & Lothe, 1982):

$$D_z = u_z(x, 0_-) - u_z(x, 0_+) \quad (3.21)$$

Στην συνέχεια προσδιορίζονται οι λύσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων του προβλήματος, όπου ισχύουν οι εξής σχέσεις

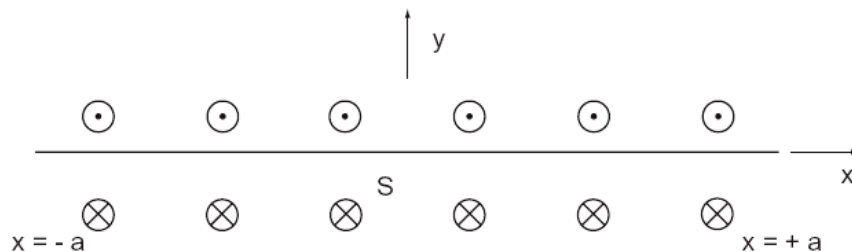
$$u_z = \frac{1}{2\pi} F_{1anti} D_z \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = \sigma_{zy} &= \frac{G}{2\pi} F_{2anti} D_z \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= -\frac{G}{2\pi} F_{3anti} D_z \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου:

$$\begin{aligned} F_{1anti} &= \arctan \frac{y}{x} \\ F_{2anti} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ F_{3anti} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Σε αντιστοιχία με την ανάλυση που έγινε στις προηγούμενες ενότητες (3.2-3.5), θα διευκρινιστούν στη συνέχεια τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μεθόδου των ασυνεχών μετατοπίσεων για την περίπτωση αντιεπίπεδης φόρτισης.



Σχήμα 3. 9: Αντιεπίπεδη Φόρτιση (Martel, 2003)

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος (σχήμα 3.9), η ρωγμή διαιρείται σε N ευθύγραμμα τμήματα ή συνοριακά στοιχεία όπου το καθένα αντιπροσωπεύει μια ασυνεχή μετατόπιση. Οι τιμές των ασυνεχών μετατοπίσεων προσδιορίζονται από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος N εξισώσεων με N αγνώστους. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από τις εξισώσεις 3.23 όπως δείχνεται ακολούθως:

Η τάση σ_{yz} σε ένα σημείο $x, y = 0$ προκαλείται από μία σταθερή ασυνεχή μετατόπιση D_z στο διάστημα $|x| \leq a, y = 0, y = 0$ είναι:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{G}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} D_z \quad (3.25)$$

Εάν η μετατόπιση πραγματοποιείται πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $2a^j$ όπου το μέσο του έχει συντεταγμένες $x = x^j, y = 0$, τότε η 3.25 μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \frac{G}{2\pi} \frac{x - x^j}{\left(x - x^j\right)^2 + y^2} D_z^j \quad (3.26)$$

όπου D_z^j είναι η ασυνεχής μετατόπιση στο διάστημα $|x - x^j| \leq a^j, y = 0$. Η τάση στο μέσο του κάθε i στοιχείου η οποία οφείλεται σε μια ασυνεχή μετατόπιση του j στοιχείου, υπολογίζεται θέτοντας όπου x ίσο με x^i :

$$\sigma_{yz}\left(x^i, 0\right) = \frac{G}{2\pi} \frac{x^i - x^j}{\left(x^i - x^j\right)^2 + y^2} D_z^j \quad (3.27)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τάση στο μέσο του κάθε i στοιχείου (3.28), η οποία οφείλεται στις ασυνεχείς μετατοπίσεις και των N στοιχείων.

$$\sigma_{yz}^i(x,0) = \sigma_{yz}^i = \sum_{j=1}^N A^{ij} D_z^j \quad (3.28)$$

όπου A^{ij} ο συντελεστής επίδρασης των τάσεων:

$$A^{ij} = \frac{G^j}{2\pi} \frac{x^i - x^j}{\left(x^i - x^j\right)^2 + y^2} \quad (3.29)$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν για D_z^j $i=1:N$, με συνηθισμένες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης.

Στην συνέχεια γίνεται μια γενίκευση της αριθμητικής μεθόδου κατ' αντιστοιχία με την ενότητα 3.3. Στην γενική περίπτωση αυτή, το καμπυλόγραμμο σύνορο προσεγγίζεται με αρκετή ακρίβεια από N ευθύγραμμα τμήματα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους. Η θέση και ο προσανατολισμός των τμημάτων αυτών προσδιορίζεται με την αναφορά τους στο γενικό σύστημα συντεταγμένων Oxy .

Οι ασυνεχείς μετατοπίσεις των στοιχείων προσδιορίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συντεταγμένες s και n κάθε στοιχείου.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $F_{1anti}(x',y')$ έως $F_{3anti}(x',y')$, υπολογίζονται οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις και τις μετατοπίσεις στην διεύθυνση του z άξονα:

$$u_z' = \frac{1}{2\pi} F_{1anti}' D_z' \quad (3.30)$$

και

$$\sigma'_{yz} = \sigma'_{zy} = \frac{G}{2\pi} F'_{2anti} D'_z \quad (3.31)$$

$$\sigma'_{xz} = \sigma'_{zx} = -\frac{G}{2\pi} F'_{3anti} D'_z$$

όπου $D'_z = D_z$, επειδή ο μετασχηματισμός συντεταγμένων, γίνεται στρέφοντας γύρο από τον άξονα z.

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο x,y σύστημα συντεταγμένων δίδονται από τις σχέσεις ως εξής:

$$u_z = u'_z \quad (3.32)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{G}{2\pi} (F'_{3anti} \cos \beta - F'_{2anti} \sin \beta) D'_z \\ \sigma_{yz} &= \frac{G}{2\pi} (F'_{3anti} \sin \beta + F'_{2anti} \cos \beta) D'_z \end{aligned} \quad (3.33)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: Πρόγραμμα Επίλυσης

4. Πρόγραμμα Επίλυσης (DDBE2D)

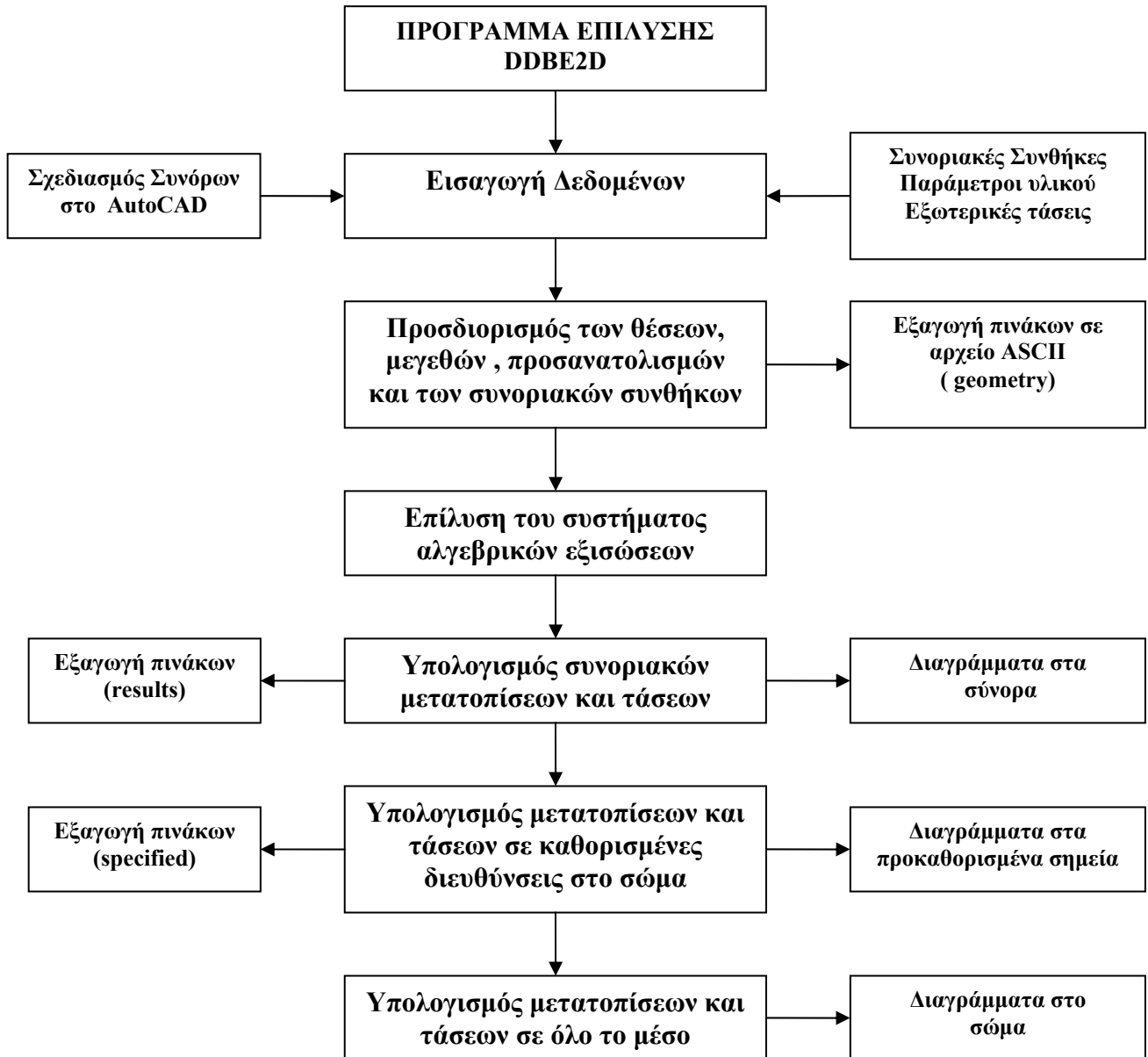
4.1. Εισαγωγή

Το DDBE2D (Displacement Discontinuity Boundary Element Two Dimensions) είναι ένα αριθμητικό πρόγραμμα δυο διαστάσεων, βασισμένο στη μέθοδο συνοριακών στοιχείων και πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων, και κατασκευάστηκε στα πλαίσια της Διπλωματικής αυτής εργασίας.

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει αριθμητικά τις συνιστώσες των τάσεων και των μετατοπίσεων τόσο στα σύνορα, όσο και σε όλα τα σημεία του περιβάλλοντος πετρώματος. Είναι βασισμένο στο είδη υπάρχον πρόγραμμα TWODD σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN (*Crouch & Starfield, 1990*), το οποίο προγραμματίστηκε σε γλώσσα MATLAB. Οι τροποποιήσεις του προγράμματος αυτού αφορούν:

- I. Κατασκευή προ-επεξεργαστή για την ταχεία εισαγωγή των συνοριακών στοιχείων των ρωγμών ή των εκσκαφών μέσω του σχεδιαστικού πακέτου AUTOCAD.
- II. Κατασκευή μετα-επεξεργαστή για τη δημιουργία τριγωνικού πλέγματος στο άπειρο μέσο, στους κόμβους του οποίου υπολογίζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις για την δημιουργία διαγραμμάτων και ισοχρωματικών επιφανειών.
- III. Δυνατότητα επίλυσης και επίπεδων και αντι-επίπεδων παραμορφώσεων.

Στο σχήμα 4.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του υπολογιστικού προγράμματος.



