



**ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ**

---

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

«Μελέτη εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης ρηγματωμένων  
στερεών σωμάτων με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων»

**ΤΣΟΥΤΣΟΥΒΑ ΜΑΡΙΑ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Γ. Εξαδάκτυλος, Καθηγητής (επιβλέπων)

Ζ. Αγιουτάντης, Καθηγητής

Κ. Προβιδάκης, Αν. Καθηγητής

XANIA 2004

*Αφιερωμένη*  
*στους γονείς μου*

## Περίληψη

Η εργασία αυτή έχει ως αντικείμενο την ποσοτική μελέτη της εντατικοπαραμορφωσιακής κατάστασης ρηγματωμένων στερεών σωμάτων με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων.

Πολλές εφαρμογές της Βραχομηχανικής αφορούν την ύπαρξη ρηγματωμένων πετρωμάτων (λ.χ. διάνοιξη υπόγειων έργων σε ασυνεχή πετρώματα) ή σύνθετων υλικών που χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη των έργων αυτών (λ.χ. σκυρόδεμα κ.λπ.). Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι απαραίτητο να καθοριστούν στη φάση του σχεδιασμού τα επιτρεπόμενα επίπεδα τάσεων λειτουργίας, ώστε να αποφευχθούν αστοχίες.

Η ανάλυση του προβλήματος έγινε με τη χρήση της αριθμητικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων, και συγκεκριμένα με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων, για ελαστικό και ισότροπο μέσο σε δύο διαστάσεις. Με βάση τον ήδη υπάρχοντα στην ανοικτή βιβλιογραφία «αλγόριθμο» TWODD (Crouch and Starfield, 1990), κατασκευάστηκε:

- κώδικας στο υπολογιστικό πακέτο MATLAB,
- προ-επεξεργαστής για γρήγορη εισαγωγή της γεωμετρίας του προβλήματος με τη βοήθεια του σχεδιαστικού προγράμματος AUTOCAD
- μετα-επεξεργαστής για την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τη μορφή διαγραμμάτων και ισοχρωματικών επιφανειών.
- ειδικός κώδικας συνοριακών στοιχείων για την περίπτωση αντι-επίπεδης παραμόρφωσης (anti-plane strain) πετρωμάτων που διασχίζονται από ασυνέχειες.
- Τέλος ο κύριος κώδικας εμπλουτίστηκε με τη δυνατότητα υπολογισμού του συντελεστή εντάσεως των τάσεων.

Η δέσμη προγραμμάτων που δημιουργήθηκε μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για το σχεδιασμό υπογείων έργων σε γραμμικά ελαστικά πετρώματα και για την ανάδρομη ανάλυση επί τόπου μετρήσεων παραμορφώσεων ή τάσεων σε ρηγματωμένες βραχώμαζες ή δοκίμια στο εργαστήριο για την εκτίμηση του μέτρου ελαστικότητας της βραχώμαζας.

## Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία μελετάται η εντατικοπαραμορφωσιακή κατάσταση ρηγματωμένων στερεών σωμάτων με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων.

Για την πραγματοποίηση της εργασίας αυτής θα ήθελα πρωταρχικά να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου για την πολύτιμη συμβολή τους στην περάτωση της:

- Στον κ. Γεώργιο Εξαδάκτυλο, Καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας αυτής, για την βοήθεια την οποία μου προσέφερε, τις πολύτιμες συμβουλές του καθώς και για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.
- Στον κ. Ζαχαρία Αγιουτάντη, Καθηγητή για τις εύστοχες παρατηρήσεις, διορθώσεις και συμβουλές τις οποίες μου προσέφερε, βοηθώντας με σημαντικά τόσο κατά την εκπόνηση, όσο και στην τελειοποίηση της εργασίας μου.
- Στον κ. Κωνσταντίνο Προβιδάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή, ο οποίος δέχτηκε να με τιμήσει με την παρουσία του στην επιτροπή αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του εργαστηρίου «Μελέτης και Σχεδιασμού Γεωεκμεταλλεύσεων», Βασίλη Ασημίδα, Παντελή Λιόλιο και Πρεπή Μπαραδάκη για τη βοήθειά τους πάνω στις εντολές του προγράμματος MATLAB, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές τους, που ήταν καθοριστικές για την υλοποίηση της εργασίας αυτής. Επίσης, καθοριστικές ήταν οι παρατηρήσεις του Γιώργου Σαράτση για την μορφοποίηση της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Γιώργο Ξηρουδάκη για την άψογη συνεργασία που είχαμε κατά τη δημιουργία του κώδικα TWODD στο MATLAB, αλλά και για την ηθική και ψυχολογική υποστήριξη κατά την αντιμετώπιση των όποιων δυσκολιών.

Χανιά, Οκτώβρης 2004

## Περιεχόμενα

<b>Περίληψη.....</b>	<b>III</b>
<b>Πρόλογος.....</b>	<b>IV</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων .....</b>	<b>V</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων .....</b>	<b>XI</b>
<b>1. Εισαγωγή .....</b>	<b>1</b>
1.1 Αντικείμενο Μελέτης .....	1
1.2 Αριθμητικές Μέθοδοι.....	2
1.2.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών.....,	4
1.2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων.....	4
1.2.3 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων.....	5
1.2.4 Σύγκριση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (Π.Σ.) με την Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (Σ.Σ.) .....	5
1.2.5 Επιλογή Μεταξύ της Μεθόδου Π.Σ. και της Μεθόδου Σ.Σ.....	7
<b>2. Θεωρία Θραυστομηχανικής .....</b>	<b>9</b>
2.1 Εισαγωγή.....	10
2.2 Ιστορική Ανάπτυξη της Θραυστομηχανικής .....	11
2.3 Τρόποι Φόρτισης Ρωγμής .....	14
2.4 Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων $K$ .....	16
2.5 Θεωρία Θραυστομηχανικής .....	19
2.5.1 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων $K$ .....	20
2.5.2 Κατανομή Τάσεων και Μετατοπίσεων.....	21
2.5.3 Κριτήριο Αστοχίας .....	25
<b>3. Μέθοδος Ασυνεχών Μετατοπίσεων .....</b>	<b>27</b>
3.1 Εισαγωγή .....	28
3.2 Μέθοδος Ασυνεχών Μετατοπίσεων σε Άπειρο Ελαστικό Μέσο.....	28
3.3 Το Πρόβλημα της Ρωγμής Υπό Σταθερή Εσωτερική Πίεση.....	34

3.4	Γενίκευση της Αριθμητική Μεθόδου.....	37
3.5	Αντι-επίπεδη φόρτιση (Τύπος ΙΙΙ).....	41
3.6	Συντελεστές Εντάσεων των Τάσεων .....	46
<b>4.</b>	<b>Πρόγραμμα Επίλυσης ( DDBE2D ).....</b>	<b>48</b>
4.1	Εισαγωγή.....	49
4.2	Εισαγωγή Δεδομένων.....	51
4.2.1	Σχεδιασμός στο AYTOCAD.....	51
4.2.2	Εισαγωγή Γεωμετρίας.....	53
4.2.3	Παράμετροι Υλικού, Συνοριακές Συνθήκες και Τάσεις.....	54
4.3	Επίλυση .....	55
4.4	Εξαγωγή Αποτελεσμάτων.....	56
4.4.1	Πίνακες Αποτελεσμάτων.....	56
4.4.2	Γραφικές Παραστάσεις.....	61
4.4.2.1	Μορφή Απεικονίσεις Μεταβλητών .....	62
<b>5.</b>	<b>Υπολογιστικά Παραδείγματα.....</b>	<b>64</b>
5.1	Απλή Ρωγμή σε Άπειρο Μέσο.....	65
5.1.1	Σύγκριση της Μεθόδου των Ασυνεχών Μετατοπίσεων με Αναλυτικές Λύσεις ( Μετατοπίσεις ).....	65
5.1.1.1	«Ανοικτός» Τύπος Παραμόρφωσης (Mode I )....	65
5.1.1.2	Τύπος της «Ολίσθησης» (Mode II ).....	68
5.1.1.3	Τύπος «Ψαλιδισμού» ή Αντι-επίπεδης ολίσθησης (Mode III ).....	69
5.1.2	Μελέτη Τασικού Πεδίου Γύρω Από Ευθύγραμμη Ρωγμή.....	71
5.1.2.1	Σύγκριση με τις Μέγιστες Διατμητικές Τάσεις ( Ισοχρωματικές Καμπύλες ).....	71
5.1.2.2	Μελέτη της Κλιμάκωσης των Τάσεων σε Σχέση με την Απόσταση από την Αιχμή της Ρωγμής .....	73
5.1.2.3	Επίδραση του Μεγέθους της Ρωγμής στις Κύριες Τάσεις .....	77
5.1.2.4	Συντελεστής Έντασης των Τάσεων .....	79
5.2	Σύστημα Ευθύγραμμων Ρωγμών σε Σειρά σε Άπειρο Μέσο.....	81

5.2.1	Σύγκριση με τις Μέγιστες Διατμητικές Τάσεις (Ισοχρωματικές Καμπύλες).....	81
5.2.2	Κατανομή των Τάσεων στο Ενδιάμεσο Μέσο Δυο Ευθύγραμμων Ρωγμών.....	83
5.2.3	Συντελεστής Έντασης των Τάσεων.....	86
5.3	Σύστημα Παράλληλων Ρωγμών σε Άπειρο Μέσο.....	88
5.4	Διασταυρούμενα Σύνορα .....	90
5.4.1	Εντατικοπαραμορφωσιακή Μελέτη σε Διάταξη Αστεριού..	90
5.4.2	Συντελεστής Έντασης των Τάσεων.....	93
5.5	Καμπυλόγραμμη ρωγή σε ομοιόμορφο εντατικό πεδίο.....	96
6.	Συμπεράσματα – Προτάσεις.....	98
	Βιβλιογραφία.....	101
	Παράρτημα Α .....	104
	<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	
1.1	Αριθμητικές Μέθοδοι στη Μηχανική των Πετρωμάτων (Sinha, 1989).....	3
2.1	Το θεωρητικό ατομικό μοντέλο.....	12
2.2	Θεωρητικό ατομικό μοντέλο – Δημιουργία ρωγμής.....	13
2.3	Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής.....	14
2.4	Βασικοί τρόποι παραμόρφωσης των χειλών της ρωγμής .....	15
2.5	Ελλειπτική ρωγή σε άπειρη πλάκα.....	17
2.6	Χαρακτηριστικά μιας ελλειπτικής ρωγμής .....	18
2.7	Συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων σε συνάρτηση με το λόγο $a/b$ .....	18
2.8	Εξομάλυνση ελλειπτικού ανοίγματος στην οριακή περίπτωση της επίπεδης ρωγμής.....	19
2.9	Ευθύγραμμη ρωγή σε άπειρο μέσο.....	20

2.10	Μέτρηση συντεταγμένων από το άκρο της ρωγμής και οι συνιστώσες των τάσεων, του τασικού πεδίου της ρωγμής.....	21
2.11	Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου I.....	22
2.12	Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου II.....	23
2.13	Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου III.....	24
2.14	Σχηματική σχέση μεταξύ της τάσης, του μεγέθους της ρωγμής και της αντοχής του υλικού.....	26
3.1	Θετική και αρνητική πλευρά της ευθύγραμμης ρωγμής.....	29
3.2	Σταθερές συνιστώσες ασυνεχών μετατοπίσεων $D_x$ και $D_y$ .....	30
3.3	Τάσεις που εφαρμόζονται στην επιφάνεια της ρωγμής.....	34
3.4	Απεικόνιση μιας ρωγμής από N στοιχειακές ασυνεχείς μετατοπίσεις.....	38
3.5	Απεικόνιση του τύπου φόρτισης III.....	42
3.6	Απεικόνιση καμπυλόγραμμης ρωγμής.....	44
3.7	Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής.....	46
4.1	Συνοπτικό διάγραμμα ροής του προγράμματος DDBE2D.....	50
4.2	Γεωμετρία της ρωγμής.....	51
4.3	Γεωμετρία του ανοίγματος.....	52
4.4	Δυο επιπλέον συνοριακά στοιχεία στο για σταθεροποίηση της εσωτερικής περιοχής.....	52
4.5	Κατευθύνσεις που μελετούνται στην περίπτωση κυκλικού ανοίγματος.....	53
4.6	Το τριγωνικό πλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση ενός κυκλικού ανοίγματος.....	54
4.7	Το τριγωνικό ρπλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση μιας ευθύγραμμης ρωγμής.....	54
4.8	Η διακριτοποίηση του μέσου.....	62
4.9	Οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις.....	62
4.10	Οριζόντιες και κατακόρυφες κύριες τάσεις.....	63
4.11	Μέγιστες διατμητικές τάσεις.....	63
5.1	Ευθύγραμμη ρωγμή υπό σταθερή εσωτερική πίεση.....	65
5.1.a	Ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_N$ (20 στοιχεία).....	66
5.1.b	Ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_N$ (40 στοιχεία).....	66
5.1.c	Ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_N$ (100 στοιχεία).....	67
5.1.d	Μετατοπίσεις $U_y$ σε όλο το μέσο.....	67



<b>5.2</b>	Ευθύγραμμη ρωγμή υπό διατμητική καταπόνηση.....	68
<b>5.2.a</b>	Ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_S$ (100 στοιχεία).....	69
<b>5.2.b</b>	Μετατοπίσεις $U_x$ σε όλο το μέσο.....	69
<b>5.2.c</b>	Μετατοπίσεις $U_y$ σε όλο το μέσο.....	69
<b>5.3</b>	Ευθύγραμμη ρωγμή υπό αντι-επίπεδη φόρτιση.....	70
<b>5.3.a</b>	Ασυνεχείς μετατοπίσεις $D_z$ (100 στοιχεία).....	70
<b>5.3.b</b>	Μετατοπίσεις $U_z$ σε όλο το μέσο.....	71
<b>5.4</b>	Ισοχρωματικές καμπύλες γύρω από μια ρωγμή Griffith (Sneddon, 1946).....	72
<b>5.5</b>	Ισοχρωματικές καμπύλες από το πρόγραμμα DDBETD.....	72
<b>5.6</b>	Ισοχρωματικές καμπύλες σε όλο το ελαστικό μέσο.....	73
<b>5.7</b>	Μορφή της κλιμάκωση της $\sigma_{yy}$ σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για τον τύπο φόρτισης I (Peeker, 1997).....	73
<b>5.8</b>	Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής (Peeker, 1997).....	74
<b>5.9</b>	Κατακόρυφες τάσεις $\sigma_{yy}$ σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για $\theta = 0^0$ .....	74
<b>5.10</b>	Κατανομή των τάσεων $\sigma_{yy}$ σε όλο το μέσο.....	75
<b>5.11</b>	Διατμητικές τάσεις $\sigma_{xy}$ σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για $\theta = 0^0$ .....	75
<b>5.12</b>	Άποψη των τάσεων $\sigma_{xy}$ σε όλο το μέσο.....	76
<b>5.13</b>	Αντι-επίπεδες τάσεις $\sigma_{yz}$ σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για $\theta = 0^0$ .....	76
<b>5.14</b>	Άποψη των τάσεων $\sigma_{yz}$ σε όλο το μέσο.....	77
<b>5.15</b>	Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης κυρίων τάσεων για $\theta = 0$ , για διάφορα μεγέθη ρωγμής.....	78
<b>5.16</b>	Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης της κύρια τάση $\sigma_1$ κατά την απομάκρυνση από την αιχμή για $\theta = 90$ .....	78
<b>5.17</b>	Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης της κύρια τάση $\sigma_2$ κατά την απομάκρυνση από την αιχμή για $\theta = 90$ .....	79
<b>5.18</b>	Συντελεστής έντασης των τάσεων συναρτήσει του μήκους της ρωγμής.....	80
<b>5.19</b>	Δυο ευθύγραμμες συγγραμμικές ρωγμές Griffith.....	81
<b>5.20</b>	Ισοχρωματικές καμπύλες στην περιοχή γύρω από δυο ευθύγραμμες ρωγμές	

(Sneddon and Lowengrub, 1969).....	82
<b>5.21</b> Ισοχρωματικές καμπύλες στην περιοχή γύρω από δυο ευθύγραμμες ρωγμές από το πρόγραμμα DDBETD.....	82
<b>5.22</b> Ισοχρωματικές καμπύλες σε όλο το μέσο που περιβάλλει δυο ευθείες ρωγμές σε απόσταση 0.5.....	83
<b>5.23</b> Δύο ευθείες συγγραμμικές ρωγμές.....	83
<b>5.24</b> Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης, $\sigma_{yy}$ , ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 2.....	84
<b>5.25</b> Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης $\sigma_{yy}$ ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 1m.....	84
<b>5.26</b> Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης $\sigma_{yy}$ ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 0.5m.....	85
<b>5.27</b> Συγκριτική αναπαράσταση των τάσεων $\sigma_{yy}$ για τις τρεις διαφορετικές αποστάσεις των ρωγμών.....	85
<b>5.28</b> Η κατανομή της $\sigma_y$ για απόσταση ρωγμών 1.....	86
<b>5.29</b> Διάταξη δυο ευθύγραμμων ρωγμών (Tada etal, 1973).....	87
<b>5.30</b> Συντελεστής έντασης των τάσεων συναρτήσει της απόστασης δυο ευθύγραμμων ρωγμών.....	88
<b>5.31</b> Διακρητοποίηση του μέσου γύρω από δυο παράλληλες ρωγμές στις τρεις αποστάσεις.....	89
<b>5.32</b> Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης.....	89
<b>5.33</b> Κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης ανάμεσα σε παράλληλες ρωγμές.....	90
<b>5.34</b> Διάταξη ρωγμών σε σχήμα αστεριού.....	91
<b>5.35</b> Κατανομή κύριας τάσης $\sigma_1$ .....	91
<b>5.36</b> Κατανομή κύριας τάσης $\sigma_2$ .....	92
<b>5.37</b> Κατανομή των μέγιστων διατμητικών τάσεων $\tau$ .....	92
<b>5.38</b> Οριζόντιες μετατοπίσεις $U_x$ .....	93
<b>5.39</b> Κατακόρυφες μετατοπίσεις $U_y$ .....	93
<b>5.40</b> Ακτινικές διατάξεις ισομηκών ρωγμών (Tada etal, 1973).....	94
<b>5.41</b> Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή $K_I$ για την ακτινωτή διάταξη των ρωγμών σε συνάρτησης με τη γωνία των ακτινών.....	95

5.42	Διάγραμμα υπολογισμού της συνάρτησης $F(n)$ .....	95
5.43	Καμπύλη ρωγμή σε άπειρο μέσο.....	96
5.44	Οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις καμπυλόγραμμης ρωγμής .....	96
5.45	Κύριες τάσεις καμπυλόγραμμης ρωγμής.....	97
5.46	Μέγιστες διατμητικές (ισοχρωματικές καμπύλες) για την καμπυλόγραμμης ρωγμής.....	97
Π.1	Ασυνεχής μετατόπιση πάνω σε αυθαίρετα προσανατολισμένο τμήμα.....	105
Π.2	Τάσεις πάνω σε ένα τυχαία προσανατολισμένο τμήμα.....	106
Π.3	Μετασχηματισμός μετατοπίσεων.....	108
Π.4	Μετασχηματισμοί τάσεων.....	109

## Κατάλογος Πινάκων

4.1	Δεδομένα εισόδου.....	56
4.2	Γεωμετρία συνοριακών στοιχείων.....	57
4.3	Αποτελέσματα στα μέσα των συνοριακών στοιχείων.....	59
4.4	Δεδομένα στην περίπτωση τάσεων εκτός επιπέδου.....	60
5.1	Συντελεστής έντασης των τάσεων $K_I$ για διάφορα μήκη ρωγμής .....	80
5.2	Συντελεστής έντασης των τάσεων $K_I$ για διάφορες αποστάσεις μεταξύ των ρωγμών .....	87
5.3	$K_I$ αναλυτικό και προγράμματος για την ακτινική διάταξη ρωγμών.....	94

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

### Εισαγωγή

## 1.1 Αντικείμενο Μελέτης

Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη υπολογιστικού εργαλείου για την εκτίμηση του εντατικού και παραμορφωσιακού πεδίου σε πετρώματα που περιέχουν μια ή περισσότερες ρωγμές σε ποικίλες διατάξεις με τη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων.

Η εφαρμογή της μεθόδου των ασυνεχών μετατοπίσεων, που αποτελεί ουσιαστικά μέθοδο συνοριακών στοιχείων, στο σύνορο της ρωγμής ή της οικογένειας ρωγμών εντός του πετρώματος, είναι αποτελεσματική για την ανάλυση του εντατικο-παραμορφωσιακού πεδίου σε γραμμικά ελαστικά και ισότροπα υλικά. Αυτό συμβαίνει αφενός λόγω της υποβάθμισης των διαστάσεων του προβλήματος κατά μια διάσταση (λόγου χάρι για το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα χρησιμοποιούνται μονοδιάστατα στοιχεία) και αφετέρου διότι δεν είναι απαραίτητη η διακριτοποίηση όλου του μέσου παρά μόνο των συνόρων του. Αυτός είναι και που θεωρείται η ιδανική μέθοδος για την μελέτη προβλημάτων ρωγμών. Κύρια χαρακτηριστικά της αναπτυχθείσας σε αυτή την εργασία μεθόδου είναι ο μικρός χρόνος προετοιμασίας και εισαγωγής των δεδομένων καθώς και ο μικρός χώρος αποθήκευσης στην μνήμη H/Y.

Στα πλαίσια της ανάπτυξης της συγκεκριμένης μεθόδου κατασκευάστηκε το πρόγραμμα DDBETD (σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB) το οποίο ουσιαστικά αποτελεί εργαλείο για τον προσδιορισμό της κατανομής των τάσεων και των μετατοπίσεων ρηγματωμένων πετρωμάτων.

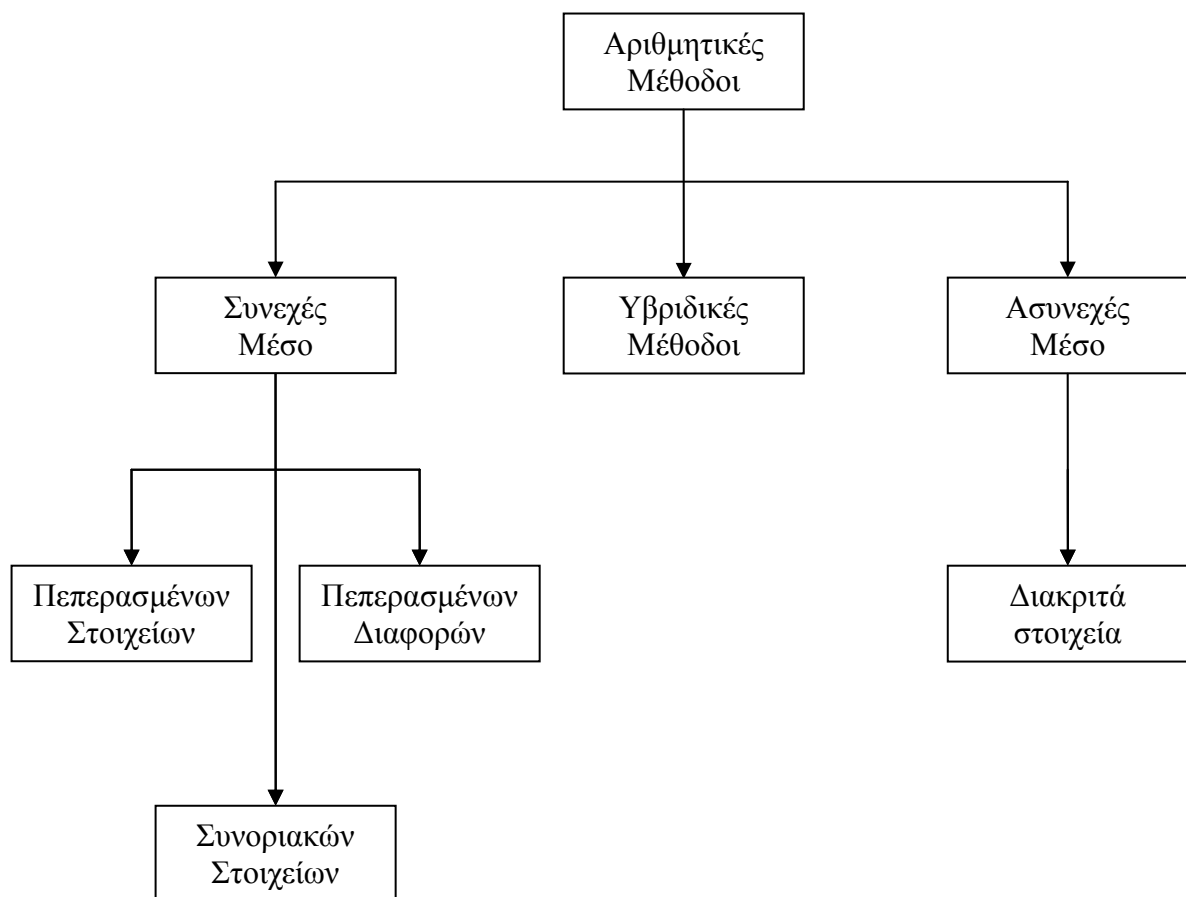
## 1.2 Αριθμητικές Μέθοδοι

Χωρίς τις αριθμητικές μεθόδους (Σχήμα 1.1) δεν θα ήταν εφικτό να επιλυθούν προβλήματα της μηχανικής με πολύπλοκες συνοριακές συνθήκες. Οι περισσότερες από τις αριθμητικές τεχνικές της μηχανικής του συνεχούς μέσου βασίζονται στην επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε.) ή ολοκληρωτικών εξισώσεων που περιγράφουν την καταστατική συμπεριφορά του υπόψιν μέσου. Με την διαίρεση του μέσου σε έναν μεγάλο αριθμό πεπερασμένων επιμέρους τμημάτων και με την χρησιμοποίηση των αντίστοιχων μ.δ.ε. ή ολοκληρωτικών σχέσεων, υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών (όπως είναι οι τάσεις και οι μετατοπίσεις) στο μέσο. Όσο μικρότερο είναι το μέγεθος των

τμημάτων αυτών τόσο ακριβέστερη γίνεται η λύση, ενώ αντιστρόφως ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος αυξάνει.

Οι αριθμητικές μέθοδοι του συνεχούς μέσου διαιρούνται σε τρεις κατηγορίες :

1. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
2. Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων
3. Μέθοδος συνοριακών στοιχείων



Σχήμα 1.1 : Αριθμητικές Μέθοδοι στη Μηχανική των Πετρωμάτων (Sinha,, 1989)

### 1.2.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Στην μέθοδο αυτή οι ολοκληρώσεις των μ.δ.ε. αποτελούν όρους διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση ενός δι-διάστατου χώρου δημιουργείται κάνναβος ο οποίος καλύπτει όλο το μέσο και η διαφορική προσέγγιση εφαρμόζεται σε κάθε εσωτερικό του σημείο. Τα αποτελέσματα αυτά δημιουργούν ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δίδουν μοναδική λύση. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι η απλούστερη σε σχέση με τις άλλες δυο και προγραμματίζεται ευκολότερα. Δεν είναι σε θέση όμως να αντιμετωπίσει αρκετά από τα προβλήματα που συχνά παρουσιάζονται στην μηχανική, όπως ανώμαλης γεωμετρίας. Στη μέθοδο αυτή είναι δύσκολο να μεταβληθεί το μέγεθος των διαφορικών κελιών σε συγκεκριμένες περιοχές, για αυτό και είναι ακατάλληλη στην επίλυση προβλημάτων όπου οι υπό μελέτη μεταβλητές μεταβάλλονται με γρήγορο ρυθμό. (όπως είναι προβλήματα συγκέντρωσης τάσης). Σήμερα η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται κυρίως για προβλήματα μεταφοράς θερμότητας και ροής ρευστών και όχι για προβλήματα τασικής ανάλυσης (Becker, 1992).

### 1.2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτείται η διαίρεση ολόκληρου του υπό μελέτη χώρου σε μικρά πεπερασμένα τμήματα, τα οποία καλούνται "πεπερασμένα στοιχεία". Η συμπεριφορά του κάθε τμήματος περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις. Όλα τα πεπερασμένα στοιχεία ικανοποιούν την απαίτηση να υπάρχει ισορροπία και συνέχεια μεταξύ τους, δημιουργώντας έτσι ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Εξασφαλίζοντας την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος λαμβάνεται μοναδική λύση για το σύστημα αυτό. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για την επίλυση πρακτικών μηχανικών προβλημάτων πολύπλοκης γεωμετρίας. Σε περιοχές όπου οι υπό μελέτη μεταβλητές μεταβάλλονται με γρήγορο ρυθμό και απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, χρησιμοποιείται μεγαλύτερος αριθμός πεπερασμένων στοιχείων (Becker, 1992).

### 1.2.3 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Στην μέθοδο αυτή οι μερικές διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε ολοκληρωτικές ταυτότητες οι οποίες είναι εφαρμόσιμες πάνω στην επιφάνεια του σύνορο. Το σύνορο διαιρείται σε μικρά συνοριακά τμήματα (συνοριακά στοιχεία) πάνω στα οποία ολοκληρώνονται αριθμητικά αυτές οι εξισώσεις. Με την προϋπόθεση ότι εξασφαλίζεται η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών ισορροπίας δημιουργείται ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με μοναδική λύση.

Η μέθοδος αυτή επιλύει προβλήματα πολύπλοκης γεωμετρίας και λειτουργεί με μεγαλύτερη ακρίβεια από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, στην περίπτωση που μελετούνται περιοχές με γρήγορο ρυθμό μεταβολής των μεταβλητών (*Becker, 1992*).

### 1.2.4 Σύγκριση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων με την Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων

Πλεονεκτήματα της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων είναι:

- 1. Μικρότερος χρόνος προεπεξεργασίας (preprocessing time).** Το γεγονός ότι στη μέθοδο αυτή διακριτοποιείται μόνο το σύνορο της υπό μελέτη επιφάνειας, μειώνει το δυο διαστάσεων πρόβλημα σε μονοδιάστατο. Συνεπώς ο χρόνος που απαιτείται για την προετοιμασία και για τον έλεγχο των συνοριακών στοιχείων του προβλήματος είναι αρκετά μικρός. Ακόμη πραγματοποιούνται εύκολα μετέπειτα αλλαγές στη διάταξη του πλέγματος. Το πλεονέκτημα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε προβλήματα όπου απαιτείται αναδιάρθρωση (remeshing) του πλέγματος, όπως προβλήματα διάδοσης ρωγμών, τριβής λόγω επαφής, προκαταρκτικές φάσεις σχεδιασμού και άλλα.
- 2. Υψηλή ανάλυση τάσεων.** Στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, δεν επιβάλλεται περαιτέρω προσέγγιση της λύσης σε εσωτερικά σημεία του συνόρου. Δηλαδή, η λύση που προκύπτει είναι συνεχής και εντός της περιοχής, με



συνέπεια να λαμβάνονται περισσότερο ακριβή αποτελέσματα για τις τάσεις. Το χαρακτηριστικό αυτό της μεθόδου την κάνει κατάλληλη για εφαρμογή σε προβλήματα σχεδιασμού, όπου παρουσιάζονται απότομες μεταβολές στις τιμές των τάσεων (προβλήματα θραύσης, προβλήματα επαφής, προβλήματα συγκέντρωσης τάσεων).

3. **Μικρότερος υπολογιστικός χρόνος και μικρότερος χώρος αποθήκευσης.** Για τον ίδιο βαθμό ακρίβειας αποτελεσμάτων, η μέθοδος των Σ.Σ. χρησιμοποιεί μικρότερο αριθμό στοιχείων από τη μέθοδο των Π.Σ. Από τη στιγμή που ο βαθμός προσέγγισης στη λύση της μεθόδου Σ. Σ. περιορίζεται στο σύνορο, το πλέγμα της μεθόδου αυτής δεν πρέπει να συγκρίνεται με το πλέγμα της μεθόδου Π. Σ. (στην περίπτωση που τα εσωτερικά σημεία απομακρύνονται). Για την επίτευξη συγκριτικής ακρίβειας στις τιμές των τάσεων, θα πρέπει στο πλέγμα της μεθόδου Π.Σ. να πραγματοποιηθούν περισσότερες συνοριακές διαιρέσεις από αυτές που υπάρχουν στο αντίστοιχο πλέγμα της μεθόδου Σ. Σ.
4. **Λιγότερες περιττές πληροφορίες.** Στα περισσότερα μηχανικά προβλήματα οι ανεπιθύμητες καταστάσεις (όπως θραύσεις, συγκεντρώσεις τάσεων, απότομες θερμικές καταπονήσεις), πραγματοποιούνται στην επιφάνεια. Για να μελετηθούν αυτές οι καταστάσεις με τη μέθοδο των Π.Σ. σχεδιάζεται ένα τρισδιάστατο πολύπλοκο σώμα με πεπερασμένα στοιχεία και υπολογίζονται οι τάσεις σε κάθε σημείο του. Κάτι τέτοιο καθίσταται μη αποδοτικό διότι μόνο λίγες από αυτές τις τιμές των τάσεων μπορούν να ενσωματωθούν στην σχεδιαστική ανάλυση. Για τον λόγο αυτό επιθυμείται η χρησιμοποίηση των συνοριακών στοιχείων με τα οποία επιτυγχάνεται μεγαλύτερη απόδοση στον υπολογιστικό τομέα.

