



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Ηλεκτρομηχανικές αναλογίες: Αναπαράσταση μηχανικών  
συστημάτων ως ηλεκτρικά κυκλώματα**

---

**Electromechanical analogies: Representing mechanical systems  
as electrical circuits**

*Συγγραφή Διπλωματικής:* Ματθαίος Κουλουριδάκης

Εξεταστική Επιτροπή

*Επιβλέπων Καθηγητής:* Δρ. Σταυρουλάκης Γεώργιος  
*Πρώτος Μέλος:* Δρ. Αντωνιάδης Αριστομένης  
*Δεύτερο Μέλος:* Δρ. Αλευράς Παναγιώτης

---

**ΧΑΝΙΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2025**

---

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

« Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Σταυρουλάκη Γεώργιο και τους βοηθούς του, Διπλ. ΜΠΔ και υποψήφια διδάκτωρ Δαράκη Μαρία-Στέλλα και μεταδιδάκτωρ ερευνητή κ. Δρ. Κωνσταντίνο Μαρακάκη για τις πολύτιμες συμβουλές και γνώσεις που μου παρείχαν για την διεκπεραίωση της εργασίας αυτής. Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην οικογένεια μου, και σ' όλα τα άτομα που με στήριξαν καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου. »

---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....</b>	<b>1</b>
<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....</b>	<b>2</b>
<b>ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....</b>	<b>4</b>
<b>ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ .....</b>	<b>5</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....</b>	<b>5</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>6</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>7</b>

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Η έννοια του συστήματος**

1.1 Τι είναι σύστημα;.....	8
1.1.1 Ορισμός ενός συστήματος .....	8
1.2 Συστήματα στη Φυσική .....	8
1.2.1 Απομονωμένα συστήματα .....	8
1.2.2 Κλειστά συστήματα .....	10
1.2.3 Ανοιχτά συστήματα .....	10
1.3 Σημασία του καθορισμού ενός συστήματος .....	11

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Βασικές έννοιες μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων και μετασχηματισμού Laplace**

2.1 Μηχανικά γραμμικά συστήματα.....	12
2.1.1 Νόμοι Νεύτωνα.....	12
2.1.2 Βασικά στοιχεία γραμμικών μηχανικών συστημάτων.....	13
2.1.2.1 Μάζα, ελατήριο και ο Νόμος του Hooke.....	13
2.1.2.2 Αποσβέστης και απόσβεση.....	15
2.1.2.3 Δυνάμεις σε σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη .....	16
2.1.2.4 Μετατόπιση και σχετική ταχύτητα .....	16
2.1.3 Μαθηματική μοντελοποίηση συστήματος ελατηρίου-μάζας-αποσβέστη .....	16
2.1.4 Μηχανική εμπέδηση .....	17
2.2 Θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων .....	19
2.2.1 Βασικά ηλεκτρικά μεγέθη.....	19
2.2.1.1 Ηλεκτρικό φορτίο .....	19
2.2.1.2 Ηλεκτρικό ρεύμα .....	19
2.2.1.3 Ηλεκτρική τάση .....	20

2.2.1.4 Διακλαδώσεις, κόμβοι και βρόχοι .....	21
2.2.1.5 Νόμος του Ohm – Ωμική αντίσταση .....	21
2.2.1.6 Ηλεκτρική ισχύς.....	22
2.2.1.7 Νόμοι του Kirchhoff.....	23
2.2.1.8 Πηνίο.....	23
2.2.1.9 Πυκνωτής.....	24
2.2.2 Μαθηματική μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων RLC σε σειρά και παράλληλα .....	25
2.2.3 Ηλεκτρική εμπέδηση .....	26
2.3 Μετασχηματισμός Laplace .....	27
2.3.1 Ορισμός.....	27
2.3.2 Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.....	28
2.3.3 Πίνακας μετασχηματισμών Laplace .....	29

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – Ηλεκτρομηχανικά συστήματα

3.1 Εισαγωγή στα ηλεκτρομηχανικά συστήματα .....	30
3.1.1 Ορισμός και σημασία.....	30
3.1.2 Αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων.....	30
3.1.3 Τεχνικές μοντελοποίησης και ανάλυσης .....	31

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Ηλεκτρομηχανικές αναλογίες

4.1 Ανάπτυξη και εφαρμογή ηλεκτρομηχανικών αναλογιών .....	32
4.2 Μελέτη των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών εις βάθος.....	35
4.2.1 Αναλογία εμπέδησης.....	36
4.2.2 Αναλογία κινητικότητας (αντίστροφη αναλογία ή αναλογία δύναμης-ρεύματος) .....	43
4.2.3 Εφαρμογή ηλεκτρομηχανικών αναλογιών σε γραμμικά συστήματα.....	50

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Σύνοψη

5.1 Ανακεφαλαίωση.....	81
------------------------	----

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

I. Βιβλία – Θεωρία και εφαρμογές.....	83
II. Επιστημονικά άρθρα – Περιοδικά και Πρακτικά.....	84
III. Εκπαιδευτικά εγχειρίδια και σχολικά βιβλία .....	85
IV. Πηγές εικόνων, διπλωμάτων ευρεσιτεχνίας και grey literature.....	86
V. Διαδικτυακές πηγές και εγκυκλοπαίδειες .....	86

---

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<b>Εικόνα 2.1</b> – Μηχανικό γραμμικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη .....	17
<b>Εικόνα 2.2</b> – Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σε σειρά πηγής τάσης V.....	25
<b>Εικόνα 2.3</b> – Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC παράλληλα πηγής ρεύματος I .....	26
<b>Εικόνα 4.1</b> – Ο Άγγλος μαθηματικός και φυσικός Oliver Heaviside .....	32
<b>Εικόνα 4.2</b> – Ο Αμερικανός φυσικός Arthur Gordon Webster.....	33
<b>Εικόνα 4.3</b> – Απεικόνιση και αντιστοίχιση φυσικής ερμηνείας μεγεθών στις αναλογίες ....	34
<b>Εικόνα 4.4</b> – Ο Αμερικανός φυσικός Floyd Alburn Firestone.....	35
<b>Εικόνα 4.5</b> – Αντιστοίχιση μάζας με πηνίο στην αναλογία εμπέδησης.....	37
<b>Εικόνα 4.6</b> – Αντιστοίχιση στοιχείου μηχανικής ενδοτικότητας με πυκνωτή στην αναλογία εμπέδησης .....	38
<b>Εικόνα 4.7</b> – Αντιστοίχιση αποσβέστη και αντίστασης στην αναλογία εμπέδησης.....	38
<b>Εικόνα 4.8</b> – Μηχανικό σύστημα και ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα αναλογίας εμπέδησης .....	41
<b>Εικόνα 4.9</b> – Αντιστοίχιση μάζας με πυκνωτή στην αναλογία κινητικότητας .....	44
<b>Εικόνα 4.10</b> – Αντιστοίχιση στοιχείου μηχανικής ενδοτικότητας με πηνίο στην αναλογία κινητικότητας.....	45
<b>Εικόνα 4.11</b> – Αντιστοίχιση αποσβέστη με ηλεκτρική αγωγιμότητα αντιστάτη στην αναλογία κινητικότητας.....	45
<b>Εικόνα 4.12</b> – Μηχανικό σύστημα και ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα αναλογίας κινητικότητας .....	49
<b>Σχεδιάγραμμα 4.1</b> – Μηχανικό σύστημα ελατηρίου, μάζας και αποσβέστη .....	51
<b>Σχεδιάγραμμα 4.2</b> – Διάγραμμα κόμβων μηχανικού συστήματος.....	52
<b>Σχεδιάγραμμα 4.3</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία εμπέδησης .....	55
<b>Σχεδιάγραμμα 4.4</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία κινητικότητας.....	58
<b>Σχεδιάγραμμα 4.5</b> – Μηχανικό σύστημα ελατηρίου, μάζας και αποσβέστη .....	60
<b>Σχεδιάγραμμα 4.6</b> – Διάγραμμα κόμβων μηχανικού συστήματος.....	62
<b>Σχεδιάγραμμα 4.7</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία εμπέδησης .....	65
<b>Σχεδιάγραμμα 4.8</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία κινητικότητας.....	68
<b>Σχεδιάγραμμα 4.9</b> – Μηχανικό σύστημα ελατηρίου, μάζας και αποσβέστη .....	70

<b>Σχεδιάγραμμα 4.10</b> – Διάγραμμα κόμβων μηχανικού συστήματος.....	71
<b>Σχεδιάγραμμα 4.11</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία εμπέδησης .....	75
<b>Σχεδιάγραμμα 4.12</b> – Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα στην αναλογία κινητικότητας.....	79

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<b>Πίνακας 2.1</b> – Μετασχηματισμοί Laplace .....	29
<b>Πίνακας 4.1</b> – Αντιστοίχιση στοιχείων στην αναλογία εμπέδησης .....	41
<b>Πίνακας 4.2</b> – Αντιστοίχιση στοιχείων στην αναλογία κινητικότητας.....	48

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο περιβάλλον γύρω μας και γενικότερα στη φύση, συναντάμε διαφόρων ειδών φυσικά συστήματα τα οποία αναλύονται και περιγράφονται σύμφωνα με τις βασικές αρχές και τους φυσικούς νόμους που τα διέπουν. Στα συστήματα αυτά μπορούμε να συμπεριλάβουμε όλα εκείνα που αναπαριστούν και βασίζονται σε φυσικά φαινόμενα όπως ένα μηχανικό σύστημα ελατηρίου-μάζας που βασίζεται στην κίνηση ενός αντικειμένου που συνδέεται με ένα ελατήριο, ή ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα στο οποίο συναντάται το φαινόμενο του ηλεκτρισμού που σχετίζεται με την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων.

Αλλά τί συμβαίνει στην περίπτωση όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα φυσικό σύστημα για να αναπαραστήσουμε και να προσεγγίσουμε ένα άλλο; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον διότι χρησιμοποιώντας γνώσεις και θεμελιώδεις νόμους μίας κατάστασης ενός συστήματος, μπορούμε με μία απλή μετατροπή τους να προσεγγίσουμε και να επιλύσουμε δυσκολότερα και πιο σύνθετα προβλήματα. Τα εργαλεία και οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί στη μία περιοχή μπορούν να μεταφερθούν για την επίλυση προβλημάτων της δεύτερης.

Στην παρούσα εργασία, επιδεικνύεται το πώς τα μηχανικά στοιχεία μπορούν να αναπαρασταθούν από τα ηλεκτρικά τους αντίστοιχα, επιτρέποντας στους μηχανικούς να εφαρμόζουν καλά εδραιωμένες τεχνικές ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων για την επίλυση προβλημάτων σε μηχανικά συστήματα. Αυτή η προσέγγιση απλουστεύει όχι μόνο την ανάλυση σύνθετων μηχανικών συστημάτων, αλλά διευκολύνει και τη χρήση καλά ανεπτυγμένων εργαλείων θεωρίας ηλεκτρικών κυκλωμάτων και προσομοίωσης, διευκολύνοντας τελικά το σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση μηχανικών συστημάτων.

Η εργασία ξεκινά καθορίζοντας την αντιστοιχία μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών στοιχείων. Για παράδειγμα, η μάζα είναι ανάλογη με την επαγωγή, η απόσβεση είναι ανάλογη με την αντίσταση και η σκληρότητα είναι ανάλογη με την χωρητικότητα. Επιδεικνύεται επίσης η αναλογία σε

---

ποσότητες στα μηχανικά και ηλεκτρικά συστήματα, όπως η δύναμη και η τάση, η ταχύτητα και το ρεύμα, καθώς και η μετατόπιση και το φορτίο. Κατανοώντας αυτές τις θεμελιώδεις σχέσεις, οι μηχανικοί μπορούν να αξιοποιήσουν τη γνώση τους στη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων για να αντιμετωπίσουν προκλήσεις στα μηχανικά συστήματα.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της χρήσης ηλεκτρομηχανικών αναλογιών είναι η δυνατότητα απλοποίησης της ανάλυσης σύνθετων μηχανικών συστημάτων. Αντιπροσωπεύοντας τα μηχανικά στοιχεία ως τα ηλεκτρικά τους αντίστοιχα, οι μηχανικοί μπορούν να εφαρμόσουν καλά εδραιωμένες τεχνικές ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων, όπως οι νόμοι του Kirchhoff και η ανάλυση δικτύου, για την επίλυση προβλημάτων στα μηχανικά συστήματα. Αυτή η προσέγγιση όχι μόνο εξοικονομεί χρόνο και προσπάθεια, αλλά επιτρέπει επίσης μια πιο διαισθητική κατανόηση της συμπεριφοράς του συστήματος.

Ο βασικός στόχος λοιπόν, της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η αποδελτίωση των γνώσεων σχετικά με την αναλογία μηχανικών και ηλεκτρικών προβλημάτων για μονοδιάστατα στοιχεία ενώ παράλληλα γίνεται μελέτη πάνω στη βασική θεωρία και τις έννοιες των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και των μηχανικών συστημάτων, για την καλύτερη κατανόηση των αναλογιών αυτών.

## ABSTRACT

In the environment around us and in nature more broadly, we encounter various types of physical systems that are analyzed and described according to the fundamental principles and physical laws governing them. These systems include all those that represent and are based on physical phenomena, such as a mass-spring mechanical system that relies on the motion of an object connected to a spring, or a simple electrical circuit where the phenomenon of electricity is related to the movement of charged particles.

But what happens when we want to use one physical system to represent and approach another? The answer to this question is particularly intriguing because by utilizing knowledge and fundamental laws from one system, we can apply a simple transformation to address and solve more complex problems. The tools and methods developed in one area can be transferred to solve problems in another.

This paper demonstrates how mechanical elements can be represented by their electrical counterparts, allowing engineers to apply well-established techniques from electrical circuit analysis to solve problems in mechanical systems. This approach not only simplifies the analysis of complex mechanical systems but also facilitates the use of well-developed tools from electrical circuit theory and simulation, ultimately aiding in the design and optimization of mechanical systems.

The paper begins by establishing the correspondence between mechanical and electrical components. For example, mass is analogous to inductance, damping corresponds to resistance, and stiffness relates to capacitance. The paper also illustrates the analogy in quantities between

---

mechanical and electrical systems, such as force and voltage, velocity and current, as well as displacement and charge. By understanding these fundamental relationships, engineers can leverage their knowledge of electrical circuit theory to tackle challenges in mechanical systems.

One of the main advantages of using electromechanical analogies is the ability to simplify the analysis of complex mechanical systems. By representing mechanical elements as their electrical equivalents, engineers can apply well-established electrical circuit analysis techniques, such as Kirchhoff's laws and network analysis, to solve problems in mechanical systems. This approach not only saves time and effort but also allows for a more intuitive understanding of the system's behavior.

Therefore, the primary goal of this thesis is to consolidate knowledge regarding the analogy between mechanical and electrical problems for one-dimensional elements while simultaneously studying the fundamental theory and concepts of electrical circuits and mechanical systems to enhance understanding of these analogies.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κύριο σκοπό τη διερεύνηση και παρουσίαση των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών, εστιάζοντας ιδιαίτερα στις **αναλογίες εμπέδησης (force-voltage) και κινητικότητας (force-current)**. Στόχος είναι η ανάλυση, η μαθηματική τεκμηρίωση και η πρακτική εφαρμογή αυτών των αναλογιών σε γραμμικά μηχανικά συστήματα, αξιοποιώντας εργαλεία όπως ο μετασχηματισμός Laplace και οι νόμοι Kirchhoff. Η εργασία είναι οργανωμένη σε πέντε κεφάλαια, με τα πρώτα κεφάλαια να καλύπτουν το θεωρητικό υπόβαθρο και τις έννοιες των φυσικών και ηλεκτρομηχανικών συστημάτων, καθώς και των στοιχείων και των νόμων που τα διέπουν. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται λεπτομερώς οι δύο αναλογίες και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις εφαρμογές και στην επιβεβαίωση των αναλογιών μέσα από παραδείγματα γραμμικών μηχανικών συστημάτων με μονοδιάστατα στοιχεία, καταλήγοντας σε συνοπτικά συμπεράσματα για την επιστημονική και πρακτική τους σημασία.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Η έννοια του συστήματος

### 1.1 Τι είναι σύστημα;

#### *1.1.1 Ορισμός ενός Συστήματος*

Ένα σύστημα ορίζεται γενικά ως ένα σύνολο στοιχείων που αλληλεπιδρούν εντός ενός συνόλου κανόνων και ορίων (**Luhmann, 1995**). Ο ορισμός αυτός μπορεί να αναφέρεται σε απλά καθημερινά αντικείμενα, ολόκληρους οργανισμούς ή πολύπλοκες διεργασίες. Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από τα όριά του, τη δομή του και τον σκοπό του, και λειτουργεί σύμφωνα με ένα σύνολο κανόνων ή αρχών και καθορίζουν επακριβώς την αλληλεπίδραση μεταξύ των στοιχείων που το αποτελούν. Συστήματα συναντώνται παντού γύρω μας — από τη βιολογία και τη μηχανική έως τη φιλοσοφία και κοινωνιολογία, όπου συχνά θεωρείται ανοικτό και εξελισσόμενο (**Axelos, 2006**) — προσφέροντάς μας πολύτιμα εργαλεία για να κατανοήσουμε και να ερμηνεύσουμε τον τρόπο λειτουργίας του κόσμου στον οποίο ζούμε.

### 1.2 Συστήματα στη Φυσική

Στις φυσικές επιστήμες, η έννοια του συστήματος αποκτά μία πιο εξειδικευμένη σημασία. Ένα σύστημα στη φυσική ορίζεται ως μία οριοθετημένη περιοχή του χώρου στην οποία εφαρμόζονται νόμοι της φύσης με σκοπό τη μελέτη της συμπεριφοράς της (**Encyclopaedia Britannica, χ.χ.**). Ένα φυσικό σύστημα αποτελεί ένα τμήμα του σύμπαντος που απομονώνεται για τη μελέτη και την εκτενή ανάλυση των μεταβολών που υφίσταται υπό την επίδραση συγκεκριμένων φυσικών φαινομένων. Τα όρια του συστήματος μπορεί να είναι είτε φυσικά είτε θεωρητικά, και καθορίζονται σε συνάρτηση με το περιβάλλον του. Ως περιβάλλον ορίζεται ότι βρίσκεται εκτός του συστήματος και, κατά κανόνα, παραλείπεται από την ανάλυση — εκτός εάν επηρεάζει άμεσα το ίδιο το σύστημα. Αντίστοιχα, όλα όσα περιλαμβάνονται εντός των ορίων του θεωρούνται μέρος του συστήματος.

Τα φυσικά συστήματα μπορούν να ταξινομηθούν σε πολλές κατηγορίες με βάση την επιρροή τους με το περιβάλλον σε **απομονωμένα**, **ανοικτά** και **κλειστά**.

#### *1.2.1 Απομονωμένα συστήματα*

Στα **απομονωμένα συστήματα** δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας ή ύλης με το περιβάλλον, εξού και ο όρος «απομόνωση». Η έννοια αυτή υπήρξε θεμελιώδης για την ανάπτυξη της κλασικής θερμοδυναμικής. Επιστήμονες όπως ο **Rudolf Clausius (1850)** και ο **Ludwig Boltzmann (1872, 1877)** βασίστηκαν στην ιδέα του απομονωμένου συστήματος για να διατυπώσουν βασικούς νόμους, όπως ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής (διατήρηση της ενέργειας) και ο δεύτερος

νόμος (αύξηση της εντροπίας). Η υπόθεση της απομόνωσης επέτρεψε τη μαθηματική θεμελίωση κρίσιμων εννοιών, χωρίς την ανάγκη υπολογισμού εξωτερικών επιδράσεων.

Στη φυσική, ένα απομονωμένο σύστημα ορίζεται ως ένα σύστημα το οποίο δεν επιτρέπει καμία είσοδο ή έξοδο ύλης και ενέργειας. Παρακάτω παρουσιάζονται χαρακτηριστικά παραδείγματα:

1. **Το Σύμπαν:** Το ίδιο το σύμπαν θεωρείται το απόλυτο απομονωμένο σύστημα, καθώς δεν υπάρχει κάτι "έξω" από αυτό με το οποίο να μπορεί να αλληλεπιδράσει. Παρότι τα επιμέρους υποσυστήματά του αλληλεπιδρούν, το σύμπαν συνολικά διατηρεί την ενέργειά του.
2. **Ιδανικό Θερμός:** Ένας τέλει μονωμένος θερμός, που αποτρέπει οποιαδήποτε θερμική ανταλλαγή, αποτελεί θεωρητικό πρότυπο απομονωμένου συστήματος. Αν και στην πράξη παρατηρούνται θερμικές απώλειες, το ιδανικό αυτό παράδειγμα παραμένει διδακτικό.
3. **Σφραγισμένο - Μονωμένο Κουτί:** Ένα πλήρως μονωμένο και σφραγισμένο κουτί, χωρίς καμία μεταφορά θερμότητας, ύλης ή έργου, μπορεί να θεωρηθεί απομονωμένο, εφόσον διατηρείται σε ηρεμία και δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του.
4. **Διαστημικό Σκάφος:** Ένα διαστημικό σκάφος, απομονωμένο σε σημείο του διαστήματος μακριά από βαρυτικά ή ηλεκτρομαγνητικά πεδία, μπορεί να προσεγγιστεί ως απομονωμένο σύστημα, υπό την παραδοχή ότι οι εξωτερικές επιρροές είναι αμελητέες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω παραδείγματα είναι ιδανικά. Στην πραγματικότητα, απόλυτα απομονωμένα συστήματα δεν υφίστανται, καθώς κάποια μορφή αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον είναι πάντοτε παρούσα. Ωστόσο, η έννοια του απομονωμένου συστήματος διατηρεί μεγάλη θεωρητική και πρακτική αξία στην κατανόηση φυσικών φαινομένων.