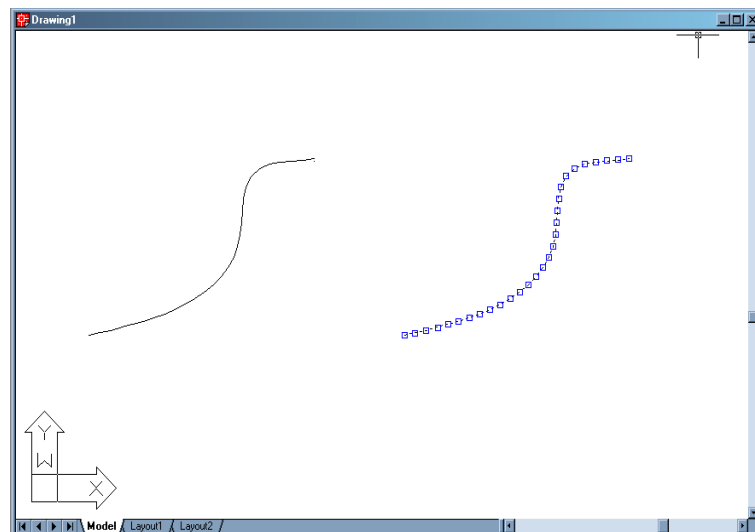
Σχήμα 4.1: Δενδρόγραμμα ροής προγράμματος DDBE2D

4.2. Εισαγωγή Δεδομένων

4.2.1 Σχεδιασμός στο AUTOCAD

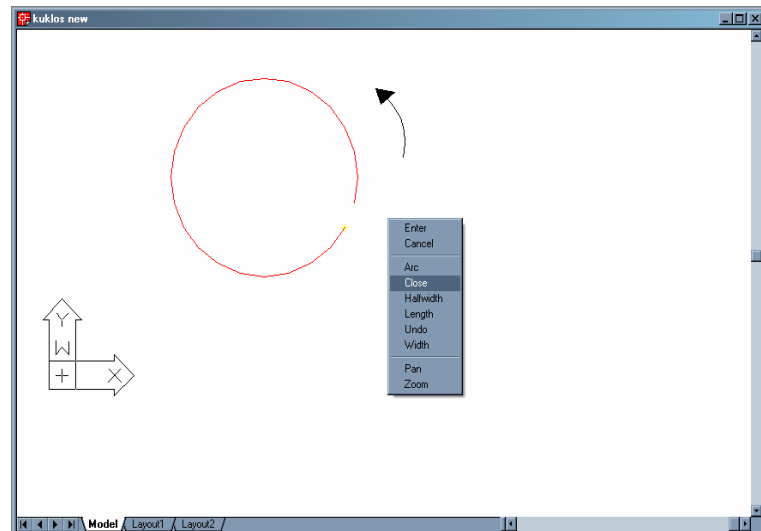
Ο σχεδιασμός των συνοριακών στοιχείων στο AUTOCAD, γίνεται με βάση τους ακόλουθους κανόνες:

- I. Τα στοιχεία που περιγράφουν τα σύνορα σχεδιάζονται με την εντολή «polyline» του σχεδιαστικού πακέτου AUTOCAD.
- II. Η γεωμετρία του συνόρου θα πρέπει να περιγράφεται με όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία, με το προεπιλεγμένο χρώμα



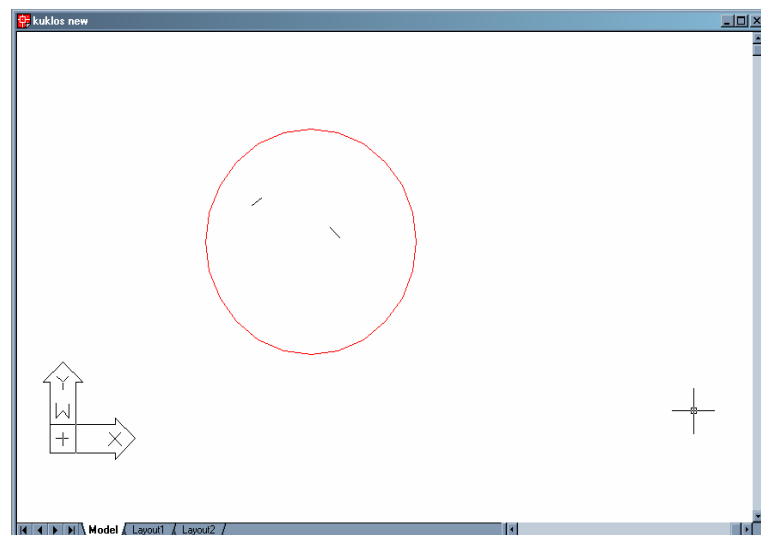
Σχήμα 4.2: Διακριτοποίηση συνόρου

- III. Τα ανοίγματα κατά αντιστοιχία με τις ρωγμές περιγράφονται από μικρά διαδοχικά στοιχεία που αποτελούν μια κλειστή καμπύλη. Σχεδιάζονται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και το τελευταίο στοιχείο που κλείνει την καμπύλη δημιουργείται με την εντολή «close». Για να διαχωριστούν από τις ρωγμές, το χρώμα όλων των στοιχείων που αποτελούν τα ανοίγματα, πρέπει να είναι κόκκινο.



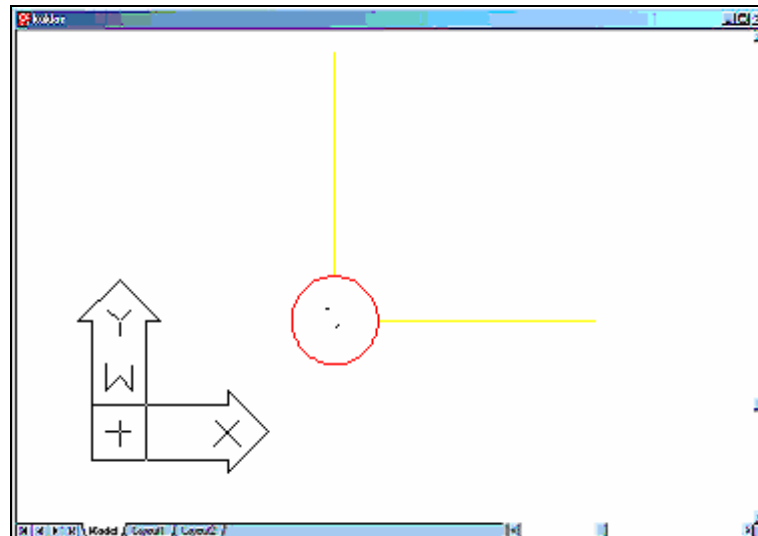
Σχήμα 4.3: Σχεδιασμός ανοίγματος στο AutoCAD

IV. Εφόσον έχουν σχεδιαστεί όλα τα σύνορα που περιγράφουν το υπό μελέτη πρόβλημα, σχεδιάζονται δύο επιπλέον συνοριακά στοιχεία στο εσωτερικό κάθε ανοίγματος, με διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους. Η ύπαρξή τους αποτρέπει την ακανόνιστη μετακίνηση και περιστροφή της εσωτερικής περιοχής.



Σχήμα 4.4 : Σταθεροποίηση της εσωτερικής περιοχής

V. Για τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένες διευθύνσεις στο σώμα, σχεδιάζεται ευθύγραμμο τμήμα με κίτρινο χρώμα.



Σχήμα 4.5: Μελέτη μέσα στο σώμα σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις

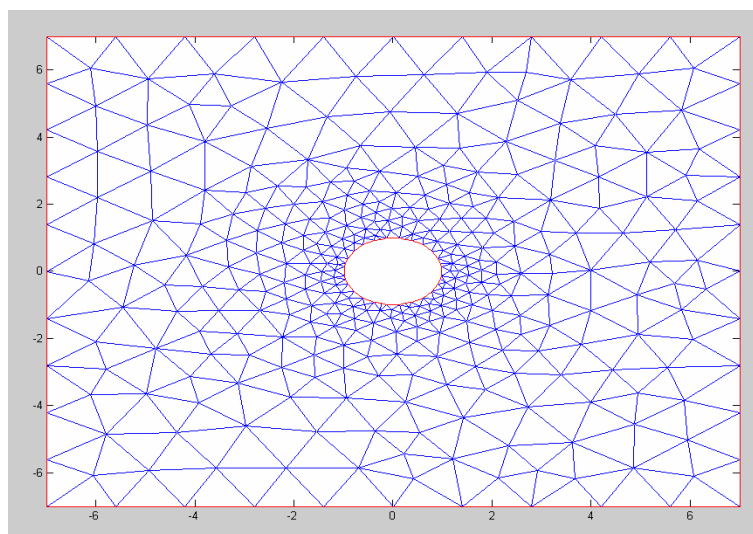
VI. Τέλος, το σχέδιο σώζεται σε αρχείο τύπου .dxf στο περιβάλλον εργασίας του MATLAB.

4.2.2. Εισαγωγή Γεωμετρίας

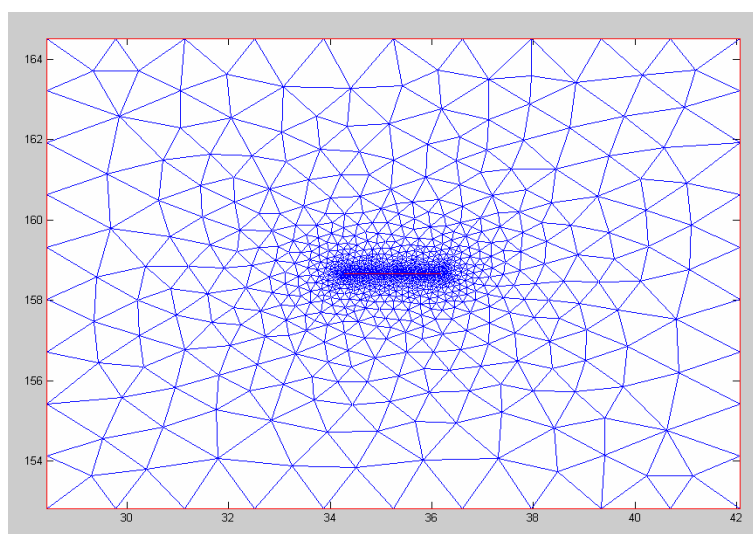
Η εισαγωγή της γεωμετρίας του προβλήματος γίνεται με τον προ-επεξεργαστή «dxfread», με τον οποίο εισάγονται στο κυρίως επεξεργαστή τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που σχεδιάστηκαν στο AutoCAD (συντεταγμένες αρχής και τέλους συνοριακών στοιχείων).

Ακόμη, δημιουργείται ένα περιβάλλον τριγωνικό πλέγμα στο άπειρο μέσο. Η έκταση αυτού εξαρτάται από τις διαστάσεις και τις θέσεις των συνόρων, ούτως ώστε να περικλείεται η περιοχή που υφίσταται τις μεγαλύτερες επιδράσεις (ζώνη επίδρασης).

Στα σχήματα 4.6 και 4.7 παρουσιάζεται το τριγωνικό πλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση ενός κυκλικού ανοίγματος και μιας ευθύγραμμης ρωγμής.



Σχήμα 4.6: Τριγωνικό πλέγμα γύρω από κυκλικό άνοιγμα



Σχήμα 4.7: Τριγωνικό πλέγμα γύρω από ευθύγραμμη ρωγμή.

4.2.3. Παράμετροι Υλικού, Συνοριακές Συνθήκες και Τάσεις

Για να ορισθεί πλήρως το πρόβλημα εκτός της γεωμετρίας του είναι απαραίτητο να δίδονται και τα ακόλουθα στοιχεία:

- Οι παράμετροι του υλικού, που είναι ο λόγος του Poisson ν και το μέτρο ελαστικότητας E .
- Οι τάσεις μακρινού πεδίου $(P_{yy}, P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz})$.
- Τέλος δίδονται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που αφορούν είτε τις τάσεις, είτε τις μετατοπίσεις είτε συνδυασμό αυτών.

Το πρόγραμμα αυτό είναι σχεδιασμένο, ώστε να λειτουργεί σε οποιοδήποτε σύστημα μονάδων, με την προϋπόθεση ότι οι μονάδες των συνοριακών μετατοπίσεων, εφόσον χρειάζεται να περιγραφούν, πρέπει να είναι στο ίδιο σύστημα με τις μονάδες των συντεταγμένων θέσεων. Ενώ, οι τάσεις πρέπει να ανήκουν στο ίδιο σύστημα με τις μονάδες του μέτρου ελαστικότητας του Young. Έτσι τα αποτελέσματα που προκύπτουν ανήκουν στα παραπάνω συστήματα μονάδων.

4.3 Επίλυση

Μετά το στάδιο της εισαγωγής των δεδομένων, ακολουθεί η επίλυση του προβλήματος που έχει περιγραφεί. Η εντατικοπαραμορφωσιακή κατάσταση του πεδίου προσδιορίζεται, τόσο στην περίπτωση επίπεδων φορτίσεων, όσο και σε αντισυμμετρικές φορτίσεις.

Τα στάδια που ακολουθούνται για την επίλυση είναι τα ακόλουθα:

- Το πρώτο στάδιο αφορά την γεωμετρία του προβλήματος, προσδιορίζονται οι θέσεις των κέντρων των στοιχείων, τα μέτρα τους, καθώς και ο προσανατολισμός τους.
- Στο δεύτερο στάδιο προσαρμόζονται οι τάσεις του μακρινού πεδίου ώστε σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες να δώσουν τις τιμές των συνοριακών τάσεων.

- Στο τρίτο στάδιο, υπολογίζονται οι συντελεστές επίδρασης, με βάση τις σχέσεις 3.15-3.16 καθώς επίσης δημιουργείται το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων.
- Ακολουθεί η επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων.
- Στο πέμπτο στάδιο γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων στα σύνορα.
- Το έκτο και τελευταίο στάδιο περιλαμβάνει τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων σε όλο το άπειρο μέσω καθώς και σε συγκεκριμένα σημεία μέσα σε αυτό εφόσον είναι επιθυμητό.

Στην περίπτωση αντί-επίπεδης φόρτισης χρησιμοποιούνται οι σχέσεις 3.30-3.33 για τον υπολογισμό των συντελεστών επιρροής

4.4 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα από το πρόγραμμα εξάγονται είτε με τη μορφή πινάκων, είτε ως γραφήματα. Για την καλύτερη περιγραφή και κατανόηση των τρόπων παρουσίασης των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται το απλό παράδειγμα της οριζόντιας ρωγμής μήκους 2 με είκοσι στοιχεία.