Παρόλα αυτά όμως στη μέθοδο των Σ.Σ. εντοπίζονται και μειονεκτήματα κάποια από τα οποία αναφέρονται ακολούθως :

1. **Μη εύχρηστα μαθηματικά.** Τα μαθηματικά τα οποία χρησιμοποιούνται στη μέθοδο Σ.Σ. συχνά φαίνονται άγνωστα στους χρήστες. Κατά την διάρκεια των αρχικών σταδίων ανάπτυξης της τεχνικής Σ.Σ. είναι απαραίτητες αρκετές γνώσεις από προχωρημένα μαθηματικά οι οποίες χρησιμοποιούνται για την πιστοποίηση της μοναδικότητας και της κάθε λύσης. Αυτό όμως δεν θεωρείται πλέον

πρόβλημα διότι αφενός η διατύπωση της μεθόδου Σ.Σ. έχει δημοσιευτεί λεπτομερώς, αφετέρου η μοναδικότητα της λύσης την οποία δίνει η μέθοδος θεωρείται δεδομένη.

2. Δίδει ανακριβή αποτελέσματα κατά την αριθμητική ολοκλήρωση στην ανάλυση λεπτών κελυφών (*thin shell analysis*). Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του μεγάλου λόγου επιφάνειας προς όγκο και την κοντινή απόσταση των κομβικών σημείων στις δυο πλευρές του κελύφους. Το φαινόμενο αυτό προκαλεί ανακρίβειες στις αριθμητικές ολοκληρώσεις. Η μέθοδος Π.Σ. είναι καταλληλότερη (παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια) για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων.

### 1.2.5 Επιλογή Μεταξύ της Μεθόδου Π.Σ και της μεθόδου Σ.Σ.

Τρεις σημαντικοί παράγοντες είναι αυτοί οι οποίοι καθορίζουν την επιλογή μεταξύ της μεθόδου, Π.Σ και Σ.Σ για την επίλυση ενός προβλήματος:

- a. Ο τύπος του προβλήματος (γραμμικό, μη-γραμμικό)
- b. Ο απαιτούμενος βαθμός ακρίβειας
- c. Ο απαιτούμενος χρόνος για την προετοιμασία και την επεξεργασία των δεδομένων
- d. Ο χρόνος υπολογισμού

Και οι δύο τεχνικές θα πρέπει να είναι γνωστές σε έναν Μηχανικό διότι για συγκεκριμένους τύπους εφαρμογών η κάθε μία από αυτές παρουσιάζει διαφορετικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την άλλη. Εάν ληφθούν υπόψη τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου Σ.Σ. οι παρατηρήσεις που παρατίθεται παρακάτω είναι σε θέση να προσφέρουν σημαντική βοήθεια στην επιλογή της κατάλληλης τεχνικής:

1. Η μέθοδος Σ.Σ. είναι κατάλληλη (και περισσότερο ακριβής) για γραμμικά προβλήματα και ειδικότερα για τρισδιάστατα προβλήματα στα οποία οι

μεταβλητές μεταβάλλονται με γρήγορο ρυθμό (όπως προβλήματα εγκοπών, ρωγμών και επαφών).

2. Εξαιτίας του μικρού χρόνου που απαιτείται για την διαμόρφωση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, η μέθοδος Σ.Σ. είναι καταλληλότερη για προκαταρκτικές σχεδιαστικές αναλύσεις, στις οποίες η γεωμετρία και τα φορτία μπορούν να τροποποιηθούν μετέπειτα σε ελάχιστο χρόνο. Αυτό δίνει στους σχεδιαστές μεγαλύτερη ελευθερία να πειραματιστούν σε καινούργια σχήματα και γεωμετρίες.
3. Η μέθοδος Π.Σ. είναι περισσότερο καθιερωμένη και παρουσιάζει μεγαλύτερη εμπορική ανάπτυξη ειδικότερα για πολύπλοκα μη γραμμικά προβλήματα όπου πραγματοποιούνται εξονυχιστικές έρευνες για την επιβεβαίωση της αξιοπιστίας της.
4. Τα μαθηματικά τα οποία χρησιμοποιούνται στην μέθοδο Π.Σ. είναι περισσότερο "οικεία" για τους μηχανικούς. Παρόλα αυτά η μέθοδος Σ.Σ. κάνει όλο και μεγαλύτερα βήματα στον χώρο της Μηχανικής με αποτέλεσμα όλο και περισσότερα εγχειρίδια να είναι διαθέσιμα, ώστε να γίνονται περισσότερο κατανοητά τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί η μέθοδος
5. Προγράμματα διαχείρισης δικτύων (meshes) και ρουτίνες σχεδιασμού οι οποίες αναπτύχθηκαν για εφαρμογές της μεθόδου Π.Σ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν δίχως μετατροπές σε προβλήματα της μεθόδου Σ.Σ.. Ακόμα πολλές ρουτίνες με προσαναυξανόμενα φορτία (load incrementation) καθώς και ρουτίνες επανάληψης, οι οποίες αρχικά χρησιμοποιήθηκαν σε εφαρμογές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε μη γραμμικά προβλήματα, εφαρμόζονται απευθείας σε αλγόριθμους που αναφέρονται στην μέθοδο των συνοριακών στοιχείων

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

### Θεωρία Θραυστομηχανικής

## 2.1 Εισαγωγή

Στον σχεδιασμό δομικών στοιχείων ή κατασκευών, ένα σημαντικό βήμα είναι η ταυτοποίηση του πιο πιθανού τρόπου αστοχίας και η εφαρμογή του κατάλληλου κριτηρίου αστοχίας. Θραύση ορίζεται ως ο σχηματισμός νέων επιφανειών στο υλικό και αποτελεί τρόπο εκδήλωσης αστοχίας μίας κατασκευής.

Στο πιο βασικό επίπεδο (μικροσκοπικό), το κύριο χαρακτηριστικό της ρηγμάτωσης είναι η θραύση των ατομικών δεσμών του στερεού. Στο μακροσκοπικό επίπεδο, ως ρηγμάτωση μπορεί να χαρακτηριστεί η θραύση μιας κατασκευής σε δύο ή περισσότερα τμήματα, λόγω διάδοσης ρωγμών σε αυτό.

Στο ενδιάμεσο επίπεδο, το μεσοσκοπικό, η θραύση εκδηλώνεται με την μορφή της εκκίνησης διάδοσης (ή επέκτασης) και της συνένωσης μικροανοιγμάτων, όπως για παράδειγμα πόροι και ρωγμές εντός των κόκκων και στα σύνορα των κόκκων του γεωυλικού.

Κατά τις συνήθεις τεχνικές εφαρμογές τα φαινόμενα θραύσης αντιμετωπίζονται με την βοήθεια μακροσκοπικών θεωριών, όπως η μηχανική του συνεχούς μέσου και η κλασική Θερμοδυναμική. Κατά την μακροσκοπική αντιμετώπιση, θεωρείται ότι το μέσο είναι συνεχές και διασχίζεται από μια ρωγμή ή πεπερασμένο αριθμό ρωγμών (περιοχές λύσης της συνέχειας) και ότι αυτές οι ρωγμές είναι πολύ μεγαλύτερες από την μικροδομή του υλικού. Τελευταίως έχει γίνει κατανοητό ότι δεν μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της μικροδομής των υλικών (λ.χ. κοκκώδη και κρυσταλλικά υλικά, στρωσιγενή υλικά κ.λπ) στα φαινόμενα θραύσης (Εξαδάκτυλος, 1998).

Συμπερασματικά, αναφέρεται ότι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς στερεών σωμάτων που διασχίζονται από ρωγμές, υπό την επίδραση στατικής ή δυναμικής μηχανικής φόρτισης και ενδεχομένως άλλων περιβαλλοντικών παραγόντων (λ.χ. θερμοκρασία, πίεση πόρων, χημικές μεταβολές), αναφέρεται ως «Θραυστομηχανική» (*Fracture Mechanics*).

## 2.2 Ιστορική Ανάπτυξη της Θραυστομηχανικής

### 1. 15<sup>ος</sup> Αιώνας - Leonardo da Vinci

Σε ένα από τα βιβλία του ο Leonardo da Vinci περιγράφει πειράματα για τη θραύση συρμάτων από σίδηρο και πως το απαιτούμενο βάρος για την θραύση αυτών αυξάνεται καθώς το μήκος των συρμάτων υποδιπλασιάζεται σε διαδοχικές δοκιμές.

### 2. 1907 - Wiegardt

Ο Wiegardt διετύπωσε τη λύση της γραμμικής ελαστικής σφήνας, που υποβάλλεται σε σημειακή φόρτιση  $P$  σε μια από τις ακμές της και την ειδική περίπτωση του προβλήματος της ρωγμής. Ο Wiegardt διετύπωσε τα παρακάτω ερωτήματα:

*«...Με δεδομένες τις παραμέτρους αντοχής του ελαστικού ψαθυρού μέσου, ποιο είναι το μέγεθος της δύναμης  $P$  που είναι αναγκαίο για την θραύση του υλικού και από ποιο σημείο και κατεύθυνση θα αρχίσει να διαδίδεται η ρωγμή...».*

Αφού ο Wiegardt δέχθηκε την εφαρμογή του κριτηρίου μέγιστης τάσης έφθασε στο εξής παράδοξο: ενώ η θεωρία προβλέπει άπειρη τάση στην αιχμή της ρωγμής για αυθαίρετα μικρή δύναμη  $P$ , εντούτοις τα πειραματικά δεδομένα δίδουν πεπερασμένη τιμή της φόρτισης  $P$ . Για την αντιμετώπιση αυτού του παραδόξου ο Wiegardt διετύπωσε ότι:

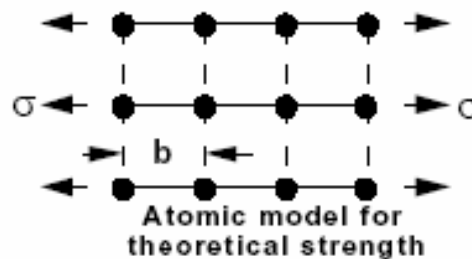
*«....Εφόσον σε ένα ελαστικό υλικό η θραύση δεν εκκινεί σ' ένα μοναδικό σημείο αλλά σε μια μικρή περιοχή, τότε στο κριτήριο θραύσης δεν θα ληφθεί υπόψη η μέγιστη τάση ή τροπή, άλλα το ολοκλήρωμα αυτών σε μια μικρή περιοχή. Εφόσον οι ιδιόμορφες τάσεις είναι ολοκληρώσιμες τότε η συνιστώσα αυτών θα είναι πεπερασμένη ποσότητα...».*

Συνεπώς με αυτήν την παραδοχή ουσιαστικά παρέκαμψε το πρώτο ερώτημα και απάντησε στο δεύτερο σκέλος του δεύτερου ερωτήματος, ότι δηλαδή η θραύση θα εκκινήσει απ' την αιχμή της ρωγμής. Κατόπιν προχώρησε στην διερεύνηση του προβλήματος της γωνίας με την οποία θα διαδοθεί η ρωγμή με βάση το κριτήριο της

μέγιστης διατμητικής τάσης ή της μέγιστης εφελκυστικής τάσης. Άρα ο Wieghardt ουσιαστικά πρότεινε ότι το κριτήριο θραύσης θα αφορά την σύγκριση της μέσης τάσης σε ‘‘μικρή περιοχή’’ γύρο από την αιχμή με την θεωρητική αντοχή του στερεού που δίδεται απ’ τη σχέση:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma}{c}} \quad [2.1]$$

όπου:  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young  $[FT^{-2}]$ ,  $\gamma$  = επιφανειακή ενέργεια  $[FL^{-1}]$  και  $c$  είναι η παράμετρος του πλέγματος  $[L]$ .



Σχήμα 2.1: Το θεωρητικό ατομικό μοντέλο

### 3. 1920 - A.A.Griffith

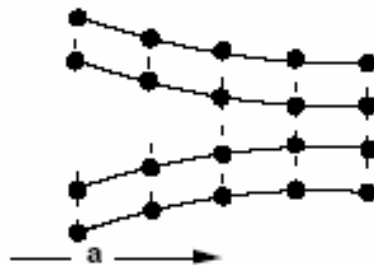
Δημοσίευσε την θεωρία περί διαδόσεως ρωγμών. Η θεωρία αυτή προέβλεπε ότι μια προϋπάρχουσα ρωγμή θα διαδοθεί αν εκμηδενιζόταν η συνολική ενέργεια του συστήματος. Η ανάλυση των τάσεων που χρησιμοποιήθηκε από τον Griffith για τον υπολογισμό της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας από το ρηγματωμένο σώμα βασίσθηκε στη δημοσιευμένη το 1913 εργασία του Inglis (1913) που αφορούσε το πρόβλημα μικρής ελλειπτικής οπής σε πλάκα που υποβάλλεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Ο Griffith έκανε πρώτος την παραδοχή ότι προϋπάρχουν ρωγμές στο υλικό, οι οποίες είναι μεγάλες συγκριτικά με τις ατομικές και μοριακές αποστάσεις. Η βασική αρχή που διετύπωσε στη θεωρία του ο Griffith, ήταν ότι τα στερεά σώματα κατέχουν επιφανειακή ενέργεια όπως και τα ρευστά και για να διαδοθεί μια ρωγμή (ή για να αυξηθεί η επιφανειακή της ενέργεια) η αντίστοιχη επιφανειακή ενέργεια πρέπει να

αποδοθεί από την εξωτερικά προσδιδόμενη ενέργεια ή από την εκροή της επιφανειακής ενέργειας του στερεού. Χρησιμοποιώντας την λύση του Inglis ο Griffith, υπολόγισε την αύξηση της ενέργειας παραμόρφωσης και με βάση το ισοζύγιο ενέργειας υπολόγισε την τάση θραύσης ως εξής:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E^* \gamma}{\pi a}} \quad [2.2]$$

όπου  $E^* = E$  το μέτρο Young για συνθήκες επίπεδης τάσης και  $E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  για συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και  $a$  το μισό του μήκους της ρωγμής  $[L]$ .



Σχήμα 2.2: Θεωρητικό ατομικό μοντέλο – Δημιουργία ρωγμής

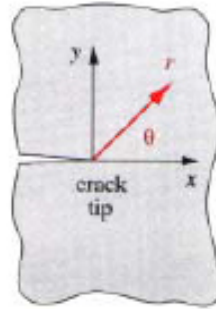
#### 4. 1948 George Irwin – Γραμμική Ελαστική Θεωρία Θραυστομηχανικής

Μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του Irwin στη Θραυστομηχανική, είναι ότι κατέδειξε τον καθολικό χαρακτήρα των ασυμπτωτικών πεδίων των τάσεων και των μετατοπίσεων στην γειτονιά της αιχμής της ρωγμής σε ένα γραμμικό ελαστικό στερεό. Ο Irwin (1957) έδειξε ότι για μικρή ακτινική απόσταση  $r$  απ' την αιχμή της ρωγμής, (Σχήμα 2.3) οι τάσεις δίδονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \quad [2.3]$$

όπου  $f_{ij}$  είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$  οι οποίες είχαν βρεθεί προηγουμένως από τους Wieghardt, Westergaard και Sneddon για δεδομένης γεωμετρίας ρωγμών και συνθήκες φόρτισης. Ο Irwin απεκάλεσε τον συντελεστή  $K$  “Συντελεστή εντάσεως των Τάσεων”





Σχήμα 2.3: Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής (Robert, 2001)

### **5. James Rice (1967) and Cherepanov (1966) – Μη Γραμμική Θεωρία Θραυστομηχανικής**

Ο Rice (1967) εισήγαγε την έννοια του ολοκληρώματος J που ορίζεται ως

$$J = \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad [2.4]$$

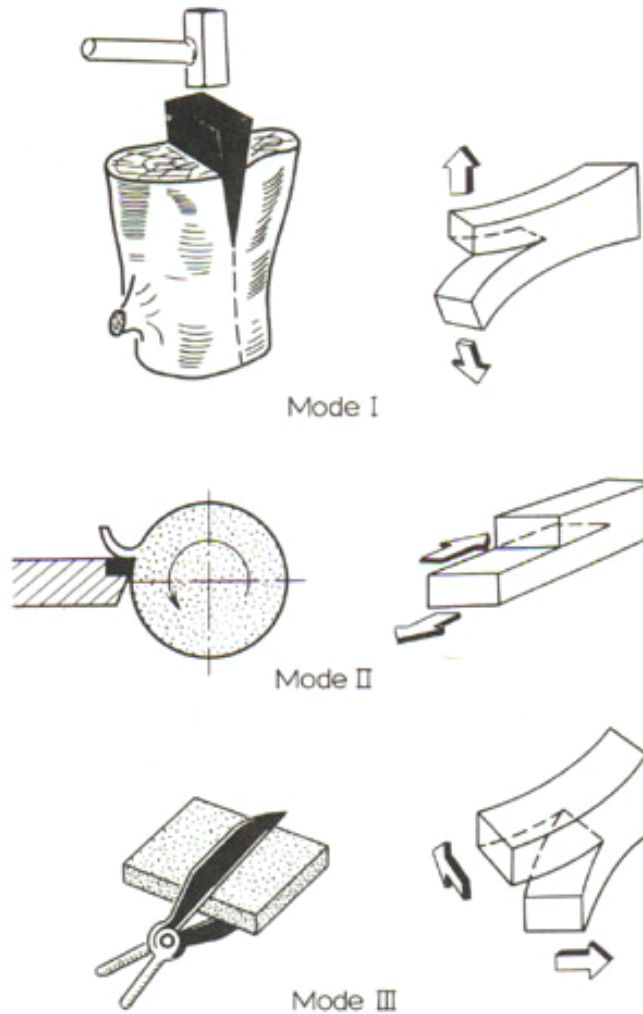
όπου:

Π είναι η συνολική δυνητική ενέργεια ενός μη γραμμικού (ελαστο-πλαστικού) ρηγματωμένου σώματος και α είναι το ημι-μήκος της ρωγμής.

Το ολοκλήρωμα J εκφράζει την ενέργεια που εκλύεται όταν μία ρωγμή επεκτείνεται κατά μήκος δα .

## **2.3 Τρόποι Φορτίσεως Ρωγμών**

Τα τασικά πεδία που δρουν στις γειτονικές περιοχές των ρωγμών μπορούν να διακριθούν σε τρεις βασικούς τύπους. Οι τύποι αυτοί είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ο καθένας συνδέεται με ένα τοπικό τύπο παραμόρφωσης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4:



Σχήμα 2.4: Βασικοί τύποι παραμόρφωσης των χειλών της ρωγμής

Οι βασικοί τρόποι παραμόρφωσης των χειλών των ρωγμών είναι ο Τύπος I, ο Τύπος II και ο Τύπος III.

- **Τύπος I**, λέγεται και «ανοικτός» τύπος, αντιστοιχεί σε καταπόνηση της ρωγμής με μια εφελκυστική ορθή τάση κάθετη στον άξονά της ( $\tau_{xy} = 0$  για  $y = 0$ ) που βρίσκεται στο επίπεδό της. Είναι συμμετρικός ως προς τα επίπεδα  $xOy$  και  $xOz$  κατά τον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στη επιφάνεια της ρωγμής.

$$u_x = u_z = 0 \quad [2.5]$$

- **Τύπος II**, είναι ο τύπος της «ολίσθησης» των χελών της ρωγμής, επιτυγχάνεται όταν η ρωγμή καταπονείται από διατμητική τάση παράλληλη στον άξονά της ( $\sigma_{yy} = 0$  για  $y = 0$ ) και συνεπίπεδη με αυτόν. Είναι συμμετρικός ως προς το επίπεδο  $xOy$  και αντι-συμμετρικός ως προς το  $xOz$  και στον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στην επιφάνεια της ρωγμής.

$$u_y = u_z = 0 \quad [2.6]$$

- **Τύπος III** είναι ο τύπος του «ψαλιδισμού» ή αντι-επίπεδης ολίσθησης των χελών της ρωγμής, αντιστοιχεί σε καταπόνηση της ρωγμής με μια διατμητική τάση σε επίπεδο κάθετο προς το επίπεδό της. Είναι αντι-συμμετρικός ως προς τα επίπεδα  $xOy$  και  $xOz$  και στον οποίο ισχύει η κάτωθι σχέση στο επίπεδο της ρωγμής.

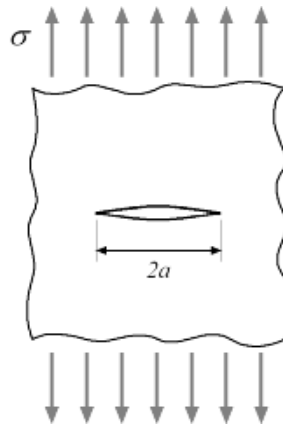
$$u_x = u_y = 0 \quad [2.7]$$

## 2.4 Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων $K$

Τα περισσότερα δομικά μέλη έχουν ασυνέχειες διαφόρων τύπων, όπως για παράδειγμα, τρύπες, εγχοπές, ρωγμές και άλλα. Εάν αυτές οι ασυνέχειες έχουν ακριβώς προσδιορισμένη γεωμετρία, είναι εφικτό να οριστεί και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης  $K$  για την συγκεκριμένη γεωμετρία. Κατόπιν, ο μηχανικός μπορεί να υπολογίσει την τοπική συγκέντρωση τάσης χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση μεταξύ της μέγιστης τάσης και της εφαρμοζόμενης.

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_{nom} \quad [2.8]$$

Στην πραγματικότητα, ο μηχανικός βασίζεται συνήθως στην ολκιμότητα του υλικού για να ανακατανείμει το φορτίο ομαλά γύρω από σημεία συγκέντρωσης τάσης. Τα σημεία συγκέντρωσης τάσης (τρύπες, ασυνέχειες, και τα λοιπά) στα όλκιμα υλικά είναι κατανομημένα σε διάφορους κώδικες και πρότυπα. Εντούτοις, εάν η συγκέντρωση της τάσης γίνεται πολύ κοντά στην αιχμή, η χρήση των μεθόδων της Θραυστομηχανικής γίνεται απαραίτητη για να αναλυθεί η δομή.



Σχήμα 2.5: Ελλειπτική ρωγμή σε άπειρη πλάκα

Οι επιφάνειες μίας ρωγμής αποτελούν ελεύθερα σύνορα τάσεων, επιδρώντας σημαντικά στις κατανομές των τάσεων στην περιοχή που βρίσκεται κοντά σε αυτές.

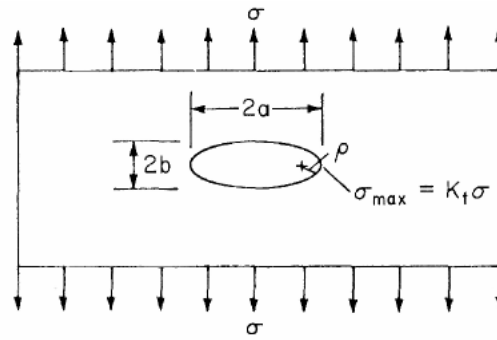
Στην περίπτωση εφελκυστικής καταπόνησης ρωγμής, η οποία βρίσκεται σε άπειρη πλάκα (Σχήμα 2.5), η μέγιστη εφελκυστική τάση  $\sigma_{\max}$  (σύμφωνα με την ελαστική θεωρία του Inglis, 1913), που αναπτύσσεται στα άκρα του μεγάλου ή μικρού άξονα, της δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_{\infty} \quad [2.9]$$

όπου  $\sigma_{\infty}$  είναι η εφελκυστική τάση στο άπειρο, ενώ η σταθερά  $K$  είναι ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων. Ο συντελεστής αυτός, εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της έλλειψης και δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$K = \left( 1 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \right) \quad \text{ή} \quad K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} \approx \left( 1 + 2\frac{a}{b} \right) \quad [2.10]$$

όπου  $\rho$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας της άκρης της ρωγμής και  $\alpha, b$  είναι το μήκος του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα της έλλειψης, αντίστοιχα (Σχήμα 2.6).



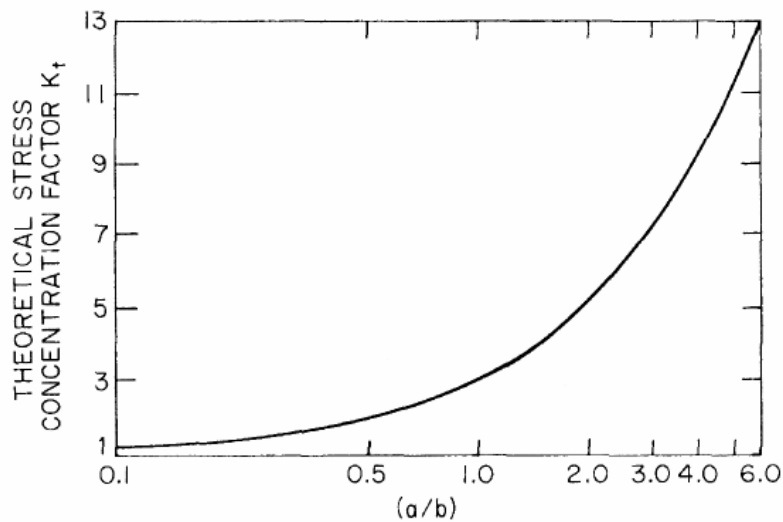
Σχήμα 2.6: Χαρακτηριστικά μιας ελλειπτικής ρωγμής (Barsom and Rolfe, 1999)

Από την δεύτερη εκ των εξισώσεων [2.10] και λύνοντας ως προς  $\sigma_{\max}$  για μια έλλειψη προκύπτει:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\infty} \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad [2.11]$$

Για πολύ οξείες ρωγμές,

$$a \gg b \quad \sigma_{\max} \cong \sigma_{\infty} \left( \frac{2a}{b} \right) \quad [2.12]$$



Σχήμα 2.7: Συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων σε συνάρτηση με το λόγο  $a/b$   
(Barsom and Rolfe, 1999)

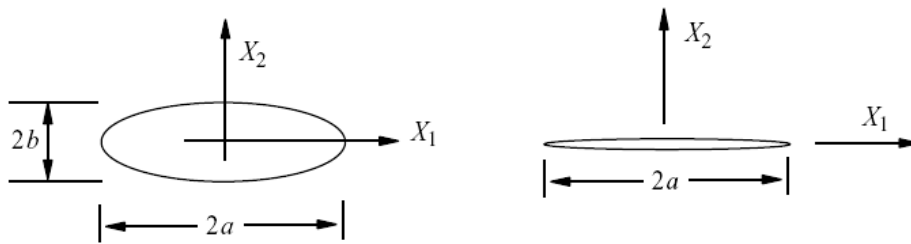
Όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.7), ο συντελεστής  $K$  γίνεται αρκετά μεγάλος όσο ο λόγος  $a/b$  μεγαλώνει (Σχήμα 2.8). Η ακτίνα στο τέλος του κυρίου άξονα μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση  $\rho = b^2/a$ .

Για αιχμηρές ρωγμές,

$$a \gg \rho, \quad \sigma_{\max} \cong \sigma_{\infty} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad [2.13]$$

και

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad [2.14]$$



**Σχήμα 2.8:** Εξομάλυνση ελλειπτικού ανοίγματος στην οριακή περίπτωση της επίπεδης ρωγμής.

Στην οριακή περίπτωση της ευθύγραμμης ρωγμής όπου  $b \rightarrow 0$  ή αλλιώς  $\rho \rightarrow 0$ , (Σχήμα 2.8) ο συντελεστής  $K$  απειρίζεται,  $K \rightarrow \infty$ . Κατά συνέπεια, η χρήση των προσεγγιστικών σχέσεων της συγκέντρωσης της τάσης δεν έχουν νόημα και δίνονται πλέον από την θεωρία της Θραυστομηχανικής.

## 2.5 Θεωρία Θραυστομηχανικής

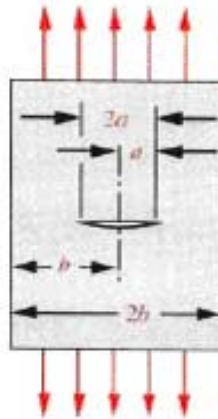
Η γραμμική-ελαστική θεωρία της θραυστομηχανικής, είναι βασισμένη σε μια αναλυτική μέθοδο. Αυτή η μέθοδος συσχετίζει το μέγεθος της τασικής καταπόνησης και το πώς αυτή κατανέμεται στην περιοχή γύρο από μια ρωγή, σαν συνάρτηση των τάσεων που

καταπονούν το δομικό δείγμα, του μεγέθους της μορφής και του προσανατολισμού της ρωγμής.

### 2.5.1 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων $K$

Η θεμελιώδης αρχή της θραυστομηχανικής είναι ότι το πεδίο των τάσεων πολύ κοντά σε μια ρωγμή μπορεί να χαρακτηριστεί από μια μόνο παράμετρο, που είναι ο συντελεστής έντασης των τάσεων  $K$ . Ο συντελεστής  $K$  συσχετίζεται με το ονομαστικό πεδίο των τάσεων ( $\sigma$ ) και με το μέγεθος της ρωγμής ( $a$ ), και έχει μονάδες  $\text{psi}\sqrt{\text{in}}$  ( $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ).

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων έχει νόημα και εκφράζεται σε οριακές περίπτωση όπου υπάρχει εφαρμοζόμενη τάση σε σημεία για τα οποία ισχύει  $r \rightarrow 0$  και  $\theta = 0$ .



Σχήμα 2.9: Ευθύγραμμη ρωγμή σε άπειρο μέσο

Για την περίπτωση ρωγμής που βρίσκεται σε άπειρο μέσο, όπου  $a \ll b$ , υπό επιβαλλόμενη κατακόρυφη φόρτιση  $\sigma$  όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9, ο συντελεστής έντασης των τάσεων για τους τρεις τύπους φόρτισης δίδεται από τις σχέσεις:

**Τύπος φόρτισης I:**

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad [2.15]$$

**Τύπος φόρτισης II:**

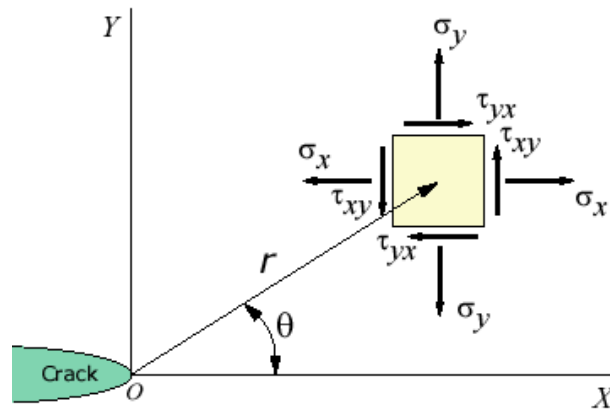
$$K_{II} = \tau_{inplane} \sqrt{\pi a} \quad [2.16]$$

Τύπος φόρτισης III:

$$K_{III} = \tau_{outofplane} \sqrt{\pi a} \quad [2.17]$$

όπου  $\tau_{inplane}$  είναι οι διατμητικές τάσεις εντός του επιπέδου φόρτισης και  $\tau_{outofplane}$  οι διατμητικές τάσεις στο αντι-επίπεδο.

### 2.5.2 Κατανομή Τάσεων και Μετατοπίσεων



Σχήμα 2.10: Μέτρηση συντεταγμένων από το άκρο της ρωγμής και οι συνιστώσες των τάσεων, του τασικού πεδίου της ρωγμής

Οι συνιστώσες των τάσεων, στο σημείο με συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , όπου η απόσταση  $r$  ως προς την αιχμή της ρωγμής είναι πολύ μικρή, δίδονται από τις σχέσεις:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad [2.18]$$

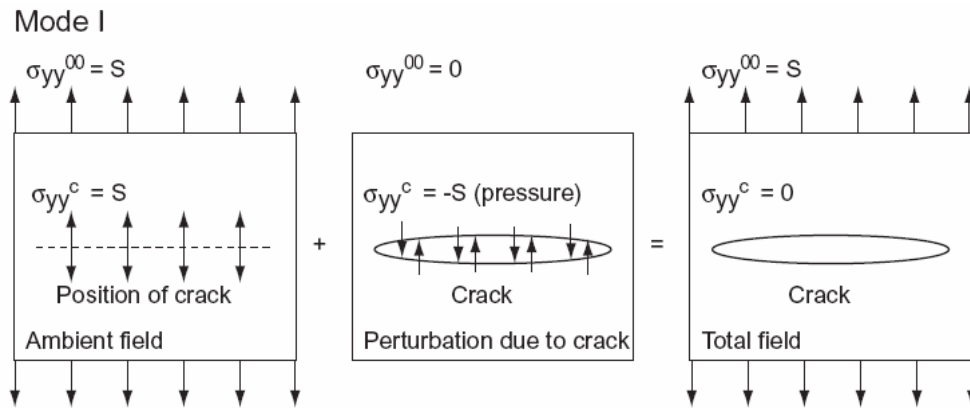
$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta)$$

όπου:



- Οι συμβολισμοί  $I$ ,  $II$ ,  $III$  δηλώνουν τους τρεις τύπους φόρτισης που μπορούν να εφαρμοστούν στη ρωγμή
- $\sigma_{ij}$ : είναι οι συνεπίπεδες με τη ρωγμή συνιστώσες των τάσεων  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , κοντά στο άκρο της ρωγμής.
- $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ : είναι οι συντελεστές εντάσεως των τάσεων για του τύπους φόρτισης
- $f_{ij}(\theta)$ : είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Το εντατικό-παραμορφωσιακό πεδίο που αναπτύσσεται κοντά στην αιχμή της ρωγμής περιγράφεται ξεχωριστά για τους τρεις τύπους φόρτισης. Στο σχήμα 2.11 απεικονίζεται το εντατικό πεδίο του πρώτου τύπου φόρτισης (Mode I) και ακολούθως παρατίθενται οι εντατικοπαραμορφωσιακές εξισώσεις που το περιγράφουν. Κατά αντιστοιχία, στο σχήμα 2.12 περιγράφεται το εντατικό πεδίου για τον τύπο της ολίσθησης των χειλών της ρωγμής (Mode II) ενώ στο σχήμα 2.13 φαίνεται η διάταξη των διατμητικών τάσεων στο αντι-επίπεδο για την περίπτωση του τρίτου τύπου φόρτισης (Mode III):



Σχήμα 2.11: Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου I (Martel, 2003)

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad [2.19]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

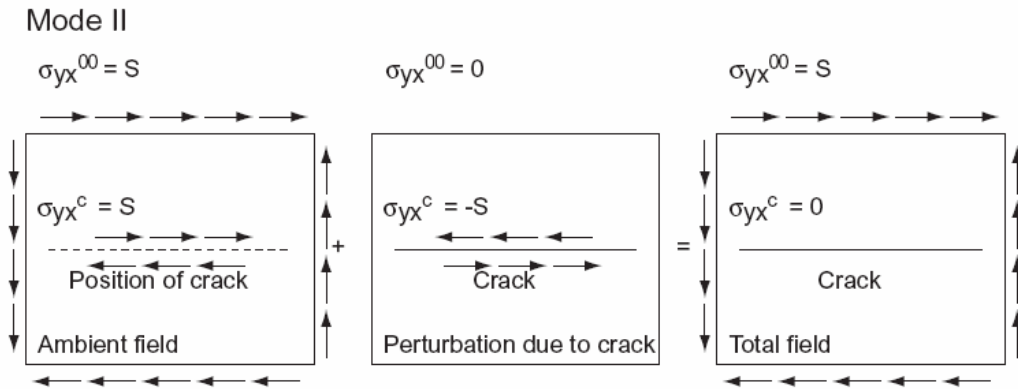
$$u_x = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

[2.20]

$$u_y = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

$$u_z = 0$$

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \quad [2.21]$$



Σχήμα 2.12: Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου II (Martel, 2003)

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad [2.22]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

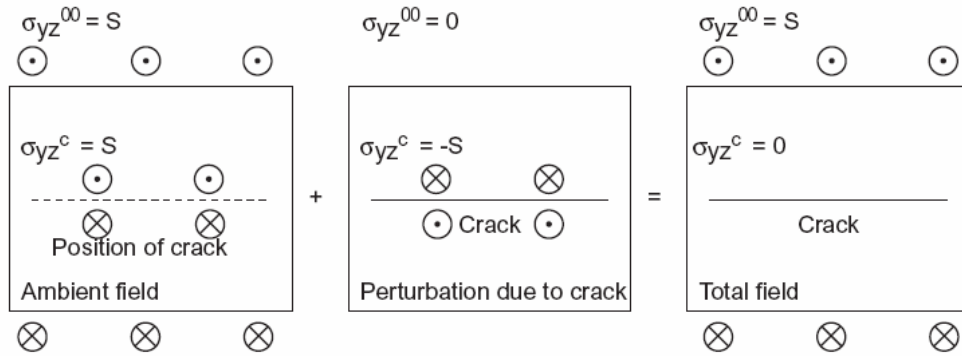
$$u_x = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 - 2\nu + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ -1 + 2\nu + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad [2.23]$$

$$u_z = 0$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \quad [2.24]$$

Mode III



Σχήμα 2.13: Εντατικό πεδίο φόρτισης τύπου III (Martel, 2003)

$$\tau_{xy} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad [2.25]$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad [2.26]$$

$$u_x = u_y = 0$$

$$K_{III} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{zy} \quad [2.27]$$

όπου  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson και  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  είναι το μέτρο διάτμησης ή αλλιώς μέτρο ακαμψίας του υλικού.