Αντίθετα, στα **μη απομονωμένα** συστήματα παρατηρείται ανταλλαγή ενέργειας (και ενδεχομένως ύλης) με το περιβάλλον. Αυτή η ανταλλαγή μπορεί να λάβει διάφορες μορφές:

- **Έργο:** μεταφορά ενέργειας μέσω δύναμης που προκαλεί μετατόπιση.
- **Μηχανικά κύματα:** ενέργεια μεταφέρεται μέσω διαταραχών σε κάποιο υλικό μέσο.
- **Θερμότητα:** μεταφορά ενέργειας λόγω διαφοράς θερμοκρασίας.
- **Μεταφορά ύλης:** είσοδος ή έξοδος υλικών που φέρουν ενέργεια.
- **Ηλεκτρικό ρεύμα:** μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρονίων.
- **Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία:** μεταφορά ενέργειας μέσω φωτός ή άλλων κυμάτων.

Η κατανόηση των μορφών αυτών είναι θεμελιώδης για την ανάλυση ανοιχτών και κλειστών συστημάτων στη φυσική και τη μηχανική

### 1.2.2 Κλειστά συστήματα

Στα **κλειστά συστήματα** παρατηρείται ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον, όχι όμως ύλης. Δηλαδή, η ενέργεια μπορεί να μεταφέρεται υπό μορφή θερμότητας ή έργου, αλλά η ποσότητα της ύλης εντός του συστήματος παραμένει σταθερή. Η μελέτη τέτοιων συστημάτων, όπως οι θερμικές μηχανές, υπήρξε καθοριστική για τη διαμόρφωση των θεμελιωδών νόμων της θερμοδυναμικής. Φυσικοί όπως ο **Sadi Carnot (1824)** προσέγγισαν τη λειτουργία των θερμικών μηχανών θεωρώντας τις ως κλειστά συστήματα που ανταλλάσσουν θερμότητα με θερμές και ψυχρές δεξαμενές. Χάρη σε αυτήν την παραδοχή, ο Carnot διατύπωσε το Θεώρημα του Carnot, το οποίο περιγράφει τη μέγιστη δυνατή απόδοση μιας θερμικής μηχανής που λειτουργεί ανάμεσα σε δύο θερμοκρασίες.

Παραδείγματα Κλειστών Συστημάτων:

1. **Χύτρα Ταχύτητας:** Κατά τη διάρκεια του μαγειρέματος, η χύτρα σφραγίζεται και θερμαίνεται. Επιτρέπει τη μεταφορά θερμότητας από την εστία στο εσωτερικό της, αλλά εμποδίζει τη διαφυγή υγρών ή ατμού, διατηρώντας έτσι τη μάζα σταθερή.
2. **Σφραγισμένο Μπουκάλι Νερού:** Ένα μπουκάλι που μόλις έχει βγει από το ψυγείο και αφήνεται σε θερμοκρασία δωματίου, ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον μέχρι να εξισορροπηθεί η θερμοκρασία του. Όμως, η ποσότητα του νερού στο εσωτερικό του παραμένει σταθερή.
3. **Διάταξη Εμβόλου-Κυλίνδρου:** Ένα αέριο περιορίζεται σε έναν κύλινδρο με κινητό έμβολο. Κατά την εκτόνωση του αερίου παράγεται έργο (το έμβολο κινείται), αλλά το αέριο δεν διαφεύγει από το σύστημα.
4. **Κινητήρας Εσωτερικής Καύσης:** Η διαδικασία παραγωγής ενέργειας σε έναν κινητήρα εσωτερικής καύσης μπορεί να θεωρηθεί ως κλειστό σύστημα. Αν και ανταλλάσσεται θερμότητα με το περιβάλλον, η ύλη (μίγμα αέρα-καυσίμου) παραμένει εντός του κινητήρα καθ' όλη τη διάρκεια του κύκλου καύσης.
5. **Λέβητας Νερού:** Όταν θερμαίνεται νερό σε έναν λέβητα, μετατρέπεται σε ατμό. Παρότι προστίθεται ενέργεια (θερμότητα), η ύλη (νερό) δεν εγκαταλείπει το σύστημα — διατηρείται, έστω και σε διαφορετική φάση.

### 1.2.3 Ανοιχτά συστήματα

Στα **ανοιχτά συστήματα** υπάρχει ανταλλαγή τόσο ενέργειας όσο και ύλης με το περιβάλλον, με το οποίο αλληλεπιδρούν διαρκώς. Η έννοια των ανοιχτών συστημάτων αναπτύχθηκε κυρίως κατά τον 20ό αιώνα, με σημαντική συμβολή του **Ilya Prigogine (1967)**, ο οποίος μελέτησε τη συμπεριφορά τους υπό συνθήκες μη ισορροπίας. Διαπίστωσε ότι τέτοια συστήματα μπορούν να διατηρούν σταθερές καταστάσεις μέσω συνεχούς ροής ενέργειας και ύλης από και προς το περιβάλλον. Αυτό οδήγησε στην κατανόηση φαινομένων όπως η αυτό-οργάνωση και η εμφάνιση πολύπλοκων δομών σε χημικά και βιολογικά συστήματα.

Παραδείγματα ανοιχτών συστημάτων:**1. Ανθρώπινος Οργανισμός**

Το ανθρώπινο σώμα είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ανοιχτού συστήματος, καθώς προσλαμβάνει ενέργεια και ύλη μέσω της τροφής και του νερού, και αποβάλλει ενέργεια (ως θερμότητα) και ύλη (διοξείδιο του άνθρακα, ιδρώτα, ούρα, περιττώματα).

**2. Κινητήρας Αυτοκινήτου**

Απορροφά αέρα και καύσιμο, πραγματοποιεί καύση και αποβάλλει καυσαέρια (ύλη), ενώ αποδίδει και έργο και θερμότητα στο περιβάλλον (ενέργεια).

**3. Φωτοσύνθεση**

Τα φυτά προσλαμβάνουν νερό και διοξείδιο του άνθρακα (ύλη) και φως (ενέργεια), και αποβάλλουν οξυγόνο και γλυκόζη. Αποτελεί χαρακτηριστική διεργασία ενός βιολογικού ανοιχτού συστήματος.

**4. Αναπνοή**

Οι οργανισμοί απορροφούν οξυγόνο και απελευθερώνουν διοξείδιο του άνθρακα και θερμότητα. Η συνεχής ανταλλαγή ύλης και ενέργειας με το περιβάλλον καθιστά την αναπνοή διαδικασία ανοιχτού συστήματος.

Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν πώς ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος εξαρτάται από το αν και πώς διαπερνούν τα όριά του η ενέργεια, η ύλη ή η πληροφορία.

**1.2.4 Σημασία του καθορισμού ενός συστήματος**

Ο σωστός **καθορισμός ενός συστήματος** είναι κρίσιμος στην επιστημονική μελέτη, καθώς επιτρέπει μία πιο απλοποιημένη προσέγγιση στην ανάλυση φαινομένων. Η πολυπλοκότητα του κόσμου μπορεί να γίνει διαχειρίσιμη μόνο όταν επικεντρωνόμαστε σε ένα οριοθετημένο μέρος του — το σύστημα — αγνοώντας προς το παρόν το υπόλοιπο σύμπαν, εκτός εάν επηρεάζει το υπό μελέτη σύστημα. Ο καθορισμός του συστήματος επιτρέπει στους επιστήμονες να εφαρμόσουν **θεμελιώδεις νόμους της φυσικής** (όπως οι Νόμοι της θερμοδυναμικής ή του Νεύτωνα ή οι Νόμοι του Kirchhoff) και να κατανοήσουν τη συμπεριφορά του υπό διαφορετικές συνθήκες. Παράλληλα, βοηθά στον προσδιορισμό των εισροών και εκροών ενέργειας ή ύλης, στην αναγνώριση των εσωτερικών διεργασιών του συστήματος και τον σαφή προσδιορισμό των φυσικών μεγεθών που θα μελετηθούν. Τέλος, καθιστά δυνατή τη σχεδίαση και εκτέλεση πειραμάτων με σαφείς παραμέτρους και μετρήσιμα αποτελέσματα. Συνεπώς, ο ακριβής καθορισμός του συστήματος δεν είναι μόνο βοηθητικός, αλλά απαραίτητος για κάθε σοβαρή επιστημονική ανάλυση και εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Βασικές έννοιες μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων και μετασχηματισμού Laplace

### 2.1 Μηχανικά γραμμικά συστήματα

#### 2.1.1 Νόμοι Νεύτωνα

Οι **Νόμοι** ή **Αξιώματα του Νεύτωνα** είναι τρεις θεμελιώδεις φυσικοί νόμοι, όπου αποτελούν τη βάση της Κλασσικής Μηχανικής. Περιγράφουν την σχέση μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα και της κίνησής του ως άμεσο αποτέλεσμα αυτών των δυνάμεων.

Ο **Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα**, γνωστός και ως **Νόμος της Αδράνειας**, δηλώνει ότι ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ευθεία γραμμή εφόσον δεν ασκείται επάνω του κάποια δύναμη. Η **αδράνεια** είναι η ιδιότητα ενός σώματος (μάζας) να αντιστέκεται σε οποιαδήποτε αλλαγή της κινητικής του κατάστασης. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη η αδράνεια του. Ένα επιβατικό όχημα που φρενάρει απότομα και οι επιβάτες τείνουν να κινηθούν προς τα εμπρός ή ένας δορυφόρος που κινείται στο κενό του διαστήματος με σταθερή ταχύτητα λόγω απουσίας εξωτερικών δυνάμεων, αποτελούν παραδείγματα αδράνειας. Ως εκ τούτου, ο πρώτος νόμος εισάγει την έννοια της ισορροπίας δυνάμεων δηλαδή όταν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, δεν υπάρχει επιτάχυνση και η κινητική κατάσταση του σώματος δεν αλλάζει.

Ο **Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα** ορίζει ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα αντικείμενο ισούται με το γινόμενο της μάζας και της επιτάχυνσής του. Αυτός ο νόμος παρέχει το πλαίσιο για την ανάλυση της δυναμικής των συστημάτων, συμπεριλαμβανομένης της εξαγωγής εξισώσεων κίνησης για συστήματα ελατηρίου-μάζας-απόσβεσης και διατυπώνεται ως εξής:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

όπου  $\Sigma F$  το άθροισμα δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα,  $m$  η μάζα σώματος και  $a$  η επιτάχυνση. Ουσιαστικά ο δεύτερος νόμος δηλώνει ότι απαιτείται δύναμη για να μεταβληθεί είτε το μέτρο ή είτε η διεύθυνση της ταχύτητας ενός σώματος. Όσο μεγαλύτερη η ασκούμενη δύναμη τόσο μεγαλύτερη και η επιτάχυνση. Παράλληλα, αν η ίδια δύναμη ασκηθεί σε δύο σώματα με διαφορετική μάζα, το σώμα με τη μικρότερη μάζα θα αποκτήσει μεγαλύτερη επιτάχυνση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ένα φτερό και μια πέτρα πέφτουν με διαφορετικούς ρυθμούς στην παρουσία αέρα, αλλά με τον ίδιο ρυθμό στο κενό.

Ο **Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα**, γνωστός και ως **Νόμος Δράσης και Αντίδρασης**, ορίζει ότι για κάθε δράση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση. Αυτό σημαίνει ότι όταν ένα σώμα ασκεί δύναμη σε ένα δεύτερο σώμα, τότε το δεύτερο σώμα ασκεί ταυτόχρονα δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης στο πρώτο σώμα. Δηλαδή, οι δυνάμεις πάντα εμφανίζονται κατά ζεύγη και δρουν σε διαφορετικά σώματα. Ο τρίτος νόμος εξηγεί πλήθος φυσικών φαινομένων και είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την κατανόηση της κίνησης μέσω αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωμάτων. Η άνωση που παράγεται από ένα πτερύγιο αποτελεί παράδειγμα εφαρμογής του τρίτου νόμου: το

περύγιο ασκεί δύναμη στον αέρα εκτρέποντάς τον προς τα κάτω (δράση), και ο αέρας αντιδρά ασκώντας ίση και αντίθετη δύναμη προς τα πάνω στο περύγιο (αντίδραση), προκαλώντας την άνοδό του. Ένα ακόμη παράδειγμα αποτελεί η κίνηση μιας περιστρεφόμενης μπάλας (φαινόμενο Magnus): καθώς η μπάλα περιστρέφεται, εκτρέπει τον αέρα προς μία κατεύθυνση (δράση) και αντιδρά κινούμενη προς την αντίθετη κατεύθυνση λόγω της άνισης κατανομής πίεσης γύρω της.

Ο τρίτος νόμος όμως δεν εξηγεί τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης, αλλά δείχνει ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο σωμάτων είναι αμοιβαίες και ταυτόχρονες, γεγονός καθοριστικό για τη μελέτη πολύπλοκων συστημάτων και για την κατανόηση φαινομένων όπως η ώθηση, η πρόσκρουση και η έλξη-απόωση σωμάτων.

### 2.1.2 Βασικά στοιχεία γραμμικών μηχανικών συστημάτων

Τα **γραμμικά μηχανικά συστήματα** αποτελούν βασικό εργαλείο της Φυσικής και της Μηχανικής για την μοντελοποίηση και ανάλυση φυσικών φαινομένων. Ένα από τα κλασικά παραδείγματα τέτοιων συστημάτων αποτελούν τα συστήματα **ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη** για την κατανόηση της συμπεριφοράς της ταλάντωσης μηχανικών συστημάτων.

#### 2.1.2.1 Μάζα, ελατήριο και ο Νόμος του Hooke

Η **μάζα** συμβολίζει την αδράνεια του αντικειμένου, δηλαδή την αντίστασή του στην επιτάχυνση όταν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Καθορίζει τη δυναμική απόκριση του συστήματος στις εφαρμοζόμενες δυνάμεις, σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα.

Το **ελατήριο** είναι ένα μηχανικό στοιχείο το οποίο έχει την ικανότητα να αποθηκεύει μηχανική ενέργεια καθώς αυτό παραμορφώνεται προσωρινά. Το κάθε ελατήριο μπορεί να παραμορφωθεί ως προς μία διάστασή του υπό την επίδραση δύναμης. Όταν ασκείται δύναμη σε αυτήν τη διάσταση, το ελατήριο παραμορφώνεται αποθηκεύοντας το έργο της δύναμης, υπό την μορφή δυναμικής ενέργειας. Σε ιδανικές συνθήκες, το ελατήριο υπακούει απόλυτα στο **Νόμο του Hooke**, σύμφωνα με τον οποίο η παραγόμενη δύναμη είναι ανάλογη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας, και δεν παρουσιάζονται απώλειες ενέργειας προς το περιβάλλον. Επίσης η μάζα του του ιδανικού ελατηρίου θεωρείται αμελητέα. Ο **Νόμος του Hooke** διατυπώνεται ως εξής:

$$F_s = -k \cdot x$$

όπου  $F_s$  η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο,  $k$  η σταθερά του ελατηρίου που εκφράζει τη σκληρότητα του και μετριέται σε  $N/m$ , και  $x$  η μετατόπιση του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας.

#### Οριζόντιο σύστημα ελατηρίου-μάζας

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου και κινείται χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Στη θέση ισορροπίας, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Θ.Φ.Μ.).



Σε οποιοδήποτε σημείο της κίνησης, η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου, η οποία είναι αντίθετη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας και προκαλεί την επαναφορά του σώματος σε αυτή. Σε κάθε τυχαία θέση, η απομάκρυνση  $x$  από τη θέση ισορροπίας αντιστοιχεί στην επιμήκυνση ή τη συσπίρωση του ελατηρίου, και για τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου  $F_s$  ισχύει:

$$\Sigma F = -F_s = -k \cdot x$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την εκτέλεση απλής αρμονικής ταλάντωσης από το σώμα, με σταθερά επαναφοράς  $D = k$ .

### Κατακόρυφο σύστημα ελατηρίου -μάζας

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου και κινείται κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου, εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Στη θέση ισορροπίας, το ελατήριο δεν βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, καθώς έχει ήδη επιμηκυνθεί λόγω της επίδρασης του βάρους του σώματος. Επίσης, η δύναμη επαναφοράς  $\Sigma F$  δεν ταυτίζεται με την δύναμη του ελατηρίου  $F_s$  λόγω της επίδρασης του βάρους. Επομένως, στη θέση ισορροπίας η δύναμη του ελατηρίου εξισορροπεί το βάρος του σώματος ενώ το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά  $x_1$ , και ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m \cdot g - F_s = 0 \Rightarrow m \cdot g - k \cdot x_1 = 0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot x_1 \quad (2.1)$$

όπου  $m$  η μάζα του σώματος,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $k$  η σταθερά του ελατηρίου και  $x_1$  η επιμήκυνση του ελατηρίου λόγω του βάρους.

Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του συστήματος, το σώμα απέχει κατά  $x$  από την θέση ισορροπίας και η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι:

$$\Sigma F = m \cdot g - F_s' = m \cdot g - k \cdot (x_1 + x) = m \cdot g - k \cdot x_1 - k \cdot x$$

και αντικαθιστώντας από την (2.1) έχουμε:

$$\Sigma F = k \cdot x_1 - k \cdot x_1 - k \cdot x = -k \cdot x = -Dx$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη και αντίθετη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, που σημαίνει ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς  $D = k$ .

### Αποθήκευση ενέργειας ελατηρίου

Η **δυναμική ενέργεια** που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο κατά την παραμόρφωσή του δίνεται από τη σχέση:

$$U_s = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Η ενέργεια αυτή **απελευθερώνεται κατά την επιστροφή του ελατηρίου** στη φυσική του θέση και αποτελεί βασική συνιστώσα στην ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ κινητικής και δυναμικής στα ταλαντευόμενα συστήματα.

### 2.1.2.2 Αποσβέστης και απόσβεση

Ο **αποσβέστης** αναπαριστά την αντίσταση στην κίνηση, η οποία συνήθως είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Ο ρόλος του είναι η διάχυση της ενέργειας (π.χ. μέσω θερμότητας) και ο περιορισμός των ταλαντώσεων, οδηγώντας σταδιακά το σύστημα σε ηρεμία. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **απόσβεση** και είναι καθοριστικής σημασίας για τη σταθερότητα και την αποφυγή απρόβλεπτων ταλαντώσεων σε μηχανικά και δομικά συστήματα.

#### Ιξώδης Απόσβεση

Ιξώδης χαρακτηρίζεται η απόσβεση που προκαλείται από την αντίσταση ρευστών. Η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη της ταχύτητάς και δίνεται από τη σχέση:

$$F_d = -b \cdot v$$

όπου **b** είναι ο συντελεστής ιξώδους απόσβεσης και **v** η ταχύτητα του σώματος.

#### Απόσβεση λόγω Τριβής (Coulomb)

Απόσβεση που προκύπτει από την τριβή μεταξύ επιφανειών που ολισθαίνουν μεταξύ τους. Η δύναμη είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την ταχύτητα. Το πλάτος των ταλαντώσεων μειώνεται με φθίνουσα γραμμική μορφή και όχι εκθετικά.

#### Δομική απόσβεση

Απόσβεση που προκύπτει από την εσωτερική τριβή μέσα στα υλικά. Η απώλεια ενέργειας συμβαίνει καθώς το υλικό καθώς παραμορφώνεται και επανέρχεται στην αρχική του μορφή. Είναι χαρακτηριστική σε στερεά υλικά και δομικά στοιχεία.

**Σημείωση:** Στα παραδείγματα ηλεκτρομηχανικών αναλογιών **χρησιμοποιείται η ιξώδης απόσβεση**, λόγω της γραμμικής της μορφής. Αυτό επιτρέπει τη μαθηματική μοντελοποίηση με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ενώ παράλληλα υπάρχει συμβατότητα με τα στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Άλλες μορφές απόσβεσης, όπως η Coulomb ή η δομική, δεν περιλαμβάνονται λόγω της μη γραμμικής τους φύσης ή της εξάρτησης από το υλικό.