4.4.1 Πίνακες Αποτελεσμάτων

Στο πρόγραμμα, τα αποτελέσματα εξόδου δίδονται σε έξι αρχεία σε μορφή 'ASCII' τα οποία είναι προσβάσιμα από οποιοδήποτε επεξεργαστή κειμένου ή επεξεργαστή αριθμητικών δεδομένων όπως για παράδειγμα το 'excel'.

Τα αρχεία αυτά είναι :

- Το πρώτο αρχείο σώζεται με το όνομα 'input' και περιέχει τα δεδομένα εισόδου που είναι οι παράμετροι του υλικού και οι επιβαλλόμενες τάσεις με τη μορφή που φαίνονται στον πίνακα 4.1

P_{xx}	P_{yy}	P_{xy}	P_{yz}	P_{xz}	E	PR
0	1	0	1	0	22000	0.1

Πίνακας 4.1: Δεδομένα εισόδου

όπου:

P_{xx} είναι η οριζόντια ορθή τάση

P_{yy} είναι η κατακόρυφη ορθή τάση

P_{xy} είναι η διατμητική τάση στο επίπεδο

P_{yz} , P_{xz} είναι οι διατμητικές τάσεις εκτός του επιπέδου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας και

PR ο λόγος του Poisson

- Ακόμη δημιουργείται το αρχείο με την ονομασία «geometry» που περιέχει πληροφορίες για τα συνοριακά στοιχεία και έχει την μορφή του πίνακα 4.2. Στον πίνακα αυτό οι συντεταγμένες των συνόρων γίνεται με την σειρά: Πρώτα τα ανοίγματα – έπειτα οι ασυνέχειες και τελευταία τα συνοριακά στοιχεία σταθεροποίησης της εσωτερικής περιοχής.

όπου:

X_{beg} , Y_{beg} είναι οι συντεταγμένες αρχής των στοιχείων

X_{end} , Y_{end} είναι οι συντεταγμένες τέλους των στοιχείων

X_m , Y_m είναι οι συντεταγμένες των κέντρων τους

A είναι τα μέτρα τους

$Sinbet$, $Cosbet$ προσδιορίζουν την κατεύθυνση τους

bvs , bvn οι συνοριακές συνθήκες και

$Kode$ το είδος των συνοριακών συνθηκών που περιγράφονται

- Το τρίτο αρχείο που δημιουργείται περιέχει τα αποτελέσματα στα μέσα των συνοριακών στοιχείων και έχει την ονομασία 'results', ενώ εμφανίζεται με την μορφή του πίνακα 4.3

Όπου

Ds είναι η διατμητική συνιστώσα της ασυνεχούς μετατόπισης

Us_{NEG}, Us_{POS} είναι οι διατμητικές συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

Dn είναι η ορθή συνιστώσα της ασυνεχούς μετατόπισης

Un_{NEG}, Un_{POS} είναι οι ορθές συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

Ux_{NEG}, Ux_{POS} είναι οι οριζόντιες συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

Uy_{NEG}, Uy_{POS} είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

$SIGs$ είναι η διατμητική συνιστώσα της τάσης

$SIGN$ είναι η ορθή συνιστώσα της τάσης

X_{beg}	Y_{beg}	X_{end}	Y_{end}	X_m	Y_m	A	$Sinbet$	$Cosbet$	bvs	bvn	$Kode$
61,837	162,333	61,937	162,333	61,887	162,333	0,050	0	1	0	0	1
61,937	162,333	62,037	162,333	61,987	162,333	0,050	0	1	0	0	1
62,037	162,333	62,137	162,333	62,087	162,333	0,050	0	1	0	0	1
62,137	162,333	62,237	162,333	62,187	162,333	0,050	0	1	0	0	1
.
.
.

Πίνακας 4.2: Γεωμετρία συνοριακών στοιχείων –συνοριακές συνθήκες

Ds	Us_{NEG}	Us_{POS}	Dn	Un_{NEG}	Un_{POS}	Ux_{NEG}	Uy_{NEG}	Ux_{POS}	Uy_{POS}	$SIGs$	$SIGn$
0.00	3.59E-05	3.59E-05	-7.09E-05	-3.54E-05	3.54E-05	3.59E-05	-3.54E-05	3.59E-05	3.54E-05	0.000	0.00
0.00	3.27E-05	3.27E-05	-1.04E-04	-5.18E-05	5.18E-05	3.27E-05	-5.18E-05	3.27E-05	5.18E-05	0.000	0.00
0.00	2.91E-05	2.91E-05	-1.26E-04	-6.30E-05	6.30E-05	2.91E-05	-6.30E-05	2.91E-05	6.30E-05	0.000	0.00
0.00	2.53E-05	2.53E-05	-1.43E-04	-7.14E-05	7.14E-05	2.53E-05	-7.14E-05	2.53E-05	7.14E-05	0.000	0.00
.
.
.

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα στα κέντρα των συνοριακών στοιχείων

- Το επόμενο αρχείο σχετίζεται με τα επιλεγόμενα σημεία που βρίσκονται μέσα στο μέσο. Εφόσον αυτά υπάρχουν, τότε αυτό δημιουργείται και δίδεται με την ονομασία 'specified' έχοντας την ακόλουθη μορφή

$$[Np \ u_x \ u_y \ sigma_{xx} \ sigma_{yy} \ sigma_{xy}],$$

όπου

Np είναι ο αύξων αριθμός των στοιχείων της γραμμής/ών

u_x , u_y είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης αντίστοιχα

$sigma_{xx}$ είναι η οριζόντια ορθή τάση

$sigma_{yy}$ είναι η κατακόρυφη ορθή τάση

$sigma_{xy}$ είναι η διατμητική ορθή τάση

- Το πέμπτο και το έκτο αρχείο δημιουργούνται στην περίπτωση που υπάρχουν τάσεις εκτός επιπέδου. Το πρώτο από αυτά έχει το όνομα 'boundary modeIII' και ενώ το δεύτερο αποθηκεύεται στο όνομα 'results modeIII', τα δεδομένα αυτά φαίνεται στον πίνακα 4.4:

Dz	u_{neg}	u_{pos}	$sigma_z$	bvz	$Kode$
7.88E-05	3.94E-05	-3.94E-05	0	0	1
1.15E-04	5.76E-05	-5.76E-05	0	0	1
1.40E-04	7.00E-05	-7.00E-05	0	0	1
1.59E-04	7.93E-05	-7.93E-05	0	0	1
.
.
.

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα –συνοριακές συνθήκες σε αντί – επίπεδη φόρτιση

όπου:

bvz στην περίπτωση αυτή αφορά τις συνοριακές συνθήκες στην τρίτη διάσταση Z ενώ $Kode$ είναι το είδος των συνοριακών συνθηκών που περιγράφονται και αφορούν την τρίτη διάσταση

Dz είναι η ασυνεχής μετατόπιση στην κατεύθυνση του z άξονα

u_{neg} , u_{pos} είναι μετατοπίσεις στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα και τέλος

$sigma_z$ είναι η τάση που ασκείται στο επίπεδο του κάθε στοιχείου

4.4.2. Γραφικές Παραστάσεις

Εκτός από τα αρχεία στα οποία αποθηκεύονται τα αριθμητικά αποτελέσματα, μέσω του προγράμματος εξάγονται και γραφήματα.

- Ασυνεχείς μετατοπίσεις στα σύνορα σε συνάρτηση με των αριθμό των διακριτών στοιχείων καθώς και τις μετατοπίσεις στις θετικές και αρνητικές πλευρές των συνόρων.
- Όταν απαιτείται ο υπολογισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένα σημεία του μέσου, τότε δημιουργούνται τα αντίστοιχα διαγράμματα σε συνάρτηση με την απόσταση.

- Ακόμη, μπορούν να απεικονιστούν όποιες από τις μεταβλητές μετατόπισης και τάσης $(u_x \ u_y \ u_z \ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz})$ είναι επιθυμητό.

Επίσης υπάρχει η δυνατότητα εξαγωγής διαγραμμάτων κυρίων τάσεων $(\sigma_1 \ \sigma_2)$ και των μέγιστων διατμητικών (τ_{\max}) . Τα γραφήματα αυτά γίνονται σε άξονες συντεταγμένων με ισο-χρωματικές επιφάνειες, με τις οποίες φαίνεται ο τρόπος που κλιμακώνονται οι μεταβλητές στο περιβάλλον μέσο. Οι τιμές αυτές υπολογίζονται στους κόμβους του τριγωνικού πλέγματος που έχει δημιουργηθεί, με βάση τις τιμές των ασυνεχών μετατοπίσεων που υπολογίσθηκαν στα σύνορα, με την αρχή της υπέρθεσης .

Κεφάλαιο 5^ο:
Υπολογιστικά παραδείγματα

5. Υπολογιστικά Παραδείγματα

5.1 Εισαγωγή

Στις παρακάτω ενότητες παρουσιάζονται οι λύσεις που παράγει το πρόγραμμα:

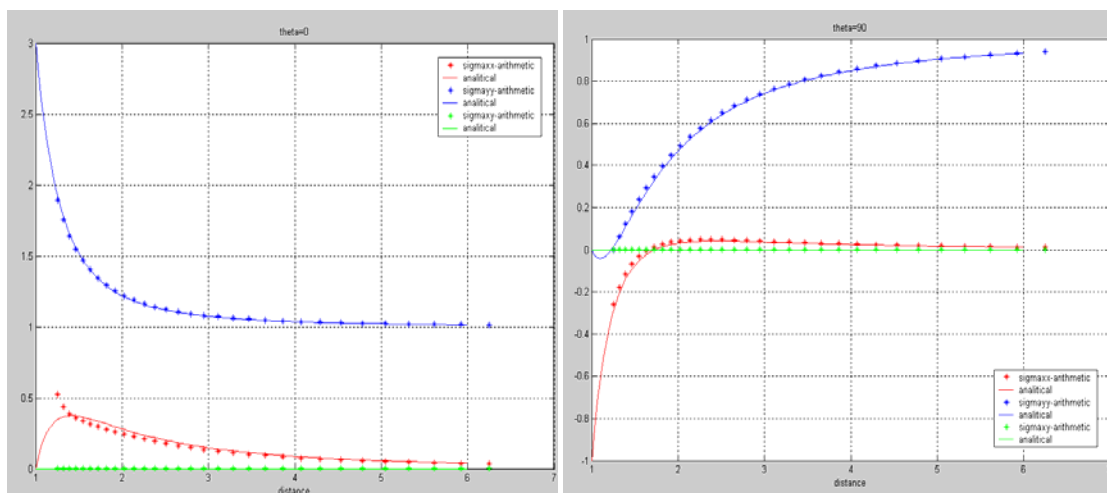
- Σε μεμονωμένα ανοίγματα διαφόρων διατομών
- Σε αλληλεπίδραση πολλών ανοιγμάτων

5.2 Ανοίγματα Απλών Διατομών.

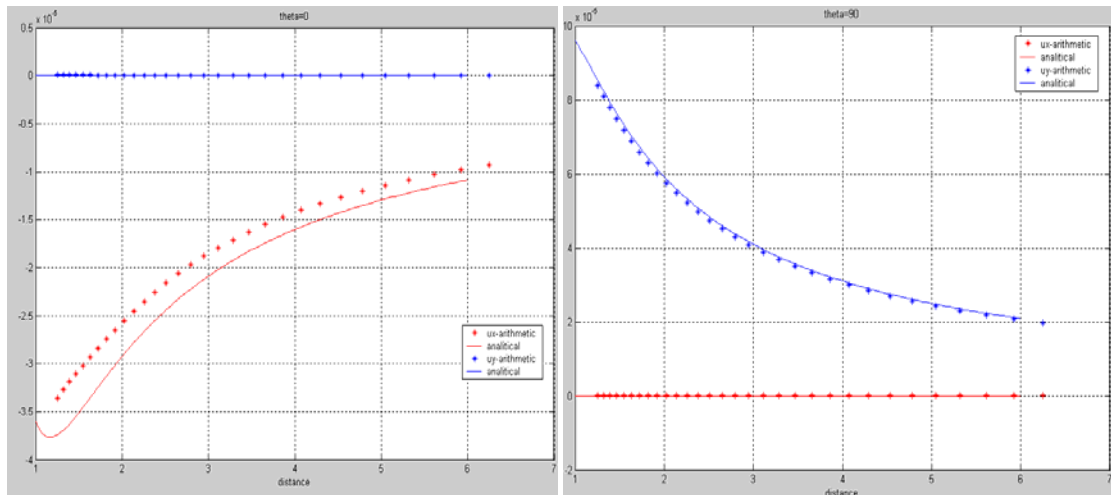
5.2.1 Κυκλικό Άνοιγμα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η ανάλυση της εντατικής κατάστασης γύρω από κυκλικό άνοιγμα. Για την επαλήθευση των τάσεων που παράγει η μέθοδος στο σώμα, γίνεται σύγκριση με την αναλυτική λύση του Kirsch που ισχύει για ένα κυκλικό άνοιγμα σε άπειρο ελαστικό μέσο (σχέσεις 2.24) καθώς και η σύγκριση με τις μετατοπίσεις (σχέσεις 2.25).