### 2.5.3 Κριτήριο Αστοχίας

Στην θεωρία της θραυστομηχανική μπορεί να διατυπωθεί το εξής απλό κριτήριο αστοχίας:

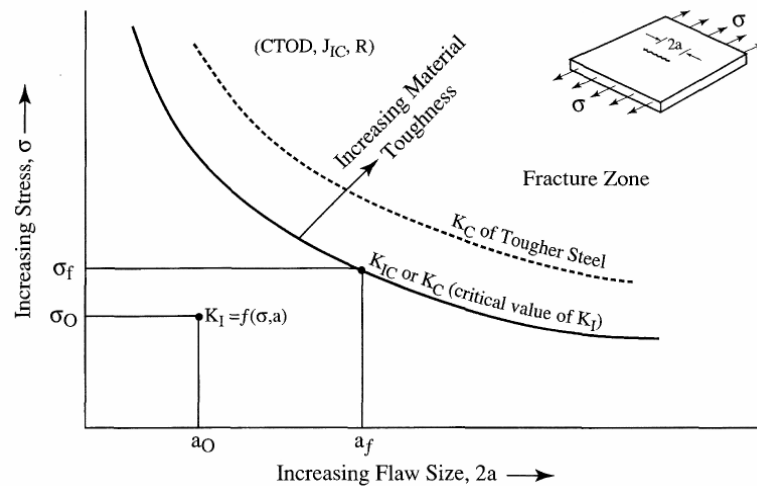
*«Όταν ο συντελεστής έντασης των τάσεων  $K$  πάρει μια κρίσιμη τιμή  $K_{IC}$ , η ρωγμή θα διαδοθεί παράγοντας μία ψαθυρή θραυσιγενή επιφάνεια»,*

$$K_I = K_{IC} \quad [2.28]$$

όπου  $K_{IC}$  είναι η αντίσταση στην διάδοση της ρωγμής (Εξαδάκτυλος, 1993).

Η κρίσιμη τιμή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης που οδηγεί στην αστοχία,  $K_c$ , είναι μια ιδιότητα του υλικού και μετριέται σε  $FM^{-3/2}$ . Από δοκιμές, η κρίσιμη τιμή του  $K_I$ , στην αστοχία,  $K_c$ , μπορεί να καθοριστεί για ένα δεδομένο υλικό σε ένα χαρακτηριστικό πάχος, σε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία και σε ένα συγκεκριμένο ρυθμό φόρτισης. Χρησιμοποιώντας αυτές τις κρίσιμες ιδιότητες του υλικού, ο σχεδιαστής μπορεί να καθορίσει θεωρητικά το μέγεθος της ρωγμής που μπορεί να ανεχτεί ένα κατασκευαστικό μέλος για ένα δεδομένο σχεδιαστικά επίπεδο τάσης, μια

δεδομένη θερμοκρασία, και έναν συγκεκριμένο ρυθμό φόρτισης. Αντιστρόφως, ο μηχανικός μπορεί να καθορίσει το σχεδιαστικό επίπεδο της τάσης που μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια για κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος ρωγμών, που μπορεί ήδη να έχουν εμφανιστεί, σε μια υπάρχουσα δομή.



Σχήμα 2.14 : Σχηματική σχέση μεταξύ της τάσης, του μεγέθους της ρωγμής και της αντοχής του υλικού (Barsom and Rolfe, 1999)

Η κρίσιμη τιμή για τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσης για δομικά υλικά, είναι άμεσα εξαρτώμενος από τις συνθήκες λειτουργίας. Κατά συνέπεια, η κρίσιμη τιμή πρέπει να ληφθεί με τη δοκιμή των πραγματικών υλικών κατασκευής στην αστοχία για τις διάφορες θερμοκρασίες και τους ρυθμούς φόρτισης.

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

### Μέθοδος των Ασυνεχών Μετατοπίσεων

### 3.1 Εισαγωγή

Τα περισσότερα προβλήματα στη μηχανική των στερεών αφορούν επιφάνειες που βρίσκονται σε επαφή, όπως είναι το πρόβλημα της σχισμής ή οι ρωγμές. Μια ρωγμή έχει δύο επιφάνειες ή όρια, που το ένα συμπίπτει με το άλλο. Πολλές από τις αριθμητικές μεθόδους συνοριακών τιμών, παρουσιάζουν προβλήματα σε τέτοιου είδους περιπτώσεις, επειδή η επίδραση των στοιχείων που βρίσκονται κατά μήκος της μιας επιφάνειας της ρωγμής είναι όμοια με την επίδραση των στοιχείων που βρίσκονται στην άλλη επιφάνεια. Για να λυθούν τα προβλήματα αυτού του τύπου, αναπτύχθηκε μια μέθοδος συνοριακών στοιχείων, η μέθοδος, των ασυνεχών μετατοπίσεων. Η μέθοδος αυτή είναι βασισμένη στην αναλυτική λύση του προβλήματος της πεπερασμένης ευθύγραμμης ρωγμής εντός, ενός απείρου ελαστικού μέσου, στο επίπεδο  $x, y$  κατά μήκος της οποίας δίνεται σταθερή ασυνεχής μετατόπιση ( constant displacement discontinuity ).

Στη μέθοδο ασυνεχών μετατοπίσεων η ρωγμή υποδιαιρείται σε ένα σύνολο  $N$  στοιχείων (συνοριακά στοιχεία) με σταθερές ασυνεχείς μετατοπίσεις σε καθένα από αυτά. Γνωρίζοντας την αναλυτική λύση μεμονωμένα για κάθε στοιχείο και αθροίζοντας τις επιδράσεις όλων των  $N$  στοιχείων σε καθένα από αυτά, υπολογίζεται η αριθμητική λύση του προβλήματος.

Η ανάπτυξη της μεθόδου αυτής παρουσιάζεται λεπτομερώς στα ακόλουθα κεφάλαια. Καταδεικνύεται ότι η μέθοδος ασυνεχών μετατοπίσεων είναι πραγματικά μια ευπροσάρμοστη και αρκετά απλουστευμένη μέθοδος για εφαρμογές της βραχομηχανικής. Μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα της γραμμικής ελαστικότητας όπως ανοίγματα, και δίνει αποτελέσματα ακρίβειας συγκρίσιμα με αυτά που λαμβάνονται από άλλες μεθόδους συνοριακών συνθηκών.

### 3.2 Μέθοδος Ασυνεχών Μετατοπίσεων σε Άπειρο Ελαστικό Μέσο

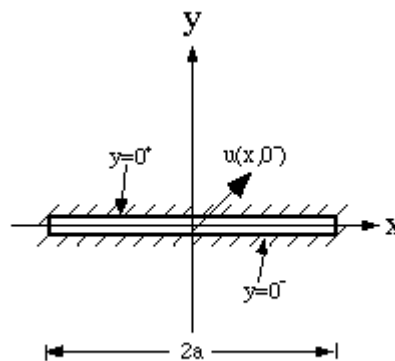
Το πρόβλημα, της σταθερής ασυνεχούς μετατόπισης κατά μήκος ενός πεπερασμένου ευθύγραμμου τμήματος στο επίπεδο  $x, y$  εντός ενός άπειρου ελαστικού μέσου, καθορίζεται από τη συνθήκη ότι οι μετατοπίσεις είναι συνεχείς παντού εκτός από το ευθύγραμμο τμήμα. Το ευθύγραμμο στοιχείο μπορεί να καταλαμβάνει συγκεκριμένη

θέση στον άξονα  $x$ , που ορίζεται από τη συνθήκη

$$|x| < a, y = 0_+ \quad [3.1]$$

Εάν το στοιχείο θεωρηθεί σαν μία ευθύγραμμη ρωγμή τότε μπορούν να διακριθούν δύο επιφάνειες, θεωρώντας ότι η μία βρίσκεται στη θετική πλευρά του άξονα  $y$  και συμβολίζεται ως  $y = 0_+$ , ενώ η άλλη βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του άξονα  $x$  και συμβολίζεται ως  $y = 0_-$ . (σχήμα 3.1) Οι σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ δυο σημείων που βρίσκονται στις δυο παράπλευρες επιφάνειες του γραμμικού τμήματος, προσδιορίζονται από την καθορισμένη μεταβολή

$$D_i = (D_x, D_y). \quad [3.2]$$



Σχήμα: 3.1 Θετική και αρνητική πλευρά της ευθύγραμμης ρωγμής

Η ασυνεχής μετατόπισης  $D_i$  καθορίζεται σαν η διαφορά της μετατόπισης μεταξύ των δυο πλευρών του στοιχείου όπως φαίνεται ακολούθως :

$$D_i = u_i(x_1, 0_-) - u_i(x_1, 0_+) \quad [3.3]$$

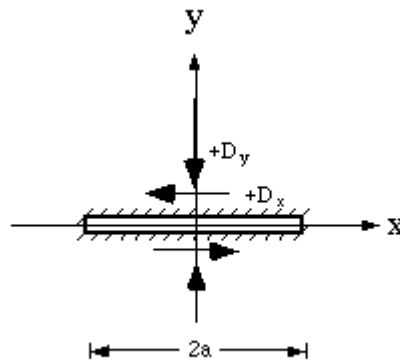
ή

$$\begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \\ D_y &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \end{aligned} \quad [3.4]$$

Επειδή οι μεταβλητές  $u_x$  και  $u_y$  είναι θετικές κατά μήκος των θετικών διευθύνσεων των



συντεταγμένων  $x$  και  $y$  συνεπάγεται ότι οι θετικές διευθύνσεις των  $D_x$  και  $D_y$  είναι αυτές που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα (3.2). Πρέπει να σημειωθεί ότι μια θετική τιμή του  $D_y$  υποδηλώνει ότι οι δύο πλευρές της ρωγμής επικαλύπτονται. Είναι μαθηματικά αποδεκτή η διείσδυση των δύο επιφανειών της ρωγμής (η μία μέσα στην άλλη), παρόλο που κάτι τέτοιο είναι εκ φύσεως αδύνατο να γίνει στην πραγματικότητα. Ωστόσο αυτή η δυσκολία θα μπορούσε να ξεπεραστεί, θεωρώντας ότι η ρωγμή έχει ένα πεπερασμένο πάχος, μικρό σε σχέση με το μήκος της, και ότι το μέγεθος της συνιστώσας της ασυνεχούς μετατόπισης  $D_y$  είναι πάντα μικρότερο από αυτό.



Σχήμα 3.2: Σταθερές συνιστώσες ασυνεχών μετατοπίσεων  $D_x$  και  $D_y$

Η λύση των μετατοπίσεων και των τάσεων όπως έχει βρεθεί από τον *Crouch S.L. and Starfield A.M. (1990)* δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$u_x = D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \quad [3.5]$$

$$u_y = D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}]$$

και

$$\sigma_{xx} = 2GD_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}]$$

$$\sigma_{yy} = 2GD_x [-yf_{,xyy}] + 2GD_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \quad [3.6]$$

$$\sigma_{xy} = 2GD_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2GD_y [-yf_{,xyy}]$$

Η συνάρτηση Green  $f(x, y)$  σε αυτές τις εξισώσεις δίδεται από την ακόλουθη σχέση [3.7]

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

Οι μερικές παράγωγοί της, πρώτης και δεύτερης τάξης είναι:

$$\begin{aligned} F2(x, y) = f_{,x} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ F3(x, y) = f_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ F4(x, y) = f_{,xy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ F5(x, y) = f_{,xx} = -f_{,yy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad [3.8]$$

Οι εξισώσεις [3.8] δείχνουν ότι και οι παράγωγοι τρίτου βαθμού της συνάρτησης  $f(x, y)$  είναι απαραίτητοι για τον υπολογισμό των τάσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα, για αυτό δίδονται ακολούθως:

$$\begin{aligned} F6(x, y) = f_{,yyy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x-a)^2 - y^2}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \\ F7(x, y) = f_{,yyy} &= \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x-a}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{x+a}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \end{aligned} \quad [3.9]$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι μετατοπίσεις που δίδονται από τις σχέσεις [3.5] είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε σημείο του άπειρου μέσου, εκτός από την περίπτωση που το ευθύγραμμο τμήμα  $x < a, y = 0$ , διασχίζεται εγκάρσια, εξ' αιτίας της ασυνέχειας η

οποία προκύπτει από τον ορισμό της [3.4]. Οι μετατοπίσεις κατά μήκος της ευθείας  $y = 0$  δίδονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2\pi} D \lim_{x_{y \rightarrow 0 \pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D \lim_{y_{y \rightarrow 0 \pm}} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \end{aligned} \quad [3.10]$$

Οι περιοριστικές τιμές των αντι-εφαπτομενικών όρων καθορίζονται μέσα από τη σχέση:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0_{\pm} \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0_{+} \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0_{-} \end{cases} \quad [3.11]$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα μελετούνται τρεις χωριστές περιπτώσεις υπολογισμού των συνιστωσών μετατοπίσεων κατά μήκος του άξονα  $y$ :

1.  $|x| > a, y = 0_{\pm}$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{aligned} \quad [3.12]$$

2.  $|x| < a, y = 0_{+}$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0_{+}) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0_{+}) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad [3.13]$$

3.  $|x| < a, y = 0_-$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0_-) &= +\frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0_-) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \end{aligned} \quad [3.14]$$

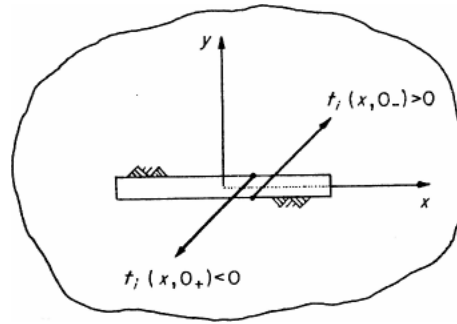
Οι μετατοπίσεις  $u_x$  και  $u_y$  παρά το γεγονός ότι είναι συνεχείς για  $|x| > a$  επί της ευθείας  $y = 0$ , παρουσιάζουν σταθερές ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_x$  και  $D_y$  για  $|x| < a, y = 0$ .

Οι τάσεις κατά μήκος της γραμμής  $y = 0$  ομοίως μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση [3.6]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0) &= \frac{-G}{2\pi(1-\nu)}D_y \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{aG}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= \frac{-aG}{\pi(1-\nu)}D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad [3.15]$$

Οι ορθές τάσεις  $\sigma_{xx}$  και  $\sigma_{yy}$  επί της  $y = 0$  εξαρτώνται μόνο από την ορθή συνιστώσα της ασυνεχούς μετατόπισης  $D_y$ , ενώ οι διατμητικές τάσεις  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  εξαρτώνται μόνο από την εγκάρσια συνιστώσα  $D_x$ . Από αυτές τις εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι οι τάσεις είναι άπειρες και ασυνεχείς για  $x = \pm a$ , αλλά πεπερασμένες και συνεχείς σε οποιοδήποτε άλλο σημείο κατά μήκος της  $y = 0$ .

Οι κατευθύνσεις των συνιστωσών του διανύσματος τάσης στις δύο επιφάνειες της ρωγμής απεικονίζονται στο σχήμα 3.3, θεωρώντας ότι  $D_x > 0$  και  $D_y > 0$ .



Σχήμα 3.3: Τάσεις που εφαρμόζονται στην επιφάνεια της ρωγμής

Όπως φαίνεται στο σχήμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 t_x(x, 0_+) &= \sigma_{xy}(x, 0_+) \\
 t_y(x, 0_+) &= \sigma_{yy}(x, 0_+) \\
 t_x(x, 0_-) &= \sigma_{xy}(x, 0_-) \\
 t_y(x, 0_-) &= \sigma_{yy}(x, 0_-)
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις αυτές και τις [3.15] προκύπτει ότι  $t_i(x, 0_+) = -t_i(x, 0_-)$ , έτσι η συνιστώσα των τάσεων  $t_i(x, 0) = t_i(x, 0_+) + t_i(x, 0_-)$  που εφαρμόζονται στη ρωγμή είναι ίση με το μηδέν.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι μετατοπίσεις είναι ασυνεχείς δια μέσου της ρωγμής ενώ οι τάσεις είναι συνεχείς (Crouch S.L. and Starfield A.M. (1990))

### 3.3 Το Πρόβλημα της Ρωγμής Υπό Σταθερή Εσωτερική Πίεση

Τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη μιας αριθμητικής διαδικασίας για την επίλυση συνοριακών προβλημάτων τιμών στα πλαίσια της θεωρίας της επίπεδης ελαστικότητας. Η διαδικασία αυτή, δηλαδή η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων, θα περιγραφεί για γενικότερα προβλήματα στο παρακάτω κεφάλαιο. Είναι πολύ σημαντικό, στο στάδιο αυτό, να διευκρινιστούν τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου με τη μελέτη ενός απλού παραδείγματος, δηλαδή

του προβλήματος μίας ευθύγραμμης ρωγμής υπό σταθερή εσωτερική πίεση, η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα άπειρο μέσο. Το πρόβλημα αυτό προσδιορίζεται από τις παρακάτω συνθήκες :

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= 0 & -\infty < x < \infty, y = 0 \\ \sigma_{yy} &= -p & |x| < b, y = 0 \\ u_y &= 0 & |x| \geq b, y = 0\end{aligned}\quad [3.17]$$

Θα πρέπει, επίσης να αναφερθεί ότι οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο άπειρο πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν. Η αναλυτική λύση για τη σχετική κατανομή των ορθών μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής (δηλαδή το μέγεθος του ανοίγματος) είναι:

$$\hat{u}_y(x) = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) = -\frac{2(1-\nu)}{G} pb(1-x^2/b^2)^{1/2} \quad [3.18]$$

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος η ρωγμή διαιρείται σε  $N$  ευθύγραμμα τμήματα ή συνοριακά στοιχεία όπου το καθένα αντιπροσωπεύει μια ασυνεχή μετατόπιση. Η συνιστώσα της μετατόπισης στον  $y$  άξονα είναι ασυνεχής δια μέσου του κάθε στοιχείου ενώ λόγω της συμμετρίας η  $x$  συνιστώσα της μετατόπισης είναι συνεχής. Θεωρείται ότι το ευθύγραμμο τμήμα είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε η ασυνεχής μετατόπιση κάθε στοιχείου, στην κατεύθυνση του  $y$  άξονα, να είναι σταθερή. Η αριθμητική λύση του προβλήματος [3.17] αντιπροσωπεύεται από  $N$  διακριτές ασυνεχείς μετατοπίσεις  $\hat{D}_y^i$  από  $i = 1 : N$ . Οι τιμές των  $N$  μετατοπίσεων προσδιορίζονται από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους. Οι εξισώσεις αυτές προέρχονται από τις εξισώσεις [3.15] όπως δείχνεται ακολούθως.

Η ορθή τάση  $\sigma_{yy}$  σε ένα σημείο  $x, y = 0$  που προκαλείται από μία σταθερή ασυνεχή μετατόπιση  $\hat{D}_y$  στο διάστημα  $|x| \leq a, y = 0, y = 0$ , λαμβάνοντας υπόψη την σχέση [3.15], είναι ίση με :

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} \hat{D}_y \frac{1}{x^2 - a^2} \quad [3.19]$$

Εάν η μετατόπιση πραγματοποιείται πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $2a^j$  όπου το μέσο του έχει συντεταγμένες  $x = x^j, y = 0$ , τότε η [3.19] μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sigma_{yy}(x,0) = \frac{-a^j G}{\pi(1-\nu)} D_y^j \frac{1}{(x-x^j)^2 - a^{j2}} \quad [3.20]$$

όπου  $D_y^j$  είναι η ασυνεχής μετατόπιση στο διάστημα  $|x-x^j| \leq a^j, y=0$ . Η τάση στο μέσο του κάθε  $i$  στοιχείου η οποία οφείλεται σε μια ασυνεχή μετατόπιση του  $j$  στοιχείου, υπολογίζεται θέτοντας όπου  $x$  ίσο με  $x^i$ :

$$\sigma_{yy}^i(x,0) = \frac{-a^j G}{\pi(1-\nu)} D_y^j \frac{1}{(x^i-x^j)^2 - a^{j2}} \quad [3.21]$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τάση στο μέσο του κάθε  $i$  στοιχείου, η οποία οφείλεται στις ασυνεχείς μετατοπίσεις και των  $N$ . Η σχέση η οποία δίνει τη συνολική τάση είναι η εξής:

$$\sigma_{yy}^i(x,0) = \sigma_{yy}^i = \sum_{j=1}^N A^{ij} D_y^j \quad [3.22]$$

όπου  $A^{ij}$  είναι ο συντελεστής επίδρασης:

$$A^{ij} = \frac{-G}{\pi(1-\nu)} \frac{a^j}{(x^i-x^j)^2 - a^{j2}} \quad [3.23]$$

Θεωρείται ότι η τάση  $\sigma_{yy}^i$  είναι αντιπροσωπευτική της ορθής τάσης στο διάστημα  $|x-x^i| \leq a^i, y=0$ . Μια αριθμητική λύση του προβλήματος της ρωγμής υπό σταθερή εσωτερική πίεση προσδιορίζεται από το ακόλουθο γραμμικό σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους :

$$\sigma_{yy}^i = -p = \sum_{j=1}^N A^{ij} D_y^j \quad i = 1:N \quad [3.24]$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν για  $D_y^j$   $i = 1:N$ , με συνηθισμένες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Σημειώνεται ότι η μοναδική λύση η οποία προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων αυτών, ικανοποιεί αυτόματα την απαιτούμενη συνθήκη, ότι οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο άπειρο είναι ίσες με το μηδέν. (Σχέση 3.17)

### 3.4 Γενίκευση της Αριθμητικής Μεθόδου

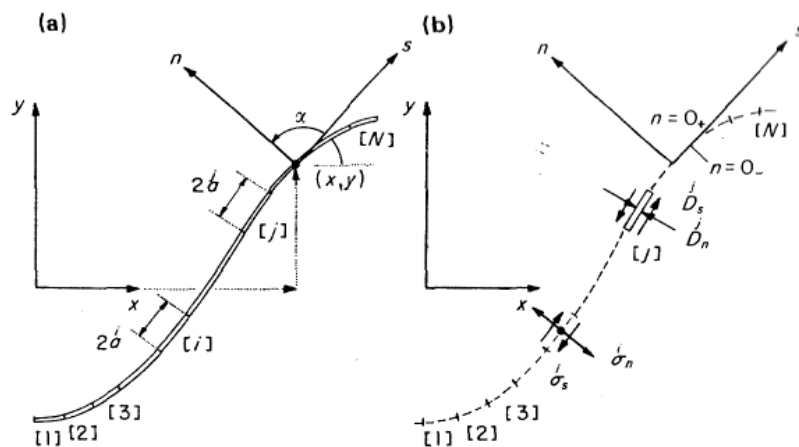
Μια γενίκευση της αριθμητικής μεθόδου που περιγράφεται ανωτέρω (το πρόβλημα της πεπιεσμένης ρωγμής) για ένα πρόβλημα καμπυλόγραμμης ρωγμής, η οποία δέχεται σταθερή εσωτερική πίεση, απεικονίζεται στο σχήμα (3.4). Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η ρωγμή μπορεί να προσεγγιστεί με αρκετή ακρίβεια από  $N$  αλληλοσυνδεόμενα ευθύγραμμα τμήματα. Η θέση και ο προσανατολισμός των τμημάτων αυτών προσδιορίζεται με την αναφορά τους στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.4). Εάν οι επιφάνειες της ρωγμής δέχονται τασική φόρτιση, για παράδειγμα μία ομοιόμορφη πίεση ρευστού  $P$ , τότε θα μετατοπιστούν η μία σε σχέση με την άλλη. Η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων χρησιμοποιείται για την εύρεση μίας διακριτής προσέγγισης της ομαλής κατανομής της πραγματικής σχετικής μετατόπισης των άκρων της ρωγμής. Στην περίπτωση που μελετάται, θεωρείται ότι η μετακίνηση των επιφανειών της ρωγμής δε περιορίζεται σε καμία κατεύθυνση. Οι ασυνεχείς μετατοπίσεις των στοιχείων προσδιορίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συντεταγμένες  $s$  και  $n$  κάθε στοιχείου όπως υποδεικνύεται στο σχήμα (3.4), το οποίο απεικονίζει μία στοιχειώδεις ασυνεχή μετατόπιση ενός  $j$  τμήματος της ρωγμής. Οι συνιστώσες της ασυνέχειας στις κατευθύνσεις  $s$  και  $n$  στο τμήμα αυτό αναφέρονται με τα σύμβολα  $D_s^j$  και  $D_n^j$ . Οι τύποι οι οποίοι δίνουν τις ποσότητες αυτές είναι οι εξής :



$$D_s^j = u_s^{j-} - u_s^{j+} \quad [3.25]$$

$$D_n^j = u_n^{j-} - u_n^{j+}$$

Στην παραπάνω υπόδειξη τα φυσικά μεγέθη (μετατοπίσεις)  $u_s^j$  και  $u_n^j$ , αναφέρονται στις διατμητικές,  $s$  και στις ορθές,  $n$  μετατοπίσεις αντίστοιχα του  $j$  τμήματος της ρωγμής. Τα πρόσημα "+" και "-" συμβολίζουν τη θετική και την αρνητική επιφάνεια της ρωγμής σύμφωνα με τις τοπικές συντεταγμένες  $n$  και  $s$ . Οι τοπικές μετατοπίσεις  $u_s^j$  και  $u_n^j$  αποτελούν τις δύο συνιστώσες ενός διανύσματος.



Σχήμα 3.4: Απεικόνιση μιας ρωγμής από  $N$  στοιχειακές ασυνεχείς μετατοπίσεις

Είναι θετικές στις θετικές κατευθύνσεις των  $s$  και  $n$ , ανεξάρτητα από το εάν εξετάζουμε τη θετική ή την αρνητική επιφάνεια της ρωγμής. Συνεπώς από τις σχέσεις [3.25], προκύπτει ότι η ορθή συνιστώσα της μετατόπισης  $D_n^j$  είναι θετική εάν οι δύο επιφάνειες της ρωγμής μετατοπίζονται η μια προς την άλλη. Ομοίως, και η διατμητική συνιστώσα  $D_s^j$  είναι θετική εάν η θετική επιφάνεια της ρωγμής κινείται προς τα αριστερά σε σχέση με την αρνητική επιφάνεια.

Οι επιδράσεις μίας στοιχειώδους συνεχής μετατόπισης, στις μετατοπίσεις και στις τάσεις σε ένα τυχαίο σημείο εντός άπειρου μέσου, μπορούν να υπολογιστούν από τα αποτελέσματα της ενότητας 3.2, με κατάλληλο μετασχηματισμό των εξισώσεων ανάλογα με τη θέση και τον προσανατολισμό του ευθύγραμμου τμήματος που μελετάται. Συγκεκριμένα οι διατμητικές και οι ορθές τάσεις οι οποίες ενεργούν στο μέσο του  $i$  στοιχείου (σχήμα 3.4 b) και οφείλονται στις συνιστώσες των ασυνεχών μετατοπίσεων στο  $j$  στοιχείο, μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i = 1 : N \quad [3.26]$$

όπου  $A_{ss}^{ij}$  κτλ. είναι οι συνοριακοί συντελεστές επίδρασης των τάσεων. Ο συντελεστής  $A_{ns}^{ij}$ , παραδείγματος χάριν, δίνει την ορθή τάση στο μέσο του  $i$  στοιχείου (δηλ.  $\sigma_n^i$ ) που οφείλεται σε μια συνεχή μοναδιαία διατμητική ασυνεχή μετατόπιση του  $j$  στοιχείου (δηλ.  $D_s^j = 1$ ).

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα της ρωγμής το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 3.4a, εφαρμόζεται μια στοιχειακή ασυνεχή μετατόπιση σε κάθε ένα από τα  $N$  στοιχεια-τμήματα κατά μήκος της ρωγμής και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις [3.26] λαμβάνονται οι ακόλουθοι τύποι:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i = 1 : N \quad [3.27]$$

Εάν προσδιοριστούν οι τιμές των τάσεων  $\sigma_s^i$  και  $\sigma_n^i$  για κάθε ένα στοιχείο της ρωγμής, κατόπιν οι εξισώσεις [3.27] αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα  $2N$  εξισώσεων με  $2N$

αγνώστους, που είναι οι συνιστώσες των στοιχειωδών ασυνεχών μετατοπίσεων  $\overset{j}{D}_s$ ,  $\overset{j}{D}_n$  για  $j = 1 : N$ .

Έχοντας επιλυθεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων για τις  $\overset{j}{D}_s$  και τις  $\overset{j}{D}_n$ , μπορεί στη συνέχεια υπολογιστούν οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο απαιτούμενο σημείο του μέσου του στοιχείου, χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μετατοπίσεις κατά μήκος της ρωγμής δίνονται από τις εκφράσεις της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \overset{j}{D}_n \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \overset{j}{D}_n \end{aligned} \right\} i = 1 : N \quad [3.28]$$

όπου  $B_{ss}^{ij}$  κτλ. είναι οι συνοριακοί συντελεστές επίδρασης για τις μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις είναι ασυνεχείς καθώς διασχίζονται οι επιφάνειες του  $i$  στοιχείου. Για αυτό, θα πρέπει να διαχωριστούν μεταξύ τους οι δύο αυτές επιφάνειες κατά τον υπολογισμό των συντελεστών επίδρασης με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων. Ακολούθως δείχνεται ότι οι διαγώνιοι όροι του πίνακα, ο οποίος δίνει τους συντελεστές επίδρασης έχουν τις εξής τιμές:

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad [3.29]$$

$$B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \begin{cases} -\frac{1}{2}n \rightarrow 0_+ \\ +\frac{1}{2}n \rightarrow 0_- \end{cases}$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές, δηλ. αυτοί στους οποίους  $i \neq j$ , είναι συνεχείς με αποτέλεσμα οι μετατοπίσεις  $u_s^j$ ,  $u_n^j$  μέσα στη σχέση [3.28] να επιδεικνύουν συνεχείς ασυνεχείς μετατοπίσεις  $\overset{j}{D}_s$  και  $\overset{j}{D}_n$  όπως φυσικά απαιτείται.

Ο υπολογισμός των συντελεστών επίδρασης στο σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , γίνεται με τις εξισώσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων που δίδονται στο παράρτημα Α.

### 3.5 Αντι-επίπεδη Φόρτιση (Τύπος ΙΙΙ)

Η προηγούμενη ανάλυση αφορούσε τους τύπους φόρτισης Ι και ΙΙ, όπου η ρωγμή καταπονείται σε εφελκυστική ορθή τάση κάθετη στον άξονά της για τον πρώτο τύπο και σε διατμητική τάση παράλληλη στον άξονά της για τον δεύτερο τύπο φόρτισης.