### 2.1.2.3 Δυνάμεις σε σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη

Σε ένα ιδανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου, η δύναμη επαναφοράς που ασκείται από το ελατήριο είναι αντίθετης κατεύθυνσης από τη μετατόπιση του σώματος, εξασφαλίζοντας την αρμονική ταλάντωση του συστήματος. Ωστόσο, τυχόν εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να επηρεάσουν τη δυναμική του συστήματος, όπως η παρουσία απόσβεσης, η οποία επιδρά με δύναμη αντίθετη προς την ταχύτητα κίνησης του σώματος. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι το άθροισμα της δύναμης του ελατηρίου, της δύναμης απόσβεσης και οποιασδήποτε εξωτερικής δύναμης. Στην περίπτωση χωρίς εξωτερική διέγερση, η συνισταμένη δύναμη δίνεται από:

$$F_{net} = F_s + F_d = -k \cdot x - b \cdot v$$

### 2.1.2.4 Μετατόπιση και σχετική ταχύτητα

Η **μετατόπιση** αναφέρεται στην αλλαγή της θέσης ενός σώματος σε σχέση με την αρχική του θέση. Είναι διανυσματικό μέγεθος και εκφράζεται ως:

$$x = x_f - x_i$$

Όπου  $x_i$  η αρχική θέση και  $x_f$  η τελική θέση του σώματος.

Η **σχετική ταχύτητα** περιγράφει την ταχύτητα ενός σώματος σε σχέση με ένα άλλο. Αν δύο σώματα έχουν ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$ , τότε η σχετική τους ταχύτητα είναι:

$$v_{rel} = v_1 - v_2$$

Σε πιο σύνθετα μηχανικά συστήματα με περισσότερα από ένα σώματα, η σχετική ταχύτητα και η μετατόπιση ορίζονται:

$$x_{rel} = x_1 - x_2$$

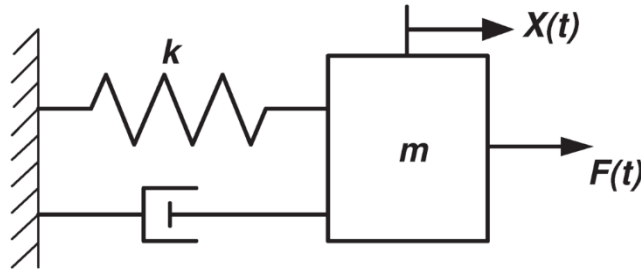
και

$$v_{rel} = \frac{dx_{rel}}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}$$

Αυτές οι έννοιες είναι θεμελιώδεις στην ανάλυση πολύπλοκων συστημάτων, με εφαρμογές στην αυτοκινητοβιομηχανία, τη ρομποτική, την αεροδιαστημική και σε κάθε σύστημα με δομικά στοιχεία που αλληλοεπιδρούν μέσω ελατηρίων και αποσβεστήρων.

### 2.1.3 Μαθηματική μοντελοποίηση συστήματος ελατηρίου-μάζας-αποσβέστη

Έστω ένα σύστημα αποτελούμενο από μία μάζα  $m$  στην οποία είναι συνδεδεμένα ένα ελατήριο σταθεράς  $k$  και ένας αποσβεστήρας με συντελεστή απόσβεσης  $b$ :



**Εικόνα 2.1:** Μηχανικό γραμμικό σύστημα ελατηρίου-μάζας-αποσβέστη.

Όταν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας, το σύστημα υφίσταται τη δύναμη επαναφοράς ελατηρίου  $F_s = -kx$ , την δύναμη απόσβεσης  $F_d = -b \cdot v$  και μια εξωτερική δύναμη  $F_{ext}$ . Η εξίσωση κίνησης του συστήματος, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, είναι:

$$\sum F(t) = m \cdot a(t) \Rightarrow -k \cdot x(t) - c \cdot v(t) + F_{ext}(t) = m \cdot a(t)$$

ή ισοδύναμα:

$$F_{ext}(t) = k \cdot x(t) + c \cdot v(t) + m \cdot a(t)$$

Αυτή είναι η **διαφορική εξίσωση** που περιγράφει τη δυναμική ενός **γραμμικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη**.

#### 2.1.4 Μηχανική εμπέδηση

Η μηχανική εμπέδηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια στην ανάλυση συστημάτων ταλάντωσης, καθώς περιγράφει τη σχέση μεταξύ της εφαρμοζόμενης δύναμης και της ταχύτητας στο σύστημα. Επίσης, συμβάλλει στην κατανόηση και τον έλεγχο της δυναμικής απόκρισης των μηχανικών συστημάτων, ιδιαίτερα όταν αυτά βρίσκονται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Ορίζεται ως ο λόγος της εφαρμοζόμενης περιοδικής δύναμης προς την ταχύτητα στην ίδια συχνότητα, δηλαδή:

$$Z_m(\omega) = \frac{F(\omega)}{v(\omega)}$$

όπου  $Z_m(\omega)$  η μηχανική εμπέδηση,  $F(\omega)$  η εφαρμοζόμενη δύναμη (στο πεδίο της συχνότητας),  $v(\omega)$  η ταχύτητα του συστήματος (στο πεδίο της συχνότητας) και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα της διέγερσης.

Η μηχανική εμπέδηση αποτελεί **σύνθετο μέγεθος**, δηλαδή έχει **πραγματικό** και **φανταστικό** μέρος. Για ένα **γραμμικό μηχανικό σύστημα** αποτελούμενο από μάζα  $m$ , αποσβέστη με συντελεστή απόσβεσης  $b$  και ελατήριο με σταθερά  $k$ , η συνολική μηχανική εμπέδηση δίνεται από τη σχέση:

$$Z_m(\omega) = j \cdot \omega \cdot m + b + \frac{k}{j \cdot \omega}$$

ή εναλλακτικά:

$$Z_m(\omega) = Z_M + Z_b + Z_{C_m}$$

όπου  $Z_M$  η αδρανειακή αντίδραση (inertive reactance),  $Z_b$  η μηχανική αντίσταση (mechanical resistance),  $Z_{C_m}$  η ενδοτική αντίδραση (compliant reactance) και  $j = \sqrt{-1}$  η φανταστική μονάδα.

Η εμπέδηση εξαρτάται από την συχνότητα και η συμπεριφορά της ποικίλλει ανάλογα με τη συχνότητα της εφαρμοζόμενης δύναμης, δηλαδή για:

- Χαμηλές συχνότητες ( $\omega \rightarrow 0$ ), κυριαρχεί η ενδοτική συνιστώσα του ελατηρίου και η εμπέδηση τείνει στο  $Z_m \approx \frac{k}{j \cdot \omega}$ .
- Υψηλή συχνότητα ( $\omega \rightarrow \infty$ ), κυριαρχεί η αδρανειακή συνιστώσα της μάζας και η εμπέδηση τείνει στο  $Z_m \approx j \cdot \omega \cdot m$ .
- Συχνότητα συντονισμού ( $\omega = \omega_r$ ), η ενδοτική και αδρανειακή συνιστώσα αλληλοαναιρούνται (το φανταστικό μέρος μηδενίζεται) και η εμπέδηση είναι ελάχιστη, περιοριζόμενη μόνο στη μηχανική αντίσταση  $b$ . Η φυσική γωνιακή συχνότητα του συστήματος ισούται με  $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Η ανάλυση της εμπέδησης επιτρέπει την πρόβλεψη της απόκρισης του συστήματος υπό αρμονική διέγερση και είναι άμεσα συγκρίσιμη με την ηλεκτρική εμπέδηση στα εναλλασσόμενα ηλεκτρικά κυκλώματα, παρέχοντας τη βάση για την ανάπτυξη ηλεκτρομηχανικών αναλογιών.

### Μηχανική Κινητικότητα

Εναλλακτικά της μηχανικής εμπέδησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μηχανική κινητικότητα, η οποία αποτελεί το αντίστροφο μέγεθος και ορίζεται ως:

$$Y_m(\omega) = \frac{v(\omega)}{F(\omega)}$$

Η κινητικότητα εκφράζει την ευκολία με την οποία το σύστημα αποκρίνεται σε εξωτερική διέγερση, και είναι ανάλογη της ηλεκτρικής αγωγιμότητας στην αναλογία κινητικότητας.

## 2.2 Θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων

### 2.2.1 Βασικά ηλεκτρικά μεγέθη

Η θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μαζί με τη θεωρία ηλεκτρομαγνητισμού, αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη θεωρητικά υπόβαθρα πάνω στα οποία έχει αναπτυχθεί ολόκληρος ο τομέας της Ηλεκτρολογίας και των εφαρμογών της. Η κατανόηση των βασικών ηλεκτρικών μεγεθών και των σχέσεων τους αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την μελέτη και την ερμηνεία της λειτουργίας των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ως **ηλεκτρικό κύκλωμα** ορίζεται κάθε κλειστό σύστημα φυσικών στοιχείων τα οποία αποτελούν μέρος της διαδρομής που ακολουθούν τα ηλεκτρικά φορτία κατά την οργανωμένη και προσανατολισμένη κίνησή τους.

#### 2.2.1.1 Ηλεκτρικό φορτίο

Στη σύγχρονη εποχή, η κατανόηση της έννοιας του φορτίου βασίζεται στη ατομική θεωρία όπου το άτομο απεικονίζεται ως ένα βασικό σωματίδιο ενός χημικού στοιχείου, αποτελούμενο από έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα που περιβάλλεται από αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Σε ένα ουδέτερο φορτισμένο άτομο, το συνολικό φορτίο του πυρήνα ισοδυναμεί με το συνολικό φορτίο των ηλεκτρονίων. Έτσι, όταν τα ηλεκτρόνια υπερτερούν ή υστερούν των πρωτονίων που αποτελούν το θετικό φορτίο του πυρήνα, τότε το άτομο είναι αρνητικά ή θετικά φορτισμένο αντίστοιχα. Η βασική μονάδα του φορτίου είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου και η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το *Coulomb* (*C*) και συμβολίζεται με **Q**. Ένα ηλεκτρόνιο έχει φορτίο:

$$q_e = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

#### 2.2.1.2 Ηλεκτρικό ρεύμα

Το φαινόμενο της προσανατολισμένης ροής ηλεκτρικού φορτίου κατά μήκος ενός αγωγού ενός κυκλώματος, ονομάζεται ηλεκτρικό ρεύμα. Το μέγεθος που μετρά το ηλεκτρικό ρεύμα είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος με μονάδα μέτρησης στο S.I. το *Ampere* (*A*), συμβολίζεται με **I** και ισούται με τον ρυθμό διέλευσης του ηλεκτρικού φορτίου από τη διατομή ενός αγωγού:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

ή

$$I = \frac{Q}{T}$$

Μία τυχαία κίνηση ηλεκτρονίων σε ένα αγωγό δεν προκαλεί ηλεκτρικό ρεύμα, εκτός εάν υπάρχει συνολική μεταφορά φορτίου σε συγκεκριμένη κατεύθυνση με την πάροδο του χρόνου.

Οι πιο συνηθισμένοι τύποι ηλεκτρικού ρεύματος είναι το συνεχές (DC) και το εναλλασσόμενο ρεύμα (AC). Στο συνεχές ρεύμα η ένταση και η κατεύθυνση του παραμένουν σταθερά με το χρόνο ενώ στο εναλλασσόμενο ρεύμα η ένταση και η κατεύθυνση του μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο.

### 2.2.1.3 Ηλεκτρική τάση

Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας δηλώνει ότι η ενέργεια δεν δημιουργείται και ούτε εξαφανίζεται, αλλά μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο ή μετατρέπεται από μία μορφή σε μία άλλη. Ειδικότερα η ηλεκτρική ενέργεια είναι μία μορφή ενέργειας η οποία συνήθως είναι αποτέλεσμα μετατροπής άλλων μορφών ενέργειας. Η μετατροπή αυτή μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους και μπορεί να είναι:

- 1) *Ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας.* Οι γεννήτριες ηλεκτρικού ρεύματος, που βασίστηκαν στην εφεύρεση του Faraday το 1831, παράγουν ηλεκτρική ενέργεια μέσω της μηχανικής ενέργειας λόγω περιστροφής.
- 2) *Ηλεκτροχημική μετατροπή ενέργειας.* Οι ηλεκτρικές μπαταρίες παράγουν ηλεκτρική ενέργεια μέσω της μετατροπής της χημικής ενέργειας.
- 3) *Μαγνητοϋδροδυναμική μετατροπή ενέργειας.* Γεννήτριες που παράγουν ηλεκτρική ενέργεια από μηχανική ενέργεια μέσω της αλληλεπίδρασης ενός κινούμενου ρευστού (συνήθως υψηλής ταχύτητας ιονισμένου αερίου ή πλάσματος) και ενός μαγνητικού πεδίου.
- 4) *Φωτοβολταϊκή μετατροπή ενέργειας.* Συσκευές που μπορούν να μετατρέψουν την ηλιακή ενέργεια άμεσα σε ηλεκτρική, όπως τα φωτοβολταϊκά συστήματα.

Βέβαια, η λειτουργία καθεμιάς από αυτές τις διαφορετικές πηγές ηλεκτρικής ενέργειας είναι ίδια όσον αφορά την ενέργεια και το φορτίο.

Για να μετακινηθεί ένα ηλεκτρόνιο σε ένα αγωγό προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, απαιτεί κάποιο έργο ή μεταφορά ενέργειας. Συγκεκριμένα, εάν διαβιβάζεται ηλεκτρικό ρεύμα από έναν ακροδέκτη A σε έναν ακροδέκτη B ενός γενικού στοιχείου κυκλώματος, τότε η ώθηση του φορτίου διαμέσου του στοιχείου απαιτεί κατανάλωση ενέργειας. Συνεπώς, ανάμεσα στους δύο ακροδέκτες εμφανίζεται μία ηλεκτρική τάση ή διαφορά δυναμικού «κατά μήκος» του στοιχείου ή διαφορετικά, μία ηλεκτρεγερτική δύναμη (HEΔ - electromotive force - emf) η οποία προκαλεί το έργο για την ώθηση του φορτίου. Ουσιαστικά, είναι ο λόγος του έργου που απαιτείται για την μετακίνηση του φορτίου από το σημείο A στο σημείο B προς το ίδιο το φορτίο δηλαδή:

$$v_{AB} = \frac{dw}{dq}$$

ή

$$V_{AB} = \frac{W}{Q}$$

Μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής τάσης στο S.I. είναι το *Joule* ανά *Coulomb* ( $J/C$ ) ή αλλιώς *Volt* ( $V$ ) και συμβολίζεται με  $V$ . Όπως και το ηλεκτρικό ρεύμα, μία σταθερή ηλεκτρική τάση ονομάζεται συνεχής ηλεκτρική τάση (DC Voltage) ενώ μια περιοδικά μεταβαλλόμενη ηλεκτρική τάση ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση (AC Voltage).

#### 2.2.1.4 Διακλαδώσεις, κόμβοι και βρόχοι

Καθώς τα στοιχεία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με διάφορους τρόπους, είναι σημαντική η κατανόηση βασικών εννοιών της τοπολογίας δικτύων όπου μελετώνται οι ιδιότητες που σχετίζονται με την τοποθέτηση των στοιχείων στο δίκτυο και τη γεωμετρική διαμόρφωση του. Τέτοια στοιχεία είναι οι **διακλαδώσεις**, οι **κόμβοι** και οι **βρόχοι**.

Μία **διακλάδωση** αντιπροσωπεύει ένα μεμονωμένο στοιχείο, όπως μια πηγή τάσης ή μία αντίσταση, ή αλλιώς οποιοδήποτε στοιχείο με δύο ακροδέκτες.

Ένας **κόμβος** αναφέρεται στο σημείο εκείνο όπου συνδέονται μεταξύ τους δύο ή περισσότερες διακλαδώσεις.

**Βρόχος** είναι οποιαδήποτε κλειστή (ανεξάρτητη) διαδρομή σε ένα κύκλωμα η οποία διαμορφώνεται από έναν αρχικό κόμβο και διαπερνώντας μέσα από ένα πλήθος κόμβων, επιστρέφει στον αρχικό κόμβο χωρίς να διαπεράσει κάποιον κόμβο περισσότερο από μία φορά.

Ένα δίκτυο με  $b$  διακλαδώσεις,  $n$  κόμβους και  $l$  ανεξάρτητους βρόγχους ικανοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα της τοπολογίας δικτύων:

$$b = l + n - 1$$

Βάσει των παραπάνω, η σημασία της τοπολογίας κυκλωμάτων για την μελέτη των τάσεων και ρευμάτων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα επισημαίνεται από τους εξής ορισμούς:

- Δύο ή περισσότερα στοιχεία βρίσκονται σε σειρά εφόσον μοιράζονται αποκλειστικά έναν και μόνο κόμβο.
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία είναι παράλληλα εφόσον συνδέονται σε δύο ίδιους κόμβους και κατά συνέπεια εμφανίζουν την ίδια τάση.

#### 2.2.1.5 Νόμος του Ohm – Ωμική αντίσταση

Υπάρχουν δύο τύποι στοιχείων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα: τα ενεργά στοιχεία τα οποία έχουν την ικανότητα να παράγουν ενέργεια όπως οι γεννήτριες, οι μπαταρίες και οι λειτουργικοί ενισχυτές, και τα παθητικά στοιχεία τα οποία δεν έχουν αυτήν την ικανότητα. Η **(γραμμική) αντίσταση**, η οποία αποτελεί το απλούστερο παθητικό στοιχείο σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, αναφέρεται στην ικανότητα ενός στοιχείου να αντιστέκεται στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος. Συμβολίζεται με  $R$  με μονάδα μέτρησης στο S.I. το *Ohm* και συνήθως γράφεται συνοπτικά χρησιμοποιώντας το γράμμα  $\Omega$ . Αποτελεί την σταθερά αναλογίας στον νόμο του Ohm, ο οποίος

ορίζει ότι η τάση στα άκρα των αγωγίμων υλικών είναι ανάλογη του ρεύματος που διαρρέει το υλικό, δηλαδή:

$$V = R \cdot I$$

Ο λόγος του ρεύματος προς την τάση αναφέρεται στην **ηλεκτρική αγωγιμότητα** η οποία συμβολίζεται με **G** με μονάδα μέτρησης στο S.I. το *Siemens (S)* και είναι το αντίθετο της αντίστασης, δηλαδή:

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{R} = G$$

### Εν σειρά σύνδεση

Η ισοδύναμη αντίσταση ενός πλήθους  $N$  αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά ισούται με το άθροισμα των επιμέρους αντιστάσεων, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^N R_n = R_{equivalent}$$

### Παράλληλη σύνδεση

Η ισοδύναμη αντίσταση ενός πλήθους  $N$  αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα ισούται με το αντίστροφο άθροισμα των αντιστρόφων των επιμέρους αντιστάσεων, δηλαδή:

$$R_{equivalent} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}}$$

Στην παράλληλη σύνδεση είναι πιο βολική η χρήση της έννοιας της αγωγιμότητας αντί για την αντίσταση. Έτσι, η ισοδύναμη αγωγιμότητα για  $N$  παράλληλα συνδεδεμένους αντιστάτες είναι:

$$\sum_{n=1}^N G_n = G_{equivalent}$$

### 2.2.1.5 Ηλεκτρική ισχύς

Το ηλεκτρικό ρεύμα και η ηλεκτρική τάση αποτελούν τις δύο βασικές μεταβλητές σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αλλά δεν αρκούν από μόνες τους. Για πρακτικούς λόγους είναι απαραίτητη η γνώση της ηλεκτρικής ισχύος που μπορεί να διαχειριστεί μία συσκευή. Η ηλεκτρική ισχύς συμβολίζεται με **p** με μονάδα μέτρησης στο S.I. το *Watt (W)*. Αναφέρεται στον ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται μέσα σε ένα κύκλωμα και ισοδυναμεί με το γινόμενο της ηλεκτρικής τάσης και του ηλεκτρικού ρεύματος, δηλαδή:

$$\frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p$$

ή

$$V \cdot I = P$$

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R} = P$$

και δηλώνει την ισχύ που αναλώνεται από μία ωμική αντίσταση η οποία αποτελεί μια διαδικασία παραγωγής θερμότητας.