Πιο συγκεκριμένα μελετάται η σύγκλιση της μεθόδου, στις μηδέν και στις ενενήντα μοίρες του ανοίγματος, με την λεπτομερέστερη διακριτοποίηση ανοίγματος μοναδιαίας ακτίνας με 12, 24 και 96 στοιχεία αντίστοιχα, υπό την επίδραση κατακόρυφης τάσης 1MPa και με παραμέτρους υλικού $E = 20000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$.

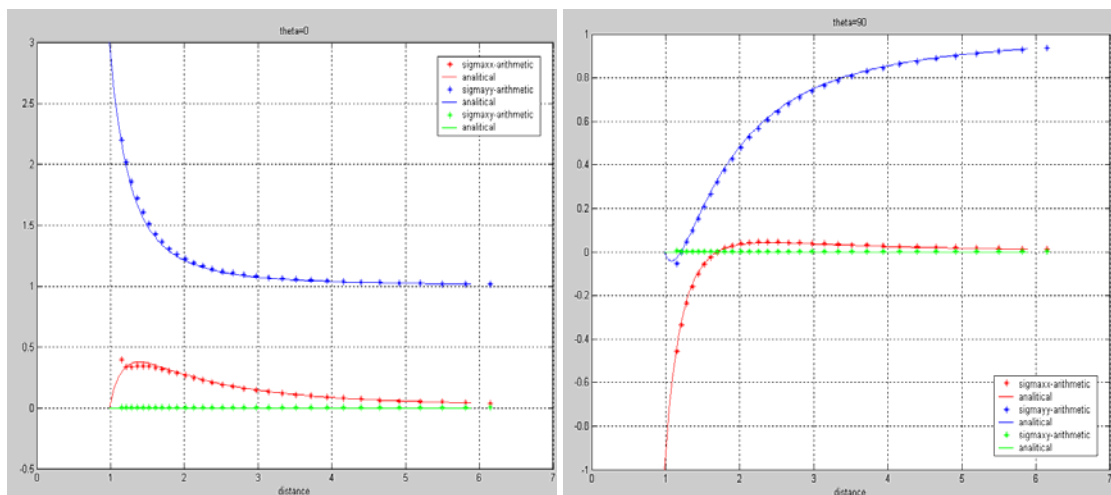


Σχήμα 5.1: Διαγράμματα σύγκρισης τάσεων με την λύση Kirsch. για άνοιγμα σχεδιασμένο με 12 στοιχεία.

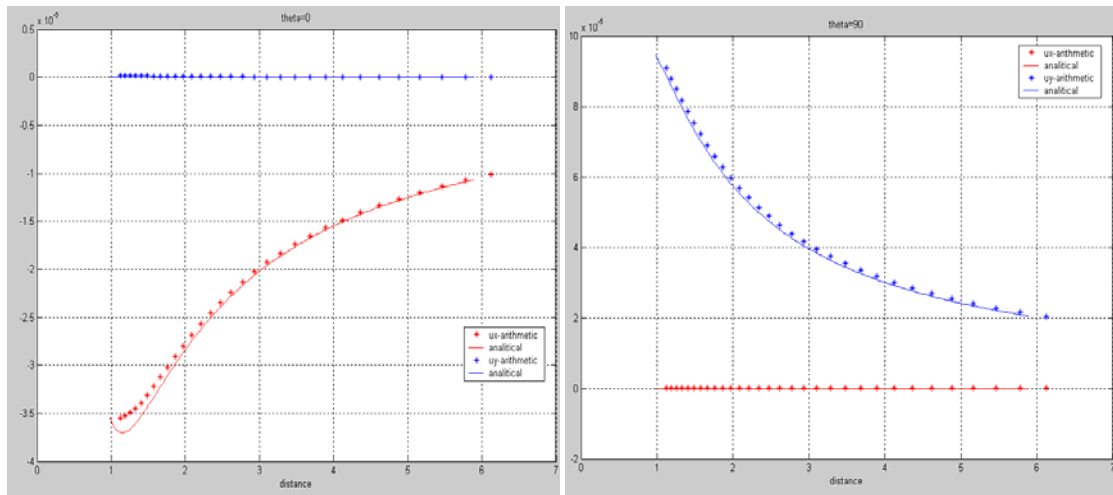


Σχήμα 5.2: Διαγράμματα σύγκρισης μετατοπίσεων για άνοιγμα σχεδιασμένο με 12 στοιχεία.

Από τα διαγράμματα αυτά φαίνεται ότι η διακριτοποίηση αυτή είναι πολύ αραιή και τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων και των τάσεων έχουν μεγάλη απόκλιση από τις αναλυτικές λύσεις. Ιδιαίτερα μεγάλες αποκλίσεις παρατηρούνται στα σύνορα του ανοίγματος. Άρα αυτή η διακριτοποίηση δεν είναι η καταλληλότερη για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

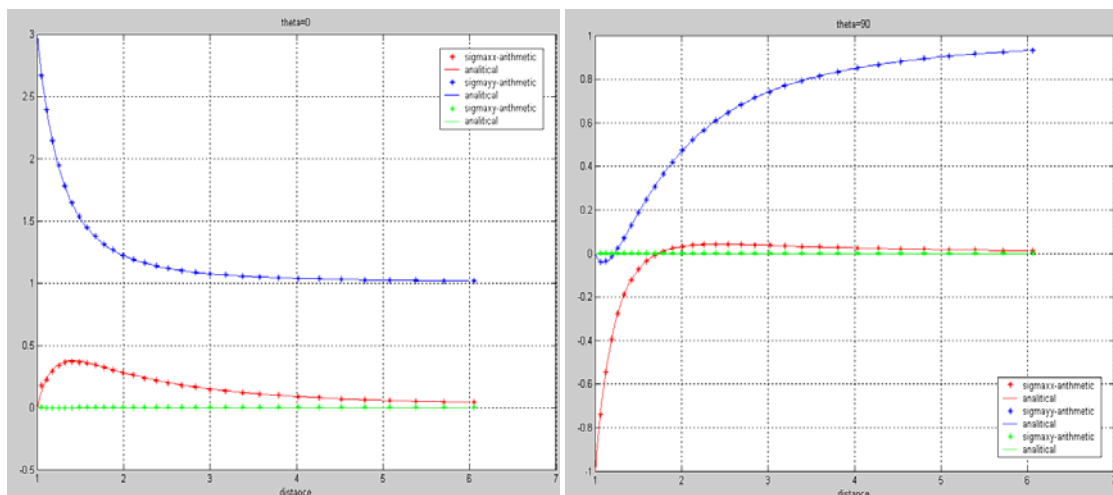


Σχήμα 5.3: Διαγράμματα σύγκρισης τάσεων με την λύση Kirsch για άνοιγμα σχεδιασμένο με 24 στοιχεία.

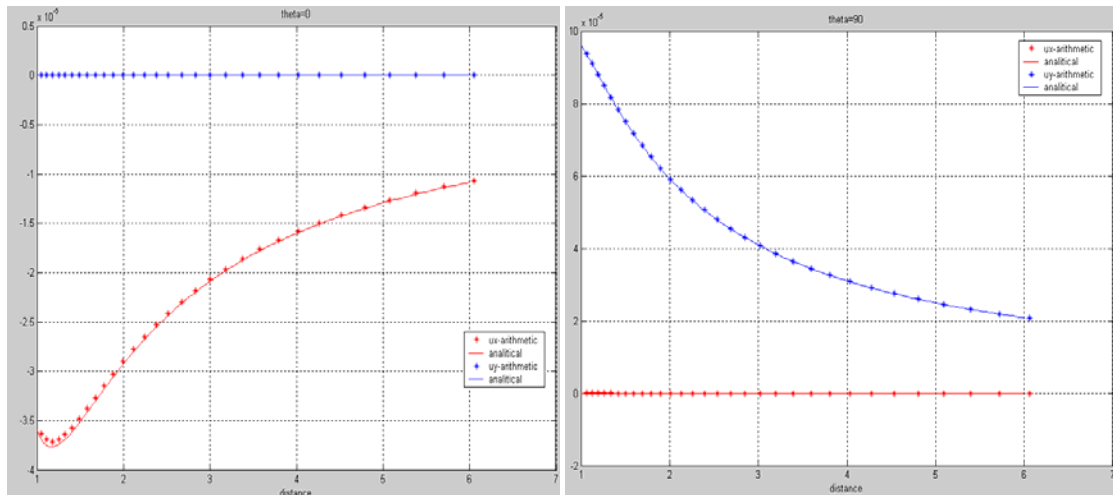


Σχήμα 5.4: Διαγράμματα σύγκρισης μετατοπίσεων για άνοιγμα σχεδιασμένο με 24 στοιχεία.

Με την αύξηση της διακριτοποίησης τα αποτελέσματα έχουν μεγαλύτερη ταύτιση με της αναλυτικές. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούνται προβλήματα στις τάσεις κοντά στα σύνορα, έτσι φαίνεται ότι χρειάζεται παραπάνω διακριτοποίηση. Έτσι αυξάνοντας στο τετραπλάσιο την διακριτοποίηση προκύπτουν τα αποτελέσματα των ακόλουθων διαγραμμάτων.



Σχήμα 5.5: Διαγράμματα σύγκρισης τάσεων με την λύση Kirsch για άνοιγμα σχεδιασμένο με 96 στοιχεία.



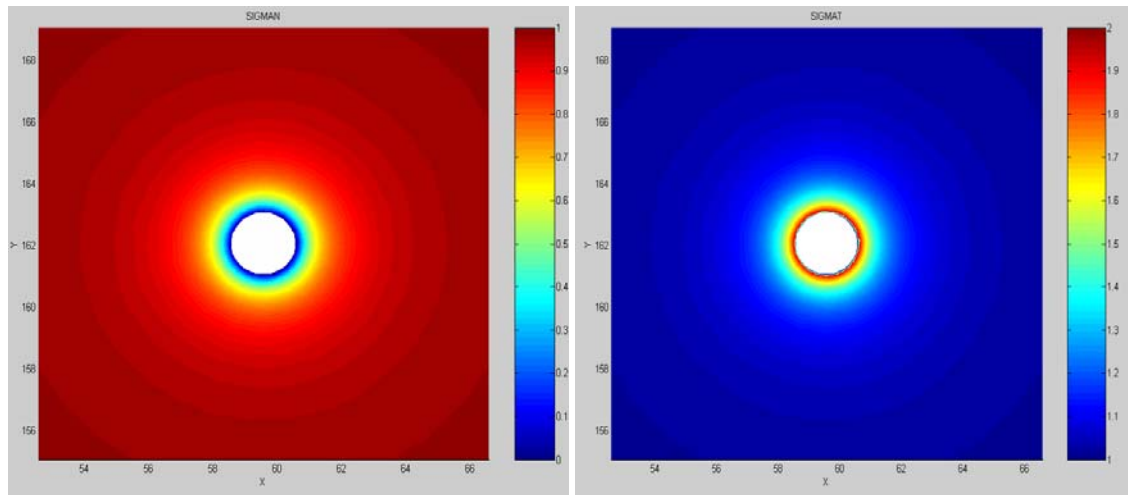
Σχήμα 5.6: Διαγράμματα σύγκρισης μετατοπίσεων για άνοιγμα σχεδιασμένο με 96 στοιχεία.

Από τα διαγράμματα 5.1 έως 5.6 προκύπτει ότι στην περίπτωση των 96 στοιχείων οι λύσεις συμπίπτουν με το ελάχιστο σφάλμα από τις τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.

Αρα το μέγεθος των στοιχείων είναι ένας καθοριστικός παράγοντας στην εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων. Ο σχεδιασμός των συνόρων πρέπει να γίνεται με αρκετά μεγάλο αριθμό στοιχείων ώστε να προκύπτει η ακριβέστερη λύση. Αντιθέτως ο σχεδιασμός με πάρα πολλά στοιχεία, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις συνόρων απλής γεωμετρίας, όπως το κυκλικό άνοιγμα, θα είχε πολύ μικρές διαφορές στα αποτελέσματα, αλλά περισσότερο χρόνο στο σχεδιασμό.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η κατανομή των κυρίων τάσεων στην περίπτωση που υπάρχει ομοιόμορφη φόρτιση ($\sigma_h = \sigma_v$). Οι παράμετροι που μπαίνουν ως είσοδος στο πρόγραμμα δίδονται στην 5.1.

$$\begin{aligned} P_{xx} &= P_{yy} = 1MPa \\ E &= 22000MPa, \nu = 0.1 \end{aligned} \quad (5.1)$$



Σχήμα 5.7: Κύριες τάσεις σ_1 - σ_2 γύρω από κυκλικό άνοιγμα.