Με αντίστοιχη διαδικασία που περιγράφεται ακολούθως αναπτύσσεται η μέθοδος για την περίπτωση φόρτιση του τρίτου τύπου, που αντιστοιχεί σε καταπόνηση με διατμητική τάση κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής.

Η ασυνεχής μετατόπισης  $D_z$ , στην περίπτωση αυτή, καθορίζεται σαν η διαφορά της μετατόπισης μεταξύ των δυο πλευρών του στοιχείου όπως φαίνεται ακολούθως :

$$D_z = u_z(x, 0_-) - u_z(x, 0_+) \quad [3.30]$$

Οι λύσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων του προβλήματος μπορούν να γραφτούν όπως :

$$u_z = \frac{1}{2\pi} F_{1anti} D_z \quad [3.31]$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{G}{2\pi} F_{2anti} D_z$$

και

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\frac{G}{2\pi} F_{3anti} D_z \quad [3.32]$$

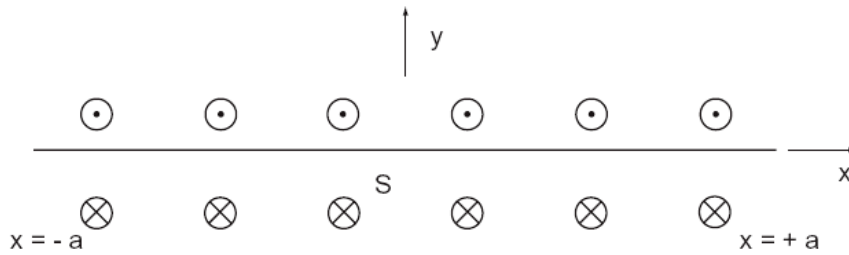
όπου:

$$F_{1anti} = \arctan \frac{y}{x}$$

$$F_{2anti} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad [3.33]$$

$$F_{3anti} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Σε αντιστοιχία με την ανάλυση που έγινε στις προηγούμενες ενότητες 3.2, 3.3, θα διευκρινιστούν στη συνέχεια τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μεθόδου των ασυνεχών μετατοπίσεων για την περίπτωση φόρτισης τύπου ΙΙΙ, με τη μελέτη ενός απλού παραδείγματος, δηλαδή του προβλήματος της ευθύγραμμης ρωγμής που βρίσκεται σε άπειρο μέσο και υποβάλλεται σε σταθερή εσωτερική πίεση.



Σχήμα 3.5: Απεικόνιση του τύπου φόρτισης ΙΙΙ

Το πρόβλημα αυτό προσδιορίζεται από τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= -p & |x| < b, y = 0 \\ \sigma_{yy} &= 0 & |x| < b, y = 0 \\ u_z &= 0 & |x| \geq b, y = 0 \end{aligned} \quad [3.34]$$

Σημειώνεται ότι οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο άπειρο είναι ίσες με το μηδέν. Η αναλυτική λύση για τη σχετική κατανομή των ορθών μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής (δηλαδή το μέγεθος του ανοίγματος) είναι:

$$\hat{u}_z(x) = u_z(x, 0_-) - u_z(x, 0_+) = \frac{2}{G} pb(1 - x^2/b^2)^{1/2} \quad [3.35]$$

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος η ρωγμή διαιρείται σε N ευθύγραμμα τμήματα ή συνοριακά στοιχεία όπου το καθένα αντιπροσωπεύει μια

ασυνεχή μετατόπιση. Η αριθμητική λύση του προβλήματος [3.35] αντιπροσωπεύεται από  $N$  διακριτές ασυνεχείς μετατοπίσεις  $\overset{i}{D}_z$  από  $i = 1 : N$ . Οι τιμές των  $N$  μετατοπίσεων προσδιορίζονται από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους

Η τάση  $\sigma_{yz}$  σε ένα σημείο  $x, y = 0$  προκαλείται από μία σταθερή ασυνεχή μετατόπιση  $D_z$  στο διάστημα  $|x| \leq a, y = 0, y = 0$  είναι:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{G}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} D_z \quad [3.36]$$

Εάν η μετατόπιση πραγματοποιείται πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $2a$  όπου το μέσο του έχει συντεταγμένες  $x = x, y = 0$ , τότε η [3.53] μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \frac{G}{2\pi} \frac{x - \overset{j}{x}}{\left(x - \overset{j}{x}\right)^2 + y^2} \overset{j}{D}_z \quad [3.37]$$

όπου  $\overset{j}{D}_z$  είναι η ασυνεχής μετατόπιση στο διάστημα  $|x - \overset{j}{x}| \leq a, y = 0$ . Η τάση στο μέσο του κάθε  $i$  στοιχείου η οποία οφείλεται σε μια ασυνεχή μετατόπιση του  $j$  στοιχείου, υπολογίζεται θέτοντας όπου  $x$  ίσο με  $\overset{j}{x}$ :

$$\sigma_{yz}\left(\overset{i}{x}, 0\right) = \frac{G}{2\pi} \frac{\overset{i}{x} - \overset{j}{x}}{\left(\overset{i}{x} - \overset{j}{x}\right)^2 + y^2} \overset{j}{D}_z \quad [3.38]$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τάση στο μέσο του κάθε  $i$  στοιχείου, η οποία οφείλεται στις ασυνεχείς μετατοπίσεις και των  $N$ . Η σχέση η οποία δίνει τη συνολική τάση είναι η εξής:

$$\sigma_{yz}(\overset{i}{x}, 0) = \sigma_{yz} = \sum_{j=1}^N \overset{ij}{A} \overset{j}{D}_z \quad [3.39]$$

όπου  $A^{ij}$  ο συντελεστής επίδρασης :

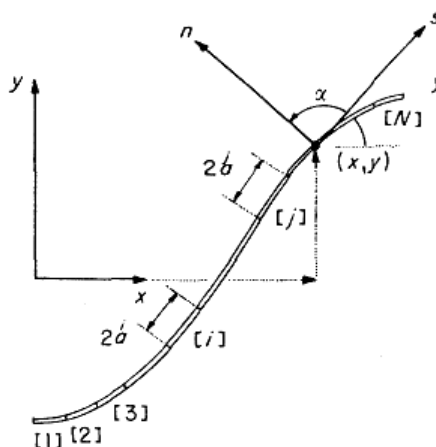
$$A^{ij} = \frac{G}{2\pi} \frac{x^i - x^j}{\left(x^i - x^j\right)^2 + y^2} \quad [3.40]$$

Μια αριθμητική λύση του προβλήματος της ρωγμής υπό σταθερή εσωτερική πίεση προσδιορίζεται από το ακόλουθο γραμμικό σύστημα  $N$  εξισώσεων με  $N$  αγνώστους :

$$\sigma_{yz}^i = -p = \sum_{j=1}^N A^{ij} D_z^j \quad i = 1 : N \quad [3.41]$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν για  $D_z^j \quad i = 1 : N$ , με συνηθισμένες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Σημειώνεται ότι η μοναδική λύση η οποία προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων αυτών, ικανοποιεί αυτόματα την απαιτούμενη συνθήκη, ότι οι μετατοπίσεις και οι τάσεις στο άπειρο είναι ίσες με το μηδέν.

Μια γενίκευση της αριθμητικής μεθόδου που περιγράφεται ανωτέρω (το πρόβλημα της πεπιεσμένης ρωγμής) για ένα πρόβλημα καμπυλόγραμμης ρωγμής, η οποία δέχεται σταθερή εσωτερική πίεση, απεικονίζεται στο σχήμα (3.6). Στην περίπτωση αυτή θεωρείται ότι η ρωγμή μπορεί να προσεγγιστεί με αρκετή ακρίβεια από  $N$  ευθύγραμμα τμήματα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους. Η θέση και ο προσανατολισμός των τμημάτων αυτών προσδιορίζεται με την αναφορά τους στο γενικό σύστημα συντεταγμένων  $x, y$  όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.6)



Σχήμα 3.6: Απεικόνιση καμπυλόγραμμης ρωγμής

Οι ασυνεχείς μετατοπίσεις των στοιχείων προσδιορίζονται λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές συντεταγμένες  $s$  και  $n$  κάθε στοιχείου όπως υποδεικνύεται στο σχήμα 3.6, η οποία απεικονίζει μία στοιχειώδες ασυνεχή μετατόπιση ενός  $j$  τμήματος της ρωγμής.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις  $F_{1anti}(x', y')$  έως  $F_{3anti}(x', y')$ , υπολογίζονται οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις και τις μετατοπίσεις στην διεύθυνση του  $z$  άξονα:

$$u'_z = \frac{1}{2\pi} F'_{1anti} D'_z \quad [3.42]$$

και

$$\sigma'_{yz} = \sigma'_{zy} = \frac{G}{2\pi} F'_{2anti} D'_z \quad [3.43]$$

$$\sigma'_{xz} = \sigma'_{zx} = -\frac{G}{2\pi} F'_{3anti} D'_z$$

όπου  $D'_z = D_z$ , ο μετασχηματισμός συντεταγμένων, γίνεται στρέφοντας γύρο από τον άξονα  $z$ .

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο  $x, y$  σύστημα συντεταγμένων δίδονται από τις σχέσεις ως εξής:

$$u_z = u'_z \quad [3.44]$$

και

$$\sigma_{xz} = \frac{G}{2\pi} (F'_{3anti} \cos \beta - F'_{2anti} \sin \beta) D_z \quad [3.45]$$

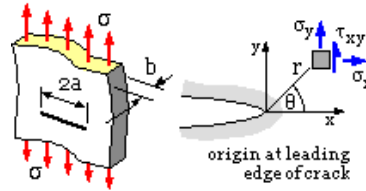
$$\sigma_{yz} = \frac{G}{2\pi} (F'_{3anti} \sin \beta + F'_{2anti} \cos \beta) D_z$$

Οι τοπικές  $x', y'$  συντεταγμένες συσχετίζονται με τις παγκόσμιες  $x, y$  με βάσει τις εξισώσεις μετασχηματισμού.



### 3.6 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων, όπως φαίνεται και στις εξισώσεις [2.20], [2.23], [2.26] του κεφαλαίου 2, συνδέεται με τις σχετικές μετατοπίσεις της ρωγμής. Στην υπο μελέτη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων μπορεί να συσχετιστεί με τις αντίστοιχες ασυνεχείς μετατοπίσεις στην περίπτωση που ισχύει συμμετρία μετατοπίσεων μεταξύ των παρυφών του συνόρου της ρωγμής. Συνεπώς λαμβάνοντας υπόψη τις ασυνεχές μετατοπίσεις της ρωγμής πολύ κοντά στην αιχμή της και θεωρώντας  $\theta = \pi$ , υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων και για τους τρεις τρόπους φόρτισης όπως φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 3.7: Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής

**Τύπος φόρτισης I:**

$$D_N = 2u_y \stackrel{[2.20]}{\Rightarrow} D_N = \frac{2K_I 2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(1-\nu) = \frac{8(1-\nu^2)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \Rightarrow$$

$$K_I = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_N \quad [3.46]$$

**Τύπος φόρτισης II:**

$$D_S = 2u_x \stackrel{[2.23]}{\Rightarrow} D_S = \frac{2K_{II} 2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(1-\nu) = \frac{8(1-\nu^2)}{E} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \Rightarrow$$

$$K_{II} = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_s \quad [3.47]$$

Τύπος φόρτισης III:

$$D_z = 2u_z \stackrel{[2.26]}{\Rightarrow} D_z = \frac{4(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \Rightarrow$$

$$K_{III} = \frac{E}{4(1+\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} D_z \quad [3.48]$$

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> Πρόγραμμα Επίλυσης ( DDBE2D )

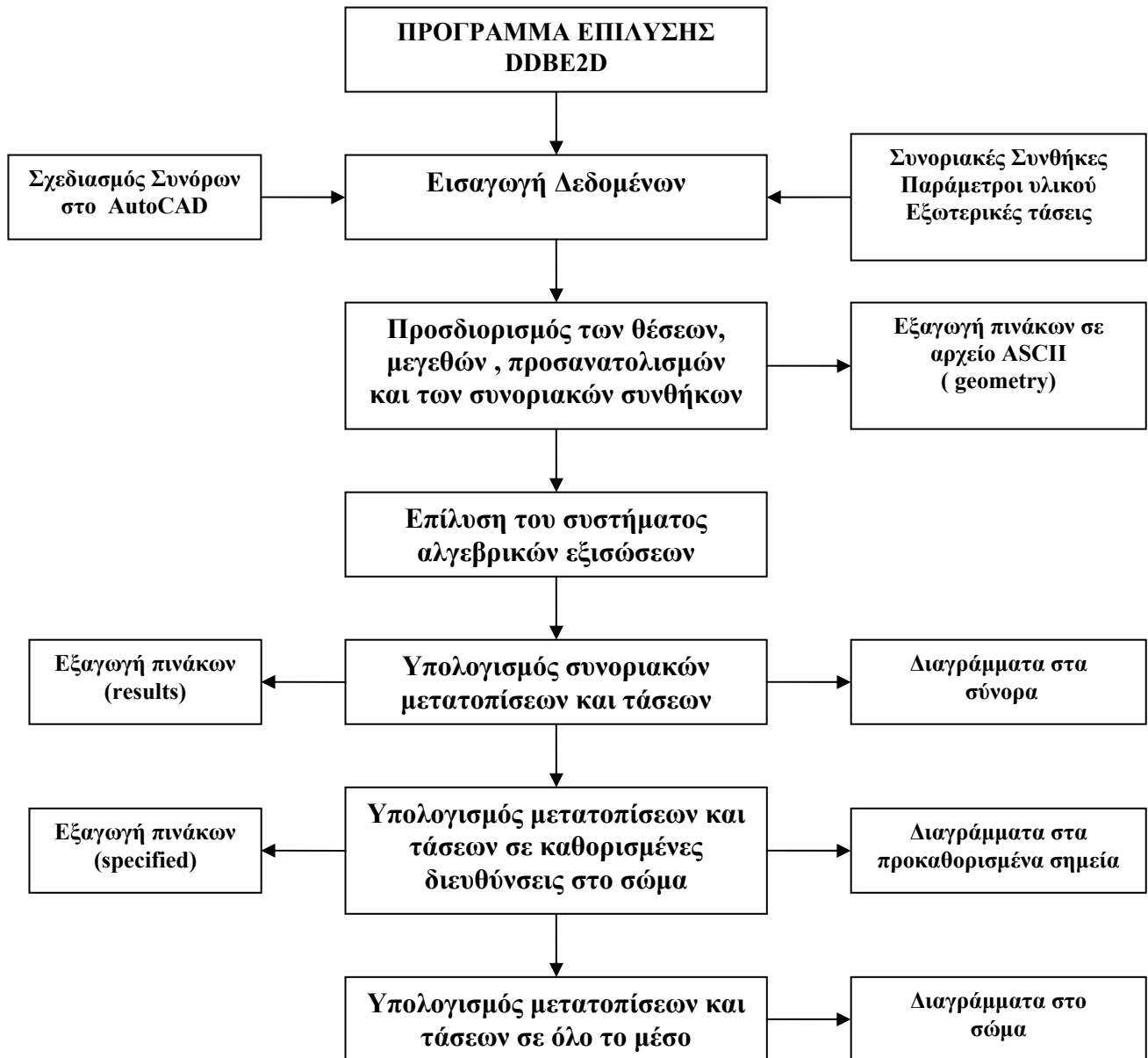
## 4.1. Εισαγωγή

Το DDBE2D (Displacement Discontinuity Boundary Element Two Dimensions) είναι ένα αριθμητικό πρόγραμμα δυο διαστάσεων, βασισμένο στη μέθοδο συνοριακών στοιχείων και πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο των ασυνεχών μετατοπίσεων. Το πρόγραμμα αυτό κατασκευάστηκε στα πλαίσια της Διπλωματικής αυτής εργασίας.

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει αριθμητικά τις συνιστώσες των τάσεων και των μετατοπίσεων τόσο στα σύνορα, όσο και σε όλα τα σημεία του περιβάλλοντος πετρώματος. Είναι βασισμένο στο είδη υπάρχον πρόγραμμα TWODD σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN (Crouch & Starfield, 1990) και αναπρογραμματίστηκε σε γλώσσα MATLAB. Οι τροποποιήσεις του προγράμματος αυτού αφορούν:

- I. Κατασκευή προ-επεξεργαστή για την ταχεία εισαγωγή των συνοριακών στοιχείων των ρωγμών ή των εκσκαφών μέσω του σχεδιαστικού πακέτου AUTOCAD.
- II. Κατασκευή μετα-επεξεργαστή για τη δημιουργία τριγωνικού πλέγματος στο άπειρο μέσο, στους κόμβους του οποίου υπολογίζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις για την δημιουργία διαγραμμάτων και ισοχρωματικών επιφανειών.
- III. Δυνατότητα επίλυσης και των τριών διαφορετικών τρόπων φόρτισης που μπορούν να υφίστανται στο επίπεδο (επίπεδη παραμόρφωση και αντι-επίπεδη παραμόρφωση).

Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του υπολογιστικού προγράμματος.



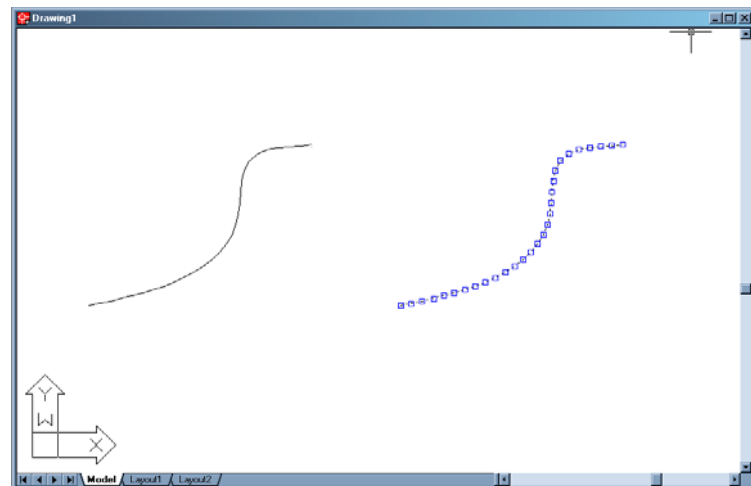
Σχήμα 4.1: Συνοπτικό διάγραμμα ροής του προγράμματος DDBE2D

## 4.2. Εισαγωγή Δεδομένων

### 4.2.1 Σχεδιασμός στο AUTOCAD

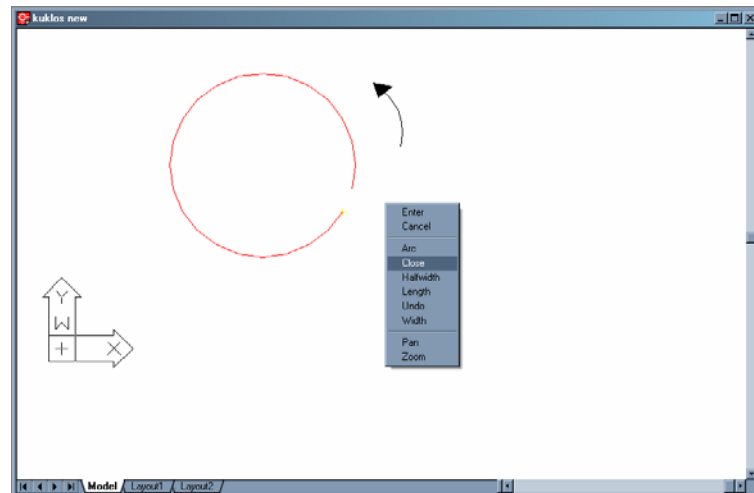
Ο σχεδιασμός των συνοριακών στοιχείων στο AUTOCAD, γίνεται με βάση τους ακόλουθους κανόνες:

- I. Τα στοιχεία που περιγράφουν τα σύνορα σχεδιάζονται με την εντολή «polyline» του σχεδιαστικού πακέτου AUTOCAD.
- II. Η γεωμετρία μιας ρωγμής θα πρέπει να περιγράφεται με όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία, με το προεπιλεγμένο χρώμα



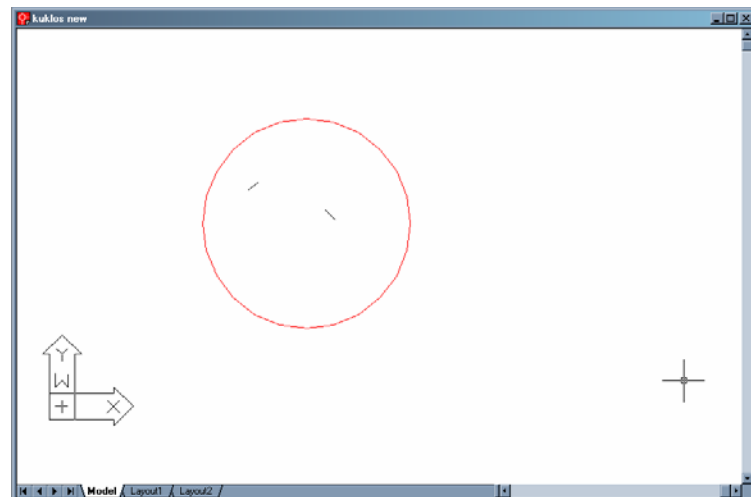
Σχήμα 4.2: Γεωμετρία της ρωγμής

- III. Τα ανοίγματα κατά αντιστοιχία με τις ρωγμές περιγράφονται από μικρά διαδοχικά στοιχεία που αποτελούν μια κλειστή καμπύλη. Σχεδιάζονται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού και το τελευταίο στοιχείο που κλείνει την καμπύλη δημιουργείται με την εντολή «close». Για να διαχωριστούν από τις ρωγμές, το χρώμα όλων των στοιχείων που αποτελούν τα ανοίγματα, πρέπει να είναι κόκκινο.



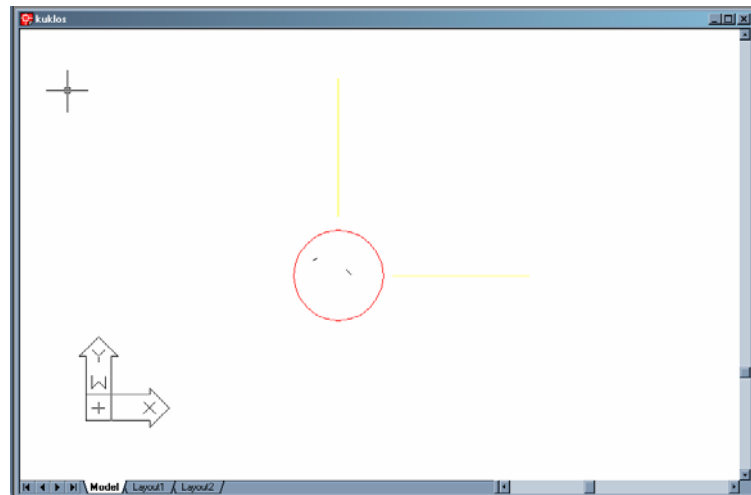
Σχήμα 4.3: Γεωμετρία του ανοίγματος

- IV. Εφόσον έχουν σχεδιαστεί όλα τα σύνορα που περιγράφουν το υπό μελέτη πρόβλημα, σχεδιάζονται δύο επιπλέον συνοριακά στοιχεία στο εσωτερικό κάθε ανοίγματος, με διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους. Η ύπαρξή τους αποτρέπει την ακανόνιστη μετακίνηση και περιστροφή της εσωτερικής περιοχής.



Σχήμα 4.4 : Δύο επιπλέον συνοριακά στοιχεία στο για σταθεροποίηση της εσωτερικής περιοχής

- V. Για τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένες διευθύνσεις στο σώμα, σχεδιάζεται ευθύγραμμο τμήμα με κίτρινο χρώμα.



*Σχήμα 4.5: Κατευθύνσεις που μελετούνται στην περίπτωση κυκλικού ανοίγματος*

- VI. Τέλος, το σχέδιο σώζεται σε αρχείο τύπου .dxf με το όνομα «αρχείο» (arxeio.dxf) στο περιβάλλον εργασίας του MATLAB.

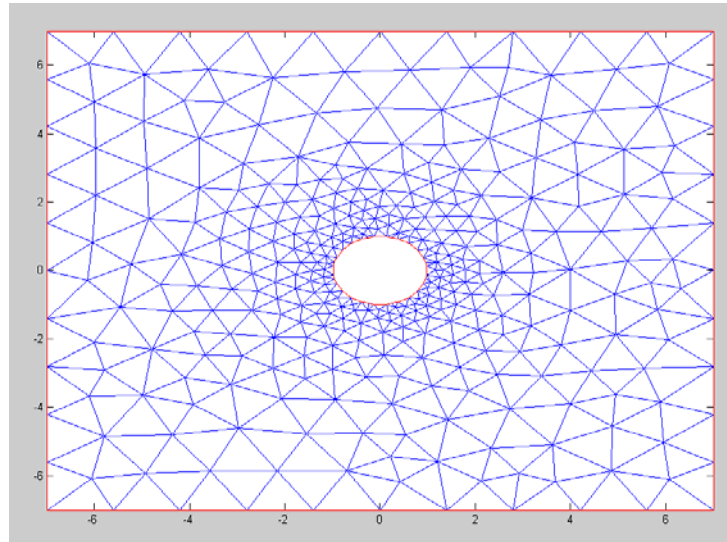
#### 4.2.2. Εισαγωγή Γεωμετρίας

Η εισαγωγή της γεωμετρίας του προβλήματος γίνεται με το υποπρόγραμμα `dxread`. Το υποπρόγραμμα αυτό αποκωδικοποιεί το αρχείο του AUTOCAD (arxeio.dxf) και δημιουργεί τέσσερις πίνακες με τις συντεταγμένες αρχής και τέλους όλων των στοιχείων των συνόρων.

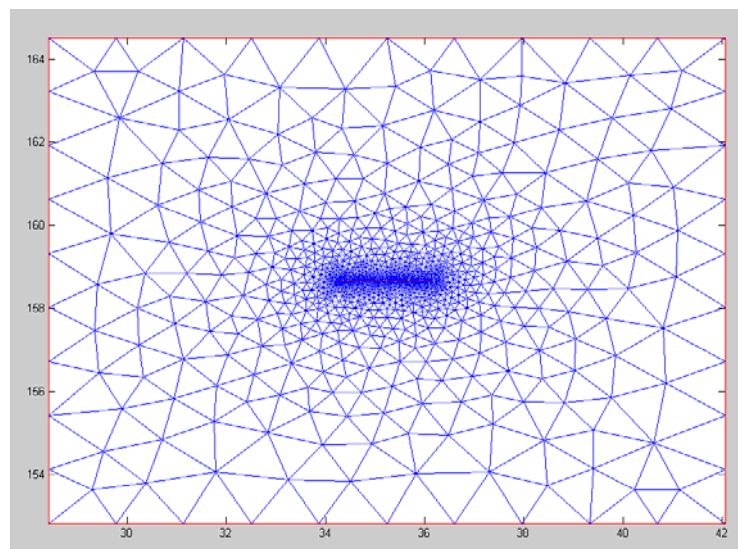
Ακόμη, δημιουργεί ένα περιβάλλον τριγωνικό πλέγμα στο άπειρο μέσο. Το τριγωνικό αυτό πλέγμα δεν θα πρέπει να συσχετιστεί με το αντίστοιχο των πεπερασμένων στοιχείων, εφόσον ο μόνος λόγος ύπαρξής του είναι ο αριθμητικός υπολογισμός των μεταβλητών στους κόμβους του. Η έκταση αυτού εξαρτάται από τις διαστάσεις και τις θέσεις των συνόρων, ούτως ώστε να περικλείεται η περιοχή που υφίσταται τις μεγαλύτερες επιδράσεις (ζώνη επίδρασης).

Στα σχήματα 4.6 και 4.7 παρουσιάζεται το τριγωνικό πλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση ενός κυκλικού ανοίγματος και μιας ευθύγραμμης ρωγμής.





**Σχήμα 4.6:** Το τριγωνικό πλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση ενός κυκλικού ανοίγματος



**Σχήμα 4.7:** Το τριγωνικό πλέγμα που δημιουργείται στην περίπτωση μιας ευθύγραμμης ρωγμής

### 4.2.3. Παράμετροι Υλικού, Συνοριακές Συνθήκες και Τάσεις

Για να ορισθεί πλήρως το πρόβλημα εκτός της γεωμετρίας του, δίδονται και τα ακόλουθα στοιχεία:

- Οι παράμετροι του υλικού, που είναι ο λόγος του Poisson  $\nu$  και το μέτρο ελαστικότητας  $E$ .

- Οι τάσεις μακρινού πεδίου  $(P_{yy}, P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz})$ .
- Τέλος δίδονται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που αφορούν είτε τις τάσεις, είτε τις μετατοπίσεις είτε συνδυασμό αυτών.

Το πρόγραμμα αυτό είναι σχεδιασμένο, ώστε να λειτουργεί σε οποιοδήποτε σταθερό σύστημα μονάδων. Οι μονάδες των συνοριακών μετατοπίσεων, εφόσον χρειάζεται να περιγραφούν, πρέπει να είναι στο ίδιο σύστημα με τις μονάδες των συντεταγμένων θέσεων. Επίσης, οι τάσεις πρέπει να ανήκουν στο ίδιο σύστημα με τις μονάδες του μέτρου ελαστικότητας του Young έτσι ώστε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν να ανήκουν στα παραπάνω συστήματα μονάδων.

### 4.3 Επίλυση

Μετά το στάδιο της εισαγωγής των δεδομένων, ακολουθεί η επίλυση του προβλήματος που έχει περιγραφεί. Η εντατικοπαραμορφωσιακή κατάσταση του πεδίου προσδιορίζεται, τόσο στην περίπτωση επίπεδων φορτίσεων, όσο και σε αντι-επίπεδες φορτίσεις

Τα στάδια που ακολουθούνται για την επίλυση είναι τα ακόλουθα:

- Το πρώτο στάδιο αφορά την γεωμετρία του προβλήματος, προσδιορίζονται οι θέσεις των κέντρων των στοιχείων, τα μέτρα τους, καθώς και ο προσανατολισμός τους .
- Στο δεύτερο στάδιο προσαρμόζονται οι τάσεις του μακρινού πεδίου ώστε σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες να δώσουν τις τιμές των συνοριακών τάσεων.
- Στο τρίτο στάδιο, υπολογίζονται οι συντελεστές επίδρασης, από τις σχέσεις [3.23] [3.29] και δημιουργείται το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων.
- Ακολουθεί η επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων.
- Στο πέμπτο στάδιο γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων στα σύνορα με βάση τις σχέσεις [3.27] [3.28] όπως παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

- Το έκτο και τελευταίο στάδιο περιλαμβάνει τον υπολογισμό των τάσεων και των μετατοπίσεων σε όλο το άπειρο μέσω καθώς και σε συγκεκριμένα σημεία μέσα σε αυτό εφόσον είναι επιθυμητό.

Στην περίπτωση αντιεπίπεδης φόρτισης χρησιμοποιούνται οι σχέσεις [3.42] [3.43] για τον υπολογισμό των συντελεστών επιρροής

## 4.4 Εξαγωγή Αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα από το πρόγραμμα εξάγονται είτε με τη μορφή πινάκων, είτε ως γραφήματα. Για την καλύτερη περιγραφή και κατανόηση των τρόπων παρουσίασης των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται το απλό παράδειγμα της οριζόντιας ρωγμής μήκους 2 με είκοσι στοιχεία.

### 4.4.1 Πίνακες Αποτελεσμάτων

Στο πρόγραμμα, τα αποτελέσματα εξόδου δίδονται σε έξι αρχεία σε μορφή 'ASCII' τα οποία είναι προσβάσιμα από οποιοδήποτε επεξεργαστή κειμένου ή επεξεργαστή αριθμητικών δεδομένων όπως για παράδειγμα το 'excel'.