### 2.2.1.6 Νόμοι του Kirchhoff

Οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα ηλεκτρικό κύκλωμα διαμορφώνονται από δύο απλούς νόμους οι οποίοι διατυπώθηκαν από τον Gustav Robert Kirchhoff το 1845. Οι νόμοι αυτοί είναι γνωστοί ως ο **νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff (KCL)** και ο **νόμος των τάσεων του Kirchhoff (KVL)**. Συγκεκριμένα:

**Ο νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff (KCL)** βασίζεται στο νόμο διατήρησης του φορτίου και ορίζει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των φορτίων μέσα σε ένα σύστημα δεν μπορεί να αλλάξει. Διαφορετικά, αναφέρει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε ένα κόμβο είναι ίσο με μηδέν. Η μαθηματική διατύπωση είναι η εξής:

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0$$

όπου **N** ο αριθμός των διακλαδώσεων συνδεδεμένες στον κόμβο και **I<sub>n</sub>** το **n-οστό** ρεύμα που εισέρχεται (ή εξέρχεται) του κόμβου. Έτσι μπορεί να διατυπωθεί και ως το άθροισμα των ρευμάτων που εισέρχονται σε ένα κόμβο ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που εξέρχονται από αυτόν.

**Ο νόμος των τάσεων του Kirchhoff (KVL)** ορίζει ότι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής (ή βρόχου) είναι ίσο με το μηδέν. Μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\sum_{m=1}^M V_m = 0$$

όπου **M** ο αριθμός των τάσεων σε ένα βρόχο (ή ο αριθμός των διακλαδώσεων σε ένα βρόχο) και **V<sub>m</sub>** η **m-οστή** τάση.



### 2.2.1.7 Πηνίο

Το πηνίο αποτελεί παθητικό στοιχείο ηλεκτρικού κυκλώματος και είναι σχεδιασμένο να αποθηκεύει ενέργεια μέσω του μαγνητικού του πεδίου. Κάθε αγωγός ηλεκτρικού ρεύματος εμφανίζει επαγωγικές ικανότητες και μπορεί να θεωρηθεί ως επαγωγέας δηλαδή πηνίο. Προκειμένου όμως να ενισχυθεί το φαινόμενο της επαγωγής, ένα πρακτικό επαγωγικό στοιχείο διαμορφώνεται συνήθως από ένα αγωγίμο σύρμα τυλιγμένο σε σπείρες, γύρω από κάποιον πυρήνα (αέρας ή μαγνητικό υλικό). Όταν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο και συνεπώς μαγνητική ροή  $\Phi$  μέσω των σπειρών του. Η μαγνητική ροή που αναπτύσσεται είναι ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος  $I$ , δηλαδή:

$$\Phi = L \cdot I$$

όπου  $L$  είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου και μετριέται σε Henry (H) στο Διεθνές Σύστημα (S.I.). Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του πηνίου, όπως ο αριθμός των σπειρών, η γεωμετρία και το είδος του πυρήνα, και όχι από την ένταση του ρεύματος ή την μαγνητική ροή.

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης ως προς τον χρόνο, προκύπτει η σχέση τάσης-ρεύματος για το πηνίο:

$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

όπου  $v$  η τάση στα άκρα του πηνίου και  $\frac{di}{dt}$  ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αυτεπαγωγή είναι ο λόγος της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πηνίο προς το ρεύμα που τη δημιουργεί και αφορά την ιδιότητα με την οποία ένα πηνίο παρουσιάζει αντίσταση στη μεταβολή του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει.

### 2.2.1.8 Πυκνωτής

Ο πυκνωτής είναι ένα παθητικό στοιχείο ηλεκτρικού κυκλώματος και είναι σχεδιασμένος να αποθηκεύει ενέργεια μέσω του ηλεκτρικού του πεδίου του. Αποτελείται από δύο αγωγίμες πλάκες οι οποίες διαχωρίζονται από ένα μονωτικό υλικό, γνωστό ως διηλεκτρικό. Όταν μία πηγή τάσης  $V$  συνδέεται στον πυκνωτή, η μία πλάκα φορτίζεται με θετικό φορτίο  $q$  ενώ η άλλη με αρνητικό φορτίο  $-q$  και συνεπώς ο πυκνωτής αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο. Η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου  $q$  που αποθηκεύεται είναι ανάλογη της εφαρμόζουσας τάσης  $V$ , δηλαδή:

$$q = C \cdot V$$

όπου  $C$  είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή, και μετριέται σε Farad (F) στο Διεθνές Σύστημα (S.I.). Η χωρητικότητα εξαρτάται αποκλειστικά από τις φυσικές ιδιότητες του πυκνωτή, όπως το εμβαδόν και η απόσταση των πλακών, καθώς και το είδος του διηλεκτρικού υλικού, και όχι από το φορτίο ή την τάση.

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης ως προς τον χρόνο, προκύπτει η σχέση ρεύματος-τάσης για τον πυκνωτή

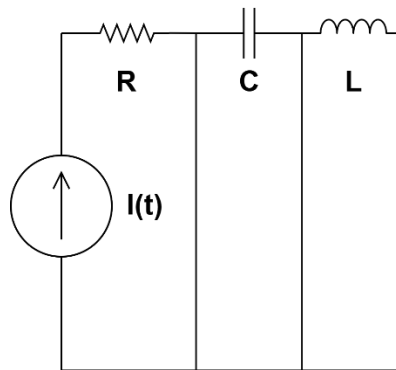
$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

όπου  $i$  το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή και  $\frac{dv}{dt}$  ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η χωρητικότητα είναι ο λόγος του φορτίου σε μια πλάκα του πυκνωτή προς τη διαφορά τάσης μεταξύ των δύο πλακών και αποτελεί την ιδιότητα ενός πυκνωτή να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο όταν εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού, δηλαδή να αντιστέκεται στη γρήγορη μεταβολή της τάσης μέσω της ροή του ρεύματος.

### 2.2.2 Μαθηματική μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων RLC σε σειρά και παράλληλα

#### Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σε σειρά

Έστω ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από μία πηγή τάσης  $V(t)$  και τρία στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά: μία αντίσταση  $R$ , ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C$  και ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$ . Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα  $I(t)$ .



**Εικόνα 2.2:** Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σε σειρά πηγής τάσης  $V$ .

Σύμφωνα με τον νόμο των τάσεων του Kirchhoff, ισχύει:

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

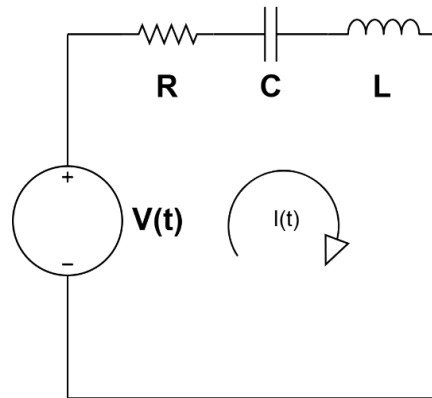
ή ισοδύναμα:

$$V(t) = R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \cdot \int I(t) dt + L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Αυτή είναι η **διαφορική εξίσωση** που περιγράφει τη δυναμική ενός **ηλεκτρικού κυκλώματος RLC σε σειρά με πηγή τάσης V**.

### Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC παράλληλα

Έστω τώρα ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από μία πηγή ρεύματος **I(t)** και τρία στοιχεία συνδεδεμένα παράλληλα: μία αντίσταση **R**, ένας πυκνωτής χωρητικότητας **C** και ένα πηνίο αυτεπαγωγής **L**. Η τάση **V(t)** είναι κοινή για όλα τα στοιχεία, δηλαδή **V(t)=V<sub>R</sub>(t)=V<sub>C</sub>(t)=V<sub>L</sub>(t)**.



**Εικόνα 2.3:** Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC παράλληλα με πηγή ρεύματος I.

Σύμφωνα με τον νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff, ισχύει:

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t)$$

ή ισοδύναμα:

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \cdot \frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{L} \cdot \int V(t) dt$$

Αυτή είναι η **διαφορική εξίσωση** που περιγράφει τη δυναμική ενός **ηλεκτρικού κυκλώματος RLC σε παράλληλη σύνδεση με πηγή ρεύματος I**.

### **2.2.3 Ηλεκτρική εμπέδηση**

Η ηλεκτρική εμπέδηση αποτελεί βασική έννοια στην ανάλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος (AC), καθώς εκφράζει τη συνολική αντίσταση ενός κυκλώματος στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος όταν σε αυτό εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση. Ορίζεται ως ο λόγος της εναλλασσόμενης τάσης προς την εναλλασσόμενη ένταση του ρεύματος στο πεδίο της συχνότητας:

$$Z_e(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)}$$

όπου  $Z_e(\omega)$  η ηλεκτρική εμπέδηση,  $V(\omega)$  η εφαρμοζόμενη τάση (στο πεδίο της συχνότητας),  $I(\omega)$  η ένταση του ρεύματος (στο πεδίο της συχνότητας) και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα της διέγερσης. Η ηλεκτρική εμπέδηση αποτελεί **σύνθετο μέγεθος**, δηλαδή έχει **πραγματικό** και **φανταστικό** μέρος. Για ένα **τυπικό κύκλωμα RLC σε σειρά**, με αντίσταση  $R$ , αυτεπαγωγή  $L$  και χωρητικότητα  $C$ , η συνολική εμπέδηση δίνεται από τη σχέση:

$$Z_e(\omega) = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

ή εναλλακτικά:

$$Z_e(\omega) = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = R + j \cdot X$$

όπου  $R$  η ηλεκτρική αντίσταση (resistance),  $X = X_L - X_C$  η ηλεκτρική αντίδραση (reactance),  $X_L = \omega \cdot L$  η επαγωγική αντίδραση (inductive reactance),  $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$  η χωρητική αντίδραση (capacitive reactance) και  $j = \sqrt{-1}$  η φανταστική μονάδα.

Η αντίσταση  $R$  αποτελεί το πραγματικό μέρος της εμπέδησης και σχετίζεται με τη διάχυση ενέργειας. Η αντίδραση  $X$  αποτελεί το φανταστικό μέρος, που σχετίζεται με την αποθήκευση και επιστροφή ενέργειας στο κύκλωμα.

### Ηλεκτρική αγωγιμότητα

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα αποτελεί το αντίστροφο της ηλεκτρικής εμπέδησης και ορίζεται ως:

$$Y_e(\omega) = \frac{I(\omega)}{V(\omega)}$$

Εκφράζει την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει ένα κύκλωμα υπό την εφαρμογή τάσης. Όπως και η εμπέδηση, αποτελεί σύνθετο μέγεθος με πραγματικό μέρος την αγωγιμότητα  $G$  και φανταστικό την επιδεκτικότητα  $B$ , δηλαδή:

$$Y_e(\omega) = G + j \cdot B$$

Η έννοια της αγωγιμότητας αποτελεί το ανάλογο της μηχανικής κινητικότητας στην αναλογία κινητικότητας και παρουσιάζεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.

## **2.3 Μετασχηματισμός Laplace**

### **2.3.1 Ορισμός**

Η ανάπτυξη τεχνικών αποτελεί τον στόχο για την ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων με διάφορες συνδεσμολογίες, τα οποία μοντελοποιούνται με διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την

συμπεριφορά αυτών των κυκλωμάτων. Για τον συστηματικό προσδιορισμό των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων έχουν αναπτυχθεί διάφορες μαθηματικές μέθοδοι εκ των οποίων η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Η μέθοδος αυτή, περιλαμβάνει τη μετατροπή των διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις, διευκολύνοντας έτσι σημαντικά τη διαδικασία επίλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων αλλά και μηχανικών συστημάτων. Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης  $\mathbf{f}(t)$  συμβολίζεται με  $\mathbf{F}(s)$  ή  $\mathcal{L}\{\mathbf{F}(t)\}$  και ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{F}(t)\} = \mathbf{F}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot \mathbf{f}(t) dt$$

όπου η παράμετρος  $s$  είναι μιγαδικός αριθμός με  $s = \sigma + j \cdot \omega$  και  $j, \omega$  πραγματικοί αριθμοί.

Η εξίσωση () περιγράφει τη γενική έννοια του μετασχηματισμού όπου η συνάρτηση  $\mathbf{f}(t)$  στο  $t$ -πεδίο μετασχηματίζεται στη συνάρτηση  $\mathbf{F}(s)$  στο  $s$ -πεδίο. Συνεπώς, δεδομένης της ερμηνείας του  $s$  ως συχνότητα, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός μιας συνάρτησης  $\mathbf{f}(t)$  από το πεδίο του χρόνου στο μιγαδικό πεδίο της συχνότητας, δίνοντας την συνάρτηση  $\mathbf{F}(s)$ .

### 2.3.2 Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Για την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace είναι απαραίτητη η γνώση των ιδιοτήτων του, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

- 1) Ο μετασχηματισμός Laplace αναφέρεται στον γραμμικό μετασχηματισμό μεταξύ συναρτήσεων που ορίζονται στο πεδίο  $t$  και συναρτήσεων που ορίζονται στο πεδίο  $s$ . Έτσι, εάν  $\mathbf{F}_1(s)$  και  $\mathbf{F}_2(s)$  οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\mathbf{f}_1(t)$  και  $\mathbf{f}_2(t)$  αντίστοιχα, τότε  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{F}_1(s) + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{F}_2(s)$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace του  $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{f}_1(t) + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{f}_2(t)$ , με  $\mathbf{a}_1$  και  $\mathbf{a}_2$  τυχαίες σταθερές.
- 2) Ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου  $\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}$  μιας συνάρτησης  $\mathbf{f}(t)$ , όπου ο μετασχηματισμός Laplace είναι  $\mathbf{F}(s)$ , ορίζεται:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}\right) = s \cdot \mathbf{F}(s) - \mathbf{f}(0^+)$$

Όπου  $\mathbf{f}(0^+)$  η αρχική τιμή της  $\mathbf{f}(t)$  που λαμβάνεται ως το μονόπλευρο όριο της  $\mathbf{f}(t)$  καθώς το  $t$  τείνει προς τα θετικά του μηδενός.

- 3) Ο μετασχηματισμός Laplace του ολοκληρώματος  $\int_0^t \mathbf{f}(\tau) d\tau$  μιας συνάρτησης  $\mathbf{f}(t)$ , όπου ο μετασχηματισμός Laplace είναι  $\mathbf{F}(s)$ , ορίζεται:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \mathbf{f}(\tau) d\tau\right) = \frac{\mathbf{F}(s)}{s}$$

### 2.3.3 Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

Ο παρακάτω πίνακας αποτελεί ένα σύντομο πίνακα με βασικούς μετασχηματισμούς Laplace:

Συνάρτηση χρόνου	Μετασχηματισμός Laplace
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

**Πίνακας 2.1** Μετασχηματισμοί Laplace.

## Κεφάλαιο 3 – Ηλεκτρομηχανικά συστήματα

### 3.1 Εισαγωγή στα ηλεκτρομηχανικά συστήματα

#### *3.1.1 Ορισμός και σημασία*

Τα ηλεκτρομηχανικά συστήματα συνδυάζουν **ηλεκτρικά και μηχανικά στοιχεία** ώστε να επιτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, αξιοποιώντας τις αρχές του ηλεκτρομαγνητισμού και της μηχανικής για τη μετατροπή ενέργειας μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής μορφής. Η σημασία τους εντοπίζεται σε ποικίλες εφαρμογές όπου συμβάλουν στην αυτοματοποίηση διαδικασιών, οδηγώντας σε αυξημένη παραγωγικότητα και μειωμένο λειτουργικό κόστος, με υψηλότερα επίπεδα απόδοσης, ακρίβειας και αξιοπιστίας σε σύγκριση με τα καθαρά μηχανικά ή ηλεκτρικά συστήματα.

#### *3.1.2 Αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων*

Η αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων είναι το θεμέλιο της ηλεκτρομηχανικής και περιγράφεται από τις αρχές του ηλεκτρομαγνητισμού, οι οποίες χαρακτηρίζουν τη σχέση μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Η θεμελιώδης αρχή της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής (Νόμος του Faraday), η οποία αναφέρει ότι ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγει ηλεκτροκινητική δύναμη (*EMF*) σε έναν αγωγό, αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη των πρώτων ηλεκτρικών κινητήρων και γεννητριών (**Townsend, 1901; Robinson, 1922**) όπου υπάρχει μετατροπή ενέργειας μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής μορφής.

Οι **ηλεκτρικοί κινητήρες** μετατρέπουν την ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική ενέργεια, παρέχοντας την κινητήρια δύναμη για διάφορες εφαρμογές. Υπάρχουν διαφορετικοί τύποι, όπως κινητήρες συνεχούς ρεύματος (*DC*), κινητήρες εναλλασσόμενου ρεύματος (*AC*) και κινητήρες σταθερού βήματος, καθένας με τα δικά του χαρακτηριστικά και εφαρμογές. Οι **γεννήτριες** εκτελούν την αντίστροφη λειτουργία των κινητήρων, μετατρέποντας τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια. Χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές όπως η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, η φόρτιση μπαταριών και τα συστήματα ανάκτησης ενέργειας.

Η μετατροπή της ενέργειας μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών μορφών είναι η βασική λειτουργία των ηλεκτρομηχανικών συστημάτων. Οι βασικές έννοιες περιλαμβάνουν:

- **Ροπή και Δύναμη:** Προκύπτουν από την αλληλεπίδραση ηλεκτρικών ρευμάτων και μαγνητικών πεδίων.
- **Ταχύτητα και Κίνηση:** Καθορίζονται από την ισορροπία μεταξύ ασκούμενων και αντισταθμιζόμενων δυνάμεων.
- **Απόδοση:** Λόγος παραγόμενης μηχανικής προς εισερχόμενη ηλεκτρική ισχύ.
- **Απώλειες:** Οφείλονται σε φαινόμενα όπως τριβή, επαγωγικά ρεύματα και υστέρηση.

### 3.1.3 Τεχνικές μοντελοποίησης και ανάλυσης

Η σχεδίαση και η ανάλυση για την βελτιστοποίηση της λειτουργίας αλλά και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των ηλεκτρομηχανικών συστημάτων απαιτεί κατάλληλη μοντελοποίηση. Οι κύριες τεχνικές περιλαμβάνουν:

- **Μοντέλα βασισμένα σε κυκλώματα:** Αυτά τα μοντέλα αναπαριστούν τα μηχανικά στοιχεία ενός ηλεκτρομηχανικού συστήματος χρησιμοποιώντας ισοδύναμα ηλεκτρικά κυκλώματα, επιτρέποντας την εφαρμογή τεχνικών ανάλυσης κυκλωμάτων.
- **Μοντέλα συγκεντρωμένων παραμέτρων:** Αυτά τα μοντέλα απλοποιούν το σύστημα υποθέτοντας ότι οι ηλεκτρικές και μηχανικές ιδιότητες είναι συγκεντρωμένες σε διακριτά σημεία, επιτρέποντας τη χρήση κανονικών διαφορικών εξισώσεων για να περιγράψουν τη συμπεριφορά του συστήματος.
- **Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (FEA):** Η ανάλυση αυτή είναι μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για να αναλύσει τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία και τις μηχανικές τάσεις σε σύνθετα ηλεκτρομηχανικά συστήματα, παρέχοντας λεπτομερείς πληροφορίες σχετικά με την απόδοση του συστήματος.
- **Δυναμική μοντελοποίηση:** Τα δυναμικά μοντέλα περιγράφουν τη χρονικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά των ηλεκτρομηχανικών συστημάτων, λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως η αδράνεια, η απόσβεση και οι εξωτερικές δυνάμεις.

Η σύνδεση μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων επιτρέπει την εφαρμογή αναλογιών. Οι τεχνικές μοντελοποίησης με χρήση κυκλωμάτων καθιστούν εφικτή τη χρήση:

- **Αναλογίας δύναμης-τάσης (*impedance analogy*)**
- **Αναλογίας δύναμης-ρεύματος (*mobility analogy*)**

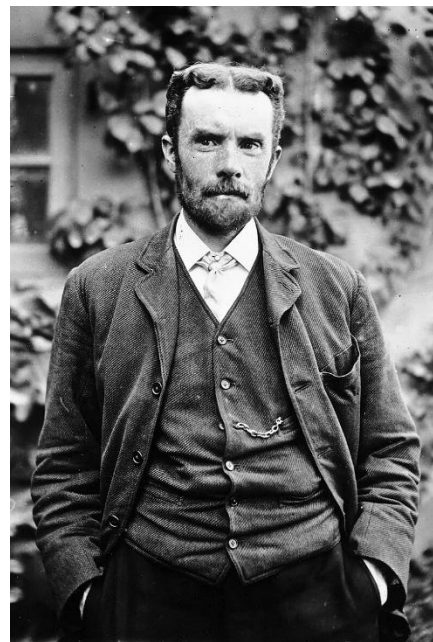
Οι αναλογίες επιτρέπουν την ερμηνεία μηχανικών συστημάτων με ηλεκτρικά ισοδύναμα, διευκολύνοντας την ανάλυση και τη σχεδίαση πολύπλοκων συστημάτων. Η θεωρία των αναλογιών αποτελεί τον πυρήνα της επόμενης ενότητας της εργασίας.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 – Ηλεκτρομηχανικές αναλογίες

### 4.1 Ανάπτυξη και εφαρμογή ηλεκτρομηχανικών αναλογιών

Η ανάπτυξη των μεθόδων της άμεσης αναλογίας (εμπέδησης) και της αντίστροφης αναλογίας (κινητικότητας) ξεκίνησε στις αρχές του 20ου αιώνα, εξαιτίας των προκλήσεων που αντιμετώπιζαν οι πρώτες ακουστικές και ηλεκτρομαγνητικές συσκευές, όπως ο τηλεγράφος, το τηλέφωνο, ο φωνογράφος και το κινητοσκόπιο. Επειδή τα ηλεκτρικά κυκλώματα και οι ηλεκτρομηχανικοί μετατροπείς που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη των συσκευών αυτών ήταν σε πρώιμο στάδιο, οι πρωταρχικές τους εκδόσεις δεν ήταν αποδοτικές και αντιμετώπιζαν πρόβλημα σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων περιορίζοντας την ικανότητά τους να αναπαράγουν με ακρίβεια ήχους όπως η ομιλία και η μουσική. Η ανάγκη της εμπορικής ανάπτυξης των συσκευών αυτών οδήγησε στην ενδελεχή μελέτη και ανάπτυξη της θεωρίας των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ειδικότερα, ο **Heaviside (1884)** όρισε την έννοια της **ηλεκτρικής εμπέδησης** ως τον λόγο του πλάτους της επιβαλλόμενης δύναμης (στην προκειμένη περίπτωση, της ηλεκτρεγερτικής δύναμης ή τάσης) προς το πλάτος της έντασης του ρεύματος, όταν η μεταβολές τους είναι απλά αρμονικές.