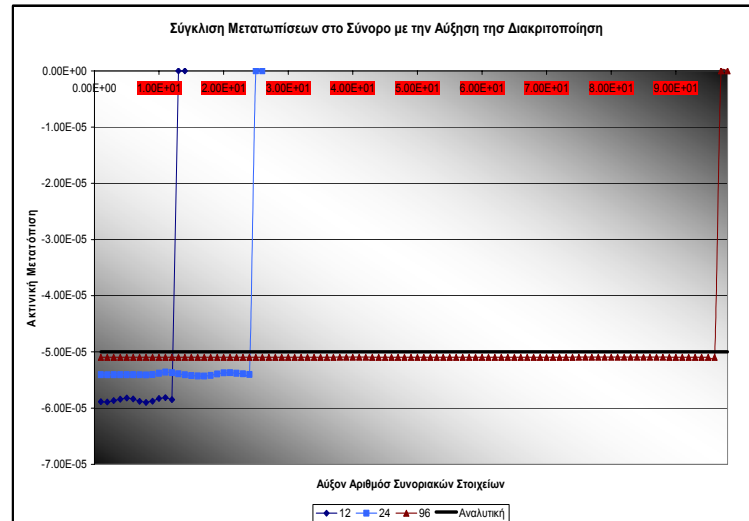
Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι:

- Η κατανομή των τάσεων είναι τελείως συμμετρική γύρω από το άνοιγμα
- Η ελάχιστη κύρια τάση ($=\sigma_2$) είναι μηδέν στο άνοιγμα.
- Η μέγιστη κύρια τάση ($=\sigma_1$) παίρνει την μέγιστη τιμή 2 στο άνοιγμα.
- Η περίπτωση ομοιόμορφου τασικού πεδίου είναι ευνοϊκότερη από την περίπτωση της κατακόρυφης τάσης ($K=0$).

Στην συνέχεια χρειάζεται να γίνει επαλήθευση των λύσεων επάνω στα σύνορα του ανοίγματος για τις τάσεις και τις μετατοπίσεις.

- Μετατοπίσεις.

Η μετατόπιση u_θ είναι σταθερή γύρω από τα σύνορα του κυκλικού ανοίγματος, στην περίπτωση του ομοιόμορφου τασικού πεδίου. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η σύγκλιση της μεθόδου με την αύξηση της διακριτοποίησης. Από το σχήμα 5.8 προκύπτει ότι οι μετατοπίσεις για την περίπτωση διακριτοποίηση του ανοίγματος με 12 και 24 στοιχεία αντίστοιχα παίρνουν αρκετά μεγαλύτερες τιμές από την αναλυτική λύση (σχέση 2.25). Αντίθετα στην περίπτωση των 96 συνοριακών στοιχείων η λύση σχεδόν ταυτίζεται με την αναλυτική με σφάλμα της τάξεως του (2 %)

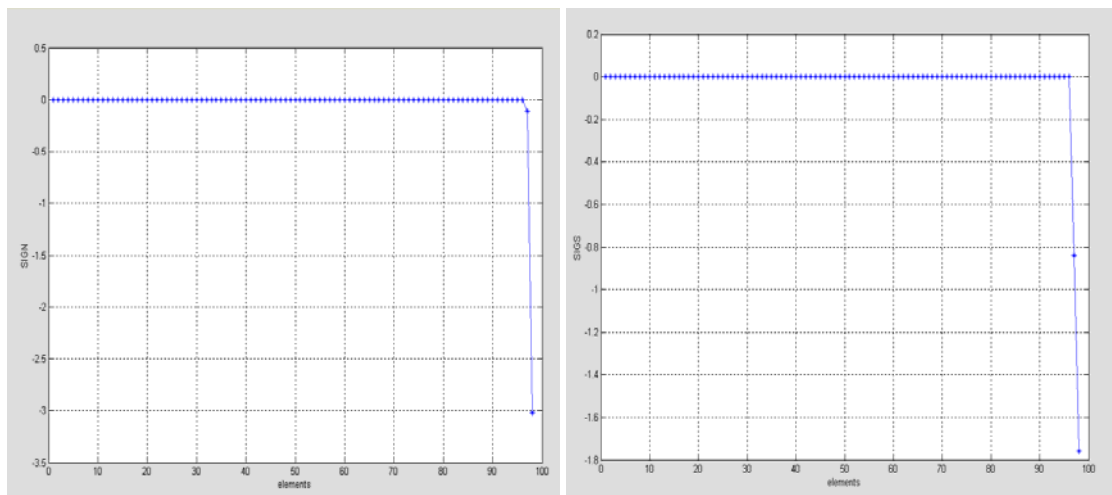


Σχήμα 5.8: Μετατόπιση στα σύνορα του ανοίγματος

*Τα δύο στοιχεία που ξεφεύγουν σε κάθε περίπτωση είναι αυτά που σταθεροποιούν την εσωτερική περιοχή του ανοίγματος

➤ Τάσεις

Οι τάσεις σε αυτή την περίπτωση πρέπει να συμπίπτουν με τις συνοριακές συνθήκες (Neumann) που επιβλήθηκαν στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Σχήμα 5.9: Τάσεις σ_s και σ_n στα Σύνορα του Ανοίγματος, για 96 Στοιχεία

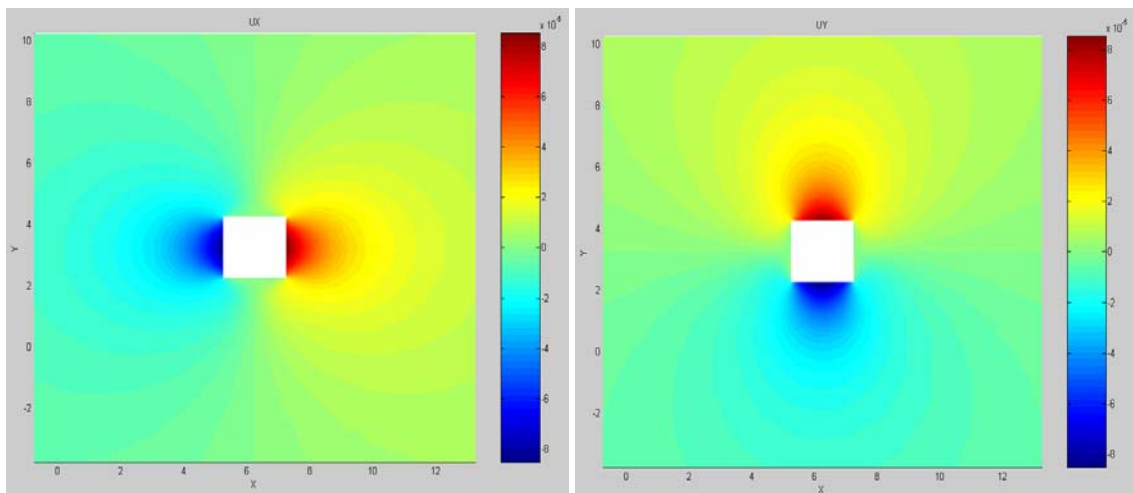
Στα διαγράμματα αυτά φαίνεται οι τάσεις που υπολογίζονται από το πρόγραμμα ικανοποιούν της συνοριακές συνθήκες του προβλήματος με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια για την περίπτωση κυκλικού ανοίγματος μοναδιαίας ακτίνας, διακριτοποιημένου με 96 στοιχεία. Ακόμα από τα τελευταία διαγράμματα φαίνεται ότι στα επιπλέον συνοριακά στοιχεία που σταθεροποιούν την εσωτερική περιοχή του ανοίγματος εμφανίζονται μεγάλες τάσεις, οι οποίες όμως, όπως προκύπτει, δεν επηρεάζουν την λύση στα σύνορα.

- Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση των ανοιγμάτων η γωνιακή τάση (σ_θ) δεν είναι συνεχής επάνω στα σύνορα οπότε χρειάζεται ξεχωριστός υπολογισμός τους.

5.2.2 Τετραγωνικό Άνοιγμα

Τα κυκλικά ανοίγματα λόγω της καμπυλότητας τους δημιουργούν μεγάλες απώλειες του εξορυσόμενου υλικού κατά την ανάπτυξη των μεθόδων υπογείων εκμεταλλεύσεων. Γι' αυτό συνήθως στην θέση τους χρησιμοποιούνται: τετραγωνικές, ορθογωνικές ή τραπεζοειδής διατομές ανάλογα με το εντατικό πεδίο και τις ιδιότητες του πετρώματος.

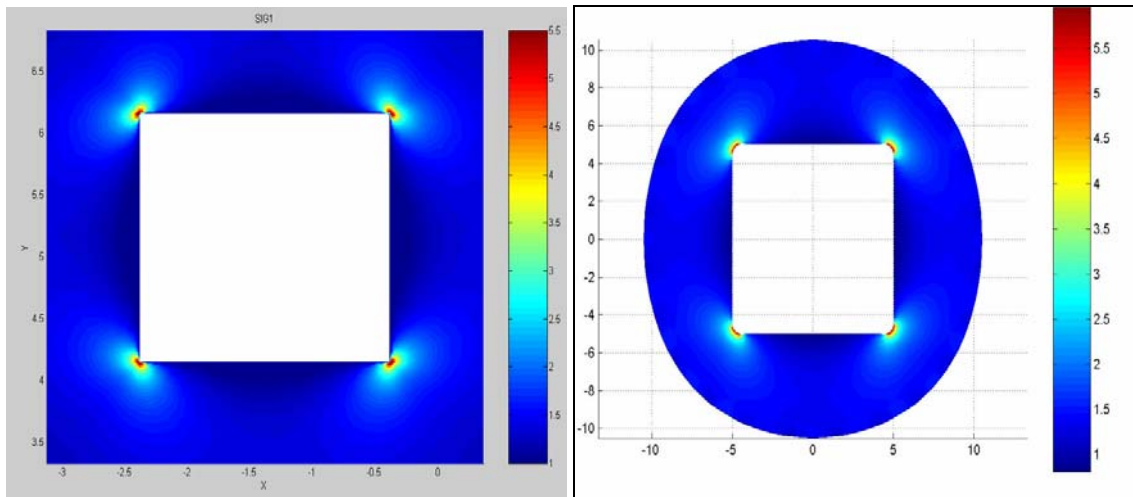
Για την μελέτη της απλούστερης περίπτωσης του τετραγωνικού ανοίγματος, παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις σε τετραγωνικό άνοιγμα πλευράς 2, σχεδιασμένο με 80 στοιχεία, εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες φορτίσεις (5.1).



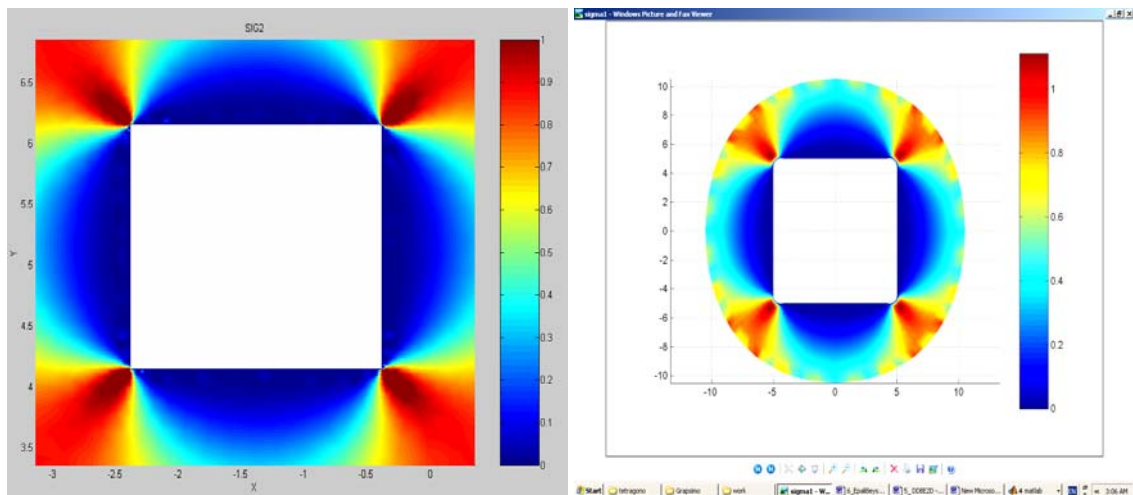
Σχήμα 5.10: Μετατοπίσεις u_x - u_y , σε τετραγωνικό άνοιγμα

Από τα διαγράμματα αυτά φαίνεται ότι οι μέγιστες μετατοπίσεις παρουσιάζονται στο κέντρο των πλευρών του ανοίγματος ενώ στα άκρα γίνονται ελάχιστες.

Για την επαλήθευση των λύσεων στην περίπτωση του τετραγωνικού ανοίγματος γίνεται σύγκριση των κυρίων τάσεων με τις ημι-αναλυτικές λύσεις, που παράγονται με την μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών σε τετράγωνο πλευράς 10 (Λιόλιος, 2002).