Τα αρχεία αυτά είναι <sup>\*</sup>:

- Το πρώτο αρχείο σώζεται με το όνομα 'input' και περιέχει τα δεδομένα εισόδου που είναι οι παράμετροι του υλικού και οι επιβαλλόμενες τάσεις με τη μορφή που φαίνονται στον πίνακα 4.1

**Πίνακας 4.1 Δεδομένα εισόδου**

$P_{xx}$	$P_{yy}$	$P_{xy}$	$P_{yz}$	$P_{xz}$	$E$	$PR$
0	1	0	1	0	22000	0.1

όπου:

$P_{xx}$  είναι η οριζόντια ορθή τάση

<sup>\*</sup> Τα αριθμητικά αποτελέσματα των πινάκων αφορούν το απλό πρόβλημα της πεπιεσμένης ρωγμής

$P_{yy}$  είναι η κατακόρυφη ορθή τάση

$P_{xy}$  είναι η διατμητική τάση στο επίπεδο

$P_{yz}, P_{xz}$  είναι οι διατμητικές τάσεις εκτός του επιπέδου

$E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας και

$PR$  ο λόγος του poisson

- Ακόμη δημιουργείται το αρχείο με την ονομασία «geometry» που περιέχει πληροφορίες για τα συνοριακά στοιχεία και έχει την μορφή του πίνακα 4.2

**Πίνακας 4.2: Γεωμετρία συνοριακών στοιχείων**

$X_{beg}$	$Y_{beg}$	$X_{end}$	$Y_{end}$	$X_m$	$Y_m$	$A$	$Sinbet$	$Cosbet$	$bvs$	$bvn$	$Kode$
61,83	162,33	61,937	162,33	61,88	162,33	0,05	0	1	0	0	1
61,93	162,33	62,037	162,33	61,98	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,03	162,33	62,137	162,33	62,08	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,13	162,33	62,237	162,33	62,18	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,23	162,33	62,337	162,33	62,28	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,33	162,33	62,437	162,33	62,38	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,43	162,33	62,537	162,33	62,48	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,53	162,33	62,637	162,33	62,58	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,63	162,33	62,737	162,33	62,68	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,73	162,33	62,837	162,33	62,78	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,83	162,33	62,937	162,33	62,88	162,33	0,05	0	1	0	0	1
62,93	162,33	63,037	162,33	62,98	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,03	162,33	63,137	162,33	63,08	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,13	162,33	63,237	162,33	63,18	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,23	162,33	63,337	162,33	63,28	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,33	162,33	63,437	162,33	63,38	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,43	162,33	63,537	162,33	63,48	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,53	162,33	63,637	162,33	63,58	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,63	162,33	63,737	162,33	63,68	162,33	0,05	0	1	0	0	1
63,73	162,33	63,837	162,33	63,78	162,33	0,05	0	1	0	0	1

όπου:

$X_{beg}, Y_{beg}$  είναι οι συντεταγμένες αρχής των στοιχείων

$X_{end}, Y_{end}$  είναι οι συντεταγμένες τέλους των στοιχείων

$X_m, Y_m$  είναι οι συντεταγμένες των κέντρων τους

$A$  είναι τα μέτρα τους

$Sinbet, Cosbet$  προσδιορίζουν την κατεύθυνση τους

$bvs, bvn$  οι συνοριακές συνθήκες και

*Kode* το είδος των συνοριακών συνθηκών που περιγράφονται

- Το τρίτο αρχείο που δημιουργείται περιέχει τα αποτελέσματα στα μέσα των συνοριακών στοιχείων και έχει την ονομασία 'results', ενώ εμφανίζεται με την μορφή του πίνακα 4.3

όπου

$Ds$  είναι η διατμητική συνιστώσα της ασυνεχούς μετατόπισης

$Us_{NEG}, Us_{POS}$  είναι οι διατμητικές συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

$Dn$  είναι η ορθή συνιστώσα της ασυνεχούς μετατόπισης

$Un_{NEG}, Un_{POS}$  είναι οι ορθές συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

$Ux_{NEG}, Ux_{POS}$  είναι οι οριζόντιες συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

$Uy_{NEG}, Uy_{POS}$  είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα

$SIGs$  είναι η διατμητική συνιστώσα της τάσης

$SIGN$  είναι η ορθή συνιστώσα της τάσης

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα στα μέσα των συνοριακών στοιχείων

$Ds$	$Us_{NEG}$	$Us_{POS}$	$Dn$	$Un_{NEG}$	$Un_{POS}$	$Ux_{NEG}$	$Uy_{NEG}$	$Ux_{POS}$	$Uy_{POS}$	$SIGs$	$SIGn$
0.00E+00	3.59E-05	3.59E-05	-7.09E-05	-3.54E-05	3.54E-05	3.59E-05	-3.54E-05	3.59E-05	3.54E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	3.27E-05	3.27E-05	-1.04E-04	-5.18E-05	5.18E-05	3.27E-05	-5.18E-05	3.27E-05	5.18E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.91E-05	2.91E-05	-1.26E-04	-6.30E-05	6.30E-05	2.91E-05	-6.30E-05	2.91E-05	6.30E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.53E-05	2.53E-05	-1.43E-04	-7.14E-05	7.14E-05	2.53E-05	-7.14E-05	2.53E-05	7.14E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.14E-05	2.14E-05	-1.56E-04	-7.79E-05	7.79E-05	2.14E-05	-7.79E-05	2.14E-05	7.79E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	1.76E-05	1.76E-05	-1.66E-04	-8.29E-05	8.29E-05	1.76E-05	-8.29E-05	1.76E-05	8.29E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	1.37E-05	1.37E-05	-1.74E-04	-8.67E-05	8.67E-05	1.37E-05	-8.67E-05	1.37E-05	8.67E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	9.80E-06	9.80E-06	-1.79E-04	-8.95E-05	8.95E-05	9.80E-06	-8.95E-05	9.80E-06	8.95E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	5.90E-06	5.90E-06	-1.83E-04	-9.13E-05	9.13E-05	5.90E-06	-9.13E-05	5.90E-06	9.13E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	2.00E-06	2.00E-06	-1.84E-04	-9.22E-05	9.22E-05	2.00E-06	-9.22E-05	2.00E-06	9.22E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.00E-06	-2.00E-06	-1.84E-04	-9.22E-05	9.22E-05	-2.00E-06	-9.22E-05	-2.00E-06	9.22E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-5.90E-06	-5.90E-06	-1.83E-04	-9.13E-05	9.13E-05	-5.90E-06	-9.13E-05	-5.90E-06	9.13E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-9.80E-06	-9.80E-06	-1.79E-04	-8.95E-05	8.95E-05	-9.80E-06	-8.95E-05	-9.80E-06	8.95E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-1.37E-05	-1.37E-05	-1.74E-04	-8.67E-05	8.67E-05	-1.37E-05	-8.67E-05	-1.37E-05	8.67E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-1.76E-05	-1.76E-05	-1.66E-04	-8.29E-05	8.29E-05	-1.76E-05	-8.29E-05	-1.76E-05	8.29E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.14E-05	-2.14E-05	-1.56E-04	-7.79E-05	7.79E-05	-2.14E-05	-7.79E-05	-2.14E-05	7.79E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.53E-05	-2.53E-05	-1.43E-04	-7.14E-05	7.14E-05	-2.53E-05	-7.14E-05	-2.53E-05	7.14E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-2.91E-05	-2.91E-05	-1.26E-04	-6.30E-05	6.30E-05	-2.91E-05	-6.30E-05	-2.91E-05	6.30E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-3.27E-05	-3.27E-05	-1.04E-04	-5.18E-05	5.18E-05	-3.27E-05	-5.18E-05	-3.27E-05	5.18E-05	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-3.59E-05	-3.59E-05	-7.09E-05	-3.54E-05	3.54E-05	-3.59E-05	-3.54E-05	-3.59E-05	3.54E-05	0.00E+00	0.00E+00

- Το επόμενο αρχείο σχετίζεται με τα επιλεγόμενα σημεία που βρίσκονται μέσα στο μέσο. Εφόσον αυτά υπάρχουν, τότε αυτό δημιουργείται και δίδεται με την ονομασία 'specified' έχοντας την ακόλουθη μορφή

$$[ Np \ u_x \ u_y \ sigma_{xx} \ sigma_{yy} \ sigma_{xy} ],$$

όπου

$Np$  είναι ο αύξων αριθμός των στοιχείων της γραμμής/ών

$u_x$ ,  $u_y$  είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης αντίστοιχα

$sigma_{xx}$  είναι η οριζόντια ορθή τάση

$sigma_{yy}$  είναι η κατακόρυφη ορθή τάση

$sigma_{xy}$  είναι η διατμητική ορθή τάση

- Το πέμπτο και το έκτο αρχείο δημιουργούνται στην περίπτωση που υπάρχουν τάσεις εκτός επιπέδου. Το πρώτο από αυτά έχει το όνομα 'boundary modeIII' και περιέχει τα εξής δεδομένα [ $bvz \ Kode$ ], ενώ το δεύτερο αποθηκεύεται στο όνομα 'results modeIII' και περιέχει τα ακόλουθα

$$[ Dz \ u_{zneg} \ u_{zpos} \ sigma_z ]$$

Πίνακας 4.4: Δεδομένα στην περίπτωση τάσεων εκτός επιπέδου

$Dz$	$u_{zneg}$	$u_{zpos}$	$sigma_z$	$bvz$	$Kode$
7.88E-05	3.94E-05	-3.94E-05	0	0	1
1.15E-04	5.76E-05	-5.76E-05	0	0	1
1.40E-04	7.00E-05	-7.00E-05	0	0	1
1.59E-04	7.93E-05	-7.93E-05	0	0	1
1.73E-04	8.66E-05	-8.66E-05	0	0	1
1.84E-04	9.21E-05	-9.21E-05	0	0	1
1.93E-04	9.64E-05	-9.64E-05	0	0	1
1.99E-04	9.94E-05	-9.94E-05	0	0	1
2.03E-04	1.01E-04	-1.01E-04	0	0	1
2.05E-04	1.02E-04	-1.02E-04	0	0	1
2.05E-04	1.02E-04	-1.02E-04	0	0	1
2.03E-04	1.01E-04	-1.01E-04	0	0	1
1.99E-04	9.94E-05	-9.94E-05	0	0	1
1.93E-04	9.64E-05	-9.64E-05	0	0	1
1.84E-04	9.21E-05	-9.21E-05	0	0	1

1.73E-04	8.66E-05	-8.66E-05	0		0	1
1.59E-04	7.93E-05	-7.93E-05	0		0	1
1.40E-04	7.00E-05	-7.00E-05	0		0	1
1.15E-04	5.76E-05	-5.76E-05	0		0	1
7.88E-05	3.94E-05	-3.94E-05	0		0	1

όπου:

$b_{nz}$  στην περίπτωση αυτή αφορά τις συνοριακές συνθήκες στην τρίτη διάσταση  $Z$  ενώ  $Kode$  είναι το είδος των συνοριακών συνθηκών που περιγράφονται και αφορούν την τρίτη διάσταση

$Dz$  είναι η ασυνεχής μετατόπιση στην κατεύθυνση του  $z$  άξονα

$u_{neg}$ ,  $u_{pos}$  είναι μετατοπίσεις στην αρνητική και στην θετική πλευρά του κάθε στοιχείου αντίστοιχα και τέλος

$\sigma_z$  είναι η τάση που ασκείται στο επίπεδο του κάθε στοιχείου

#### 4.4.2. Γραφικές Παραστάσεις

Εκτός από τα αρχεία στα οποία αποθηκεύονται τα αριθμητικά αποτελέσματα, μέσω του προγράμματος εξάγονται και γραφήματα.

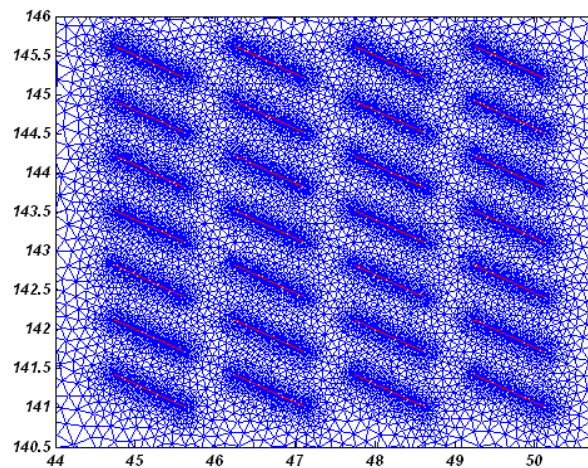
- Ασυνεχείς μετατοπίσεις στα σύνορα σε συνάρτηση με των αριθμό των διακριτών στοιχείων καθώς και τις μετατοπίσεις στις θετικές και αρνητικές πλευρές των συνόρων.
- Όταν απαιτείται ο υπολογισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένα σημεία του μέσου, τότε δημιουργούνται τα αντίστοιχα διαγράμματα σε συνάρτηση με την απόσταση.
- Ακόμη, μπορούν να απεικονιστούν όποιες από τις μεταβλητές μετατόπισης και τάσης ( $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) είναι επιθυμητό. Επίσης υπάρχει η δυνατότητα εξαγωγής διαγραμμάτων κυρίων τάσεων ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ) και των μέγιστων διατμητικών ( $\tau_{max}$ ). Τα γραφήματα αυτά γίνονται σε άξονες συντεταγμένων, όπου με χρωματικό κώδικα φαίνεται ο τρόπος που κλιμακώνονται οι μεταβλητές στα σύνορα και στο περιβάλλον στερεό. Οι τιμές αυτές υπολογίζονται στους κόμβους του τριγωνικού πλέγματος



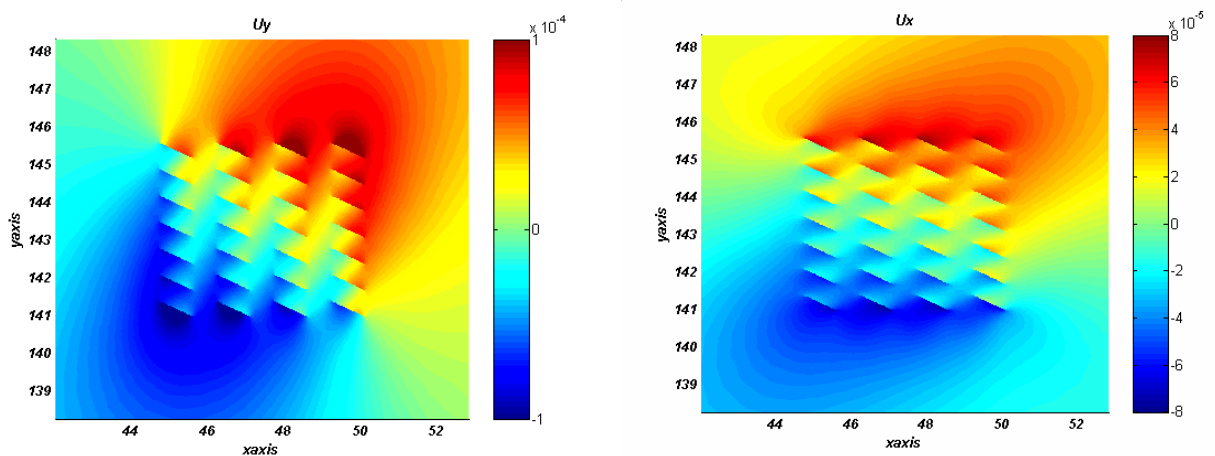
που έχει δημιουργηθεί παράγοντας τα αποτελέσματα σε όλο το μέσο με παρεμβολή.

#### 4.4.2.1 Μορφή Απεικόνισης Μεταβλητών

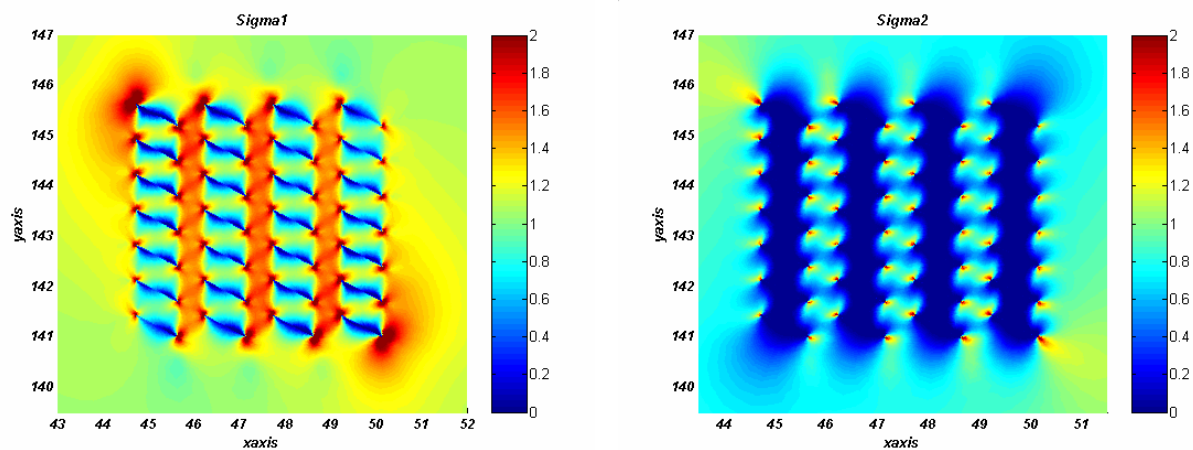
Ως παράδειγμα εφαρμογής, παρατίθεται το πρόβλημα ενός γεωλογικού σχηματισμού που περιλαμβάνει οικογένεια ασυνεχειών με ρωγμές παράλληλες μεταξύ τους. Για την επίλυση, το προαναφερθέν πρόβλημα, προσομοιάζεται με ένα άπειρο ρηγματωμένο ελαστικό μέσο το οποίο υπόκειται σε αδιατάραχτο πεδίο τάσεων. Η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση δίδεται γραφικά στα ακόλουθα σχήματα.



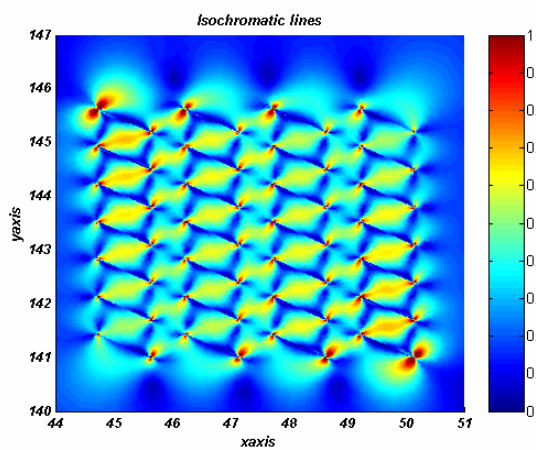
Σχήμα 4.8: Η διακριτοποίηση του μέσου



Σχήμα 4.9: Οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις



Σχήμα 4.10: Οριζόντιες και κατακόρυφες κύριες τάσεις



Σχήμα 4.11: Μέγιστες διατμητικές τάσεις

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> Υπολογιστικά Παραδείγματα

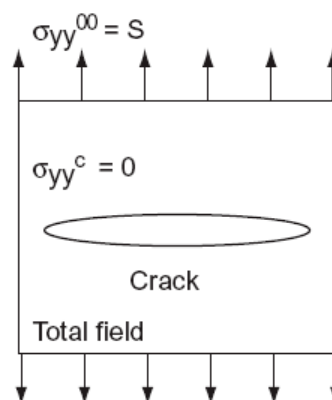
## 5.1 Απλή Ρωγμή σε Άπειρο Μέσο

Για να ελεγχθεί η εγκυρότητα και η ορθότητα του προγράμματος «DDBETD», σε αυτή την πρώτη ενότητα του κεφαλαίου θα μελετηθεί το εντατικο-παραμορφωσιακό πεδίο που δημιουργείται γύρω από μια απλή ευθύγραμμη ρωγμή που βρίσκεται σε άπειρο μέσο και τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με τις υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις.

### 5.1.1 Σύγκριση της Μεθόδου των Ασυνεχών Μετατοπίσεων με Αναλυτικές Λύσεις (Μετατοπίσεις)

#### 5.1.1.1 «Ανοικτός» Τύπος Παραμόρφωσης (Mode I)

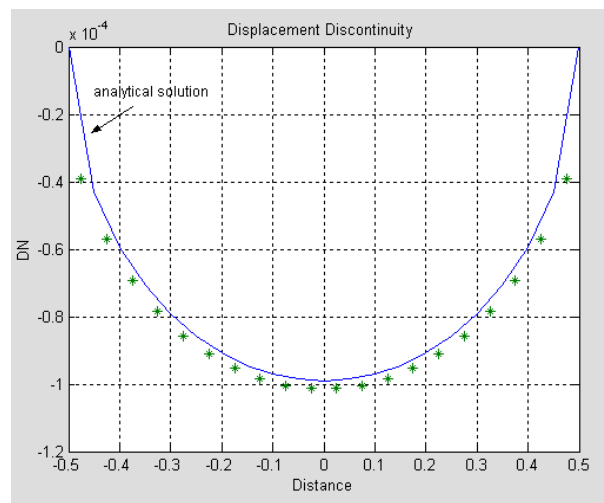
Στην παρούσα υποενότητα μελετάται το απλό πρόβλημα μιας ευθύγραμμης ρωγμής που βρίσκεται σε άπειρο μέσο, υπό σταθερή εσωτερική πίεση<sup>1</sup>. Για το δεδομένο πρόβλημα οι παράμετροι του υλικού είναι, λόγος του poisson  $\nu = 0.1$  και μέτρο ελαστικότητας  $E = 20000 \text{ MPa}$ . Οι επιβαλλόμενες τάσεις μακρινού πεδίου είναι της τάξης του  $\sigma_{yy} = 1 \text{ MPa}$  και ο προσανατολισμός τους φαίνεται στο σχήμα 5.1, ενώ το μήκος της ρωγμής ισούται με  $2a = 1 \text{ m}$ .



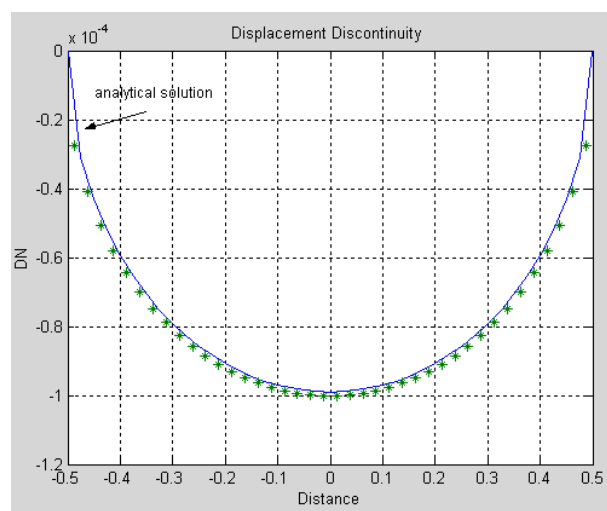
Σχήμα 5.1: Ευθύγραμμη ρωγμή υπό σταθερή εσωτερική πίεση

<sup>1</sup> Το πρόβλημα της ευθύγραμμης ρωγμής με εσωτερική πίεση εφαρμόζεται στην υδραυλική θραύση (hydraulic fracturing) των πετρωμάτων σε εκμεταλλεύσεις υδρογονανθράκων και γεωθερμικών πεδίων.

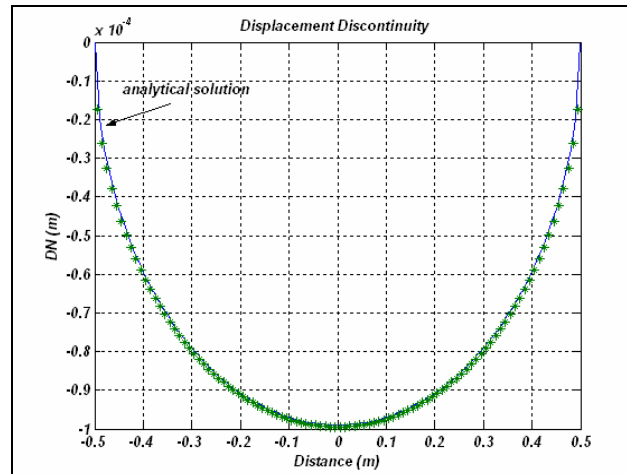
Η αναλυτική λύση για τη σχετική κατανομή των ορθών μετατοπίσεων  $D_N$  κατά μήκος της ρωγμής (δηλαδή το μέγεθος του ανοίγματος) δίδεται από τη σχέση [3.18] και θα συγκριθεί με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις που δίδονται μέσω του προγράμματος. Η ακριβής λύση της κατανομής των ασυνεχών μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1 Η πρώτη προσέγγιση (5.1a) πραγματοποιήθηκε με τη διαίρεση του μήκους της ρωγμής (2a) σε 20 συνοριακά στοιχεία ίδιου μήκους, η δεύτερη (5.1b) πραγματοποιήθηκε με διαίρεση της ρωγμής σε 40 ισομήκη συνοριακά στοιχεία και η τρίτη (5.1c) σε 100 στοιχεία.



Σχήμα 5.1a: Ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_N$  (20 στοιχεία)



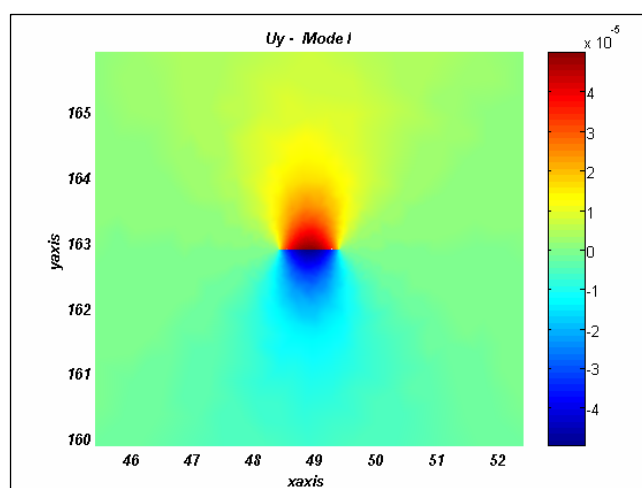
Σχήμα 5.1b: Ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_N$  (40 στοιχεία)



Σχήμα 5.1c: Ασυνεχείς μετατοπίσεις  $DN$  (100 στοιχεία)

Από τα σχήματα 5.1 συμπεραίνεται ότι η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων προσεγγίζει τις σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των επιφανειών της ρωγμής, ενώ τα αποτελέσματα τείνουν στην ακριβή λύση όσο ο αριθμός των στοιχείων  $N$  αυξάνει. (Crouch and Starfield, 1990)

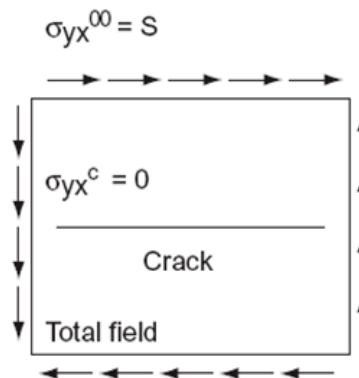
Στο σχήμα 5.1d φαίνεται με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα, οι κλιμάκωση των μετατοπίσεων, στον κατακόρυφο άξονα, τόσο στα σύνορα της ρωγμής, όσο και περιβάλλον στερεό.



Σχήμα 5.1d: Μετατοπίσεις  $Uy$  σε όλο το μέσο

### 5.1.1.2 Τύπος της «Ολίσθησης» (Mode II)

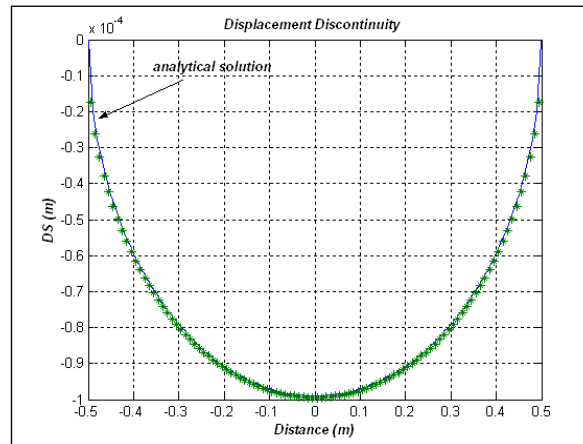
Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση του τύπου φόρτισης I για την ίδια ρωγμή και τις ίδιες παραμέτρους του υλικού, συγκρίνονται οι ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_s$  όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα με τις αντίστοιχες αναλυτικές για τον τύπο φόρτισης II. Η επιβαλλόμενη διατμητική φόρτιση<sup>2</sup> αυτή τη φορά είναι της τάξης  $\sigma_{yx} = 1 \text{ MPa}$  και ο προσανατολισμός της δίδεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Ευθύγραμμη ρωγμή υπό διατμητική καταπόνηση

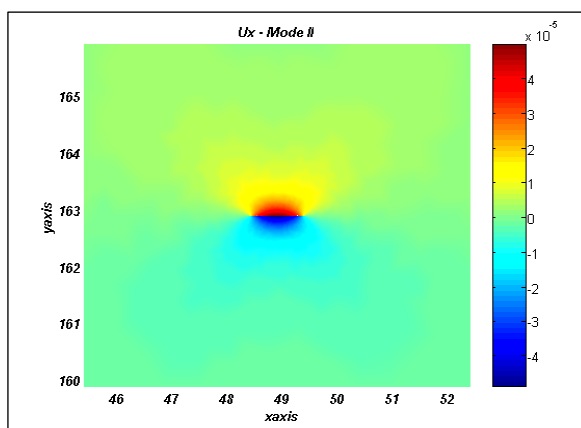
Η αναλυτική λύση για τη σχετική κατανομή των ασυνεχών μετατοπίσεων  $D_s$  κατά μήκος της ρωγμής (δηλαδή το μέγεθος του ανοίγματος) δίδεται από τη σχέση [3.16]. Η ακριβής λύση της κατανομής των ασυνεχών μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής παρουσιάζεται στο σχήμα 5.2a. Η ρωγμή έχει διαιρεθεί σε 100 συνοριακά στοιχεία, ώστε να έχουμε μια ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

<sup>2</sup> Το πρόβλημα της ευθύγραμμης ρωγμής που υποβάλλεται σε διάτμηση έχει μεγάλη εφαρμογή στη βραχομηχανική γιατί προσομοιάζει περιπτώσεις αντοχής ασυνεχειών σε διάτμηση (π.χ. κριτήριο αστοχίας Mohr-Coulomb, σεισμογένεση κ.λπ.).

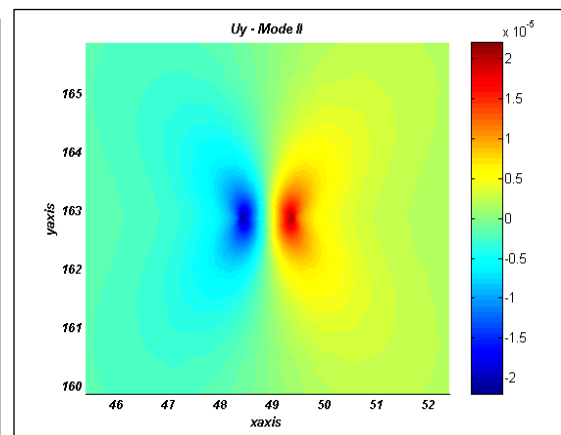


Σχήμα 5.2α : Ασυνεχείς μετατοπίσεις  $DS$  (100 στοιχεία)

Στα σχήματα 5.2b και 5.2c φαίνονται με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες μετατοπίσεις αντίστοιχα, έτσι όπως κλιμακώνονται στο σύνορο της ρωγμής και στο περιβάλλον μέσο.



Σχήμα 5.2b: Μετατοπίσεις  $U_x$  σε όλο το μέσο

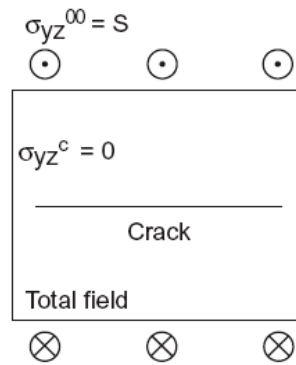


Σχήμα 5.2c: Μετατοπίσεις  $U_y$  σε όλο το μέσο

### 5.1.1.3 Τύπος «Ψαλιδισμού» ή Αντι-επίπεδης ολίσθησης (Mode III)

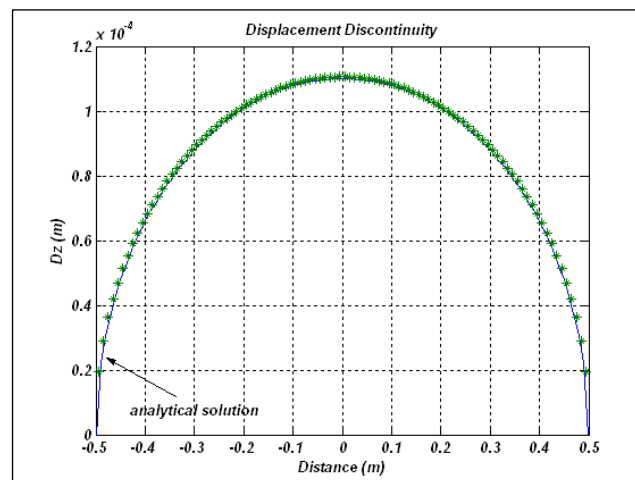
Τέλος, αναφερόμενοι στις ίδιες διαστάσεις ρωγμής και για τις ίδιες παραμέτρους του υλικού, συγκρίνονται οι ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_z$ , που οφείλονται σε καταπόνηση της ρωγμής με διατμητική τάση κάθετη στο επίπεδό της,  $\sigma_{yz} = 1 \text{ MPa}$ , με την αντίστοιχη αναλυτική λύση για τις μετατοπίσεις. Στο σχήμα 5.3 φαίνεται σχηματικά η κατεύθυνση των τάσεων για την περίπτωση της αντι-επίπεδης φόρτισης





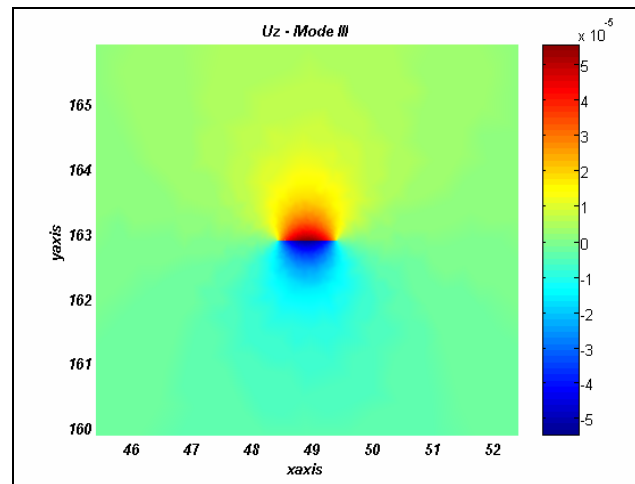
Σχήμα 5.3: Ευθύγραμμη ρωγμή υπό αντι-επίπεδη φόρτιση

Η αναλυτική λύση για τη σχετική κατανομή των μετατοπίσεων  $D_z$  κατά μήκος της ρωγμής για τον τύπο φόρτιση III δίδεται από τη σχέση [3.42] του κεφαλαίου 3. Η ακριβής λύση της κατανομής των ασυνεχών μετατοπίσεων κατά μήκος της ρωγμής παρουσιάζεται στο σχήμα 5.3a. Η ρωγμή και σε αυτήν την περίπτωση έχει διαιρεθεί σε 100 συνοριακά στοιχεία, ώστε να έχουμε μια ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 5.3a: Ασυνεχείς μετατοπίσεις  $D_z$  (100 στοιχεία)

Στο σχήμα 5.3b φαίνονται με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες μετατοπίσεις αντίστοιχα, έτσι όπως κλιμακώνονται στο σύνορο της ρωγμής και στο περιβάλλον μέσο.