**Εικόνα 4.1:** Ο Άγγλος μαθηματικός και φυσικός Oliver Heaviside. Πηγή: By Unknown author - IET Archive, Public Domain, [Wikimedia Commons](#).

Βασίζομενος σε αυτή την έννοια, ο **Arthur G. Webster** έδωσε μία νέα προσέγγιση στην εξέταση των μηχανικών φαινομένων ο οποίος παρουσίασε για πρώτη φορά την έννοια της **ακουστικής (μηχανικής) εμπέδησης** το 1914 σε ένα επιστημονικό συνέδριο, η οποία δημοσιεύθηκε επισήμως λίγα χρόνια αργότερα (**Webster, 1919**), και την όρισε ως το λόγο της περιοδικής δύναμης που εφαρμόζεται στη μάζα ως προς την περιοδική μετατόπιση της μάζας που αυτή προκαλεί σε ένα μηχανικό σύστημα. Ουσιαστικά, η έννοια αυτή όριζε μία δυναμική μεταβλητή ως προς μια κινηματική μεταβλητή και αυτό γιατί ο Webster ήθελε να διατηρηθεί η ομοιότητα με τον ορισμό της ηλεκτρικής αντίστασης, όπου και στις δύο περιπτώσεις ο λόγος μπορεί αν θεωρηθεί η αιτία (δύναμη ή τάση) ως προς το αποτέλεσμα (μετατόπιση ή ρεύμα). Αυτός ο ορισμός αποτέλεσε



**Εικόνα 4.2:** Ο Αμερικανός φυσικός Arthur Gordon Webster. Πηγή: *By Bain - Library of Congress, Public Domain, Wikimedia Commons*.

κομβικό σημείο στη δομική μηχανική, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ των καθιερωμένων θεωριών των ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων.

Μόλις έγινε αντιληπτή η ομοιότητα μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων, πολλοί επιστήμονες άρχισαν να αναλύουν τους ηλεκτρομηχανικούς μετατροπείς χρησιμοποιώντας τη θεωρία των δικτύων. Επειδή οι πρώτες μελέτες δεν διαδόθηκαν ευρέως, η μέθοδος χρήσης της θεωρίας των δικτύων για την ανάλυση ηλεκτρομηχανικών συστημάτων δεν έγινε αμέσως γνωστή στην ευρύτερη επιστημονική κοινότητα. Αυτό άλλαξε όταν επιστημονικά άρθρα και βιβλία αναφέρθηκαν σε αυτήν τη μέθοδο, περιγράφοντας την ως «**άμεση αναλογία**».

Η μεθοδολογία για την προσέγγιση αυτής της μεθόδου βασιζόταν στην σχεδίαση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, ανάλογου του ως προς επίλυση μηχανικού προβλήματος, την επίλυση του με τη χρήση της θεωρίας ηλεκτρικών κυκλωμάτων και την αναδιατύπωση της λύσης του σε

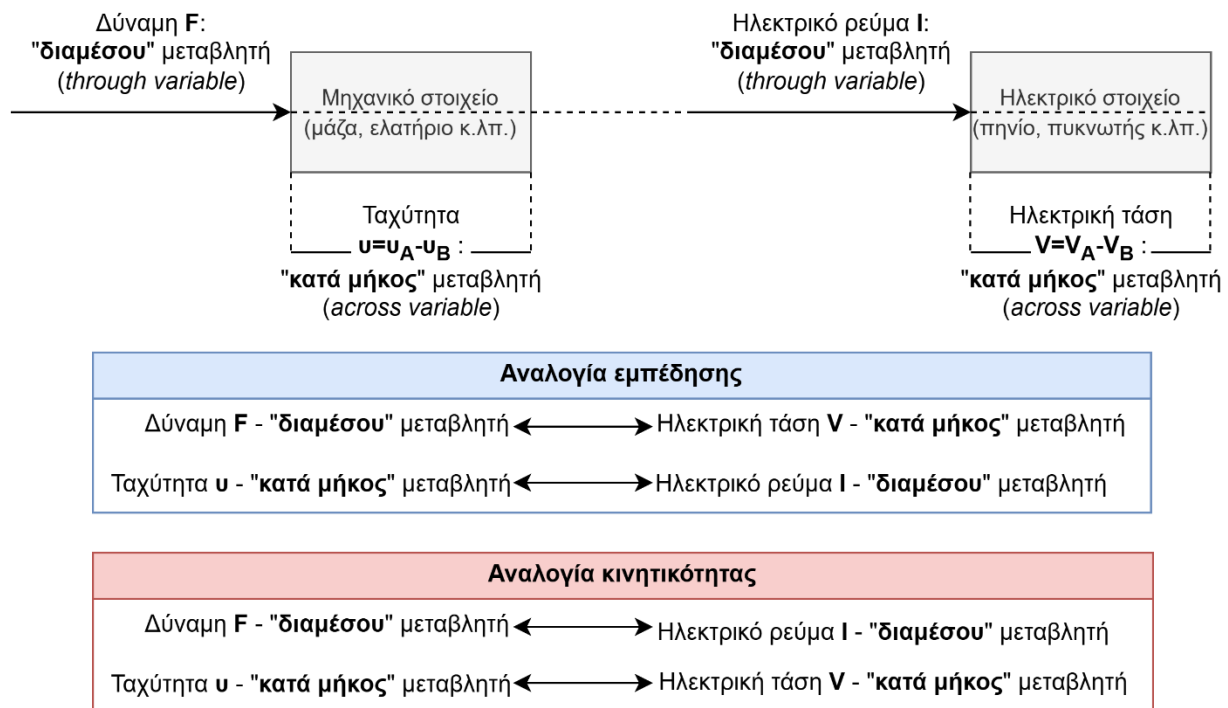
μηχανικούς όρους. Στο ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα, το ηλεκτρικό ρεύμα και η ηλεκτρεγερτική δύναμη αντιπροσώπευαν τα φυσικά μεγέθη της ταχύτητας και της δύναμης του μηχανικού συστήματος αντίστοιχα. Οι σύνθετες αντιστάσεις του κυκλώματος προκύπταν από τις ανάλογες μηχανικές αντιστάσεις μέσω ειδικών συντελεστών μετατροπής και κανόνων σύνδεσης. Μόλις καθιερώθηκε η άμεση αναλογία, η οποία βοήθησε στην μελέτη των ακουστικών και μηχανικών φίλτρων και συνδέθηκε στενά με την ανάπτυξη της θεωρίας των ηλεκτρικών δικτύων και των ηλεκτρικών φίλτρων, οι επιστήμονες άρχισαν να εξετάζουν τους περιορισμούς της.

Οι πρώτες έρευνες έδειξαν ότι ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται και συμπεριφέρονται οι μεταβλητές στις διαφορικές εξισώσεις των ηλεκτροδυναμικών ή ηλεκτρομαγνητικών συστημάτων διαφέρει σημαντικά από εκείνες στα απλά ηλεκτρικά κυκλώματα, δυσκολεύοντας την σχεδίασή των συστημάτων αυτών ως ισοδύναμο ηλεκτρικά κυκλώματα.

Συγκεκριμένα, οι προκλήσεις που αντιμετώπιζαν με τη χρήση της άμεσης αναλογίας αφορούσαν την αντιστοίχιση μεταξύ των μηχανικών και ηλεκτρικών στοιχείων όπου η δύναμη και η ταχύτητα είναι ανάλογες με την ηλεκτρεγερτική δύναμη και το ρεύμα αλλά η φυσική ερμηνεία τους ως στοιχεία του ηλεκτρικού κυκλώματος αντιστρέφεται. Επιπλέον, η εν σειρά ή η παράλληλη διάταξη σε ένα μηχανικό σύστημα είναι αντιστρόφως ανάλογη σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, καθώς και οι υπολογισμοί για την σύνθετη αντίσταση σε σειρά ή παράλληλα διατυπώνονται αντίστροφα σε ένα ηλεκτρικό σύστημα. Περαιτέρω πολυπλοκότητες προκύπτουν στην εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff: το άθροισμα των ρευμάτων σε έναν κόμβο ισούται με μηδέν, το οποίο μεταφράζεται σε μηχανικούς όρους ως το άθροισμα των διαφορών των ταχυτήτων σε ένα κλειστό κύκλωμα είναι μηδέν. Επίσης, το άθροισμα των τάσεων σε ένα κλειστό κύκλωμα είναι μηδέν, το οποίο μεταφράζεται ως το άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν σε ένα σημείο (που βρίσκεται σε

ισορροπία) είναι ίσο με μηδέν. Συνεπώς, η αναδιατύπωση των Νόμων του Kirchhoff σε μηχανικούς όρους σε ένα ανάλογο μηχανικό σύστημα απαιτεί μια ορισμένη ικανότητα σύγκρισης και ανάλυσης.

Μια νέα αναλογία προτάθηκε, αρχικά από τον **M. Darrieus (1925)** και ύστερα αναδιατυπώθηκε από τους **Hähnle (1932)** και **Firestone (1933)**, η οποία αναφέρθηκε ως «**αντίστροφη αναλογία**» όπου η δύναμη αντιστοιχίζεται με το ρεύμα και η ταχύτητα με την ηλεκτρεγερτική δύναμη. Η αντίστροφη αναλογία ήταν απαλλαγμένη από τις προκλήσεις της κλασικής προσέγγισης και βασιζόταν σε μια διαφορετική διατύπωση του νόμου του Νεύτωνα, όπου η δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος καθορίζεται από τις κινηματικές εξισώσεις και όχι από τις εξισώσεις ισορροπίας. Βέβαια, λόγω αυτής της διαφορετικής διατύπωσης και παρά τα πλεονεκτήματά της, η νέα προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων δονήσεων δεν υιοθετήθηκε αμέσως από την επιστημονική κοινότητα. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματά της, όπως επισημάνθηκε από τον **Firestone (1933)**, ήταν η διατήρηση της τοπολογίας μεταξύ των μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων. Επιπλέον στην άμεση αναλογία, οι βρόγχοι ενός ηλεκτρικού κυκλώματος αντιστοιχούσαν σε ζεύγη κόμβων σε ένα μηχανικό σύστημα, οδηγώντας ορισμένους μελετητές όπως οι **Corbellier και Yeung (1929)**, να θεωρήσουν ότι αυτή αναπαράσταση δεν ήταν φυσική. Η αντίστροφη αναλογία, ωστόσο, διατηρούσε μια πιο ευδιάκριτη αντιστοιχία μεταξύ του μηχανικού συστήματος και του ισοδύναμου ηλεκτρικού κυκλώματος.



**Εικόνα 4.3:** Απεικόνιση και αντιστοίχιση φυσικής ερμηνείας μηχανικών και ηλεκτρικών μεγεθών στις αναλογίες εμπέδησης και κινητικότητας.

Ο **Firestone (1933)** ανέπτυξε περαιτέρω την ιδέα της αντίστροφης αναλογίας προτείνοντας ένα νέο ορισμό της εμπέδησης που ονομαζόταν «εμπέδηση δοκού» (bar impedance) και ορίστηκε ως τον λόγο της ταχύτητας κατά μήκος ενός στοιχείου προς τη δύναμη διαμέσου αυτού. Αυτό ερχόταν σε αντίθεση με τον κλασικό ορισμό της εμπέδησης του Webster, ο οποίος αναφερόταν στο λόγο μιας δυναμικής μεταβλητής προς μια κινητική μεταβλητή. Υποστήριζε ότι ο κλασικός ορισμός οδηγούσε σε μια ασυμβατότητα κατά την οποία η συνολική ηλεκτρική αντίσταση ισούται με το άθροισμα των ηλεκτρικών αντιστάσεων σε σειρά, ενώ η συνολική μηχανική εμπέδηση ισούται με το αντίστροφο άθροισμα των αντιστρόφων των μηχανικών σύνθετων αντιστάσεων σε σειρά. Έτσι θεώρησε ότι η νέα μέθοδος εάν είχε υιοθετηθεί πρώτιστος, θα συμβάδιζε φυσικά με τις αρχές ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Όμως, επειδή ο εναλλακτικός ορισμός της εμπέδησης δεν υιοθετήθηκε, ο **Firestone (1938)** όρισε μια νέα παράμετρο και την όρισε ως «**κινητικότητα**» (**mobility**), η οποία αναφερόταν στο λόγο μιας κινηματικής μεταβλητής ως προς μια δυναμική μεταβλητή. Οι αναλογίες κινητικότητας και εμπέδησης, στα τέλη της δεκαετίας του 1950, αναγνωρίστηκαν επίσημα από την Αμερικανική Επιτροπή Μηχανολόγων Μηχανικών (ASME) με εισηγήσεις που τις εδραίωσαν στην ανάλυση μηχανικών συστημάτων (**Plunkett 1958; Crandall 1958; Belsheim 1962**).



**Εικόνα 4.4:** Ο Αμερικανός φυσικός Floyd Alburn Firestone. Πηγή: By Waltermontano - Own work, CC BY-SA 4.0, [Wikimedia Commons](#).

## 4.2 Μελέτη των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών εις βάθος

Ο όρος «αναλογία», είναι ο συνδυασμός δύο όρων, «ανά» (ίσος) και «λόγος» (σχέση), και χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια ομοιότητα μεταξύ δύο αντικειμένων ή μεγεθών που ανήκουν γενικά σε διαφορετικούς τομείς. Η ηλεκτρομηχανική αναλογία δηλώνει την ομοιότητα μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων, τα οποία έχουν διαφορετική φυσική δομή, και αναφέρεται στην αναπαράσταση των μηχανικών συστημάτων ως ηλεκτρικά κυκλώματα.

Η εφαρμογή των αναλογιών είναι αρκετά αποτελεσματική και χρήσιμη στο σχεδιασμό και την ανάλυση ηλεκτρικών, μηχανικών αλλά και ακουστικών συστημάτων όπου τα διάφορα μέρη τους είναι αλληλεξαρτώμενα και ισχυρά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Ουσιαστικά, επιτρέπει στους μηχανικούς και τους επιστήμονες να εφαρμόζουν γνώσεις από τον ένα τομέα για την ανάλυση ή τον σχεδιασμό συστημάτων στον άλλο. Οι πιο γνωστοί μέθοδοι αναλογιών είναι η **αναλογία σύνθετης αντίστασης ή εμπέδησης (impedance analogy)**, σύμφωνα με την οποία η μηχανική δύναμη και η μηχανική ταχύτητα αντιστοιχούν στην ηλεκτρική τάση και το ηλεκτρικό ρεύμα, και η **αναλογία κινητικότητας (mobility analogy)**, η οποία είναι αντίστροφη της πρώτη δηλαδή η μηχανική δύναμη αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό ρεύμα και η μηχανική ταχύτητα στην ηλεκτρική



τάση. Ως εκ τούτου, αποτελούν δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες για την αναπαράσταση των μηχανικών μεγεθών ως ηλεκτρικά μεγέθη ενώ παράλληλα, από ενεργειακή σκοπιά, διατηρούν τη σχέση μεταξύ των εξισώσεων ισχύος και στους δυο τομείς: στα μηχανικά συστήματα, όπου η ισχύς ισούται με το γινόμενο της δύναμης και της ταχύτητας  $P = F \cdot v$ , και στα ηλεκτρικά συστήματα, όπου η ισχύς ισούται με το γινόμενο της τάσης και του ρεύματος  $P = V \cdot I$ . Η ανακάλυψη αυτών των αναλογιών επέτρεψε την ανάλυση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των μηχανικών συστημάτων εφαρμόζοντας την θεωρία ηλεκτρικών δικτύων, αναπαριστώντας τα ως ηλεκτρικά κυκλώματα, αποτελούμενα από πηνία, πυκνωτές και αντιστάσεις.

#### 4.2.1 Αναλογία εμπίδησης

Η θεωρία της **αναλογίας εμπίδησης** ή **σύνθετης αντίστασης (impedance analogy)** γνωστή και ως **άμεση αναλογία (direct analogy)** ή **αναλογία δύναμης-τάσης (force-voltage analogy)**, αποτέλεσε την πρώτη μέθοδο που αναπτύχθηκε για την αντιστοίχιση μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων. Όπως προαναφέρθηκε, η ανάπτυξη αυτής της μεθόδου ξεκίνησε στις αρχές του 20ού αιώνα, με πρωτοπόρους τους **Heaviside (1892)** και **Webster (1919)**, οι οποίοι εισήγαγαν τις έννοιες της ηλεκτρικής και μηχανικής εμπίδησης αντίστοιχα. Αυτή η θεωρία έγινε η βάση για την ανάλυση και σχεδίαση πολύπλοκων συστημάτων, όπως τα μηχανικά φίλτρα και οι ακουστικές συσκευές. Η αναλογία αυτή αναφέρεται στην κατασκευή ενός ισοδύναμου ηλεκτρικού κυκλώματος μέσω των εξισώσεων που περιγράφουν ένα μηχανικό σύστημα, συνδέοντας τη δύναμη  $F$  με την ηλεκτρική τάση  $V$ , τη ταχύτητα  $v$  με το ηλεκτρικό ρεύμα  $I$  και την μετατόπιση  $x$  με το ηλεκτρικό φορτίο  $q$ .

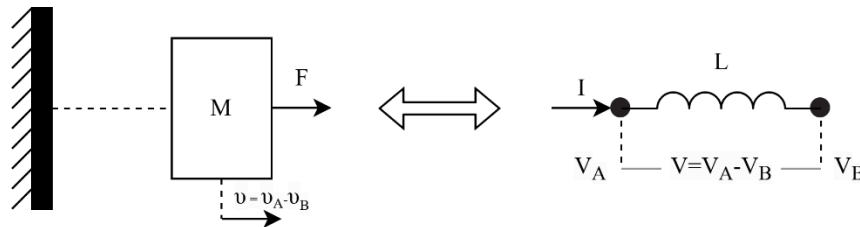
##### Αντιστοιχίσεις μεγεθών στην αναλογία εμπίδησης

Τα θεμελιώδη μηχανικά μεγέθη - δύναμη, ταχύτητα και μετατόπιση - αντιστοιχούν στην ηλεκτρική τάση, το ηλεκτρικό ρεύμα και το ηλεκτρικό φορτίο, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα η δύναμη  $F$ , η οποία είναι η αιτία της κίνησης ενός μηχανικού συστήματος, αντιστοιχεί στην τάση  $V$ , η οποία είναι αναφέρεται ως ηλεκτρεγερτική δύναμη και είναι η αιτία της ροής του ρεύματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Συγκρίνοντας τις σχέσεις  $F = \frac{W}{x}$  και  $V = \frac{W}{q}$ , παρατηρούμε ότι η δύναμη και η τάση αναφέρονται στο έργο που απαιτείται για την μετατόπιση ενός συστήματος και για την μεταφορά ενός θετικού φορτίου ανά μονάδα φορτίου μεταξύ δύο σημείων, αντίστοιχα. Επιπλέον, η ταχύτητα  $v = \frac{dx}{dt}$ , η οποία αναφέρεται στον ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης στα μηχανικά συστήματα, αντιστοιχεί στο ρεύμα  $I = \frac{dq}{dt}$ , το οποίο αναφέρεται στον ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού φορτίου στα ηλεκτρικά κυκλώματα, με φυσικό ακόλουθο την αναλογία μεταξύ μετατόπισης  $x$  και ηλεκτρικού φορτίου  $q$ . Η δύναμη και η ηλεκτρική τάση θεωρούνται μεταβλητές διέγερσης (effort variables) καθώς αντιπροσωπεύουν την πηγή διέγερσης που προκαλεί τη ροή ενέργειας σε ένα σύστημα ενώ το ηλεκτρικό ρεύμα που αναφέρεται στη ροή του ηλεκτρικού φορτίου καθώς και η ταχύτητα, λόγω της μαθηματικής αναλογίας με το ηλεκτρικό ρεύμα, αναφέρονται ως μεταβλητές ροής (flow variables). Ο συνδυασμός μιας μεταβλητής διέγερσης και

μιας μεταβλητής ροής προσδιορίζει την ισχύ ενός συστήματος ( $P = \text{Μεταβλητή διέγερσης} \cdot \text{Μεταβλητή ροής}$ ) και η αναλογία αυτή διατηρεί την σχέση ανάμεσα στη μηχανική ισχύ  $P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  και την ηλεκτρική ισχύ  $P_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}$ .