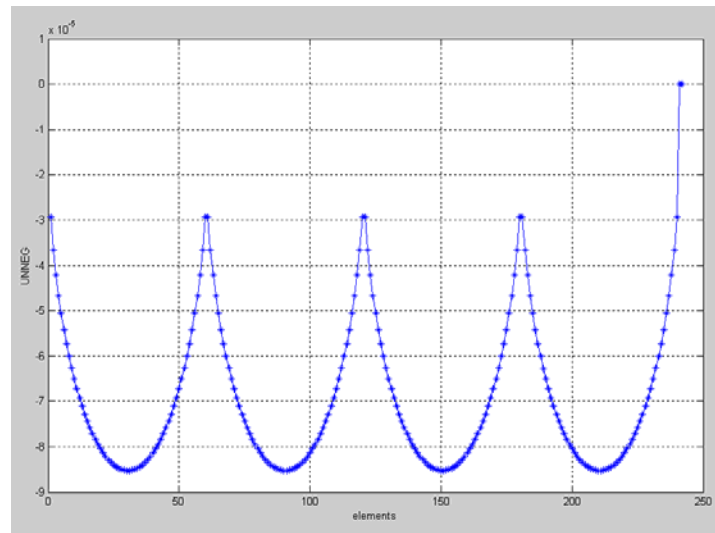
Σχήμα 5.11: Σύγκριση μέγιστης κύριας τάσης



Σχήμα 5.12: Σύγκριση ελάχιστης κύριας τάσης

Από την σύγκριση αυτή φαίνεται (ποιοτικά και ποσοτικά) η ταύτιση των αποτελεσμάτων και για τις δύο κύριες τάσεις. Ακόμα φαίνεται ότι το μέγεθος του τετραγώνου δεν παίζει ρόλο στο μέτρο των τάσεων γύρω από το άνοιγμα.

- Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι τιμές των μετατοπίσεων που υπολογίζονται από το πρόγραμμα, ακριβώς επάνω στα σύνορα:

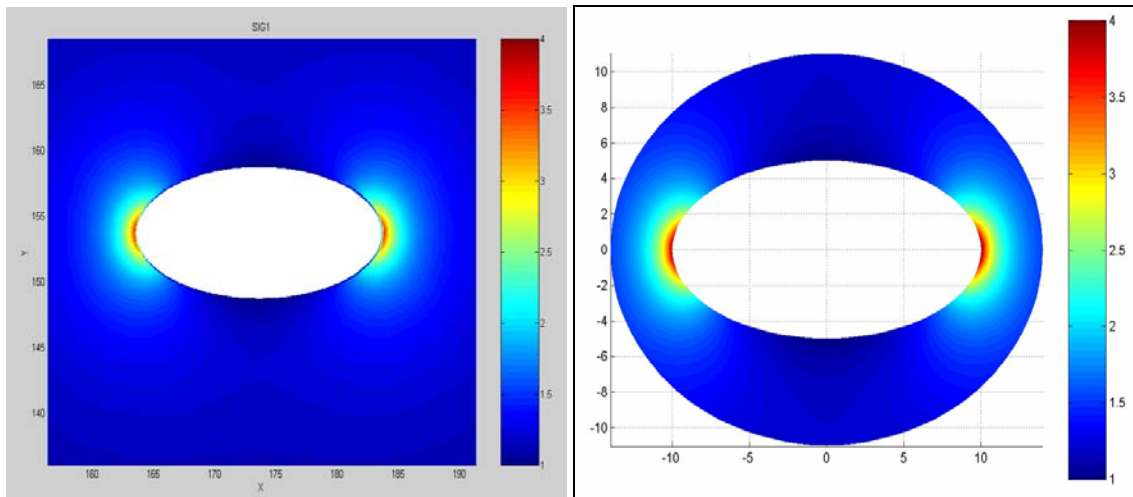


Σχήμα 5.13: Μετατοπίσεις στο σύνορο του τετραγωνικού ανοίγματος

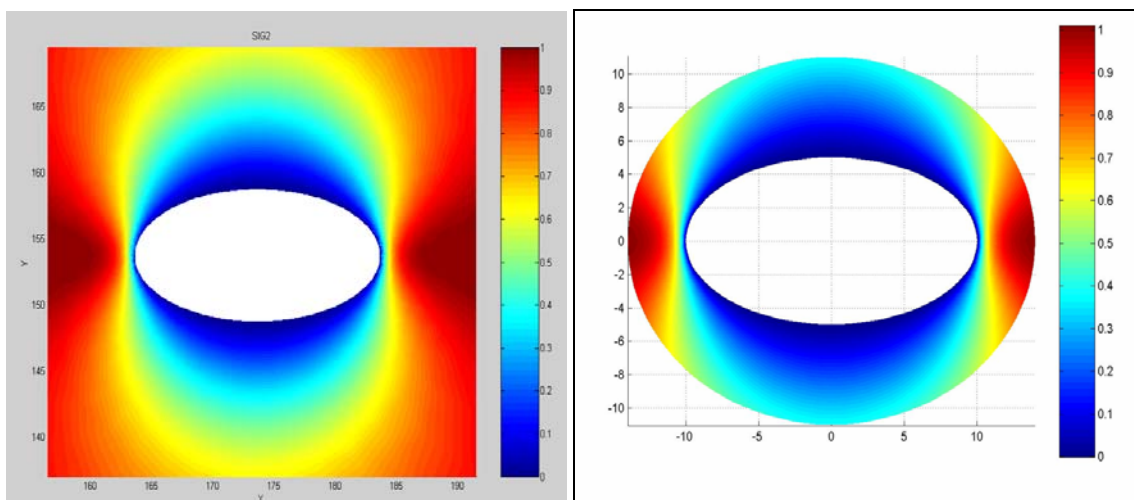
- Τέλος μεγάλες συγκεντρώσεις τάσεων στο τετραγωνικό άνοιγμα παραλαμβάνονται στις γωνίες του, με αποτέλεσμα στις πλευρές του να είναι αρκετά μικρότερες από αυτές που παραλαμβάνει το κυκλικό άνοιγμα.

5.2.3 Ελλειπτικό Άνοιγμα

Τα ελλειπτικά ανοίγματα χρησιμοποιούνται σε υπόγειες σήραγγες λόγω της εξομάλυνσης των τάσεων κατ' αντιστοιχία με τα κυκλικά ανοίγματα. Στην συνέχεια ακολουθεί η σύγκριση των κυρίων τάσεων με την μέθοδο που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα (μιγαδικών δυναμικών).



Σχήμα 5.14: Σύγκριση μέγιστης κύριας τάσης, για ελλειπτικό άνοιγμα



Σχήμα 5.15: Σύγκριση ελάχιστης κύριας τάσης, για ελλειπτικό άνοιγμα.

Από τα διαγράμματα αυτά φαίνεται η ταύτιση της λύσης του προγράμματος για το ελλειπτικό άνοιγμα. Ακόμη προκύπτει ότι στο συγκεκριμένο άνοιγμα υπάρχουν διπλάσιες συγκεντρώσεις τάσεων από ότι στο κυκλικό, για παρόμοιο τασικό πεδίο. Άρα σημαντικό ρόλο στην συγκέντρωση των τάσεων παίζει ο λόγος των κύριων αξόνων της έλλειψης.

Άλλες διατομές που χρησιμοποιούνται και δεν περιλαμβάνουν την συμμετρία των προηγούμενων παραδειγμάτων είναι: οι ημι-κυκλικές και ανοίγματα ακανόνιστων διατομών. Τα αποτελέσματα από τέτοιες διατομές φαίνονται στο παράρτημα Α.

Από τα παραδείγματα αυτά, προκύπτει ότι η εντατική κατάσταση γύρω από τα ανοίγματα εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

- Την γεωμετρία του ανοίγματος.
- Το μέτρο των τάσεων που ασκούνται και
- Τον συντελεστής πλευρικής ώθησης.

Μέγιστες συγκεντρώσεις τάσεων, υπάρχουν όταν:

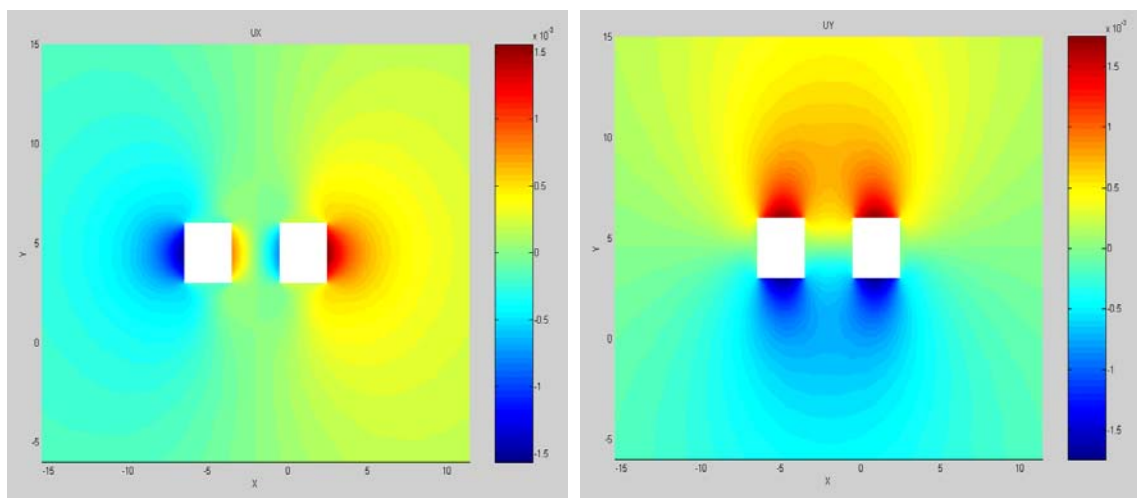
- Υπάρχουν γωνιακά τμήματα, π.χ. εάν υπάρχει τετραγωνικό άνοιγμα.
- Σε ανοίγματα που υπάρχει απότομη αλλαγή καμπυλότητας, π.χ. ελλειπτικό άνοιγμα.
- Οι μέγιστες συγκεντρώσεις τάσεων στα πλευρικά σημεία των ανοιγμάτων, υπάρχουν όταν ο συντελεστής πλευρικής ώθησης είναι μηδέν ($k = 0$).

5.3 Εντατική Κατάσταση Λόγω Ύπαρξης Περισσότερων Ανοιγμάτων.

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάστηκε η ύπαρξη ενός ανοίγματος, στις εφαρμογές της γεωμηχανικής τις περισσότερες περιπτώσεις τα υπόγεια έργα περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα ανοίγματα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την υπέρθεση των τάσεων στην περιοχή του στύλου, έτσι είναι απαραίτητη η μελέτη της εντατικής κατάστασης στην συγκεκριμένη περιοχή.

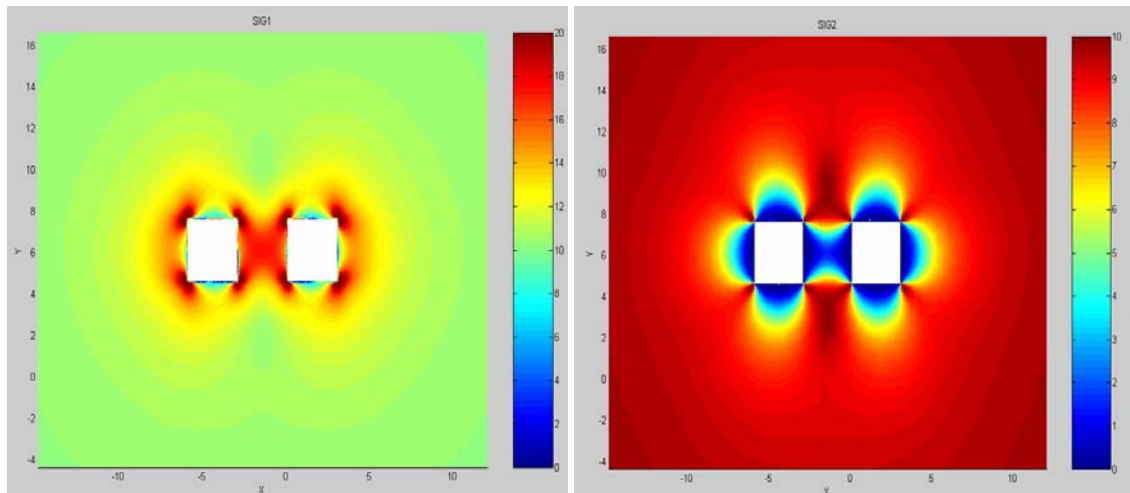
Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση δύο τετραγωνικών ανοιγμάτων πλευράς 3, που βρίσκονται σε απόσταση 6 μεταξύ τους με τις εξής παραμέτρους και φορτίσεις:

- $E=20000\text{MPa}$, $\nu=0.2$
- $P_{xx} = P_{yy} = 10\text{MPa}$



Σχήμα 5.16: Μετατοπίσεις λόγω ύπαρξης δύο τετραγωνικών ανοιγμάτων

Στην περίπτωση αυτή οι μετατοπίσεις ανάμεσα στο στύλο αλληλοεξουδετερώνονται από την επίδραση των δύο ανοιγμάτων. Αντίθετα οι τάσεις προσθέτονται, δημιουργώντας αρκετά υψηλές συγκεντρώσεις (σχήμα 5.17).