Σχήμα 5.3b: Μετατοπίσεις  $U_z$  σε όλο το μέσο

## 5.1.2 Μελέτη Τασικού Πεδίου Γύρω Από Ευθύγραμμη Ρωγμή

### 5.1.2.1 Σύγκριση με τις Μέγιστες Διατμητικές Τάσεις (Ισοχρωματικές Καμπύλες)

Μια ιδιαίτερη περίπτωση άξια παρατήρησης, είναι όταν μια ρωγμή υποβάλλεται σε ομοιόμορφο τασικό πεδίο  $P_0 = 1$  ή αλλιώς ( $P_{xx} = P_{yy} = 1$ ). Η μέγιστη διατμητική τάση  $\tau$ , σε κάθε σημείο του μέσου  $(x, y)$ , μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\tau = \left| \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + i \sigma_{xy} \right| \quad [5.1]$$

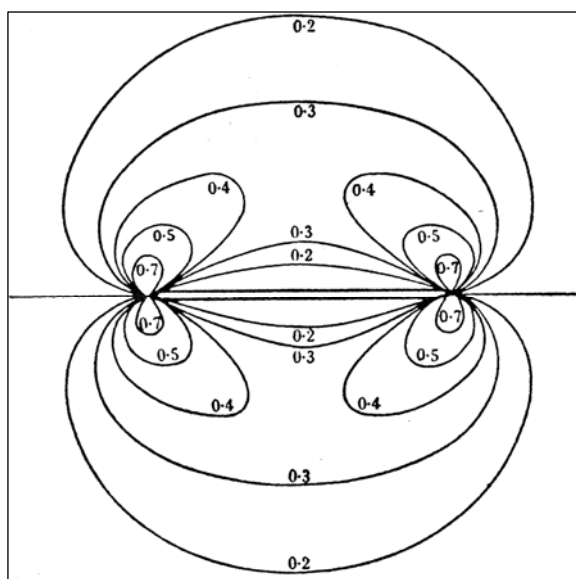
Ο Sneddon για να δει την κλιμάκωση της κατανομής των τάσεων γύρω από μια ρωγμή (Griffith), υπολόγισε τις τιμές των μέγιστων διατμητικών τάσεων σε διάφορα σημεία  $(x, y)$  του μέσου. Τα αποτελέσματα δίδονται σε μορφή πίνακα στο έγγραφο του Sneddon (1946, Table1, p235) και γραφικά στην εικόνα 1 του ίδιου εγγράφου.

Ένας εξυπηρετικός τρόπος παρουσίασης της διακύμανσης της συνάρτησης  $\tau(x, y)$  και συνεπώς και της κατανομής των διατμητικών τάσεων στο ελαστικό μέσο, είναι η αναπαράσταση της τάξης των καμπυλών της συνάρτησης αυτής, κατασκευάζοντας μια

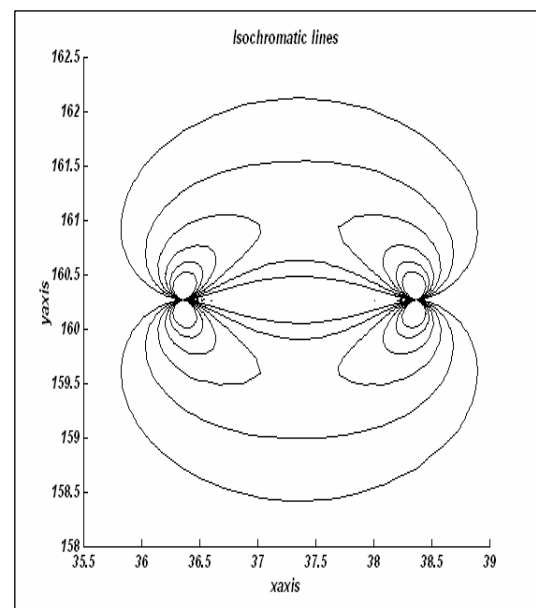
οικογένεια καμπυλών με βάση τη σχέση  $\tau(x, y) = ap_0$ , όπου  $a$  είναι μια παράμετρος.

Αυτές οι καμπύλες είναι οι ισοχρωματικές καμπύλες της φωτοελαστικότητας. Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζονται οι ισοχρωματικές καμπύλες για την περίπτωση ομοιόμορφης καταπόνησης ρωγμής μήκους  $2a = 2$ , όπως λήφθηκαν από τον Sneddon (1946).

Στο σχήμα 5.5 αναπαρίστανται οι ισοχρωματικές καμπύλες, για την ίδια ρωγή που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη τασική καταπόνηση, έτσι όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα DDBETD.



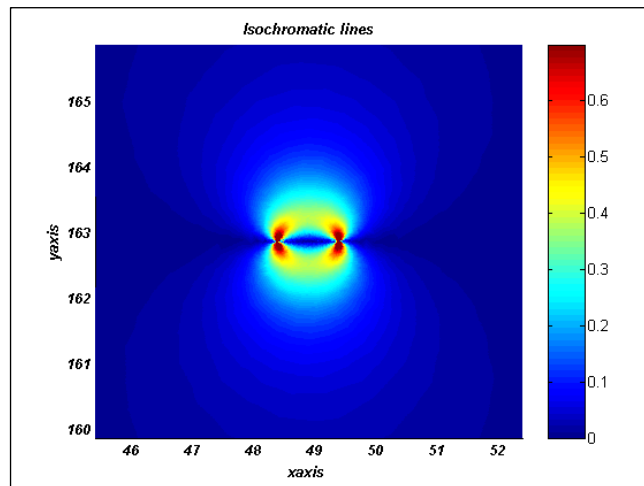
Σχήμα 5.4: Ισοχρωματικές καμπύλες γύρω από μια ρωγή Griffith (Sneddon, 1946)



Σχήμα 5.5 Ισοχρωματικές καμπύλες από το πρόγραμμα DDBETD

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.4 (και στο σχήμα 5.5), το γεγονός ότι όλες οι ισοχρωματικές καμπύλες περνούν από τις αιχμές της ρωγμής, δείχνει ότι και στα δύο αυτά σημεία οι κύριες διατμητικές τάσεις είναι μέγιστες.(Sneddon & Lowengrub, 1969).

Ακολούθως φαίνεται η κλιμάκωση των μέγιστων διατμητικών τάσεων σε όλο το ελαστικό μέσο (Σχήμα 5.6)

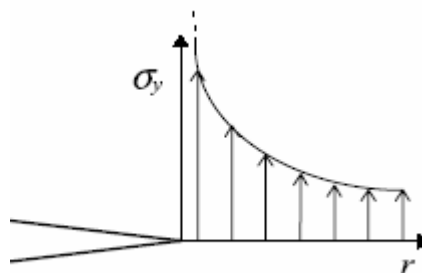


Σχήμα 5.6: Ισοχρωματικές καμπύλες σε όλο το ελαστικό μέσο

### 5.1.2.2 Μελέτη της Κλιμάκωσης των Τάσεων σε Σχέση με την Απόσταση από την Αιχμή της Ρωγμής

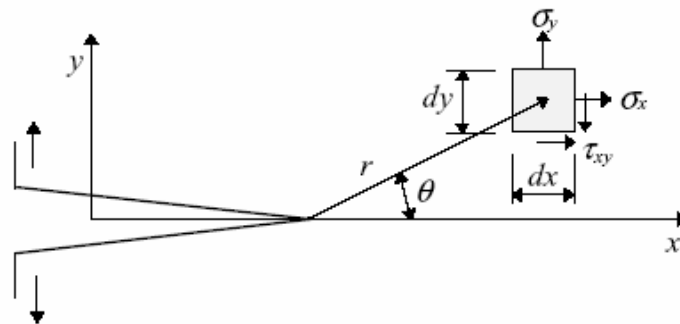
Για τη μελέτη της κλιμάκωσης των τάσεων σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής, θεωρήθηκε ευθύγραμμη ρωγμή μήκους  $2a = 1 \text{ m}$ , με παραμέτρους του υλικού  $\nu = 0.1$ , και  $E = 20000 \text{ MPa}$ . Η μελέτη αφορά τις αντίστοιχες τάσεις και στις τρεις περιπτώσεις τύπων φόρτισης:

- Mode I: επιβαλλόμενη φόρτιση μακρινού πεδίου  $\sigma_{yy} = 1$  και μελέτη της κλιμάκωση της (Σχήμα 5.7) σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^\circ$  (Σχήμα 5.8).



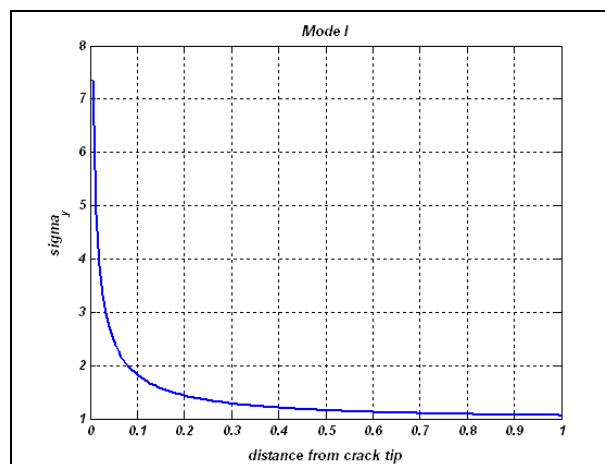
Σχήμα 5.7: Μορφή της κλιμάκωση της  $\sigma_{yy}$  σε συνάρτησης με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για τον τύπο φόρτισης I (Pecker, 1997)

- Mode II: επιβαλλόμενη φόρτιση μακρινού πεδίου  $\sigma_{xy} = 1$  και μελέτη της κλιμάκωση της σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^\circ$  (Σχήμα 5.8).
- Mode III: επιβαλλόμενη φόρτιση μακρινού πεδίου  $\sigma_{yz} = 1$  και μελέτη της κλιμάκωση της σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^\circ$  (Σχήμα 5.8).



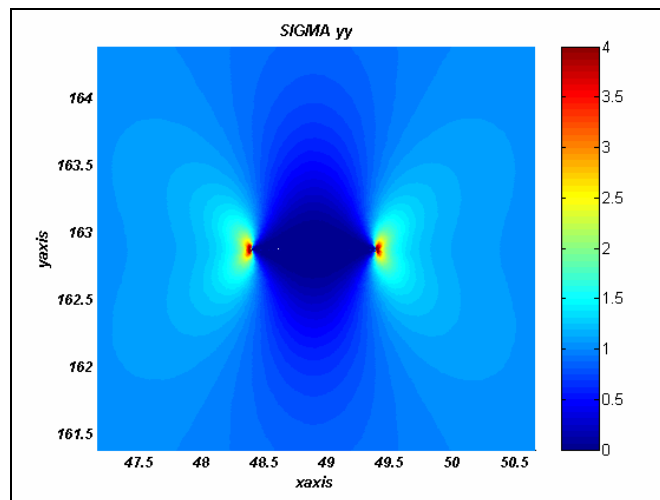
Σχήμα 5.8: Σύστημα συντεταγμένων στην αιχμή της ρωγμής (Eerik Peeker, 1997)

Στο σχήμα 5.9 απεικονίζεται η μεταβολή της τάση  $\sigma_{yy}$  (Mode I) Όπως ήταν αναμενόμενο, όσο πιο μικρή είναι η απόσταση από την αιχμή της ρωγμής, τόσο μεγαλύτερες είναι και οι τάσεις, που τείνουν ασυμπτωτικά με τον άξονα y προς το άπειρο. Η καμπύλη της τάσης μειώνεται εκθετικά, κατά την απομάκρυνση από την αιχμή και τείνει στην μονάδα, που είναι και η επιβαλλόμενη φόρτιση μακρινού πεδίου. Τα σημεία που βρίσκονται αρκετά μακριά από την ρωγμή παραμένουν τασικά ανεπηρέαστα από την ύπαρξή της.



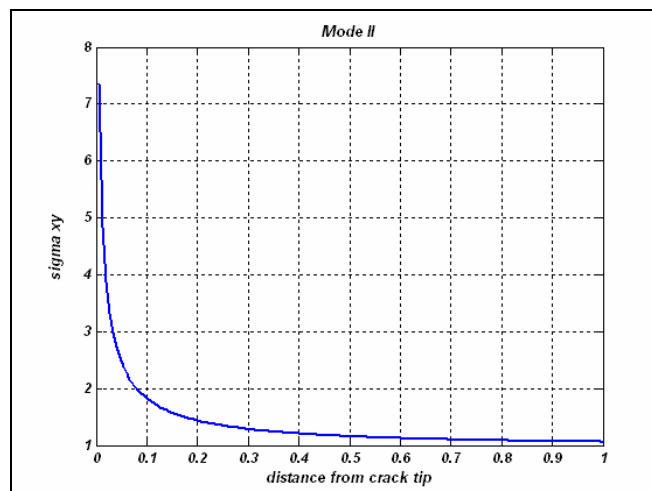
Γράφημα 5.9: Κατακόρυφες τάσεις  $\sigma_{yy}$  σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^\circ$

Το σχήμα 5.10 βοηθάει στην απόκτηση μιας καλύτερης άποψη για την κατανομή της ίδιας τάσης σε όλο το μέσο που περιβάλλει τη ρωγμή.

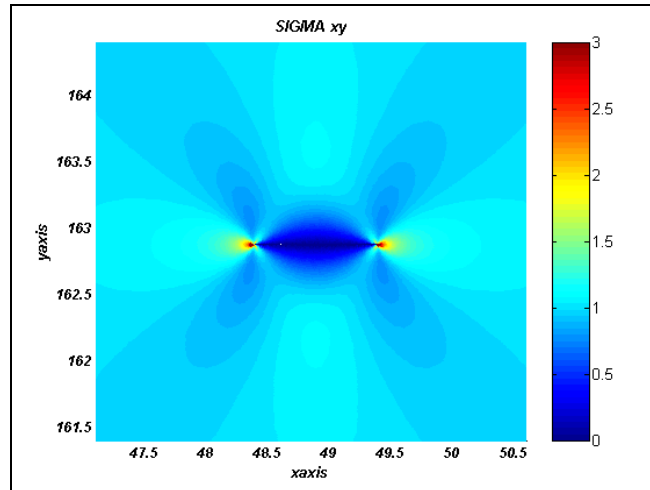


Γράφημα 5.10 :Κατανομή των τάσεων  $\sigma_{yy}$  σε όλο το μέσο

Ανάλογης μορφής γραφήματα, προκύπτουν και για τον τύπο της «ολίσθησης» των χειλών της ρωγμής. Στο σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η εκθετική μείωση της διατμητικής τάσης κατά την οριζόντια απομάκρυνση από την αιχμή της ρωγμής και στο σχήμα 5.12 η κατανομή της ίδιας τάσης σε όλο το μέσο που περιβάλλει τη ρωγμή με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα.

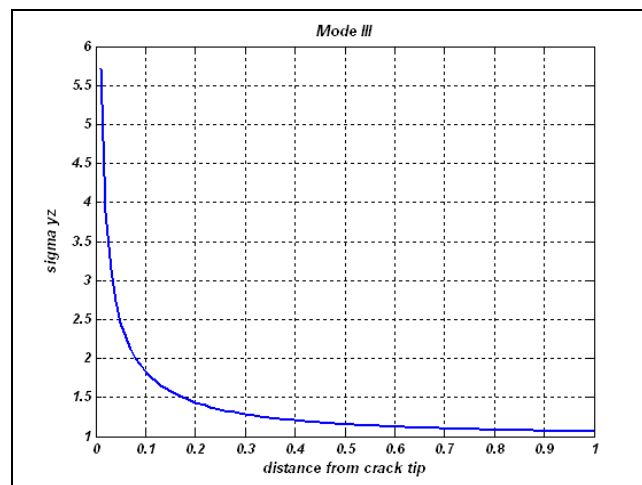


Γράφημα 5.11: Διατμητικές τάσεις  $\sigma_{xy}$  σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^0$

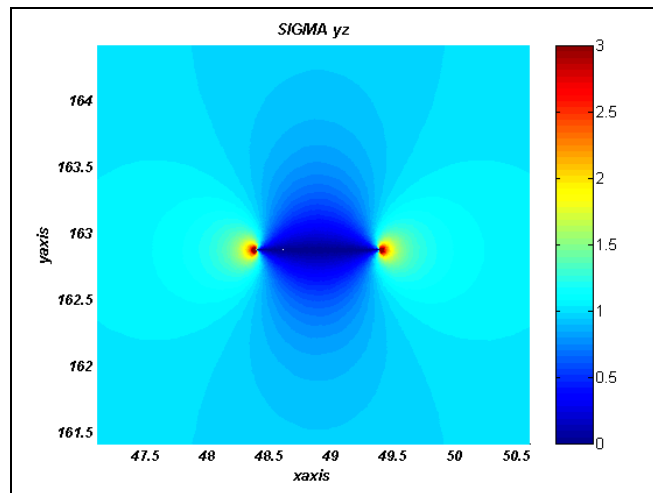


Γράφημα 5.12 : Άποψη των τάσεων  $\sigma_{xy}$  σε όλο το μέσο

Μελετώντας την τρίτη περίπτωση φόρτισης, του «ψαλιδισμού» ή της αντι-επίπεδης ολίσθησης των χειλών της προκύπτουν τα αντίστοιχα γραφήματα, όπως φαίνονται στα σχήματα 5.13 και 5.14.



Γράφημα 5.13: Αντι-επίπεδες τάσεις  $\sigma_{yz}$  σε συνάρτηση με την απόσταση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^0$



Γράφημα 5.14 : Άποψη των τάσεων  $\sigma_{yz}$  σε όλο το μέσο

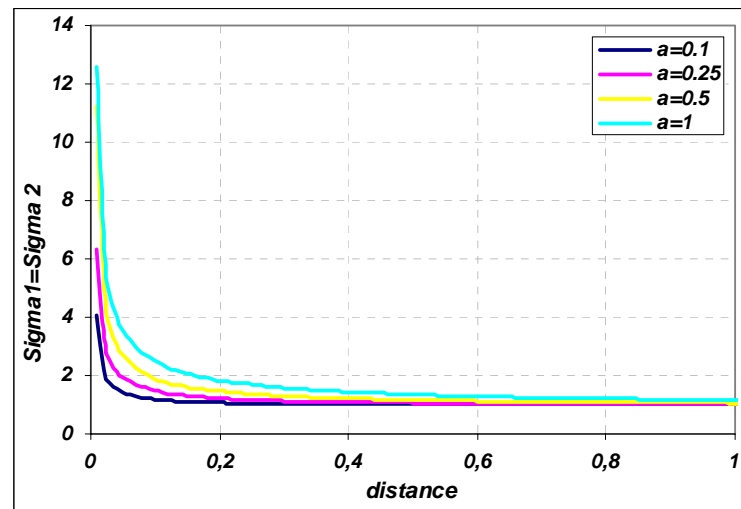
### 5.1.2.3 Επίδραση του Μεγέθους της Ρωγμής στις Κύριες Τάσεις

Η κατανομή των κυρίων τάσεων  $\sigma_1, \sigma_2$  μελετάται στην περίπτωση ομοιόμορφης τασικής καταπόνηση  $P_{xx} = P_{yy} = 1$  σε ρωγή μήκους  $2a$ , όπου το  $a$  αυξάνει σταδιακά από  $0.1 \rightarrow 0.25 \rightarrow 0.5 \rightarrow 1$  και με παραμέτρους υλικού  $\nu = 0.1$  και  $E = 20000 \text{ MPa}$ . Συγκεκριμένα μελετήθηκαν δυο περιπτώσεις:

- Η κλιμάκωση των κυρίων τάσεων σε συνάρτηση με τη γραμμική απομάκρυνση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 0^\circ$  (Σχήμα 5.8).
- Η κλιμάκωση των κυρίων τάσεων κατά την απομάκρυνση από την αιχμή της ρωγμής για  $\theta = 90^\circ$  (Σχήμα 5.8).

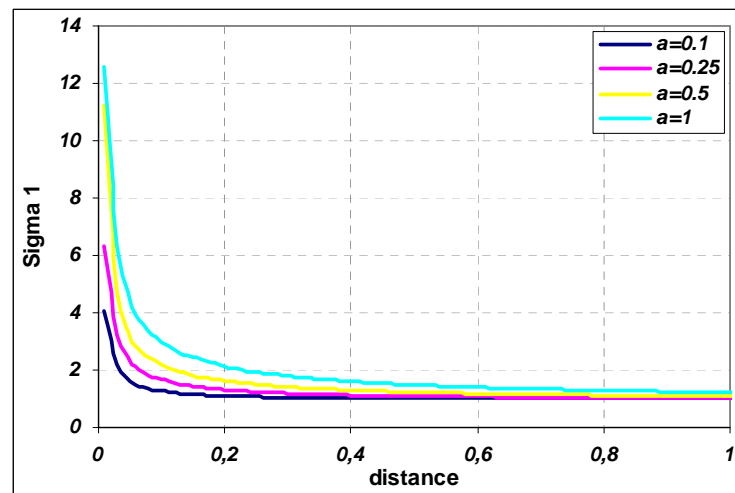
Στο σχήμα 5.15 φαίνεται το συγκεντρωτικό διάγραμμα της κατανομής των κυρίων τάσεων και για τις τέσσερις περιπτώσεις διαφορετικού μήκους ρωγμές. Συμπεραίνεται ότι η ένταση των τάσεων κλιμακώνεται ανάλογα με το μήκος της ρωγμής.



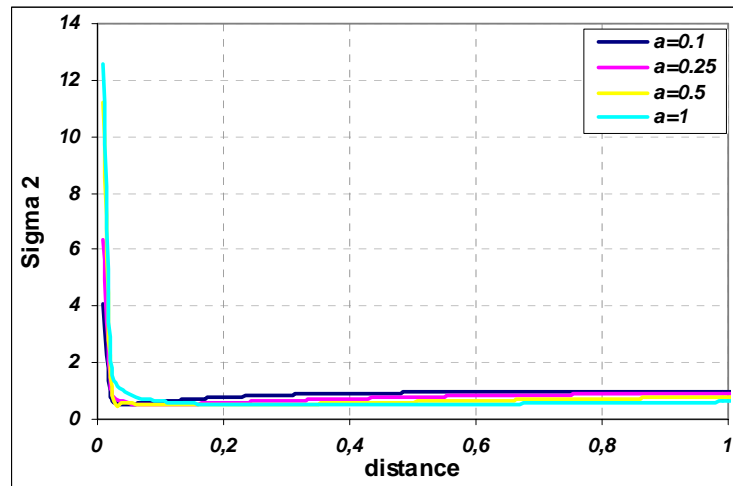


Σχήμα 5.15 : Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης κυρίων τάσεων για  $\theta = 0$ , για διάφορα μεγέθη ρωγμής.

Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα κατά την κατακόρυφη απομάκρυνση από την αιχμή της ρωγμής. Στα σχήματα 5.16 και 5.17 παρουσιάζονται τα συγκεντρωτικά διαγράμματα (και τα τέσσερα μήκη ρωγμής) για την οριζόντια και κατακόρυφη κύρια τάση.



Σχήμα 5.16 : Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης της κύρια τάση  $\sigma_1$  κατά την απομάκρυνση από την αιχμή για  $\theta = 90$



Σχήμα 5.17 : Συγκεντρωτικό διάγραμμα κλιμάκωσης της κύρια τάση  $\sigma_2$  κατά την απομάκρυνση από την αιχμή για  $\theta = 90$

#### 5.1.2.4 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων

Με βάση των θεωρητικών μοντέλων και των αναλυτικών λύσεων της γραμμικής θεωρίας, οι τάσεις ακριβώς στην αιχμή της ρωγμής απειρίζονται. Στην πραγματικότητα όμως στην αιχμή της ρωγμής υπάρχει πάντα μια πλαστική ζώνη, η οποία οριοθετεί τις τάσεις σε πεπερασμένες τιμές. Είναι όμως ιδιαίτερα δύσκολο να μοντελοποιηθούν και να υπολογιστούν οι πραγματικές τάσεις στην πλαστική αυτή περιοχή.

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων ποσοτικοποιεί τις άπειρες αυτές τάσεις και συνεπώς αποτελεί ένα μέτρο της έντασης των τάσεων ακριβώς στην αιχμή της ρωγμής

Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ρωγμής σε άπειρο μέσο, οι αναλυτικές σχέσεις για τον υπολογισμό των συντελεστών έντασης των τάσεων και για του τρεις τύπους φόρτισης δίδονται συνοπτικά στη σχέση [5.2] (βλέπε Κεφάλαιο 2 παρ.2.5.1).

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_{inplane} \\ \tau_{outofplane} \end{Bmatrix} \sqrt{\pi a} \quad [5.2]$$

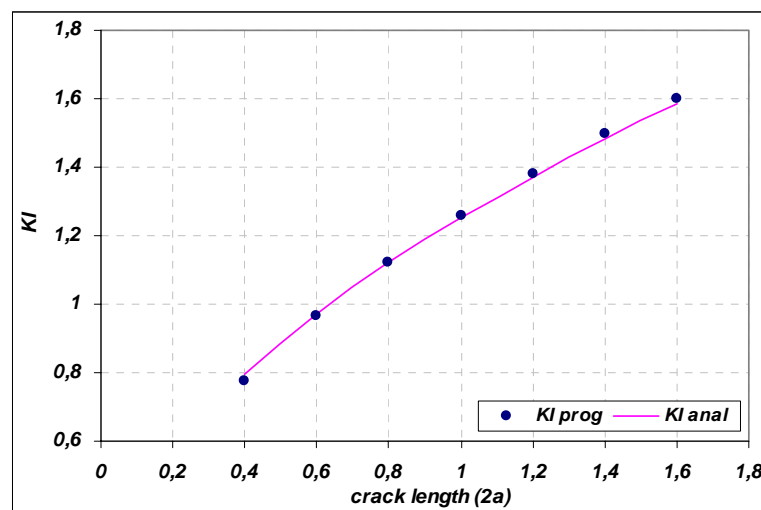
(Tada et al, 1973)

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για τον συντελεστή έντασης των τάσεων  $K_I$ , έτσι όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα DDBETD και υπολογιστικά από την αναλυτική λύση (σχέση 5.2).

Πίνακας 5. 1. Συντελεστής έντασης των τάσεων  $K_I$  για διάφορα μήκη ρωγμής

Μήκος $2a$	$K_I$ προγράμματος	$K_I$ αναλυτικό
0,4	0,7761	0,7927
0,6	0,9639	0,9708
0,8	1,1206	1,1210
1	1,258	1,2533
1,2	1,3818	1,3729
1,4	1,4953	1,4829
1,6	1,6009	1,5853

Το σχήμα 5.18 είναι η γραφική απεικόνιση του πίνακα 5.1, όπου παρουσιάζεται ο συντελεστής  $K_I$ <sup>3</sup> σε συνάρτηση με το μήκος της ρωγμής, τόσο για τη λύση από το πρόγραμμα, όσο και για την αναλυτική.



Σχήμα 5.18: Συντελεστής έντασης των τάσεων συνάρτησε του μήκους της ρωγμής

Σημειώνεται ότι κατά τον αριθμητικό υπολογισμό του συντελεστή έντασης των τάσεων, διαπιστώθηκε ότι υπάρχει μια βέλτιστη αναλογία μεταξύ του μήκους της ρωγμής και τον

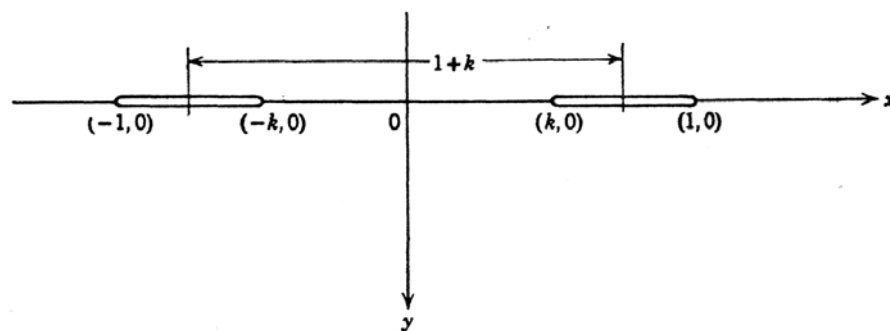
<sup>3</sup> Οι συντελεστές έντασης των τάσεων  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  υπολογίζονται αντίστοιχα εφαρμόζοντας τον κατάλληλο τύπο φόρτισης και τα αποτελέσματα έχουν απόλυτη ακρίβεια για αυτό και δεν παρουσιάζονται. εδώ .

αριθμό των στοιχείων στα οποία έχει διαιρεθεί, για την οποία ελαχιστοποιείται η απόκλιση μεταξύ αριθμητικής και αναλυτικής λύσης.

## 5.2 Σύστημα Ευθύγραμμων Ρωγμών σε Σειρά σε Άπειρο Μέσο

### 5.2.1 Σύγκριση με τις Μέγιστες Διατμητικές Τάσεις (Ισοχρωματικές Καμπύλες)

Ο Willmore (1949) μελέτησε την κατανομή των τάσεων στο γειτονικό περιβάλλον δυο ευθύγραμμων συγγραμμικών ρωγμών Griffith (Σχήμα 5.19 ) που βρίσκονται μέσα σε ισότροπο μέσο<sup>4</sup>, όταν μια ομοιόμορφη τάση  $P_0$  εφαρμόζεται κατά μήκος των επιφανειών των ρωγμών, ενώ δεν καταπονούνται σε διατμητικές τάσεις.

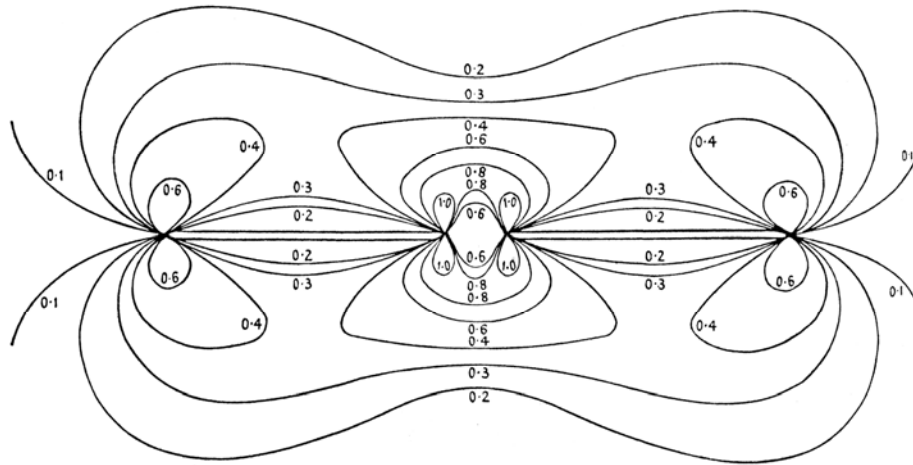


Σχήμα 5.19: Δυο ευθύγραμμες συγγραμμικές ρωγμές Griffith

Διαπίστωσε ότι το συγκεκριμένο συνοριακό πρόβλημα, ισοδυναμεί με το υδροδυναμικό πρόβλημα της ομοιόμορφης πίεσης δυο όμοιων ρωγμών στην ίδια διάταξη. Η μεταβολή του λόγου  $\tau/p_0$  σαν συνάρτηση των συντεταγμένων  $x$  και  $y$  υπολογίστηκε από τον Willmore και έδειξε ότι η ύπαρξη της δεύτερης ρωγμής, αυξάνει εμφανέστατα τις τάσεις κοντά στις αιχμές των ρωγμών, ιδιαίτερα στις αιχμές που είναι κοντά η μια στη άλλη, αλλά η μορφή του γενικότερου πεδίου των τάσεων παραμένει ανεπηρέαστη. Οι

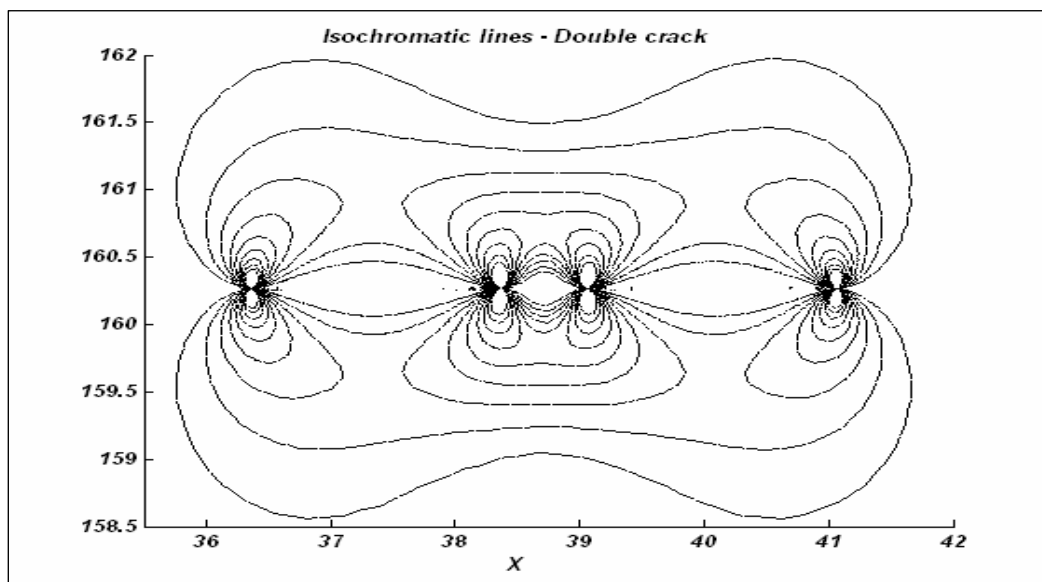
<sup>4</sup> Εκτός του ότι το πρόβλημα αυτό είναι σημαντικό για την μελέτη της αντοχής ρηγματωμένων ή διακλασμένων πετρωμάτων μπορεί επίσης να θεωρηθεί ότι προσομοιώνει την αλληλεπίδραση γειτονικών ορθογώνιων ανοιγμάτων (λ.χ. επιμηκών μετώπων ή θαλάμων) των οποίων το ύψος είναι πολύ μικρότερο από το μήκος τους ( $H/L < 1/10$ )

ισοχρωματικές καμπύλες  $\tau/p_0 = \text{σταθερό}$  σε αυτήν την περίπτωση φαίνονται στο σχήμα 5.20. (Sneddon & Lowengrub, 1969).