Επιπρόσθετα, η αναλογία σύνθετης αντίστασης συνδέει τα στοιχεία ενός μηχανικού συστήματος με τα αντίστοιχα ηλεκτρικά στοιχεία παρέχοντας μία αποτελεσματική μέθοδο ανάλυσης απλών αλλά και πολύπλοκων μηχανικών συστημάτων χρησιμοποιώντας τη θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Σύμφωνα με αυτήν την αναλογία, η αδράνεια της μάζας  $\mathbf{M}$  είναι ανάλογη της ηλεκτρικής αυτεπαγωγής  $\mathbf{L}$ , η μηχανική ενδοτικότητα  $\mathbf{C}_m$  (ή το αντίστροφο της σταθεράς ελατηρίου  $\frac{1}{k}$ ) είναι ανάλογη της ηλεκτρικής χωρητικότητας  $\mathbf{C}$  ενώ ο συντελεστής απόσβεσης  $\mathbf{b}$  ενός αποσβέστη ισοδυναμεί με την ηλεκτρική αντίσταση  $\mathbf{R}$ .

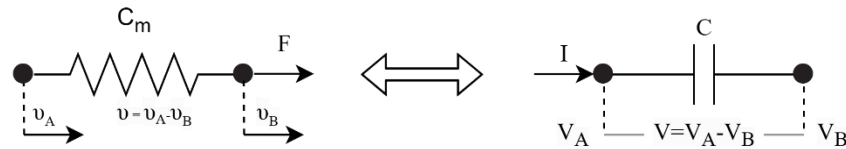
Συγκεκριμένα, η αδράνεια της μάζας  $\mathbf{M}$ , η οποία αντιπροσωπεύει την αντίσταση στις μεταβολές της κινητικής κατάστασης (όπως επιτάχυνση ή επιβράδυνση), είναι ανάλογη με την αυτεπαγωγή  $\mathbf{L}$  σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, η οποία είναι η ιδιότητα ενός πηνίου να αντιστέκεται στις μεταβολές της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος. Η σχέση στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα  $\mathbf{F} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}$  ή  $\mathbf{F} = \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  όπου  $\mathbf{F}$  είναι η δύναμη που απαιτείται για την μεταβολή της ταχύτητας  $\mathbf{v}$  (επιτάχυνση ή επιβράδυνση  $\mathbf{a}$ ) της μάζας  $\mathbf{M}$ , είναι ανάλογη της σχέσης  $\mathbf{V} = \mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{dt}$ , όπου  $\mathbf{V}$  η τάση που εφαρμόζεται κατά μήκος του πηνίου αυτεπαγωγής  $\mathbf{L}$  η οποία είναι απαραίτητη για να προκαλέσει μεταβολή στην ένταση του ρεύματος  $\mathbf{I}$ .



**Εικόνα 4.5:** Αντιστοίχιση μάζας  $\mathbf{M}$  με πηνίο  $\mathbf{L}$  στην αναλογία εμπέδησης.

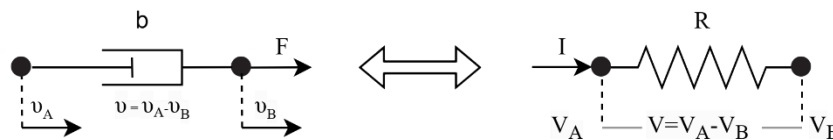
Η μηχανική ενδοτικότητα  $\mathbf{C}_m$  ενός ελαστικού μηχανικού στοιχείου, η οποία ισούται με το αντίστροφο της σταθεράς ελατηρίου  $\frac{1}{k}$ , δηλώνει την ικανότητα ενός συστήματος να παραμορφώνεται με ευκολία υπό την επίδραση δύναμης  $\mathbf{F}$  και να αποθηκεύει ενέργεια. Αντιστοιχεί στην ηλεκτρική χωρητικότητα  $\mathbf{C}$  η οποία περιγράφει την ικανότητα ενός πυκνωτή να αποθηκεύει φορτίο  $\mathbf{q}$  όταν εφαρμόζεται μια τάση  $\mathbf{V}$ . Και στις δύο περιπτώσεις, οι παράμετροι  $\mathbf{C}_m$  και  $\mathbf{C}$  αντιπροσωπεύουν την «ευκολία» με την οποία το σύστημα ανταποκρίνεται σε μια εξωτερική διέγερση (δύναμη ή τάση). Η σχέση στον νόμο του Hooke  $\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , είναι ανάλογη της σχέσης  $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}}$  και αυτή η αναλογία δηλώνει ότι η απόκριση ενός συστήματος ελατηρίου σε μια δύναμη  $\mathbf{F}$  αντικατοπτρίζει τον τρόπο με τον οποίο ένας πυκνωτής αντιδρά σε ένα ηλεκτρικό δυναμικό  $\mathbf{V}$ . Η σταθερά ελατηρίου  $\mathbf{k}$ , η οποία αφορά την σκληρότητα του υλικού του ελατηρίου, αντιστοιχεί στο αντίστροφο της χωρητικότητας  $\frac{1}{\mathbf{C}}$  και αυτό δηλώνει ότι ένα δύσκαμπτο ελατήριο

(μεγάλη τιμή  $k$ ) το οποίο θα έχει μικρή μετατόπιση  $x$  για μια δεδομένη δύναμη  $F$ , ισοδυναμεί με μια μικρή χωρητικότητα  $C$  που έχει ως αποτέλεσμα χαμηλό φορτίο  $q$  για δεδομένη τάση  $V$ .



**Εικόνα 4.6:** Αντιστοίχιση στοιχείου (ελατηρίου) μηχανικής ενδοτικότητας  $C_m$  με πυκνωτή  $C$  στην αναλογία εμπέδησης.

Η έννοια της ιξώδους απόσβεσης στα μηχανικά συστήματα χαρακτηρίζεται από μια δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας, η οποία ενεργεί πάντα αντίθετα της κίνησης, με αποτέλεσμα την διάχυση της κινητικής ενέργειας μέσω της μετατροπής της σε θερμότητα. Στην αναλογία εμπέδησης, ο συντελεστής απόσβεσης  $b$  συνδέεται με την ηλεκτρική αντίσταση  $R$ , η οποία αφορά την αντίσταση στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος. Και στις δύο περιπτώσεις, αυτές οι παράμετροι αντιπροσωπεύουν το πόσο ένα σύστημα αντιστέκεται είτε στην κίνηση στα μηχανικά συστήματα είτε στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, μετατρέποντας την ενέργεια (κινητική ή ηλεκτρική) σε θερμότητα. Η δύναμη απόσβεσης εκφράζεται από τη σχέση  $F_d = b \cdot v$ , όπου  $b$  η σταθερά απόσβεσης που χαρακτηρίζει την μηχανική αντίσταση του αποσβέστη και  $v$  η σχετική ταχύτητα. Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη, στο πλαίσιο της αναλογίας εμπέδησης, με το νόμο του Ohm στα ηλεκτρικά κυκλώματα  $V = R \cdot I$ , όπου  $V$  η τάση στα άκρα του αντιστάτη  $R$  και  $I$  το ρεύμα που τον διαρρέει.



**Εικόνα 4.7:** Αντιστοίχιση αποσβέστη με συντελεστή εσωτερικής τριβής  $b$ , με ηλεκτρική αντίσταση  $R$  στην αναλογία εμπέδησης.

#### Ενεργειακές αντιστοιχίες στην αναλογία εμπέδησης

Επιπλέον, η αναλογία εμπέδησης διατηρεί και την ενεργειακή αντιστοιχία μεταξύ των δύο συστημάτων όπου η κινητική ενέργεια που συσσωρεύει μια μάζα  $M$  εξαιτίας της κίνησής της, η οποία ισούται με

$$E_{\text{κινητική}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2,$$

αντιστοιχεί στην ενέργεια που αποθηκεύεται ως μαγνητικό πεδίο σε ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$  λόγω της ροής του ρεύματος, η οποία ισούται με

$$E_{\text{πηνίου}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$$

Επίσης η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο σταθεράς  $k$  (στοιχείο μηχανικής ενδοτικότητας) λόγω της παραμόρφωσης που υφίσταται, η οποία ισούται με

$$E_{\text{ελατηρίου}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2,$$

αντιστοιχεί στην ηλεκτρική ενέργεια που αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  λόγω συσσώρευσης ηλεκτρικού φορτίου, η οποία ισούται με

$$E_{\text{πυκνωτή}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2.$$

#### Αντιστοίχιση μηχανικής και ηλεκτρικής εμπέδησης στην αναλογία εμπέδησης

Τέλος, όπως αναφέρθηκε, η αναλογία σύνθετης αντίστασης βασίστηκε στην έννοια της μηχανικής εμπέδησης του **Webster (1919)** η οποία αναφέρεται στον λόγο μιας δυναμικής μεταβλητής προς μία κινηματική μεταβλητή. Είναι ανάλογη της ηλεκτρικής εμπέδησης, αναδεικνύοντας τις παρόμοιες συμπεριφορές που προκύπτουν μεταξύ των μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων. Συγκεκριμένα η μηχανική εμπέδηση είναι ένα μέτρο το οποίο εκφράζει την αντίσταση ενός μηχανικού συστήματος στην κίνηση, καθώς υποβάλλεται σε αρμονική δύναμη, και είναι ο λόγος της επιβαλλόμενης δύναμης προς την ταχύτητα που προκύπτει  $Z_m(\omega) = \frac{F(\omega)}{v(\omega)}$ . Η ηλεκτρική εμπέδηση εκφράζει την αντίσταση στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, όπου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση και είναι ο λόγος της εφαρμόζουσας τάσης προς την ένταση του ρεύματος  $Z_e(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)}$ .

Η μηχανική εμπέδηση σε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{aligned} Z_m(\omega) &= Z_m = Z_b + j \cdot \omega \cdot M + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_m} = Z_b + j \cdot \left( \omega \cdot M - \frac{1}{\omega \cdot C_m} \right) = \\ &= Z_b + j \cdot (Z_M - Z_{C_m}) = Z_b + j \cdot Z \end{aligned}$$

Η ανάλογη σχέση της ηλεκτρικής εμπέδησης αναφέρεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή-αντιστάτη σε σειρά και εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} Z_e(\omega) &= Z_e = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = R + j \cdot (X_L - X_C) = \\ &= R + j \cdot X \end{aligned}$$

Η παράμετρος  $Z_b$  εκφράζει τη μηχανική εμπέδηση της αντίστασης η οποία αναφέρεται στην σταθερά απόσβεσης  $Z_b = \frac{F}{v} = b$  και ισοδυναμεί με την ηλεκτρική αντίσταση  $R$  στην ηλεκτρική εμπέδηση. Η σχέση  $Z_M = \omega \cdot M$  αφορά την μηχανική εμπέδηση της μάζας  $M$  που είναι ανάλογη της ηλεκτρικής εμπέδησης πηνίου αυτεπαγωγής  $L$ ,  $X_L = \omega \cdot L$ . Τέλος, η μηχανική εμπέδηση ενός



ελατηρίου ενδοτικότητας  $C_m$  ισούται με  $Z_{C_m} = -\frac{1}{\omega \cdot C_m}$  και αντιστοιχεί στην ηλεκτρική εμπέδηση πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ ,  $X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$ .

Η εμπέδηση της μηχανικής αντίστασης  $Z_b$  και η ηλεκτρική αντίσταση  $R$  (*resistance*) αποτελούν το πραγματικό μέρος μιας σύνθετης αντίστασης όπου η ενέργεια διαχέεται στο περιβάλλον ενώ η μηχανική αντίδραση  $Z$  και η ηλεκτρική αντίδραση  $X$  (*reactance*) αποτελούν το φανταστικό μέρος μιας σύνθετης αντίστασης όπου η ενέργεια αποθηκεύεται και μεταφέρεται. Εναλλακτικά η αντίδραση αναφέρεται και ως άεργη αντίσταση. Το φανταστικό μέρος μιας μηχανικής εμπέδησης αποτελείται από την αδρανειακή αντίδραση  $Z_M$  (*inertive reactance*) και από την ενδοτική αντίδραση  $Z_{C_m}$  (*compliant reactance*). Το φανταστικό μέρος μια ηλεκτρικής εμπέδησης αποτελείται από την επαγωγική αντίδραση  $X_L$  (*inductive reactance*) και από την χωρητική αντίδραση  $X_C$  (*capacitive reactance*). Η παράμετρος  $\omega$  εκφράζει την γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων ενώ το  $j$  είναι η φανταστική μονάδα που χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη διαφορά φάσης μεταξύ της δύναμης και της ταχύτητας στα μηχανικά συστήματα, καθώς και της τάσης και του ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Ωστόσο, ένα κύριο μειονέκτημα της αναλογίας εμπέδησης είναι ότι η μέθοδος υπολογισμού της συνολικής εμπέδησης στα μηχανικά συστήματα διαφέρει από εκείνη στα ηλεκτρικά κυκλώματα, και συγκεκριμένα είναι αντίστροφη. Η συνολική σύνθετη αντίσταση σε σειρά και παράλληλα στα ηλεκτρικά κυκλώματα, υπολογίζεται ως το άθροισμα των σύνθετων αντιστάσεων και ως το αντίστροφο άθροισμα των αντίστροφων σύνθετων αντιστάσεων αντίστοιχα, δηλαδή:

$$Z_e = Z_{e1} + Z_{e2} + \dots + Z_{en}$$

και

$$Z_e = \frac{1}{\frac{1}{Z_{e1}} + \frac{1}{Z_{e2}} + \dots + \frac{1}{Z_{en}}}$$

Η συνολική μηχανική εμπέδηση σε σειρά υπολογίζεται ως το αντίστροφο άθροισμα των αντίστροφων σύνθετων μηχανικών αντιστάσεων ενώ σε παράλληλη σύνδεση ως το άθροισμα των σύνθετων μηχανικών αντιστάσεων, δηλαδή:

$$Z_m = \frac{1}{\frac{1}{Z_{m1}} + \frac{1}{Z_{m2}} + \dots + \frac{1}{Z_{mn}}}$$

και

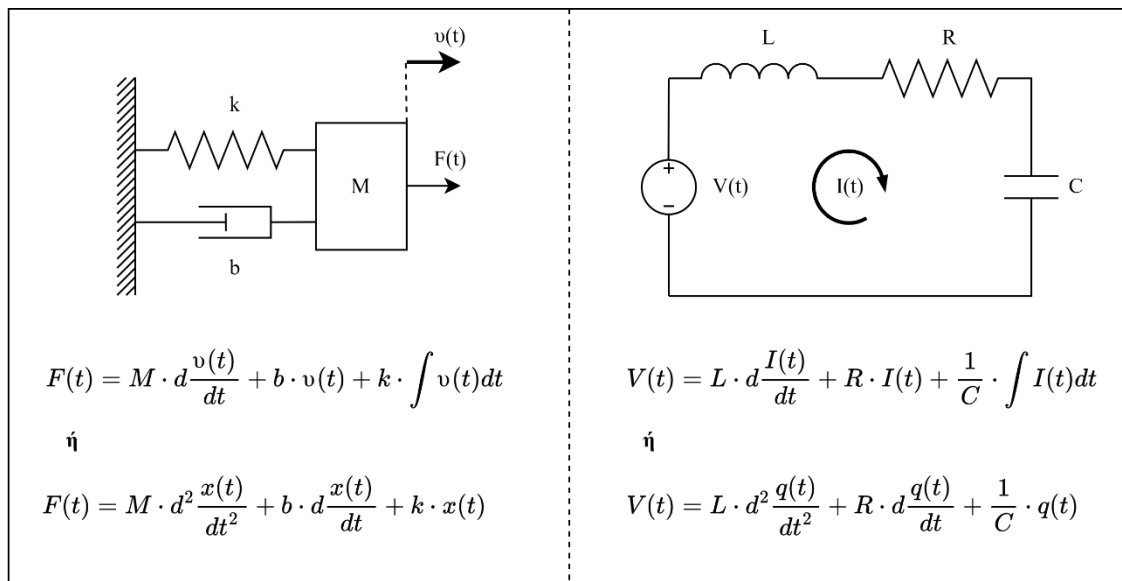
$$Z_m = Z_{m1} + Z_{m2} + \dots + Z_{mn}$$

Συνοπτικός Πίνακας Αντιστοιχιών

Μηχανικό σύστημα			Ηλεκτρικό σύστημα		
Μηχανική παράμετρος	Σύμβολο	Μονάδα μέτρησης	Ηλεκτρική παράμετρος	Σύμβολο	Μονάδα μέτρησης
Δύναμη	F	[N]	Τάση	V	[V]
Ταχύτητα	v	[ms <sup>-1</sup> ]	Ρεύμα	I	[A]
Μάζα	M	[kg]	Αυτεπαγωγή	L	[H]
Συντελεστής απόσβεσης	b	[N·s·m <sup>-1</sup> ]	Αντίσταση	R	[Ω]
Ελαστικότητα (σταθερά ελατηρίου)	k	[N·m <sup>-1</sup> ]	Αντίστροφο όπως χωρητικότητας	1/C	[F <sup>-1</sup> ]
Μετατόπιση (γραμμική κίνηση)	x	[m]	Ηλεκτρικό φορτίο	q	[C]

**Πίνακας 4.1:** Αντιστοίχιση μηχανικών και ηλεκτρικών στοιχείων στην αναλογία εμπέδησης.

Βάσει των παραπάνω αντιστοιχίσεων, ένα μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη που υπόκειται σε δύναμη **F** μπορεί να εκφραστεί ως ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή-αντιστάτη **σε σειρά** στο οποίο εφαρμόζεται πηγή τάσης **V**. Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων που περιγράφει το μηχανικό σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση βρόγχου που προκύπτει από τον νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff, όπως φαίνεται παρακάτω:



**Εικόνα 4.8:** Αριστερά: Μηχανικό σύστημα μάζας **M**, αποσβέστη ιξώδους **b** και ελατηρίου σταθεράς **k** το οποίο υπόκειται σε δύναμη **F**. Δεξιά: Ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου **L**, αντιστάτη **R** και πυκνωτή **C** στο οποίο εφαρμόζεται πηγή τάσης **V**.

### Εφαρμογές

Μία από τις αρχικές εφαρμογές της αναλογίας εμπέδησης παρουσιάζεται στο δημοσίευμα του **R. L. Wegel (1921)**. Στο δημοσίευμα αυτό, μελετάται μία γενικευμένη θεωρία των μαγνητο-μηχανικών συστημάτων ταλάντωσης με σκοπό την επίλυση όλων των πρακτικών προβλημάτων που εμφανίζονται στην λειτουργία διάφορων τύπων τηλεφωνικών δεκτών, οι οποίοι δρουν ως μετατροπείς ηλεκτρικής ενέργειας σε ακουστική ενέργεια και αντίστροφα. Η θεωρία αυτή διατυπώνεται με τη μορφή γραμμικών εξισώσεων όπου εφαρμόζεται η αναλογία εμπέδησης, ενώ παράλληλα απλοποιείται σημαντικά μέσω της θεωρίας ηλεκτρικών κυκλωμάτων και της χρήσης σύνθετων αριθμών (μιγαδικών αριθμών) και ανάλυσης στο πεδίο της συχνότητας (Fourier, Laplace).