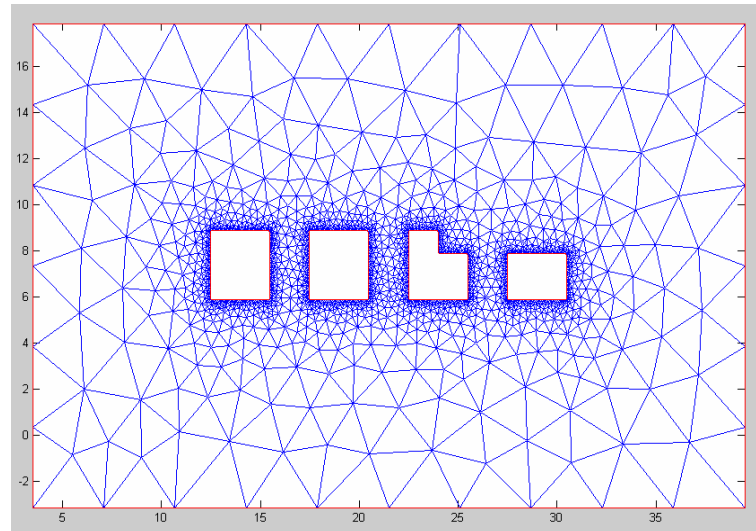


Σχήμα 5.17:Υπέρθωση των τάσεων στην περιοχή του στύλου

Στην περίπτωση όπου υπάρχουν περισσότερα από ένα ανοίγματα αναλυτικές λύσεις είναι δύσκολο να βρεθούν. Έτσι στην περίπτωση αυτή για την επαλήθευση γίνεται σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εξάγει, το δοκιμασμένης ακρίβειας υπολογιστικό πρόγραμμα (Phases) και δίδονται στο παράρτημα σχήματα A5-A6:

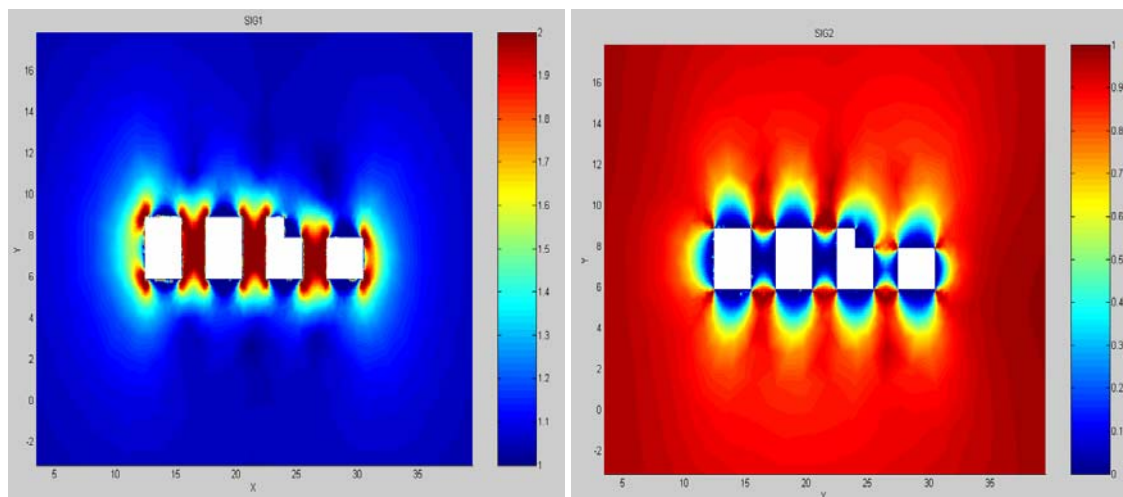
Οι λύσεις που παράγονται από τα δύο προγράμματα έχουν την ίδια μορφή και οι τιμές των τάσεων και των μετατοπίσεων είναι πολύ κοντά, σε τάξη μεγέθους. Αξίζει να αναφερθεί ότι το πρόγραμμα «Phases» χρησιμοποιεί υβριδική αριθμητική μέθοδο που βασίζεται στον συνδυασμό της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων και την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Εφόσον μελετήθηκε η απλή περίπτωση των δύο ανοιγμάτων στην συνέχεια, εξετάζεται η περίπτωση ύπαρξης πολλαπλών ανοιγμάτων που εξορύσσονται κατά την προσπέλαση και την ανάπτυξη των υπογείων εκμεταλλεύσεων. Έτσι για την περίπτωση της μεθόδου των θαλάμων και στύλων που φαίνεται στο σχήμα 5.18 που πάρθηκε από (Εξαδάκτυλο, 2000), παρουσιάζεται η εντατική κατάσταση γύρω από εκσκαφές που περιλαμβάνουν εγκατάλειψη στύλων (μέθοδος των θαλάμων και στύλων).



Σχήμα 5.18: Διακριτοποίηση περιοχής με πολλαπλά ανοίγματα

Στα αποτελέσματα που ακολουθούν φαίνεται η υπέρθεση των τάσεων στο εσωτερικό των στύλων, καθώς αναπτύσσεται η μέθοδος εκμετάλλευσης υπόγειου κοιτάσματος, με τις παραμέτρους 5.1. Οι λύσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε με την χρήση του κατάλληλου κριτηρίου αστοχίας για να εκτιμηθεί η συμπεριφορά των στύλων και να γίνει ο κατάλληλος σχεδιασμός, ώστε να αποτραπούν πιθανές αστοχίες του πετρώματος.



Σχήμα 5.19: Κύριες τάσεις κατά την ανάπτυξη της μεθόδου θαλάμων και στύλων

- Πρέπει να σημειωθεί ότι το πλέγμα που φαίνεται στο 5.18 δεν έχει να κάνει με πεπερασμένα. Το πλέγμα αυτό δημιουργείται στο περιβάλλον του «Matlab» και από αυτό χρησιμοποιούνται μόνο οι συντεταγμένες των κόμβων.

Το πρόγραμμα έχει την δυνατότητα επίλυσης και περιπτώσεων που δρουν τάσεις εκτός του επιπέδου που μελετάται. Αντί-επίπεδες τάσεις σε υπόγειες σήραγγες εμφανίζονται στην περίπτωση που ο επιμήκης άξονας της παρουσιάζει κλίση ως προς το επίπεδο των κύριων τάσεων (συνήθως το οριζόντιο), ή στην περίπτωση ύπαρξης στην περιοχή του ανοίγματος, ασυνέχειας η οποία αλλάζει την κατεύθυνση των κύριων τάσεων. Για την περίπτωση που υπάρχουν διατμητικές τάσεις εκτός επιπέδου, δεν βρέθηκε τρόπος επαλήθευσης με κάποια αναλυτική λύση η παρόμοιο πρόγραμμα ώστε να επαληθευτούν τα αποτελέσματα στην περίπτωση των ανοιγμάτων. Τα διαγράμματα, αντί-επίπεδων τάσεων και της μετατόπισης στην κατεύθυνση z, για κυκλικό άνοιγμα δίδονται στο παράρτημα (σχήματα A7-A9).

Κεφάλαιο 6^ο:
Συμπεράσματα – Προτάσεις

6. Συμπεράσματα – Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μία από τις μεθόδους των συνοριακών στοιχείων, η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων. Οι μέθοδοι των συνοριακών στοιχείων υπερτερούν έναντι των υπολοίπων αριθμητικών μεθόδων, λόγω του γεγονότος ότι η διακριτοποίηση εστιάζεται κατά μήκος των συνόρων του πεδίου και όχι σε όλο το μέσο, (όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων). Άμεση συνέπεια αυτού είναι να απαιτούνται μικρότεροι υπολογιστικοί χρόνοι και λιγότερος χώρος στην μνήμη του υπολογιστή.

Ο υπολογιστικός αλγόριθμος TWODD που βρέθηκε στην βιβλιογραφία (*Crouch & Starfield, 1990*), χρησιμοποιήθηκε ως βάση για την κατασκευή υπολογιστικού κώδικα σε περιβάλλον Matlab. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε χρησιμοποιεί ένα προ-επεξεργαστή που κάνει την εισαγωγή της γεωμετρίας ευκολότερη, διαβάζοντας αρχεία «dxfl» παραγόμενα μέσω του σχεδιαστικού πακέτου AutoCAD, ενώ έχει την δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων υπό συνθήκες αντι-επίπεδης φόρτισης (σε αντίθεση με τον κώδικα TWODD ο οποίος αντιμετωπίζει μόνο προβλήματα επίπεδης εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης). Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων δημιουργήθηκε μετα-επεξεργαστής με τον οποίο κατασκευάζονται διαγράμματα ισοχρωματικών επιφανειών.

Για την διερεύνηση της αξιοπιστίας των λύσεων του προγράμματος (DDBETD) μελετήθηκε η εντατικό-παραμορφωσιακή κατάσταση γύρω από:

- Ανοίγματα διαφόρων διατομών.(κυκλικό, τετραγωνικό, ελλειπτικό και άλλα).
- Αλληλεπίδραση πολλαπλών ανοιγμάτων

Κατά τη μελέτη αυτή, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων είτε με αναλυτικές λύσεις (Kirsch, Μιγαδικά Δυναμικά), είτε με αποτελέσματα άλλων αριθμητικών μεθόδων (Phases). Με βάση αυτή την σύγκριση προέκυψε η ορθότητα των λύσεων που παράγει στις περιπτώσεις ανοιγμάτων μέσα σε άπειρο ελαστικό μέσο. Σημειώνεται ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων αυξάνει με τη λεπτομερέστερη διακριτοποίηση του συνόρου, πράγμα που συμβαίνει σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω του ότι οι εφαπτομενικές τάσεις είναι ασυνεχής επάνω στα σύνορα, χρειάζεται ξεχωριστός υπολογισμός τους.

Μερικές από τις προτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν στα πλαίσια περαιτέρω ανάπτυξης της παρούσας εργασίας είναι οι εξής:

1. Η αντίστοιχη μέθοδος μπορεί να επεκταθεί και για τη αντιμετώπιση προβλημάτων σε τρεις διαστάσεις
2. Μελέτη περιπτώσεων ανομοιογένειας, όπως η αλληλεπίδραση υποστήριξης και ανοίγματος ή και ετερογενούς μέσου που αποτελείται από περιοχές διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων
3. Να μελετηθούν μοντέλα υπό συνθήκες αντι-επίπεδης φόρτισης.
4. Μελέτη ανοιγμάτων μέσα σε ρωγματομένο μέσο.(συνδυασμοί ανοιγμάτων και ασυνεχειών-ρωγμών)

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία:

1. Αγιουτάντης, Ζ. (2002). *Μηχανική Πετρωμάτων*, Εκδοτικός Όμιλος Ίων, Αθήνα.
2. Εξαδάκτυλος, Γ. (2001). *Εισαγωγή στην Θεωρία της Ελαστικότητας και στη Θραυστομηχανική*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης.
3. Εξαδάκτυλος, Γ. (2000). *Συστήματα Υπογείων Έργων*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πολυτεχνείο Κρήτης.
4. Λιόλιος, Π. (2002). *Ανάλυση Τάσεων και Μετατοπίσεων σε Υπόγεια Έργα και Σήραγγες με τη Μέθοδο των Μιγαδικών Δυναμικών*, Διπλωματική Εργασία.

Διεθνής Βιβλιογραφία:

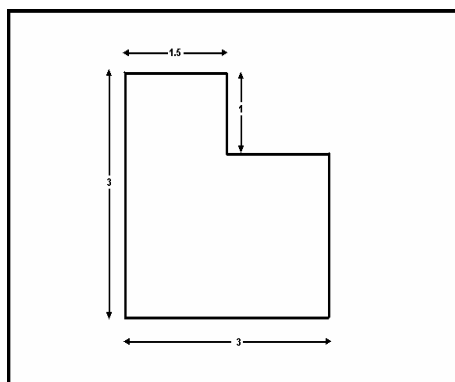
1. Beer, G., J.R. Booker & J.P. Carter (1992). *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Published by A.A Balkema, Rotterdam.
2. Crouch, S.L. & A.M. Starfield (1990). *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, Unwin Human, London.
3. Hirth, J.P. & J. Lothe (1982). *Theory of Dislocation*, Willey & Sons, Inc, Canada.
4. Hoek, G., P.K. Kaiser & W.F. Bawden (1995). *Support of Underground Excavations in Hard Rock*, Published by A.A Balkema, Rotterdam.