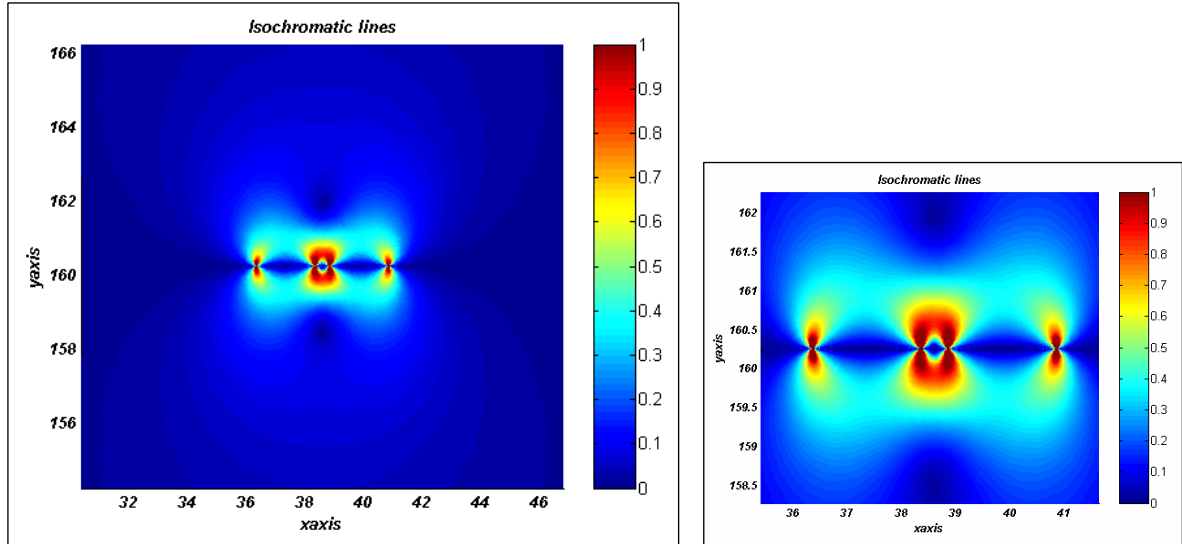
Σχήμα 5.20: Ισοχρωματικές καμπύλες στην περιοχή γύρω από δυο ευθύγραμμες ρωγμές (Sneddon & Lowengrub, 1969)

Στο σχήμα 5.21 αναπαρίστανται οι ισοχρωματικές καμπύλες, για το ίδιο σύστημα των δυο ρωγμών, που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη τασική καταπόνηση, έτσι όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα DDBETD.



Σχήμα 5.21: Ισοχρωματικές καμπύλες στην περιοχή γύρω από δυο ευθύγραμμες ρωγμές από το πρόγραμμα DDBETD

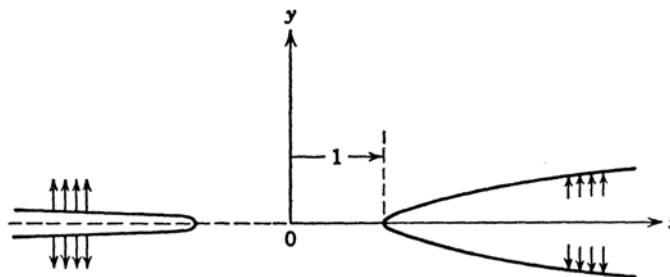
Ακολουθώς φαίνεται η κλιμάκωση των μέγιστων διατμητικών τάσεων γύρω από δυο ρωγμές που υποβάλλονται σε ομοιόμορφο τασικό πεδίο σε όλο το ελαστικό μέσο με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα (Σχήμα 5.22)



Σχήμα 5.22: Ισοχρωματικές καμπύλες σε όλο το μέσο που περιβάλλει δυο ευθείες ρωγμές σε απόσταση 0.5

### 5.2.2 Κατανομή των Τάσεων στο Ενδιάμεσο Μέσο Δυο Ευθύγραμμων Ρωγμών

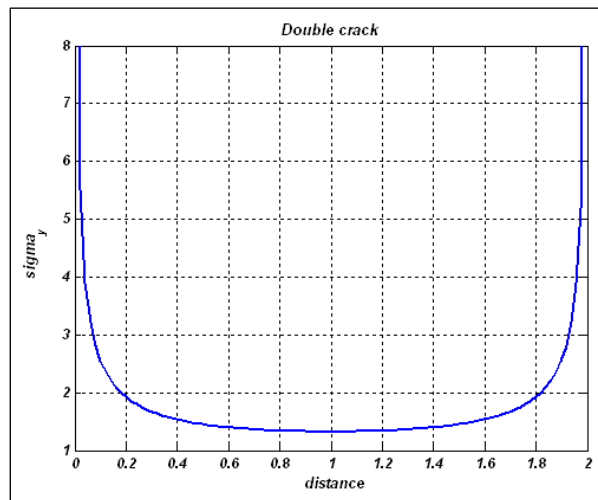
Σε αυτή την παράγραφο, εξετάζεται η επίδραση της ύπαρξης μιας δεύτερης ρωγμής στην κατανομή των τάσεων, στο ενδιάμεσο μέσο, όταν εφαρμόζεται συμμετρικά τάση  $P_{yy} = 1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.23.



Σχήμα 5.23 Δύο ευθείες συγγραμμικές ρωγμές (Sneddon & Lowengrub, 1969).

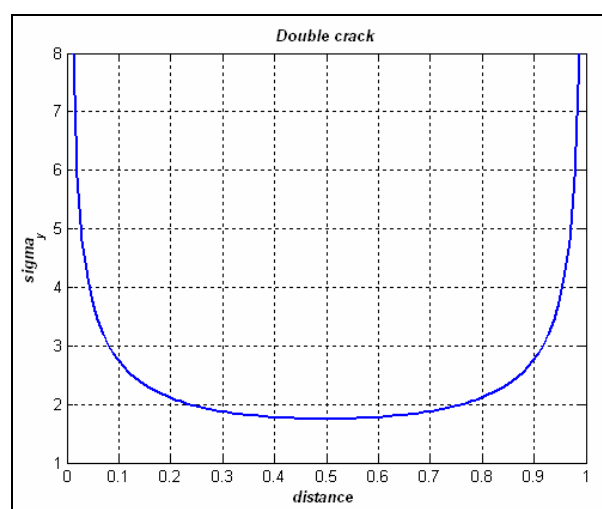
Θεωρείται ότι η τάση είναι η ίδια και στις δυο πλευρές της ρωγμής (δηλαδή υπάρχει συμμετρία ως προς τον  $x$  άξονα) (Sneddon & Lowengrub, 1969).

Οι υπό μελέτη ρωγμές έχουν μήκος  $2a = 2$  και βρίσκονται αρχικά σε απόσταση 2 μέτρων μεταξύ τους. Η κατανομή της κατακόρυφης τάσης  $\sigma_{yy}$  σε συνάρτηση με την απόσταση από τις αιχμές των δύο ρωγμών, δίδεται από το ακόλουθο σχήμα :

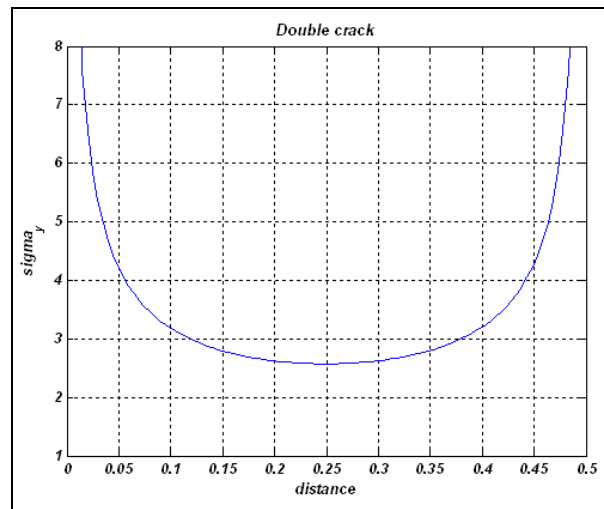


**Σχήμα 5.24:** Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης,  $\sigma_{yy}$ , ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 2.

Στο σχήμα 5.25 φαίνεται και πάλι τότε η κατανομή της κατακόρυφης τάσης  $\sigma_{yy}$  ανάμεσα στις δυο ρωγμές, με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση βρίσκονται σε απόσταση 1 m, ενώ στο σχήμα 5.26, παρουσιάζεται η ίδια κατανομή τάσης, όταν η απόσταση μεταξύ των αιχμών των ρωγμών είναι ακόμα μικρότερη, 0.5m.

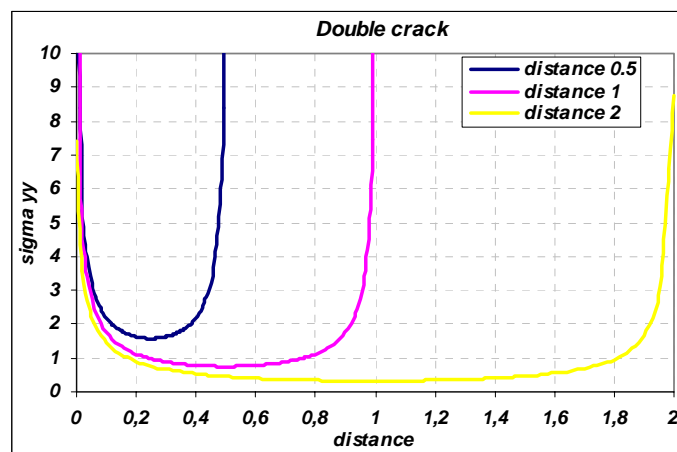


**Σχήμα 5.25:** Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης  $\sigma_{yy}$  ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 1m.



Σχήμα 5.26: Κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης  $\sigma_{yy}$  ανάμεσα σε δύο ρωγμές που βρίσκονται σε απόσταση 0.5m.

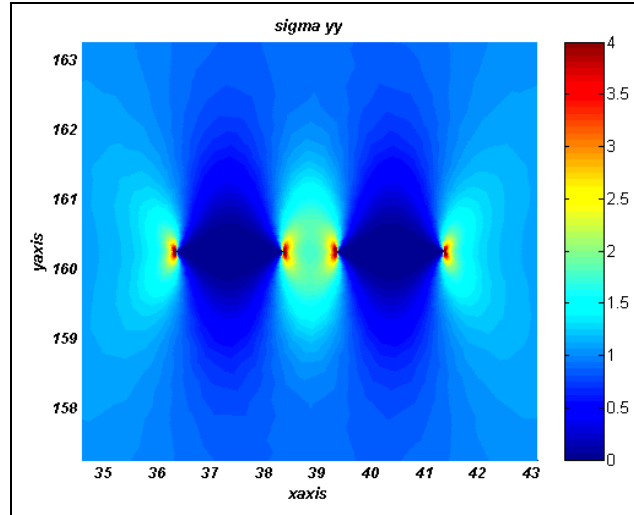
Από το σχήμα 5.27, όπου αναπαρίστανται συγκριτικά η κλιμάκωση των κατακόρυφων τάσεων και στις τρεις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, γίνεται εμφανής η επιρροή της απόστασης, ανάμεσα στις ρωγμές, στις τάσεις που αναπτύσσονται. Όσο μικρότερη είναι η απόσταση των ρωγμών, τόσο μεγαλύτερες είναι και οι τάσεις που αναπτύσσονται στα ενδιάμεσα σημεία του μέσου.



Σχήμα 5.27: Συγκριτική αναπαράσταση των τάσεων  $\sigma_{yy}$  για τις τρεις διαφορετικές αποστάσεις των ρωγμών

Στο σχήμα 5.28 φαίνεται η κλιμάκωση της υπό μελέτης τάσης ενδεικτικά για την περίπτωση όπου οι δυο ρωγμές βρίσκονται σε απόσταση 1.





Σχήμα 5.28: Η κατανομή της  $\sigma_y$  για απόσταση ρωγμών 1

### 5.2.3 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων

Στην περίπτωση δυο ευθύγραμμων συγγραμμικών ρωγμών σε άπειρο μέσο, όπως φαίνονται στο σχήμα 5.29, οι αναλυτικές σχέσεις για τον υπολογισμό των συντελεστών έντασης των τάσεων και για του τρεις τύπους φόρτισης δίδονται στις σχέσεις [5.3] (Muskhelishvili's Method).

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}_{\pm a} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_{inplane} \\ \tau_{outofplane} \end{Bmatrix} \sqrt{\pi a} \frac{b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - a^2}{a\sqrt{b^2 - a^2}} \quad [5.3]$$

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}_{\pm b} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_{inplane} \\ \tau_{outofplane} \end{Bmatrix} \sqrt{\pi b} \frac{1}{k} \left\{ 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right\}$$

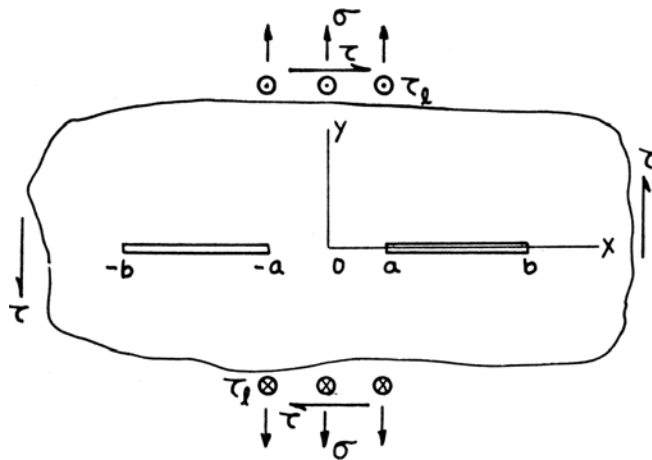
όπου:  $k = \sqrt{1 - a^2/b^2}$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

(Tada et al, 1973)

Στο σχήμα 5.29 φαίνεται η διάταξη που μελετήθηκε, για μήκος ρωγμών 1, και απόσταση σταδιακά αυξανόμενη όπως φαίνεται στον πίνακα 5.2. Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για τον συντελεστή έντασης των τάσεων  $K_I$ , έτσι όπως προέκυψαν από το πρόγραμμα DDBETD και υπολογιστικά από την αναλυτική λύση (σχέσεις [5.3]).

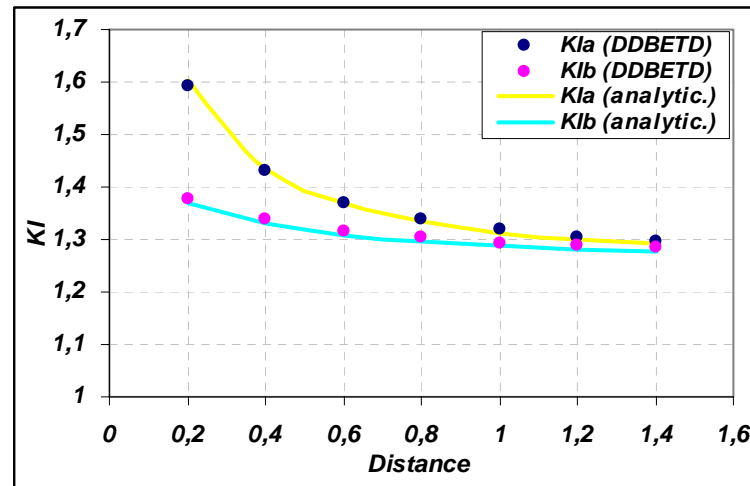


Σχήμα 5.29: Διάταξη δυο ευθύγραμμων ρωγμών  
(Tada et al, 1973)

Πίνακας 5. 2. Συντελεστής έντασης των τάσεων  $K_I$  για διάφορες αποστάσεις μεταξύ των ρωγμών

Απόσταση $-a \leftrightarrow a$	$K_I$ προγράμματος		$K_I$ αναλυτικό	
	$\pm a$	$\pm b$	$\pm a$	$\pm b$
0,2	1,5911	1,377	1,6046	1,3675
0,4	1,4326	1,3369	1,4331	1,3294
0,6	1,3701	1,3159	1,3694	1,3094
0,8	1,3373	1,3029	1,3337	1,2969
1	1,3175	1,294	1,3134	1,2883
1,2	1,3045	1,2877	1,3002	1,2822
1,4	1,2955	1,2829	1,2909	1,2776

Το σχήμα 5.30 είναι η γραφική απεικόνιση του πίνακα 5.1, όπου παρουσιάζεται ο συντελεστής  $K_I^5$  σε συνάρτηση με τη απόσταση μεταξύ των ρωγμών, έτσι όπως υπολογίστηκε από πρόγραμμα (DDBETD), και από την αναλυτική λύση.



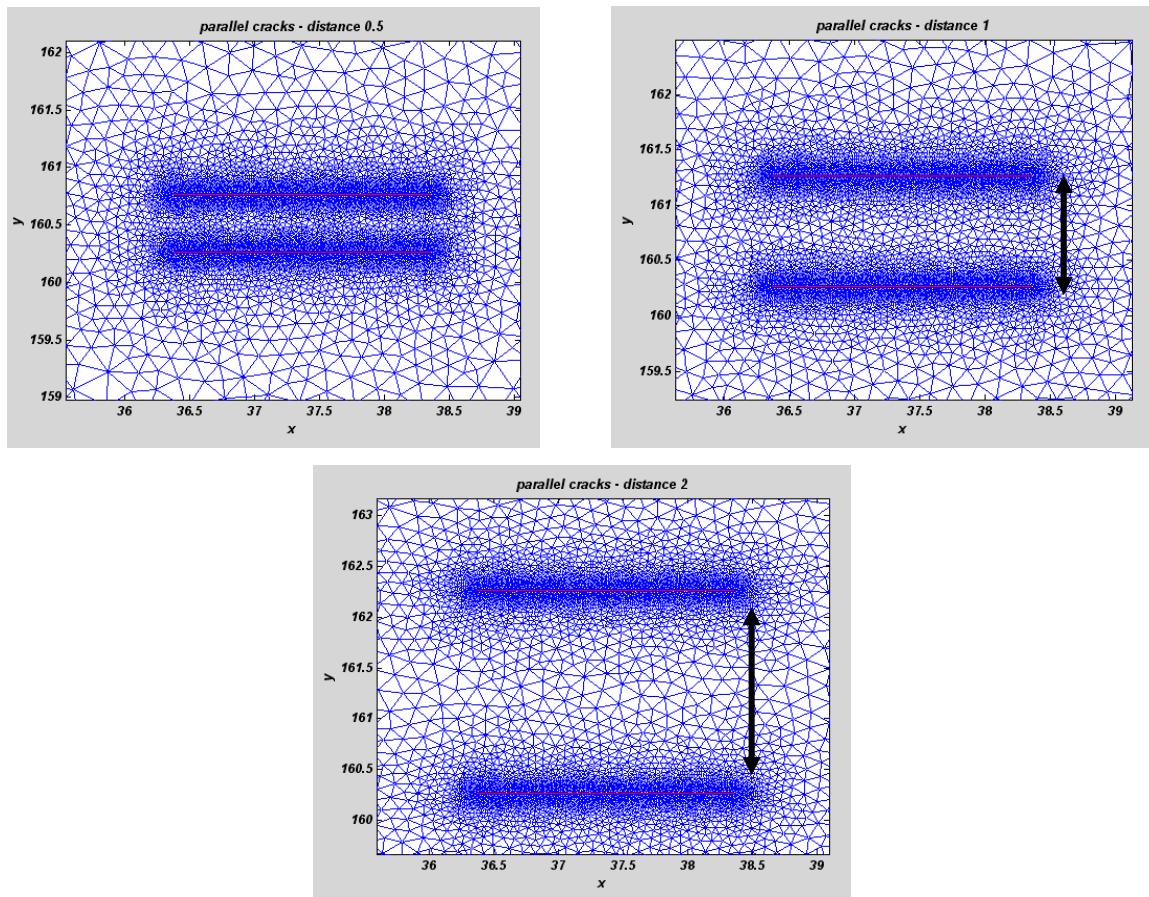
Σχήμα 5.30: Συντελεστής έντασης των τάσεων συναρτήσει της απόστασης δύο ευθύγραμμων ρωγμών.

Τα αποτελέσματα που βγαίνουν είναι φυσικώς ερμηνεύσιμα και παρουσιάζουν πολύ καλή συμφωνία με αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις

### 5.3 Σύστημα Παράλληλων Ρωγμών σε Άπειρο Μέσο

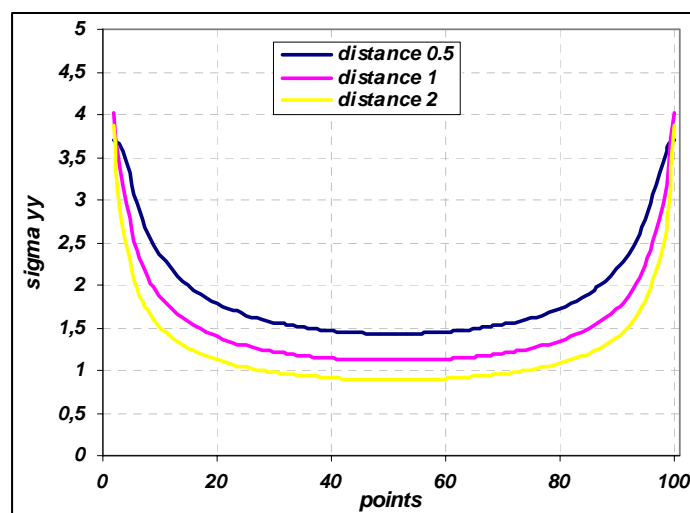
Το Σε αυτή την παράγραφο, θα εξεταστεί η κατανομή των κατακόρυφων τάσεων ανάμεσα στις αιχμές δύο ισομηκών παράλληλων ρωγμών  $2a = 2$ , που βρίσκονται σε άπειρο ελαστικό μέσο, σχήμα 5.31 όταν εφαρμόζεται συμμετρικά τάση  $P_{yy} = 1$ . Συγκεκριμένα θα μελετηθεί η κατανομή των κατακόρυφων συνιστωσών των τάσεων ανάμεσα στις αιχμές τους, σαν συνάρτηση της απόστασής τους. Στην πρώτη περίπτωση, οι ρωγμές βρίσκονται σε απόσταση 0,5, στην δεύτερη σε απόσταση 1 και τέλος στην τρίτη σε απόσταση 2.

<sup>5</sup> Οι συντελεστές έντασης των τάσεων  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  υπολογίζονται αντίστοιχα εφαρμόζοντας τον κατάλληλο τύπο φόρτισης, για αυτό και δεν παρουσιάζονται. εδώ .



Σχήμα 5.31: Διακριτοποίηση του μέσου γύρω από δυο παράλληλες ρωγμές στις τρεις αποστάσεις

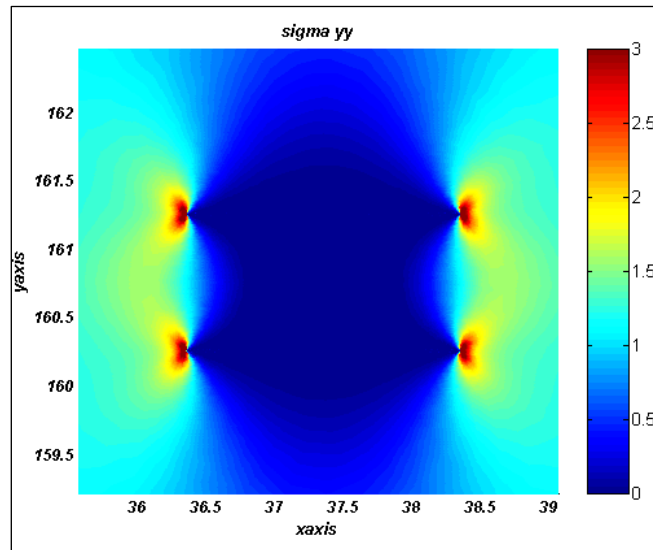
Στο ακόλουθο σχήμα 5.32, φαίνεται η κατανομή της κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης σε συγκριτικό διάγραμμα και για τις τρεις περιπτώσεις.



Σχήμα 5.32: Συγκριτικό διάγραμμα κατακόρυφης συνιστώσας της τάσης

Οι τάσεις ακριβώς στις αιχμές των ρωγμών απειρίζονται, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο, για αυτό και αφαιρέθηκαν. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι όσο πιο κοντά βρίσκονται οι ρωγμές, τόσο μεγαλύτερες είναι και οι τάσεις που αναπτύσσονται.

Ενδεικτικά παρουσιάζεται το σχήμα 5.33 όπου με χρωματικό κώδικα φαίνεται η κλιμάκωση της όταν η απόσταση μεταξύ των ρωγμών είναι 1.



Σχήμα 5.33: Κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης ανάμεσα σε παράλληλες ρωγμές

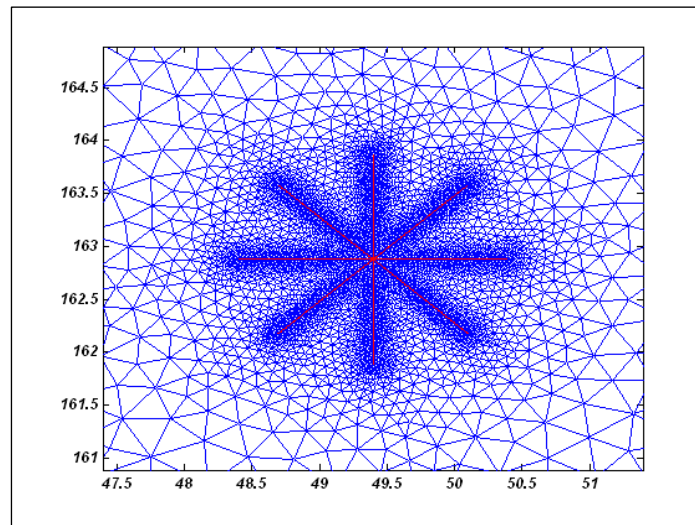
## 5.4 Διασταυρούμενα Σύννορα

Οι Westman (1965), Srivastav και Narain (1965), ασχολήθηκαν με τη μελέτη της κατανομής των τάσεων γύρω από ένα συνδυασμό ρωγμών σε σχήμα αστεριού, που βρίσκεται μέσα σε λεπτή άπειρη πλάκα. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι η υπόψιν διάταξη ρωγμών προσομοιάζει τις ακτινικές ρωγμές γύρω από ένα διάτρυμα ανατίναξης.

### 5.4.1 Εντατικοπαραμορφωσιακή Μελέτη σε Διάταξη Αστεριού

Η υπό μελέτη διάταξη παρουσιάζεται διακριτοποιημένη (όπως προέκυψε από το πρόγραμμα DDBETD) στο σχήμα 5.34. Όλες οι ρωγμές είναι ισομήκεις ( $2a = 1$ ),

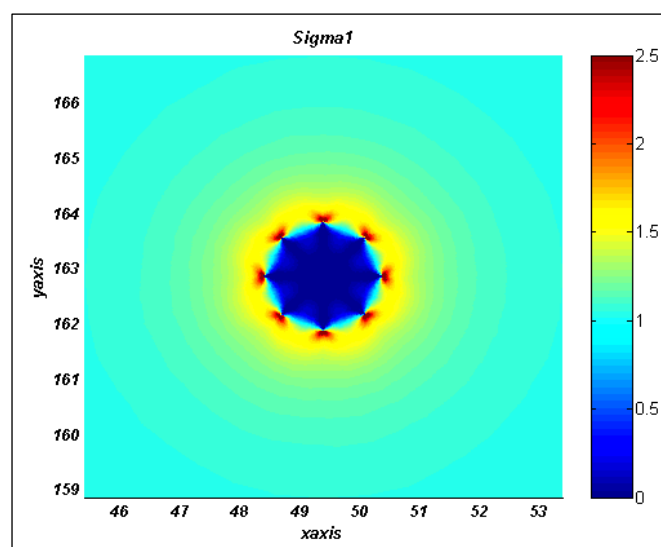
βρίσκονται σε άπειρο μέσο με παραμέτρους του υλικού  $\nu = 0.1$  και  $E = 20000 \text{ MPa}$  . και υποβάλλονται σε ομοιόμορφη τασική καταπόνηση  $P_{yy} = P_{xx} = 1$ .



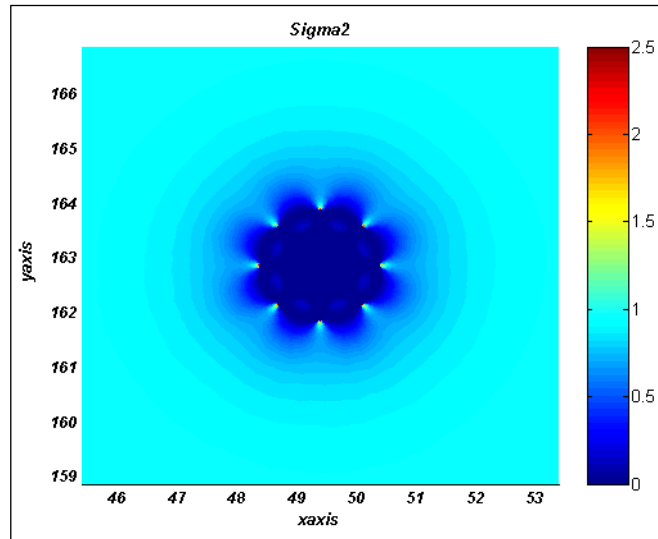
Σχήμα 5.34 : Διάταξη ρωγμών σε σχήμα αστεριού

Η διάταξη αυτή μελετήθηκε μέσω του προγράμματος και προέκυψαν τα ακόλουθα σχήμα που παρουσιάζουν την κατανομή των κυρίων τάσεων τόσο στα σύνορα της διάταξης, όσο και στο μέσο που την περιβάλλει.

Στο σχήμα 5.35 απεικονίζεται η κλιμάκωση της μέγιστης κύριας τάσης  $\sigma_1$  (κατά την διεύθυνση  $x$ ) και στο σχήμα 5.36 η κατανομή σε όλο το μέσο της μέγιστης κύριας τάσης  $\sigma_2$  (κατά την διεύθυνση  $y$ )



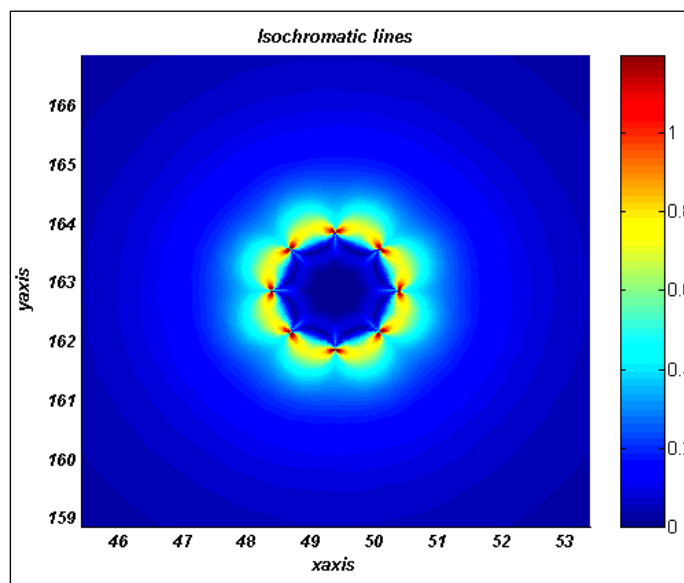
Σχήμα 5.35: Κατανομή κύριας τάσης  $\sigma_1$



Σχήμα 5.36: Κατανομή κύριας τάσης  $\sigma_2$

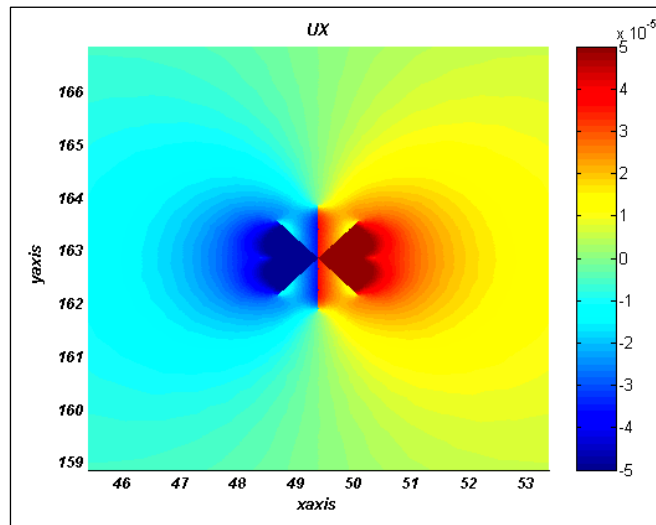
Από τα παραπάνω σχήματα συμπεραίνεται ότι στις ελεύθερες αιχμές των ρωγμών, γίνεται η συγκέντρωση των κυρίων τάσεων. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή που εφαρμόζεται ομοιόμορφο εντατικό πεδίο, οι κύριες τάσεις θα μπορούσαν να παραλληλιστούν με τις αντιστοιχούν ακτινικές τάσεις  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ .

Στο σχήμα 5.37 παρουσιάζεται η κατανομή των μέγιστων διατμητικών τάσεων (ή όπως αποκαλούνται ισοχρωματικές καμπύλες).