Μια επιπλέον πρακτική εφαρμογή εμφανίζεται στο δημοσίευμα των **Maxfield, J. P.** και **Harrison H. C. (1926)**, όπου εξετάζεται η επίτευξη υψηλής ποιότητας ηχογράφησης και αναπαραγωγής ομιλίας ή μουσικής βασισμένη στο θεωρητικό υπόβαθρο και στις τεχνικές που αναπτύχθηκαν αρχικά για την μετάδοση τηλεφωνικών σημάτων. Η έρευνα τους υποδεικνύει ότι, αξιοποιώντας την θεωρία των ηλεκτρικών φίλτρων, είναι δυνατό να επιτευχθεί ο ακριβής έλεγχος και η βελτίωση της ποιότητας ήχου μέσω της μοντελοποίησης μηχανικών συστημάτων ταλάντωσης, όπως η κεφαλή χάραξης του φωνογράφου, ως ανάλογα ηλεκτρικά κυκλώματα. Συγκεκριμένα, σχεδιάζοντας ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και συγκεκριμένα ένα ζωνοπερατό ηλεκτρικό φίλτρο το οποίο ανταποκρίνεται στο επιθυμητό εύρος συχνοτήτων, αποτύπωσαν μέσω της αναλογίας εμπέδησης τα βελτιστοποιημένα χαρακτηριστικά του ηλεκτρικού φίλτρου στο αντίστοιχο μηχανικό σύστημα καθιστώντας έτσι την κεφαλή χάραξης ως ένα μηχανικό φίλτρο που αντιστοιχεί πλήρως στο ηλεκτρικό. Η επιτυχής πρακτική εφαρμογή της παραπάνω αναλογίας υπογράμμισε τη χρησιμότητα της στο σχεδιασμό και την βελτιστοποίηση μηχανικών φίλτρων αλλά και γενικότερα στον τομέα της ακουστικής μηχανικής.

Μία άλλη σημαντική πρακτική εφαρμογή της αναλογίας εμπέδησης είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση συστημάτων ελέγχου και απόσβεσης δονήσεων χρησιμοποιώντας πιεζοηλεκτρικά υλικά. Τα υλικά αυτά έχουν την ιδιότητα να μετατρέπουν τη μηχανική καταπόνηση, όπως αυτές που προκαλούνται από τις δονήσεις σε μία κατασκευή, σε ηλεκτρικό φορτίο δημιουργώντας ηλεκτρική τάση και αντίστροφα. Η άμεση μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική ενέργεια είναι η κύρια λειτουργία σε αυτά τα συστήματα απόσβεσης. Το πιεζοηλεκτρικό υλικό συνδέεται με ένα παθητικό ηλεκτρικό κύκλωμα, δηλαδή κύκλωμα που δεν περιλαμβάνει εξωτερική πηγή για τη λειτουργία του, το οποίο με τη σειρά του δέχεται το παραγόμενο ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι, εφαρμόζοντας την αναλογία εμπέδησης στα μηχανικά στοιχεία του μηχανικού συστήματος, δηλαδή του πιεζοηλεκτρικού υλικού που υπόκειται σε καταπόνηση, γίνεται ευκολότερη η βελτιστοποίηση των παραμέτρων των στοιχείων του ως αντίστοιχο ηλεκτρικό κύκλωμα και ως εκ τούτου επιτυγχάνεται ο ακριβής έλεγχος της απόσβεσης των δονήσεων (**Hagood & von Flotow, 1991**).

### 4.2.2 Αναλογία κινητικότητας (αντίστροφη αναλογία ή αναλογία δύναμης-ρεύματος)

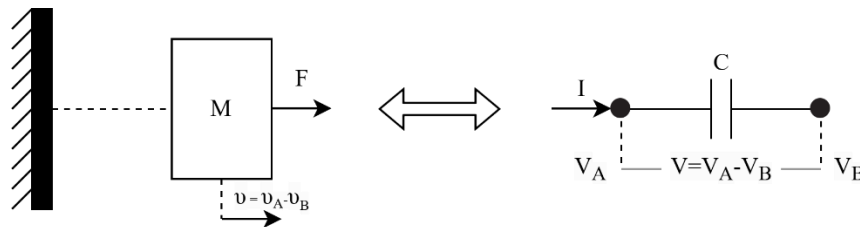
Η θεωρία της αναλογίας κινητικότητας (mobility analogy) γνωστή και ως αντίστροφη αναλογία (inverse analogy) ή αναλογία δύναμης-ρεύματος (force-current analogy) ή αναλογία Firestone, αποτέλεσε την μέθοδο που αναπτύχθηκε ως εναλλακτική προσέγγιση για την αντιστοίχιση μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων. Όπως προαναφέρθηκε, η πρώτη αναφορά σε αυτή τη μέθοδο έγινε από τον **M. Darrieus (1929)** και ύστερα μελετήθηκε στενά από τον **Hähnle (1932)** και ειδικότερα από τον **Firestone (1938)**, ο οποίος εισήγαγε την έννοια της κινητικότητας πάνω στην οποία στηρίχθηκε η αναλογία αυτή. Βασικό πλεονέκτημα συγκριτικά με την αναλογία εμπέδησης είναι η διατήρηση της τοπολογίας των στοιχείων μεταξύ των μηχανικών και των ηλεκτρικών συστημάτων αλλά και η φυσική αναλογία στους κανόνες υπολογισμού αθροίσματος της συνολικής μηχανικής κινητικότητας (αντίστροφο της μηχανικής εμπέδησης) και της συνολικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας (αντίστροφο ηλεκτρικής εμπέδησης). Η αναλογία της κινητικότητας αφορά τον σχεδιασμό ενός ισοδύναμου ηλεκτρικού κυκλώματος μέσω των εξισώσεων που περιγράφουν ένα μηχανικό σύστημα, συνδέοντας τη δύναμη  $\mathbf{F}$  με το ηλεκτρικό ρεύμα  $\mathbf{I}$ , την ταχύτητα  $\mathbf{v}$  με την ηλεκτρική τάση  $\mathbf{V}$  και την μετατόπιση  $\mathbf{x}$  με την μαγνητική ροή  $\Phi$ .

#### Αντιστοιχίσεις μεγεθών στην αναλογία κινητικότητας

Τα βασικά μηχανικά μεγέθη - δύναμη, ταχύτητα και μετατόπιση – αντιστοιχούν αναλογικά, στο ηλεκτρικό ρεύμα, την ηλεκτρική τάση και τη μαγνητική ροή. Σε αυτή τη προσέγγιση, οι ρόλοι των μηχανικών μεγεθών ως μεταβλητές διέγερσης και ροής αντιστρέφονται σε σχέση με την αναλογία εμπέδησης, προσφέροντας μια εναλλακτική και πιο φυσική περιγραφή στην μεταφορά ενέργειας. Ειδικότερα, η δύναμη  $\mathbf{F}$  αντιμετωπίζεται ως μεταβλητή ροής καθώς βασίζεται στην ιδέα ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως η ροή ενός μηχανικού φορτίου *διαμέσου* ενός μηχανικού στοιχείου και αυτό είναι ανάλογο με το ηλεκτρικό ρεύμα  $\mathbf{I}$  το οποίο αναφέρεται στη ροή ηλεκτρικού φορτίου *διαμέσου* ενός αγωγού (through variables). Επιπλέον, το ηλεκτρικό ρεύμα θεωρείται και ως κινητήρια «δύναμη» διότι τα ισοδύναμα ηλεκτρικά κυκλώματα που προκύπτουν στην αναλογία κινητικότητας αποτελούνται από πηγή ρεύματος και όχι από πηγή τάσης και συνεπώς αποτελεί την αιτία μεταφοράς ηλεκτρικού φορτίου. Ομοίως, η ταχύτητα  $\mathbf{v}$  και το ανάλογο της που είναι η ηλεκτρική τάση  $\mathbf{V}$ , ερμηνεύονται ως μεταβλητές διέγερσης ή πιο σωστά μεταβλητές δυναμικού (potential variables), διότι αναφέρονται στη διαφορά δυναμικού καθώς συμβάλλουν στον έλεγχο της ροής μηχανικού ή ηλεκτρικού φορτίου, αντίστοιχα, κατά μήκος δύο σημείων (across variables). Δεδομένου ότι η τάση μπορεί να χαρακτηριστεί και ως ο ρυθμός μαγνητικής ροής  $\mathbf{V} = \frac{d\Phi}{dt}$ , η μετατόπιση  $\mathbf{x}$  αντιστοιχεί στην μαγνητική ροή  $\Phi$ . Όπως και η αναλογία εμπέδησης, έτσι και η αναλογία κινητικότητας διατηρεί την σχέση ανάμεσα στη μηχανική ισχύ  $\mathbf{P}_m = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$  και την ηλεκτρική ισχύ  $\mathbf{P}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}$ , καθώς  $\mathbf{P} = \text{Μεταβλητή διέγερσης} \cdot \text{Μεταβλητή ροής}$ .

Η αναλογία κινητικότητας συνδέει τα στοιχεία ενός μηχανικού συστήματος με τα αντίστοιχα ηλεκτρικά στοιχεία παρέχοντας μία αποτελεσματική μέθοδο ανάλυσης απλών αλλά και

πολύπλοκων μηχανικών συστημάτων χρησιμοποιώντας το θεωρητικό υπόβαθρο και τις τεχνικές των ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Σύμφωνα με αυτήν την αναλογία, η αδράνεια της μάζας  $M$  είναι ανάλογη της ηλεκτρικής χωρητικότητας  $C$ , η μηχανική ενδοτικότητα  $C_m$  είναι ανάλογη της ηλεκτρικής αυτεπαγωγής  $L$  (ή ισοδύναμα η σκληρότητα  $k$  ελατηρίου είναι ανάλογη του αντιστρόφου της ηλεκτρικής αυτεπαγωγής  $\frac{1}{L}$ , ενώ ο συντελεστής απόσβεσης  $b$  ενός αποσβέστη ισοδυναμεί με το αντίστροφο της ηλεκτρικής αντίστασης  $\frac{1}{R}$  δηλαδή την ηλεκτρική αγωγιμότητα  $G$ ). Ειδικότερα, η αδράνεια της μάζας  $M$  είναι η ιδιότητα της να αντιστέκεται στις μεταβολές της κινητικής της κατάστασης (όπως η επιτάχυνση ή η επιβράδυνση) υπό την επίδραση δύναμης  $F$ . Στην αναλογία κινητικότητας, η ιδιότητα αυτή αντιστοιχεί στην χωρητικότητα  $C$  ενός πυκνωτή σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα να συσσωρεύει ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  για μια δεδομένη τάση  $V$ . Η συσχέτιση αυτή γίνεται πιο σαφής όταν η σχέση της χωρητικότητας  $C = \frac{Q(t)}{V(t)}$  αναδιατυπώνεται ως  $I(t) = C \cdot \frac{dV(t)}{dt}$ , κάνοντας άμεση την αντιστοίχιση στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα  $F(t) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt}$  όπου και στις δύο σχέσεις υπάρχει μια παράμετρος αποθήκευσης ενέργειας ενώ παράλληλα υποδηλώνεται η ικανότητα ενός πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  να αντιστέκεται στις απότομες μεταβολές της τάσης  $V$  που εφαρμόζεται στα άκρα του, καθώς διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα  $I$ .

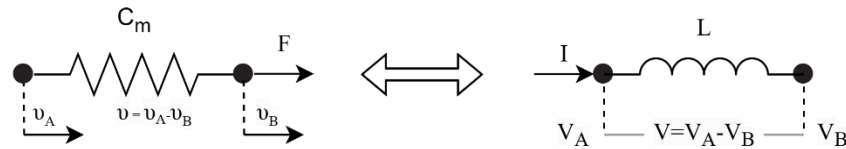


**Εικόνα 4.9:** Αντιστοίχιση μάζας  $M$  με πυκνωτή  $C$  στην αναλογία κινητικότητας.

όπου  $V$  η τάση που εφαρμόζεται κατά μήκος του πηνίου αυτεπαγωγής  $L$  η οποία είναι απαραίτητη για να προκαλέσει μεταβολή στην ένταση του ρεύματος  $I$ .

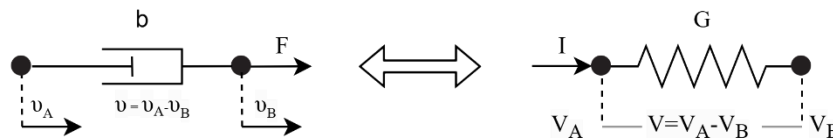
Η μηχανική ενδοτικότητα  $C_m$  ενός ελαστικού μηχανικού στοιχείου περιγράφει την ικανότητα ενός συστήματος να παραμορφώνεται με ευκολία υπό την επίδραση δύναμης  $F$  και να αποθηκεύει ενέργεια. Αντιστοιχεί στην αυτεπαγωγή  $L$  η οποία χαρακτηρίζει την ικανότητα ενός πηνίου να αντιστέκεται στις μεταβολές του ηλεκτρικού ρεύματος  $V = L \cdot \frac{dI}{dt}$ . Η αναλογία αυτή γίνεται πιο ξεκάθαρη όταν ο νόμος του Hooke  $F = k \cdot x$  αναδιατυπώνεται ως  $v = C_m \cdot \frac{dF}{dt}$  ή  $v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt}$  όπου δίνεται έμφαση στο ρυθμό μεταβολής της δύναμης με το χρόνο στον οποίο αντιστέκεται ένας ελαστικός μηχανισμός (ελατήριο), ανάλογα με την ευκαμψία ή τη σκληρότητα του, και την επίδραση αυτής της μεταβολής στην ταχύτητα παραμόρφωσης. Αυτό είναι ανάλογο με την συμπεριφορά ενός πηνίου αυτεπαγωγής  $L$  όπου ο ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού ρεύματος στον οποίο αντιστέκεται επηρεάζει την τάση που εφαρμόζεται στα άκρα του ενώ

παράλληλα, καθώς το διαπερνά ηλεκτρικό ρεύμα, αποθηκεύει μαγνητική ενέργεια (όπως ένα ελατήριο αποθηκεύει δυναμική ενέργεια) σε μορφή μαγνητικού πεδίου.



**Εικόνα 4.10:** Αντιστοίχιση στοιχείου μηχανικής ενδοτικότητας  $C_m$  με πηνίο  $L$  στην αναλογία κινητικότητας.

Η έννοια της ιξώδους απόσβεσης στα μηχανικά συστήματα χαρακτηρίζεται από μια δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας, η οποία ενεργεί πάντα αντίθετα της κίνησης, με αποτέλεσμα την διάχυση της κινητικής ενέργειας μέσω της θερμότητας. Η δύναμη απόσβεσης εκφράζεται από τη σχέση  $\mathbf{F}_d = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ , όπου  $\mathbf{b}$  η σταθερά απόσβεσης η οποία χαρακτηρίζει την μηχανική αντίσταση του αποσβέστη και  $\mathbf{v}$  η σχετική ταχύτητα. Στην αναλογία κινητικότητας, η αναδιατύπωση του νόμου του Ohm  $\mathbf{I} = \frac{1}{R} \cdot \mathbf{V}$  δείχνει ότι συντελεστής απόσβεσης  $\mathbf{b}$  συνδέεται με το αντίστροφο της αντίστασης  $\frac{1}{R}$  ή αλλιώς με την ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\mathbf{G}$  η οποία μετριέται σε siemens (S) και είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει την ευκολία με την οποία ρέει το ηλεκτρικό ρεύμα. Στην αναλογία εμπέδησης ο ρόλος των παραμέτρων  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{R}$  είναι παρόμοιος: αντιπροσωπεύουν την αντίσταση είτε στην κίνηση στα μηχανικά συστήματα είτε στη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, στην αναλογία κινητικότητας η σταθερά  $\mathbf{b}$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο ευκολίας στην κίνηση ενός μηχανικού στοιχείου, αντίστοιχη με την αγωγιμότητα  $\mathbf{G}$ , η οποία δείχνει το πόσο εύκολα το ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται μέσω ενός αγωγού.



**Εικόνα 4.11:** Αντιστοίχιση αποσβέστη με συντελεστή εσωτερικής τριβής  $\mathbf{b}$  με αντιστάτη ηλεκτρικής αγωγιμότητας  $\mathbf{G}$  στην αναλογία κινητικότητας.

### Ενεργειακές αντιστοιχίσεις στην αναλογία κινητικότητας

Η αναλογία κινητικότητας διατηρεί επίσης, αλλά με διαφορετικό τρόπο, την ενεργειακή αντιστοιχία μεταξύ των δύο συστημάτων και συγκεκριμένα:

η κινητική ενέργεια που αποθηκεύεται σε μία μάζα  $\mathbf{M}$  εξαιτίας της κίνησής της, η οποία ισούται με

$$E_{\text{κινητική}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M} \cdot v^2,$$

αντιστοιχεί στην ηλεκτρική ενέργεια που αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  λόγω συσσώρευσης ηλεκτρικού φορτίου, η οποία ισούται με

$$E_{\text{πυκνωτή}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 .$$

Επίσης η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο σταθεράς  $k$  (στοιχείο μηχανικής ενδοτικότητας) λόγω της παραμόρφωσης που υφίσταται, η οποία ισούται με

$$E_{\text{ελατηρίου}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 ,$$

αντιστοιχεί στην ενέργεια που αποθηκεύεται ως μαγνητικό πεδίο σε ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L$  λόγω της ροής του ρεύματος, η οποία ισούται με

$$E_{\text{πηνίου}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 .$$

#### Αντιστοίχιση μηχανικής κινητικότητας και ηλεκτρικής αγωγιμότητας στην αναλογία κινητικότητας

Τέλος, όπως αναφέρθηκε η αναλογία κινητικότητας βασίστηκε στην έννοια της κινητικότητας του **Firestone (1933)** η οποία αναφέρεται στον λόγο μιας κινηματικής μεταβλητής προς μία δυναμική μεταβλητή. Ουσιαστικά, αναφέρεται στη μηχανική αγωγιμότητα δηλαδή στο αντίστροφο της μηχανικής εμπέδησης η οποία δείχνει την ευκολία με την οποία το σύστημα κινείται, καθώς υπόκειται σε αρμονική δύναμη, και είναι ο λόγος της προκύπτουσας ταχύτητας προς την εφαρμόζουσα δύναμη  $Y_m(\omega) = \frac{v(\omega)}{F(\omega)}$ . Είναι ανάλογη της σύνθετης ηλεκτρικής αγωγιμότητας η οποία δείχνει την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, όταν εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση και είναι ο λόγος του ηλεκτρικού ρεύματος προς την εφαρμόζουσα τάση  $Y(\omega) = \frac{I(\omega)}{V(\omega)}$ . Συνεπώς, στην αναλογία κινητικότητας διατηρούνται οι σύνθετες αγωγιμότητες και όχι οι σύνθετες αντιστάσεις, διότι οι λόγοι τους δεν είναι ανάλογοι  $\frac{F(\omega)}{v(\omega)} \neq \frac{V(\omega)}{I(\omega)}$  καθώς δεν διατηρείται η ίδια μαθηματική σχέση εξαιτίας της διαφορετικής αντιστοίχισης των μεγεθών.

Η σύνθετη μηχανική κινητικότητα σε ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη μπορεί να εκφραστεί ως:

$$Y_m(\omega) = Y_m = \frac{1}{Z_m} = \frac{1}{Z_b + j \cdot \omega \cdot M + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_m}} = \frac{1}{Z_b + j \cdot \left( \omega \cdot M - \frac{1}{\omega \cdot C_m} \right)} =$$



$$\frac{1}{Z_b + j \cdot (Z_M - Z_{C_m})} = \frac{1}{Z_b + j \cdot Z} = \frac{Z_b - j \cdot Z}{Z_b^2 + Z^2} = \frac{Z_b}{Z_b^2 + Z^2} + \frac{-j \cdot Z}{Z_b^2 + Z^2} = G_m + j \cdot B_m$$

Η ανάλογη σχέση της σύνθετης ηλεκτρικής αγωγιμότητας που αναφέρεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή-αντιστάτη σε σειρά, εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} Y_e(\omega) = Y_e &= \frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} = \frac{1}{R + j \cdot (X_L - X_C)} \\ &= \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{R - j \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + \frac{-j \cdot X}{R^2 + X^2} = G + j \cdot B \end{aligned}$$

Το πραγματικό μέρος της σύνθετης μηχανικής κινητικότητας αναφέρεται στη κινητικότητα  $G_m = \frac{Z_b}{Z_b^2 + Z^2}$  και της σύνθετης ηλεκτρικής αγωγιμότητας αναφέρεται στην αγωγιμότητα  $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ . Το φανταστικό μέρος της σύνθετης μηχανικής κινητικότητας  $B_m = -\frac{j \cdot Z}{Z_b^2 + Z^2}$  και της σύνθετης ηλεκτρικής αγωγιμότητας  $B = -\frac{j \cdot X}{R^2 + X^2}$  είναι η επιδεκτικότητα (*susceptance*).