Πηγές Διαδικτύου:

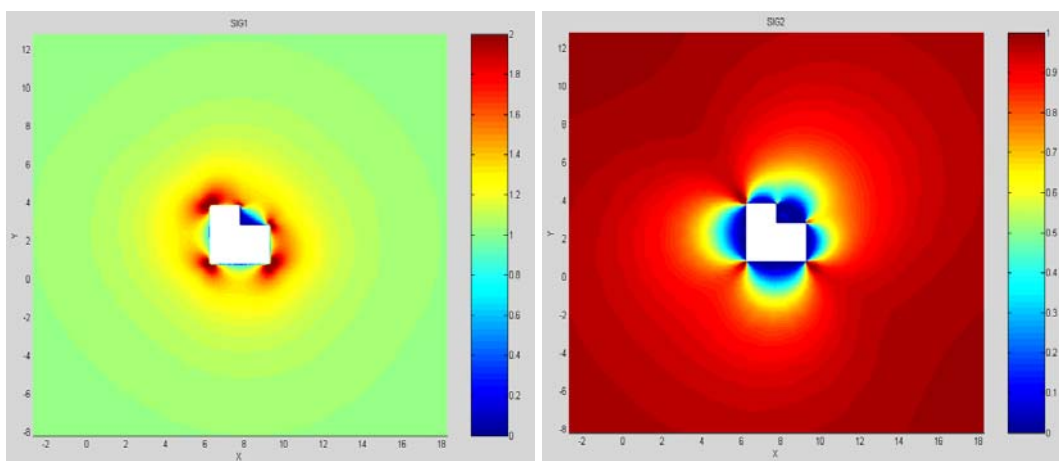
1. Martel, S. (2003). *Mode III*, University of Hawaii,
http://www.soest.hawaii.edu/martel/Courses/GG703/GG711c_Lec_15.pdf
2. Martel, S. (2003). *Boundary Element Code: TWODD*, University of Hawaii,
http://www.soest.hawaii.edu/martel/Courses/GG703/GG711c_Lec_19.pdf

Παράρτημα Α

Στην ενότητα αυτή δίδονται τρεξίματα του προγράμματος για διάφορες γεωμετρικές ανοιγμάτων :



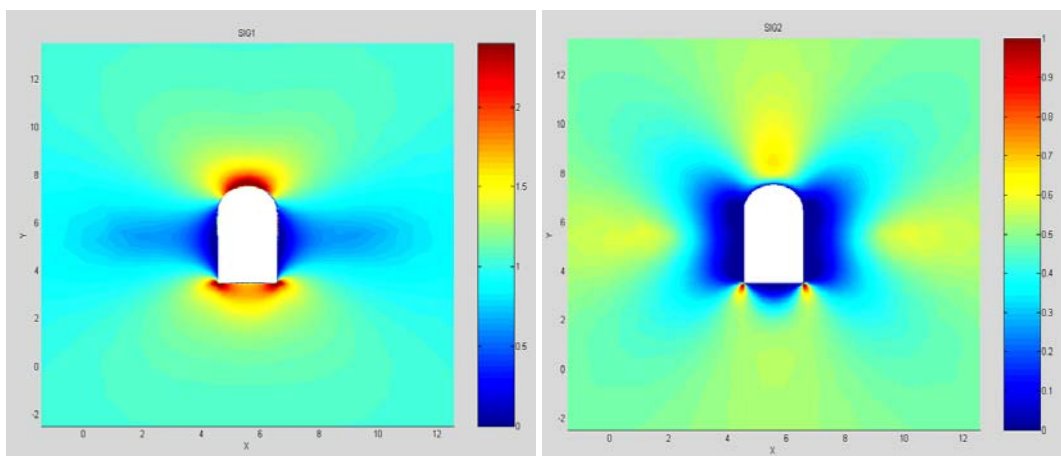
Σχήμα Α.1:Ακανόνιστη διατομή



Σχήμα Α.2:Κύριες τάσεις γύρω από ακανόνιστο άνοιγμα

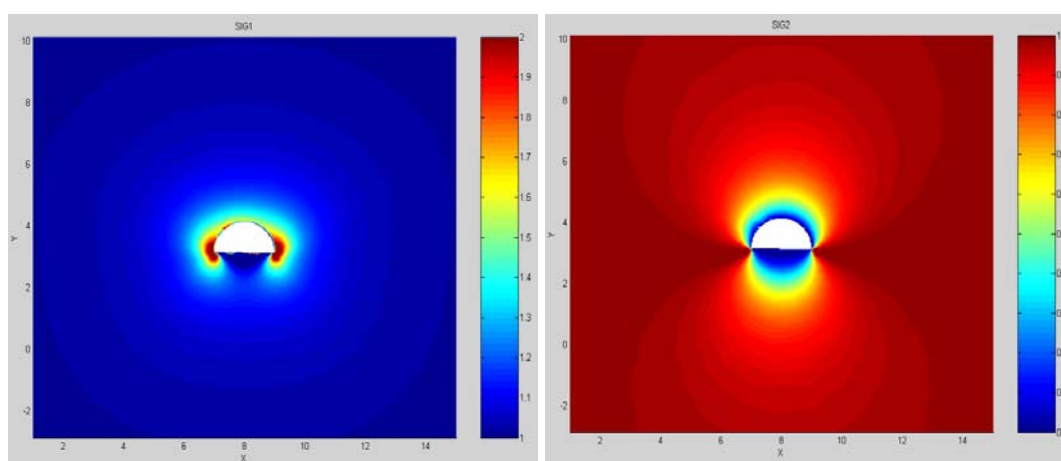
Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στην περίπτωση αγιδωτού ανοίγματος. Τέτοιου είδους διατομές είναι συνδυασμός κυκλικών και ορθογωνίων διατομών και χρησιμοποιούνται κατά κόρον στις υπόγειες στοές.

$$\sigma h = 1, \sigma v = 0.5$$



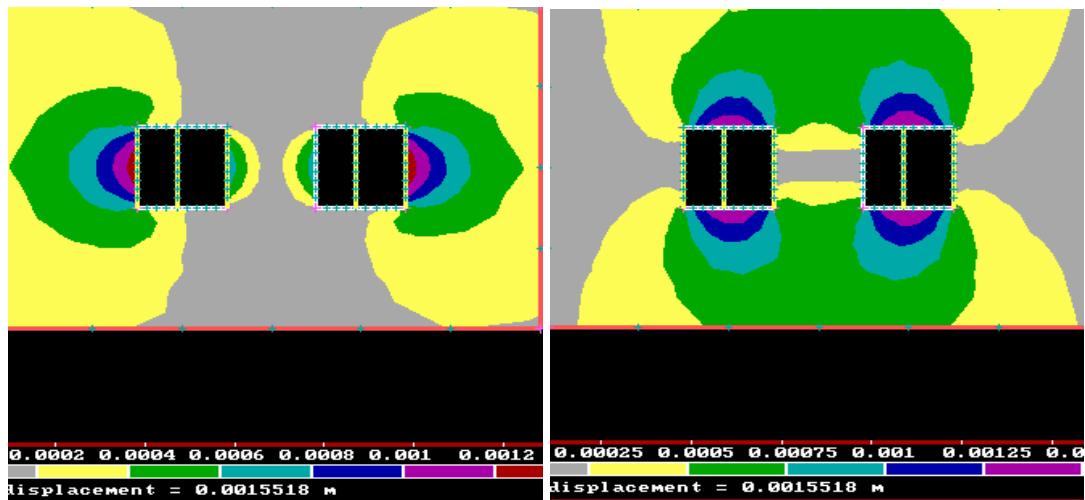
Σχήμα Α.3:Κύριες τάσεις σε αψιδωτό άνοιγμα

Ενώ το εντατικό πεδίο στην περίπτωση ημικυκλικών ανοιγμάτων σε υδροστατική φόρτιση είναι:

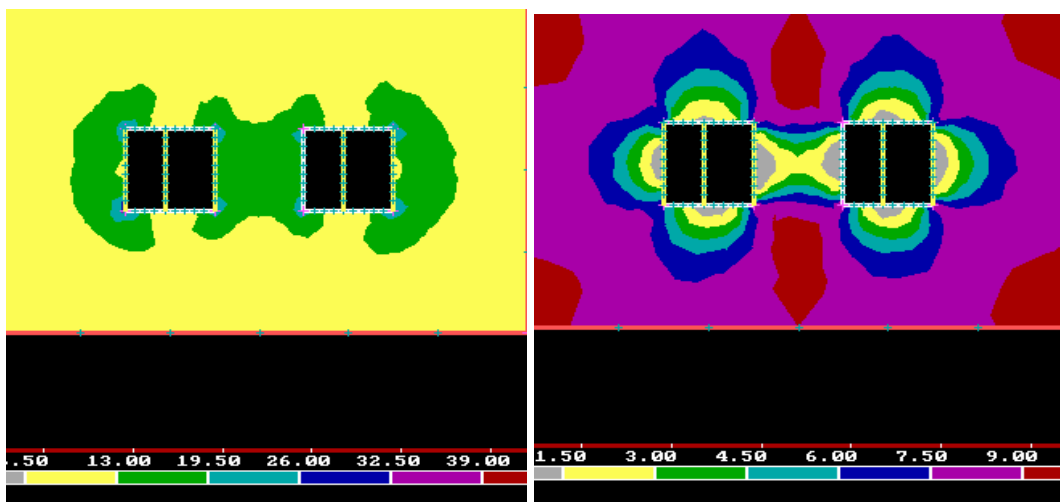


Σχήμα Α.4:Κύριες τάσεις σε ημικυκλικό άνοιγμα

Αποτελέσματα Υπολογιστικού προγράμματος «Phases», που χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση του προγράμματος για δύο τετραγωνικά ανοίγματα.

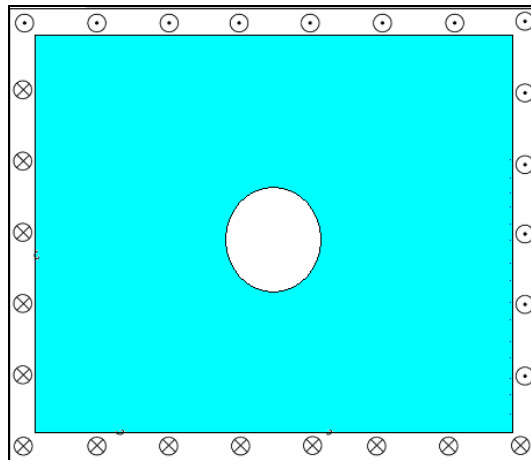


Σχήμα Α.5:Μετατοπίσεις στον χ και τον y άξονα, του προγράμματος «Phases».

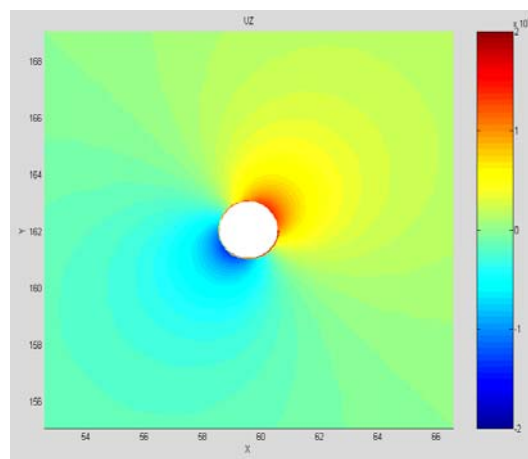


Σχήμα Α.6:Υπολογισμός κυρίων τάσεων με το πρόγραμμα «Phases»

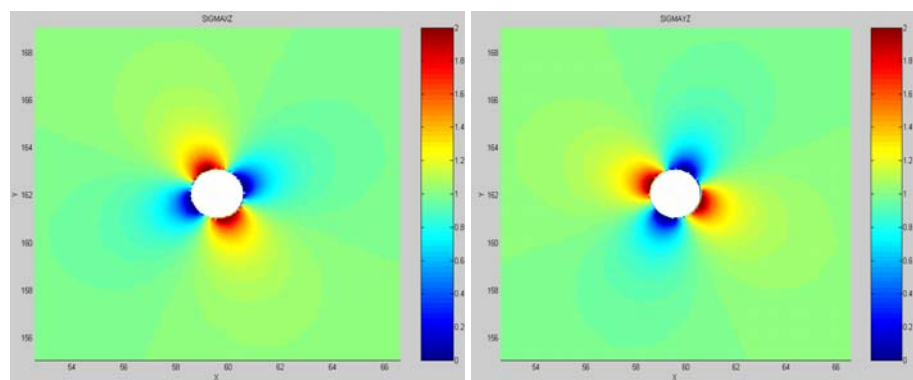
Τέλος, δίδονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την εκτέλεση του προγράμματος για την περίπτωση αντί επίπεδης φόρτισης.



Σχήμα Α.7: Τρόπος φόρτισης ανοίγματος σε αντί επίπεδο τασικό πεδίο



Σχήμα Α.8: Μετατόπιση κατά τον άξονα Z (u_z)



Σχήμα Α.9: Αντί-επίπεδες τάσεις σ_{xz} - σ_{yz}