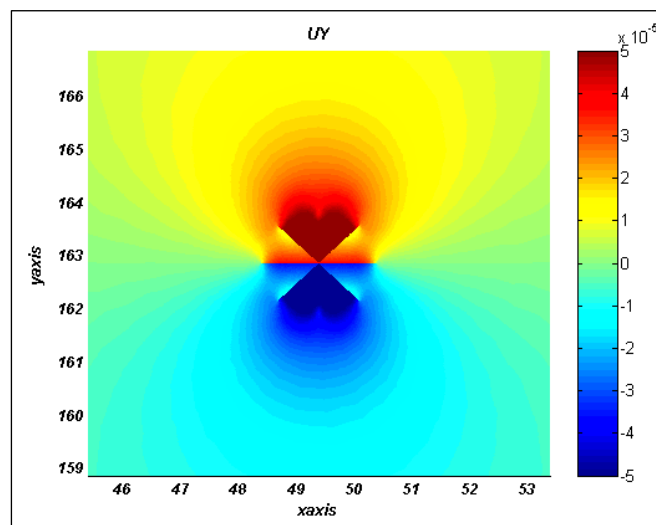


Σχήμα 5.37: Κατανομή των μέγιστων διατμητικών τάσεων  $\tau$

Τέλος στα σχήματα 5.38 και 5.39 παρουσιάζονται οι οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της ίδιας διάταξης



Σχήμα 5.38: Οριζόντιες μετατοπίσεις  $U_x$



Σχήμα 5.39: Κατακόρυφες μετατοπίσεις  $U_y$

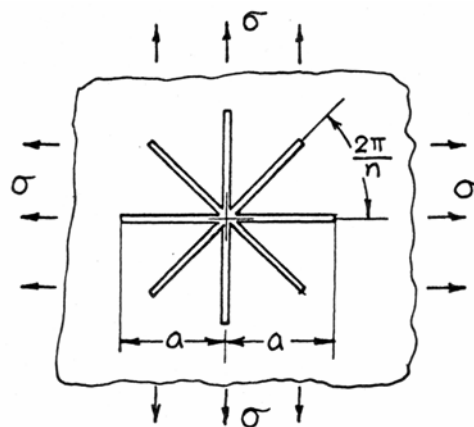
#### 5.4.2 Συντελεστής Έντασης των Τάσεων

Στην παράγραφο αυτή, γίνεται σύγκριση του συντελεστή έντασης των τάσεων  $K_I$ , για την ακτινωτή αυτή διάταξη όταν υποβάλλεται σε ομοιόμορφο τασικό πεδίο, έτσι όπως υπολογίζεται από το πρόγραμμα DDBETD και από την αναλυτική λύση.



Ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή αυτού για διατάξεις όπως φαίνονται στο σχήμα (5.40), γίνεται από τη σχέση (5.4) και με τη βοήθεια του διαγράμματος στο σχήμα (5.41) (Tada et al, 1973)

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(n) \quad [5.4]$$

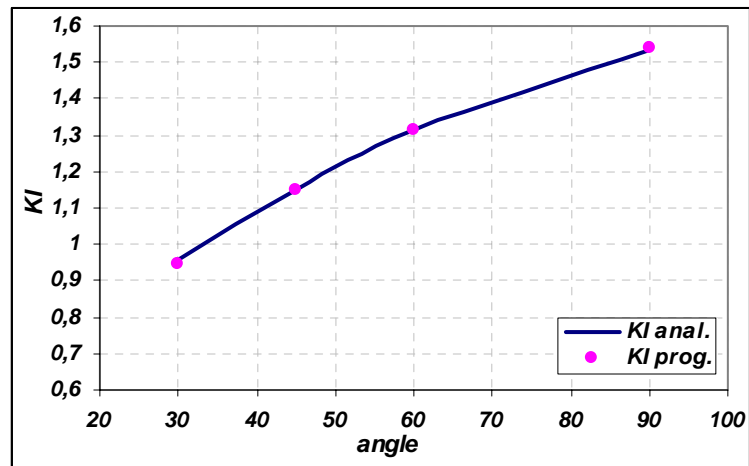


Σχήμα 5.40 : Ακτινικές διατάξεις ισομηκών ρωγμών  
(Tada et al, 1973)

Στον πίνακα 5.3 φαίνεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων  $K_I$  έτσι όπως προέκυψε από το πρόγραμμα και όπως υπολογίστηκε αναλυτικά. Οι υπολογισμοί αυτοί έγιναν σε συνάρτηση με τις γωνίες που αναφέρονται. Στο σχήμα (5.42) παρουσιάζεται το συγκριτικό διάγραμμα της υπολογισμένης και της αναλυτικής του τιμής

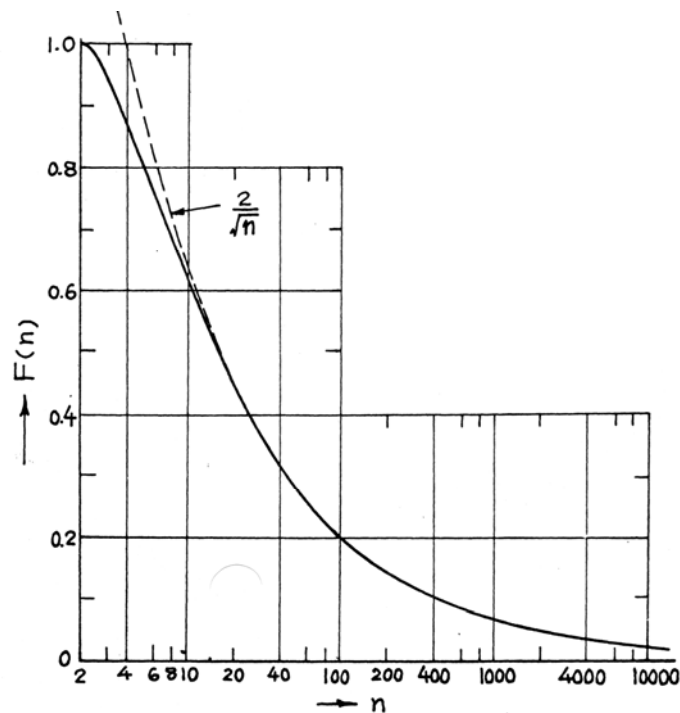
Πίνακας 5.3  $K_I$  αναλυτικό και προγράμματος για την ακτινική διάταξη ρωγμών

Γωνία (°)	$K_I$ Αναλυτικό	$K_I$ Προγράμματος
30	0,9571	0,9482
45	1,1521	1,1502
60	1,3116	1,316
90	1,5314	1,5384



Σχήμα 5.41 : Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή  $K_I$  για την ακτινωτή διάταξη των ρωγμών σε συνάρτησης με τη γωνία των ακτίνων

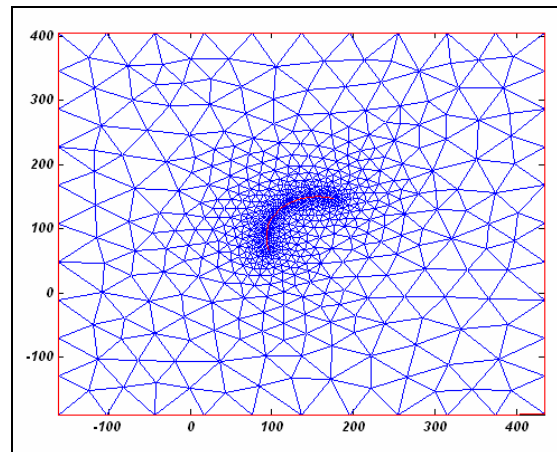
Από το συγκριτικό αυτό διάγραμμα φαίνεται ότι η αξιοπιστία του προγράμματος στην τασική μελέτη της διάταξης των ακτινωτών ρωγμών είναι αρκετά ικανοποιητική.



Σχήμα 5.42: Διάγραμμα υπολογισμού της συνάρτησης  $F(n)$

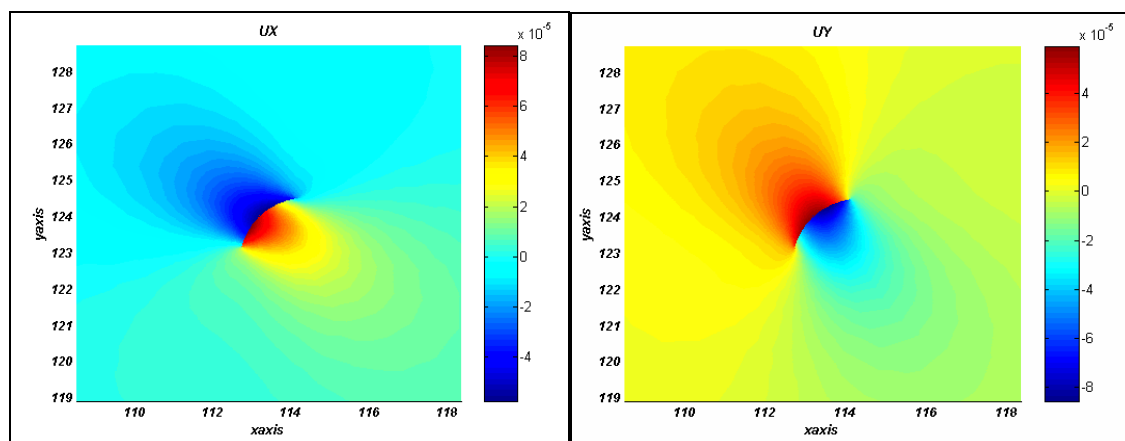
## 5.5 Καμπυλόγραμμη ρωγμή σε ομοιόμορφο εντατικό πεδίο

Το υπολογιστικό πρόγραμμα DDBETD έχει τη δυνατότητα να μελετήσει το εντατικοπαραμορφωσιακό πεδίο που αναπτύσσεται γύρω από μη ευθύγραμμες και μη συμμετρικές ρωγμές. Για παράδειγμα καμπύλες ρωγμές όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 5.34.

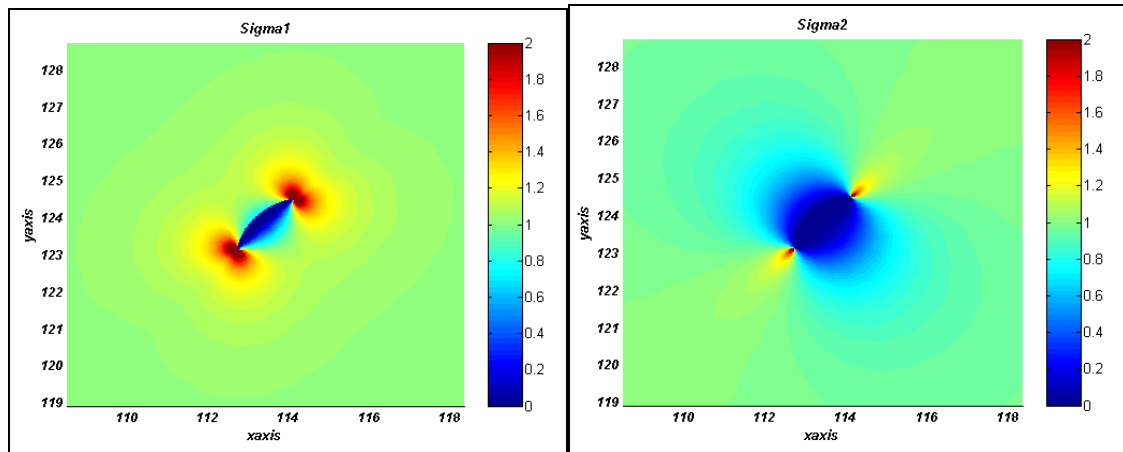


Σχήμα 5.43 : Καμπύλη ρωγμή σε άπειρο μέσο

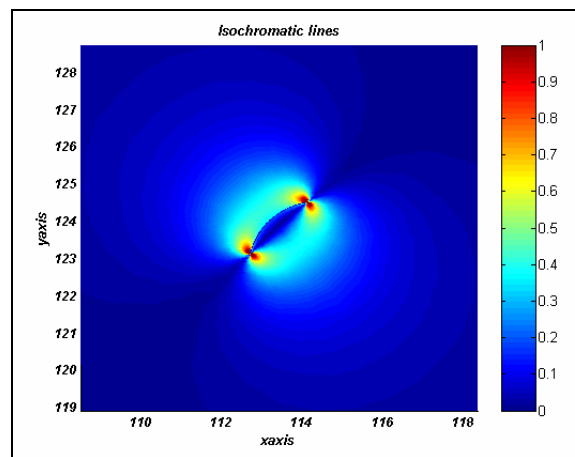
Στα ακόλουθα σχήματα φαίνεται η κατανομή των μετατοπίσεων και των κύριων τάσεων για καμπύλη ρωγμή που υποβάλλεται σε ομοιόμορφο εντατικό πεδίο. Η εγκυρότητα και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων δεν μπορεί να διαπιστωθεί εφόσον δεν δίδονται στη ανοιχτή βιβλιογραφία αναλυτικές λύσεις για τέτοιου είδους διατάξεις



Σχήμα 5.44: Οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις καμπυλόγραμμης ρωγμής



Σχήμα 5.45 : Κύριες τάσεις καμπυλόγραμμης ρωγμής



Σχήμα 5.46: Μέγιστες διατμητικές (ισοχρωματικές καμπύλες) για την καμπυλόγραμμη ρωγή

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6<sup>ο</sup>

### Συμπεράσματα – Προτάσεις

Οι δυο κύριες αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την μελέτη προβλημάτων Θραυστομηχανικής, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (BEM). Η μέθοδος των ασυνεχών μετατοπίσεων, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, είναι μια μέθοδος συνοριακών στοιχείων που βασίζεται στην αναλυτική λύση του υπολογισμού των ασυνεχών μετατοπίσεων της ευθύγραμμης ρωγμής υπό πίεση. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι διακριτοποιείται μόνο το σύνορο της υπό μελέτη επιφάνειας και πάνω σε αυτό υπολογίζονται και οι λύσεις. Συνεπώς είναι μια γρήγορη μέθοδος επίλυσης που απαιτεί μικρό υπολογιστικό χώρο.

Στην παρούσα εργασία, με βάση τον ήδη υπάρχοντα στην ανοικτή βιβλιογραφία «αλγόριθμο» TWODD (Crouch and Starfield, 1990), κατασκευάστηκε μια δέση προγραμμάτων υπό μορφή κώδικα σε MATLAB, που μελετά τις παραμορφώσεις και τις τάσεις σε γραμμικά ελαστικές ρηγματωμένες βραχόμαζες. Η ανάλυση αυτή μπορεί να γίνει τόσο σε περίπτωση επίπεδης όσο και αντι-επίπεδης παραμόρφωση, σε αντίθεση με τον υπάρχον κώδικα TWODD, που αντιμετωπίζει μόνο προβλήματα επίπεδων εντατικοπαραμορφωσιακών καταστάσεων. Παράλληλα υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων στις αιχμές απλών διατάξεων ρωγμών. Το εντατικοπαραμορφωσιακό πεδίο απεικονίζεται με τη βοήθεια χρωματικού κώδικα σε μορφή διαγραμμάτων και ισοχρωματικών επιφανειών. Η βελτίωση του τρόπου εισαγωγής των δεδομένων μέσω του σχεδιαστικού πακέτου AUTOCAD απλοποίησε ακόμη περισσότερο τη μελέτη των προβλημάτων με τη συγκεκριμένη μέθοδο. Πρέπει να σημειωθεί η δυνατότητα του προγράμματος να επιλύει και συνδυαστικά προβλήματα ανοιγμάτων και ρωγμών κάτι το οποίο όμως δεν μελετάται στην παρούσα εργασία.

Για να ελεγχθεί η αξιοπιστία του προγράμματος «DDBETD», μελετήθηκαν διατάξεις ρωγμών σε ποικίλα εντατικά πεδία και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις που αφορούσαν τις μετατοπίσεις, τις τάσεις (ισοχρωματικές καμπύλες) και τον συντελεστή έντασης των τάσεων.

Συγκεκριμένα μελετήθηκαν προβλήματα όπως:

1. Το απλό πρόβλημα της ευθύγραμμης ρωγμής σε άπειρο μέσο, όπου συγκρίθηκε η μέθοδος ασυνεχών μετατοπίσεων με αναλυτικές λύσεις μετατοπίσεων και για τους τρεις τύπους φόρτισης και διερευνήθηκε η ορθότητα και η ακρίβεια του

υπολογισμού του τασικού πεδίου γύρω από τη ρωγμή.. Ακόμη υπολογίστηκε ο συντελεστής έντασης των τάσεων για διάφορα μήκη ρωγμών που υποβάλλονται στο ίδιο εντατικό πεδίο

2. Σύστημα ευθύγραμμων ρωγμών σε σειρά μέσα σε άπειρο ελαστικό μέσο.
3. Σύστημα παράλληλων ρωγμών που βρίσκονται μέσα σε άπειρο ελαστικό μέσο.
4. Διασταυρούμενα σύνορα (Διάταξη αστεριού)
5. Καμπυλόγραμμη ρωγμή σε ομοιόμορφο εντατικό πεδίο.

Κατά τη μελέτη των προβλημάτων αυτών, διαπιστώθηκε:

1. Η λεπτομερέστερη διακριτοποίηση του συνόρου δίδει ακριβέστερα αποτελέσματα τόσο στην κλιμάκωση των τάσεων, όσο και των μετατοπίσεων, κάτι που ισχύει σε οποιαδήποτε αριθμητική μέθοδο.
2. Κατά τον υπολογισμό του συντελεστή έντασης των τάσεων, διαπιστώθηκε η ύπαρξη μιας βέλτιστης αναλογία μεταξύ του μήκους της ρωγμής και του αριθμού των στοιχείων στα οποία πρέπει να έχει διαιρεθεί, για την οποία ελαχιστοποιείται η απόκλιση μεταξύ αριθμητικής και αναλυτικής λύσης.
3. Δυνατότητα επίλυσης διασταυρούμενων συνόρων και μάλιστα με πολύ καλή ακρίβεια αποτελεσμάτων.
4. Δυνατότητα επίλυσης καμπύλων και ασύμμετρων ρωγμών.

Τέλος για την συνέχιση της ανώτερω εργασίας προτείνονται τα εξής:

1. Η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί και για τη αντιμετώπιση τρισδιάστατων προβλημάτων
2. Μελέτη ετερογενών μέσων ως προς τις ελαστικές τους ιδιότητες
3. Μελέτη ανισότροπων μέσων ως προς τις ελαστικές τους ιδιότητες σε επίπεδη και τρισδιάστατη ανάλυση.
4. Να διερευνηθεί η αξιοπιστία της μεθόδου σε περιπλοκότερες περιπτώσεις προβλημάτων, όπως καμπυλόγραμμες ρωγμές, συγκρίνοντας το υπολογιστικό της αποτέλεσμα με άλλες δοκιμασμένες μεθόδους. (εφόσον δεν είναι δυνατή η ανεύρεση αναλυτικών λύσεων στις περιπτώσεις αυτές).

## Βιβλιογραφία



### Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Αγιουτάντης Ζ., (2002). "Στοιχεία Γεωμηχανικής Μηχανική Πετρωμάτων", Εκδόσεις ΙΟΝ.
2. Εξαδάκτυλος Γ., (2001). "Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικότητας και στη Θραυστομηχανική", Πανεπιστημιακές σημειώσεις, [www.minelab.mred.tuc.gr](http://www.minelab.mred.tuc.gr).

### Διεθνής Βιβλιογραφία

1. Arantes e Oliveira E.R., (2003). "From Formal Solutions to Methods Avoiding Passages to the Limit", International Workshop on Mesh Free Methods.
2. Barsom M. John and Rolfe T. Stanley, (1999). "Fracture and Fatigue Control in Structures: Applications of Fracture Mechanics", Butterworth Heinemann
3. Becker A.A., (1992). "The Boundary Element Method in Engineering", Mc Graw-Hill Book Company, London.
4. Crouch S.L. and Starfield A.M., (1990). "Boundary Elements Methods in Solid Mechanics", Unwin Hyman, London
5. Hertzberg R.(1996), "Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials", John Wiley and Sons, New York
6. Parker A.P., (1981). "The Mechanics of Fracture and Fatigue", London
7. Sneddon I.N. and Lowengrub M., (1969). "Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity", John Wiley & Sons, INC New York – London – Sydney – Toronto
8. Tada Hiroshi, Paris C. Paul, Irwin R.George, (1973). "Handbook of SIF's"

### Πηγές Διαδικτύου

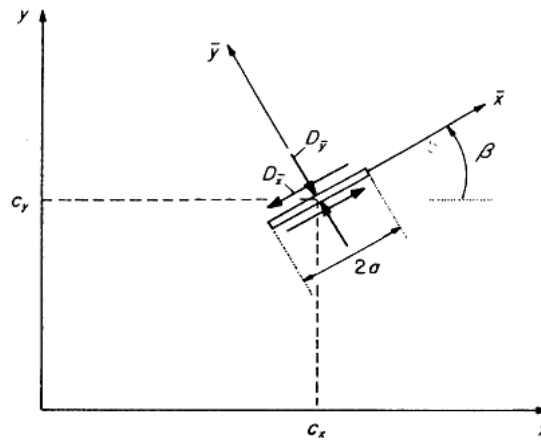
1. Bower Allan, (2002). "EN222: Mechanics of Solids", Engineering, Brown University Providens, [www.engin.brown.edu/courses/EN222/Notes/Fracturements/Fracturements.html](http://www.engin.brown.edu/courses/EN222/Notes/Fracturements/Fracturements.html)
2. "Chapter 3: The Elastic Crack Tip Stress Field" [www.ncat.edu/ccmradm/Dr%20homepage/meen\\_860/chapter3.pdf](http://www.ncat.edu/ccmradm/Dr%20homepage/meen_860/chapter3.pdf)
3. " Introduction to Fracture Mechanics" [www.efunda.com/formula/formula\\_index.cfm](http://www.efunda.com/formula/formula_index.cfm)
4. Jefferson K. Kim, (2000). Virginia Tech Materials Science and Engineering, [www.sv.vt.edu/classes/MSE2094\\_Note\\_Book/97ClassProj/anal/Kim/Intensity.html](http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094_Note_Book/97ClassProj/anal/Kim/Intensity.html)

5. "Linear Elastic Fracture Mechanics"  
[www.mech.uwa.au/DANotes/fracture/LEFM/LEFM.html](http://www.mech.uwa.au/DANotes/fracture/LEFM/LEFM.html)
6. Martel S., (2003). "Boundary Element Code: TWODD", University of Hawaii.  
[www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711\\_Lec\\_19](http://www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711_Lec_19)
7. Martel Stephen, (2003). "Mode III Fracture", University of Hawaii.  
[www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711\\_Lec\\_15](http://www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711_Lec_15)
8. Martel Stephen, (2003). "The Near Tip Field and Stress Intensity Factor", University of Hawaii.  
[www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711\\_Lec\\_17](http://www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711_Lec_17)
9. Martel Stephen, (2003). "Displacement Discontinuity and Fractures", University of Hawaii.  
[www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711\\_Lec\\_14](http://www.soest.hawaii.edu/martelcourses/GG703/GG711_Lec_14)
10. "Mechanics of Materials" [www.efunda.com/formula/formula\\_index.cfm](http://www.efunda.com/formula/formula_index.cfm)
11. Pecker Eerik, (1997). "Extended Numerical Modelling of Fatigue Behavior"  
[www.emering.fi/download/EP1617\\_Chapter1.pdf](http://www.emering.fi/download/EP1617_Chapter1.pdf)
12. Robert A, (2001). "Fracture Mechanics and Steady Load Failure Theory"  
[www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine\\_desin.html](http://www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine_desin.html)
13. Robert A, (2001). "Introduction to Fracture Mechanics"  
[www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine\\_desin.html](http://www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine_desin.html)
14. Robert A, (2001). "Stress Concentrators Factors and Notch Sensitivity"  
[www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine\\_desin.html](http://www.utm.edu/departments/engin/lemaster/machine_desin.html)

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

## Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων

Οι συντελεστές επίδρασης στις εξισώσεις [3.27] και [3.28] προέρχονται από την αναλυτική λύση του προβλήματος μιας σταθερής ασυνεχούς μετατόπισης ασυνέχειας, πάνω σε ένα τυχαία προσανατολισμένο, πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο βρίσκεται σε ένα άπειρο μέσο. Αυτή η λύση εξάγεται από τα αποτελέσματα της παραγράφου 3.1 με τη βοήθεια των απλών μετασχηματισμών συντεταγμένων. Παρακάτω δίδεται η λύση αυτή για τη γεωμετρία που παρουσιάζεται στο σχήμα (Π.1).



**Σχήμα Π.1:** Ασυνεχής μετατόπιση πάνω σε αυθαίρετα προσανατολισμένο τμήμα  
(Crouch and Starfield, 1990)

Οι συνιστώσες των ασυνεχών μετατοπίσεων  $D'_x$  και  $D'_y$  είναι σταθερές πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα,  $|x'| \leq a$ ,  $y' = 0$ . Οι τοπικές  $x'$ ,  $y'$  συντεταγμένες συσχετίζονται με τις καθολικές  $x$ ,  $y$  συντεταγμένες με τις εξισώσεις μετασχηματισμού:

$$\bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \quad [\Pi.1]$$

$$\bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta$$

όπου  $c_x$  και  $c_y$  είναι οι συνιστώσες της μετακίνησης στην  $x$  και στην  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα. Η περιστροφή προσδιορίζεται από την γωνία  $\beta$ , η οποία είναι θετική όταν η φορά της είναι σύμφωνη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Το σχήμα 3.8

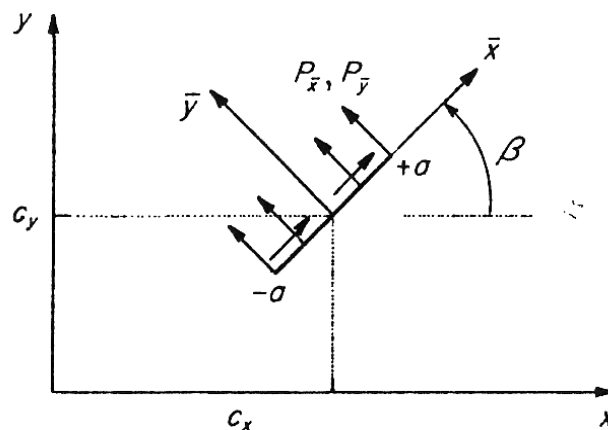
απεικονίζει το τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $\bar{x}, \bar{y}$  το οποίο δημιουργείται από την μετακίνηση και την περιστροφή του καθολικού συστήματος  $x, y$ .

Οι μετατοπίσεις και τάσεις οι οποίες οφείλονται στις συνιστώσες των ασυνεχών μετατοπίσεων  $D'_x$  και  $D'_y$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $|x'| \leq a, y' = 0$ , μπορούν να εκφραστούν εύκολα κάνοντας τις κατάλληλες αλλαγές στα αποτελέσματα της ενότητας 3.2. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις  $F_2(x', y')$  έως  $F_5(x', y')$ , σε συνδυασμό με δύο συμπληρωματικές συναρτήσεις  $F_6(x', y') = f_{,x'y'y'}$  και  $F_7(x', y') = f_{,y'y'y'}$ , λαμβάνεται η ακόλουθη λύση:

$$\begin{aligned} u'_x &= D'_x[2(1-\nu)F'_3 - y'F'_5] + D'_y[-(1-2\nu)F'_2 - y'F'_4] \\ u'_y &= D'_x[(1-2\nu)F'_2 - y'F'_4] + D'_y[2(1-\nu)F'_3 - y'F'_5] \end{aligned} \quad [\Pi.2]$$

και

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= 2GD'_x[2F'_4 - y'F'_6] + 2GD'_y[-F'_5 + y'F'_7] \\ \sigma'_{yy} &= 2GD'_x[-y'F'_6] + 2GD'_y[-F'_5 - y'F'_7] \\ \sigma'_{xy} &= 2GD'_x[-F'_5 + y'F'_7] + 2GD'_y[-y'F'_6] \end{aligned} \quad [\Pi.3]$$



Σχήμα Π.2: Τάσεις πάνω σε ένα τυχαία προσανατολισμένο τμήμα. (Crouch and Starfield, 1990),

Οι συναρτήσεις  $F'_6$  και  $F'_7$  προκύπτουν από τις εξισώσεις [3.9] και έχουν τη μορφή :

$$F'_6 = f'_{,xyy} = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x'-a)^2 - y'^2}{\{(x'-a)^2 + y'^2\}^2} - \frac{(x'+a)^2 - y'^2}{\{(x'+a)^2 + y'^2\}^2} \right] \quad [\Pi.4]$$

$$F'_7 = f'_{,yyy} = \frac{+2y'}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(x'-a)}{\{(x'-a)^2 + y'^2\}^2} - \frac{(x'+a)}{\{(x'+a)^2 + y'^2\}^2} \right]$$

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων  $x, y$  μπορούν στη συνέχεια να υπολογιστούν με την αντικατάσταση των εξισώσεων [Π.2] και [Π.3] αντίστοιχα στις ακόλουθες σχέσεις [Π.5] και [Π.6]. Οι σχέσεις αυτές λαμβάνονται με τη βοήθεια των σχημάτων 3.9 και 3.10 και χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σχέσεις που συνδέουν τα δυο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται:

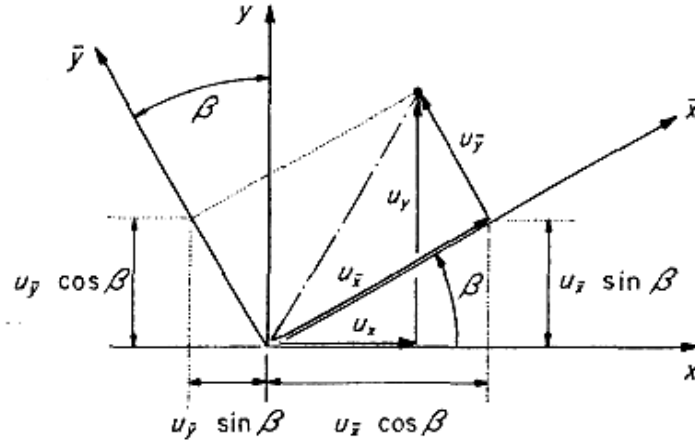
$$u_x = u_x \cos \beta - u_y \sin \beta \quad [\Pi.5]$$

$$u_y = u_x \sin \beta + u_y \cos \beta$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \quad [\Pi.6]$$

$$\sigma_{xy} = \left( \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$$



Σχήμα Π.3: Μετασχηματισμός μετατοπίσεων (Crouch and Starfield, 1990),

Έτσι βρίσκεται η λύση:

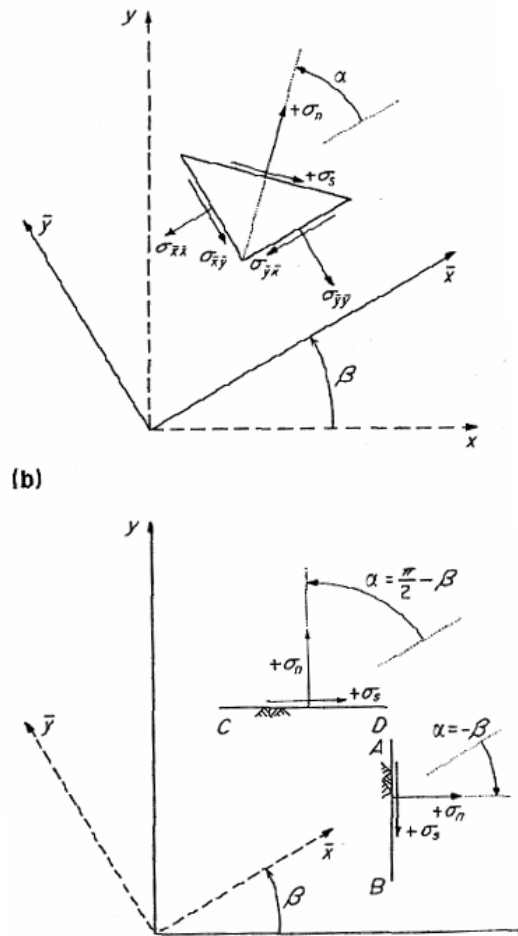
$$\begin{aligned}
 u_x = & D'_x [-(1-2\nu)\sin \beta F'_2 + 2(1-\nu)\cos \beta F'_3 + y'(\sin \beta F'_4 - \cos \beta F'_5)] \\
 & + D'_y [-(1-2\nu)\cos \beta F'_2 - 2(1-\nu)\sin \beta F'_3 - y'(\cos \beta F'_4 + \sin \beta F'_5)]
 \end{aligned}
 \quad [\Pi.7]$$

$$\begin{aligned}
 u_y = & D'_x [(1-2\nu)\cos \beta F'_2 + 2(1-\nu)\sin \beta F'_3 - y'(\cos \beta F'_4 + \sin \beta F'_5)] \\
 & + D'_y [-(1-2\nu)\sin \beta F'_2 + 2(1-\nu)\cos \beta F'_3 - y'(\sin \beta F'_4 - \cos \beta F'_5)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & 2GD'_x [2\cos^2 \beta F'_4 + \sin 2\beta F'_5 + y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)] \\
 & + 2GD'_y [-F'_5 + y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} = & 2GD'_x [2\sin^2 \beta F'_4 - \sin 2\beta F'_5 - y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)] \\
 & + 2GD'_y [-F'_5 - y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)]
 \end{aligned}
 \quad [\Pi.8]$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = & 2GD'_x [\sin 2\beta F'_4 - \cos 2\beta F'_5 + y'(\sin 2\beta F'_6 + \cos 2\beta F'_7)] \\
 & + 2GD'_y [-y'(\cos 2\beta F'_6 - \sin 2\beta F'_7)]
 \end{aligned}$$



Σχήμα Π.4: Μετασχηματισμοί τάσεων (Crouch and Starfield, 1990),

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν των γενικών συντελεστών επίδρασης της μεθόδου των ασυνεχών μετατοπίσεων. (Crouch και Starfield 1990).