Η παράμετρος  $\omega$  εκφράζει την γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων ενώ το  $j$  είναι η φανταστική μονάδα που χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη διαφορά φάσης μεταξύ της δύναμης και της ταχύτητας στα μηχανικά συστήματα, καθώς και της τάσης και του ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Η μέθοδος υπολογισμού της συνολικής σύνθετης κινητικότητας στα μηχανικά συστήματα παραμένει ίδια με εκείνη για τον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας στα ηλεκτρικά κυκλώματα, γεγονός που καθιστά την αναλογία κινητικότητας πιο συνεπή σε σχέση με την αναλογία εμπέδησης. Αυτό συμβαίνει διότι η τοπολογία παραμένει ίδια μεταξύ των μηχανικών και των ισοδύναμων ηλεκτρικών συστημάτων, καθώς τα μηχανικά στοιχεία σε σειρά και παράλληλα, αντιστοιχούν σε ηλεκτρικά στοιχεία σε σειρά και παράλληλα αντίστοιχα. Συνεπώς, η μαθηματική μεθοδολογία για τον υπολογισμό της συνολικής σύνθετης αγωγιμότητας παραμένει ίδια για τα μηχανικά και ηλεκτρικά συστήματα όταν εφαρμόζεται η αναλογία κινητικότητας. Ειδικότερα:

Η συνολική σύνθετη αγωγιμότητα σε σειρά και παράλληλα στα ηλεκτρικά κυκλώματα, υπολογίζεται ως το άθροισμα των σύνθετων αγωγιμοτήτων και ως το αντίστροφο άθροισμα των αντίστροφων σύνθετων αγωγιμοτήτων αντίστοιχα, δηλαδή:

$$Y_e = Y_{e1} + Y_{e2} + \dots + Y_{en}$$

και

$$Y_e = \frac{1}{\frac{1}{Y_{e1}} + \frac{1}{Y_{e2}} + \dots + \frac{1}{Y_{en}}}$$



Η συνολική σύνθετη κινητικότητα σε σειρά και παράλληλα στα μηχανικά συστήματα, υπολογίζεται ως το άθροισμα των σύνθετων κινητικοτήτων και ως το αντίστροφο άθροισμα των αντίστροφων σύνθετων κινητικοτήτων αντίστοιχα, δηλαδή:

$$Y_m = Y_{m1} + Y_{m2} + \dots + Y_{mn}$$

και

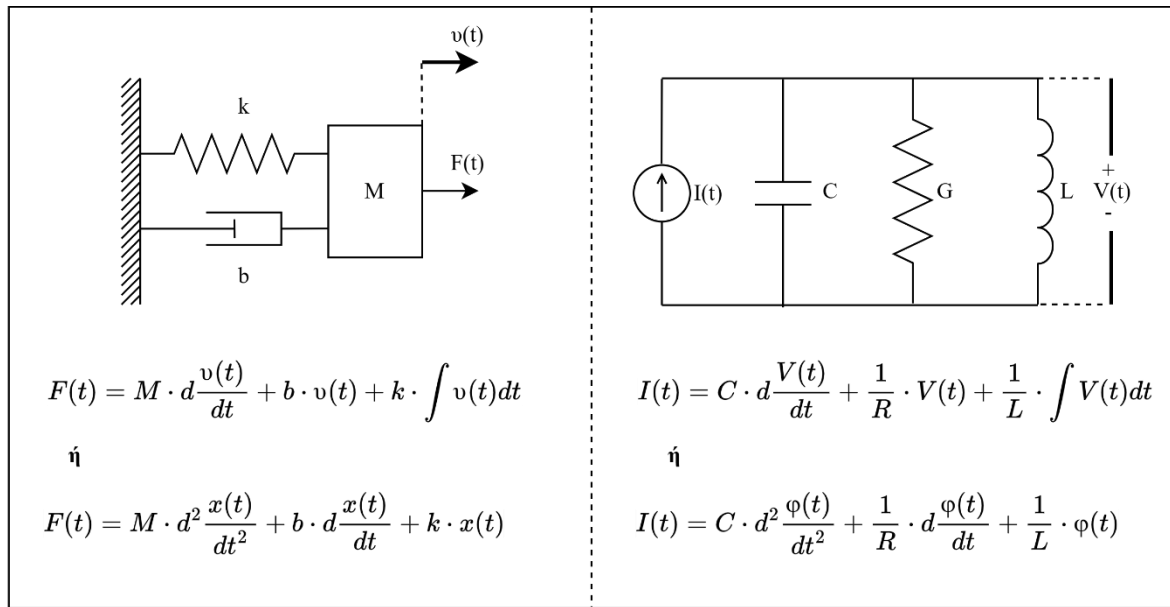
$$Y_m = \frac{1}{\frac{1}{Y_{m1}} + \frac{1}{Y_{m2}} + \dots + \frac{1}{Y_{mn}}}$$

#### Συνοπτικός Πίνακας Αντιστοιχιών

Μηχανικό σύστημα			Ηλεκτρικό σύστημα		
Μηχανική παράμετρος	Σύμβολο	Μονάδα μέτρησης	Ηλεκτρική παράμετρος	Σύμβολο	Μονάδα μέτρησης
Δύναμη	F	[N]	Ρεύμα	I	[A]
Ταχύτητα	v	[ms <sup>-1</sup> ]	Τάση	V	[V]
Μάζα	M	[kg]	Χωρητικότητα	C	[F]
Συντελεστής απόσβεσης	b	[N·s·m <sup>-1</sup> ]	Αντίστροφο της αντίστασης (αγωγιμότητα)	1/R ή G	[Ω <sup>-1</sup> ] ή [S]
Ελαστικότητα (σταθερά ελατηρίου)	k	[N·m <sup>-1</sup> ]	Αντίστροφο της αυτεπαγωγής	1/L	[H <sup>-1</sup> ]
Μετατόπιση (γραμμική κίνηση)	x	[m]	Ηλεκτρική ροή	φ	[V·m]

**Πίνακας 4.2:** Αντιστοίχιση μηχανικών και ηλεκτρικών στοιχείων στην αναλογία κινητικότητας.

Βάσει των παραπάνω αντιστοιχίσεων, ένα μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβέστη που υπόκειται σε δύναμη **F** μπορεί να εκφραστεί ως ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή-αντιστάτη σε παράλληλη διάταξη στο οποίο εφαρμόζεται πηγή ρεύματος **I**. Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων που περιγράφει το μηχανικό σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση κόμβων που προκύπτει από τον νόμο των τάσεων του Kirchhoff, όπως φαίνεται παρακάτω:



**Εικόνα 4.12:** Αριστερά: Μηχανικό σύστημα μάζας  $M$ , αποσβέστη ιζώδους  $b$  και ελατηρίου σταθεράς  $k$  το οποίο υπόκειται σε δύναμη  $F$ . Δεξιά: Ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα πηνίου  $L$ , αντιστάτη ηλεκτρικής αγωγιμότητας  $G$  και πυκνωτή  $C$  στο οποίο εφαρμόζεται πηγή ρεύματος  $I$ .

### Εφαρμογές

Μία σημαντική εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας συναντάται στα δυναμικά ηχεία, τα οποία αποτελούνται από ένα μικροκινητήρα κινούμενου πηνίου (moving-coil motor). Το ηχείο είναι μία συσκευή που μετατρέπει την ηλεκτρική ενέργεια σε ηχητικά κύματα μέσω της μηχανικής κίνησης του πηνίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ενώ μπορεί να συμπεριφέρεται ως μετατροπέας εμπέδησης όπως οι μετασχηματιστές και τα συστήματα μετάδοσης κίνησης. Ως μετατροπέας εμπέδησης εννοείται η μετατροπή της μηχανικής αντίστασης που αντιμετωπίζει το πηνίο όταν προσπαθεί να κινήσει το διάφραγμα και άλλα μηχανικά εξαρτήματα, η οποία εμφανίζεται ως πρόσθετη ηλεκτρική αντίσταση στο κύκλωμα που τροφοδοτεί το ηχείο. Επιπλέον, όπως ένας ηλεκτρικός κινητήρας μετατρέπει ηλεκτρική ενέργεια σε μηχανική και μια γεννήτρια το αντίστροφο, έτσι και το πηνίο του ηχείου λειτουργεί με βάση την αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικού ρεύματος και μαγνητικού πεδίου. Ως εκ τούτου, ένα σύστημα κινούμενου πηνίου μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας ιδανικός μετασχηματιστής, όπου η είσοδος - δηλαδή το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο - δημιουργεί μηχανική δύναμη και ορίζεται από τη σχέση  $F = B \cdot l \cdot I$ . Παράλληλα, λόγω της κίνησης του πηνίου εντός του μαγνητικού του πεδίου εμφανίζεται μία αντίθετη τάση από την τάση που έθεσε το πηνίο σε κίνηση η οποία ορίζεται από τη σχέση  $V = B \cdot l \cdot v$ . Οι παραπάνω σχέσεις τεκμηριώνουν την αναλογία δύναμης-ρεύματος και ταχύτητας-τάσης, δηλαδή τον ορισμό της αναλογίας κινητικότητας, όπου  $B$  η πυκνότητα μαγνητικής ροής με μονάδα μέτρησης το Tesla (T) και  $l$  το μήκος του σύρματος του πηνίου σε μέτρα (m). Έτσι, η εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας επιτρέπει την ανάλυση και τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του ηχείου με όρους ηλεκτρικών κυκλωμάτων (John Borwick, 2001).

Μία αξιοσημείωτη εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας εμφανίζεται στο δημοσίευμα του **Malcolm C. Smith (2002)** όπου εισάγεται ένας νέος μηχανισμός για την αντιμετώπιση ενός θεμελιώδους περιορισμού στην κλασική ανάλυση μηχανικών συστημάτων. Ο μηχανισμός αυτός, όπου αναφέρεται ως *ινέρτερ* (inertor), αποτελεί ένα μηχανικό στοιχείο με δύο ελεύθερα κινούμενους ακροδέκτες και έχει την ιδιότητα να παράγει μία δύναμη  $\mathbf{F}$  (αδρανειακή αντίδραση) ανάλογη της σχετικής επιτάχυνσης  $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$  μεταξύ των ακροδεκτών του, δηλαδή ισχύει η σχέση  $\mathbf{F} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$ , όπου  $\mathbf{b}$  η αδρανειακότητα με μονάδα μέτρησης τα χιλιόγραμμα (kg). Ο μηχανισμός του *ινέρτερ* λειτουργεί ως πυκνωτής στην αναλογία κινητικότητας και υπερτερεί του κλασικού στοιχείου της μάζας, το οποίο ανταποκρίνεται μόνο στην απόλυτη επιτάχυνση και διαθέτει έναν μόνο ακροδέκτη. Αντίθετα, ο *ινέρτερ* επιτρέπει την αποθήκευση κινητικής ενέργειας και την παραγωγή δύναμης χωρίς να απαιτείται σύνδεση με σταθερό σημείο, καθιστώντας τον ιδανικό για χρήση μεταξύ **δύο ελεύθερων σωμάτων**. Στην πράξη, ο μηχανισμός αυτός αρχικά χρησιμοποιήθηκε εμπιστευτικά και αποκλειστικά στη Formula 1 ως μέρος της ανάρτησης των αγωνιστικών οχημάτων, όπου έγινε γνωστός με την κωδική ονομασία *J-damper*, όπως επιβεβαιώνεται από επίσημη παρουσίαση της **Cambridge Enterprise (2008)**. Αρκετά χρόνια αργότερα, η τεχνολογία κατοχυρώθηκε νομικά μέσω της πατέντας για έναν τύπο *ινέρτερ με υγρό* (fluid inertor), που υποβλήθηκε από τον **Tuluie (2011)**.

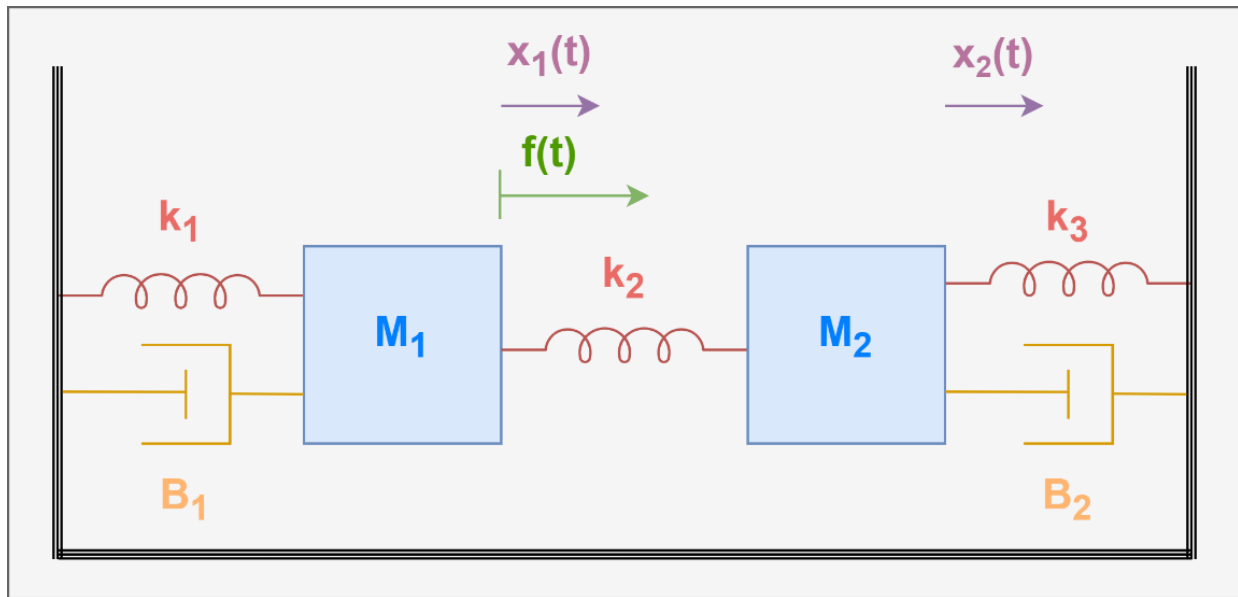
#### 4.2.3 Εφαρμογή ηλεκτρομηχανικών αναλογιών σε γραμμικά συστήματα

Για την καλύτερη κατανόηση των αναλογιών εμπέδησης και κινητικότητας, ακολουθεί η εφαρμογή τους σε παραδείγματα γραμμικών μηχανικών συστημάτων μεταφοράς με διάφορους βαθμούς ελευθερίας, αποτελούμενα από μονοδιάστατα στοιχεία (ελατήρια, μάζες και αποσβεστήρες).

Το **πρώτο βήμα** αφορά το σχεδιασμό ενός ισοδύναμου μηχανικού συστήματος με τη μορφή διαγράμματος κόμβων. Οι κόμβοι τοποθετούνται πάνω από μια ευθεία οριζόντια γραμμή, το επίπεδο αναφοράς, και συμβολίζουν τις μετατοπίσεις των στοιχείων στο σύστημα. Κάθε στοιχείο που εμφανίζει μετατόπιση συνδέεται με τον εκάστοτε κόμβο που συμβολίζει την μετατόπιση αυτή. Στο **δεύτερο βήμα** διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις για κάθε κόμβο χρησιμοποιώντας τους Νόμους του Νεύτωνα δηλαδή, για κάθε κόμβο το άθροισμα των εφαρμοζόμενων δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των μεταφερόμενων δυνάμεων. Στο **τρίτο βήμα** εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Laplace στις εξισώσεις που προκύπτουν και στο **τέταρτο βήμα** γίνεται αντικατάσταση των μηχανικών παραμέτρων με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις Laplace, βάσει των κανόνων της αντίστοιχης αναλογίας. Τέλος, το **πέμπτο βήμα** περιλαμβάνει την επαλήθευση των εξισώσεων Laplace με τις ηλεκτρικές παραμέτρους, σχεδιάζοντας το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα και διατυπώνοντας τις διαφορικές εξισώσεις που το περιγράφουν με τους Νόμους του Kirchhoff, εφαρμόζοντας και σε αυτές τον μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Σε ένα σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη υπάρχουν δύο σώματα με μάζες  $M_1$  και  $M_2$ , όπου το ένα συνδέεται με ένα ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και το άλλο με ένα ελατήριο σταθεράς  $k_3$ . Οι άλλες άκρες των ελατηρίων είναι πακτωμένες σε σταθερή κάθετη επιφάνεια, αντιστοίχως. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει ένα ελατήριο σταθεράς  $k_2$  που τα συνδέει. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία ενώ την χρονική στιγμή  $t$  ασκείται στη μάζα  $M_1$  δύναμη  $F$  που προκαλεί μετατόπιση  $x_1$  και  $x_2$  στις μάζες  $M_1$  και  $M_2$ , αντίστοιχα. Επίσης, οι μάζες  $M_1$ ,  $M_2$  υπόκεινται σε εσωτερική τριβή με συντελεστή ιξώδους  $b_1$  και  $b_2$  και απεικονίζονται ως αποσβεστήρες. Το σύστημα αναπαρίσται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



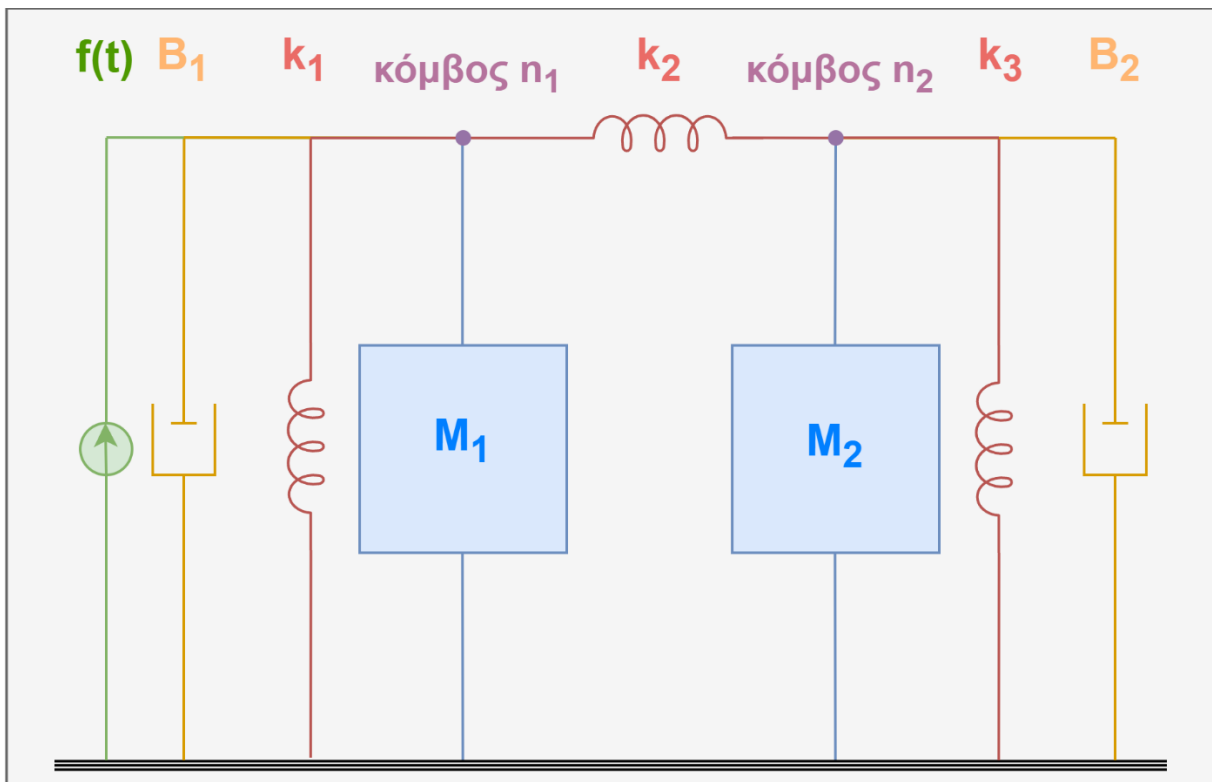
**Σχεδιάγραμμα 4.1:** Μηχανικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη όπου:  $M_1$  η μάζα 1,  $M_2$  η μάζα 2,  $k_1$ ,  $k_2$  και  $k_3$  οι σταθερές των ελατηρίων,  $B_1$  ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής με συντελεστή ιξώδους  $b_1$ ,  $B_2$  ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής με συντελεστή ιξώδους  $b_2$ ,  $x_1$  η μετατόπιση μάζας 1,  $x_2$  η μετατόπιση μάζας 2 και  $f$  η δύναμη που ασκείται στην μάζα 1.

Αρχικά, κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάγραμμα κόμβων του παραπάνω συστήματος ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Ο αριθμός των κόμβων ισούται με τον αριθμό των μετατοπίσεων των στοιχείων στο σύστημα, εξαιτίας της δύναμης που ασκείται. Στο σύστημα εμφανίζονται δύο διαφορετικές μετατοπίσεις  $x_1$ ,  $x_2$  για τις μάζες  $M_1$ ,  $M_2$  και τα υπόλοιπα στοιχεία με τα οποία είναι συνδεδεμένες αντιστοίχως, επομένως θα αντιστοιχούν σε δύο κόμβους  $n_1$  και  $n_2$ .
2. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους προσδιορίζεται σε σχέση με ένα σταθερό σημείο, συνδέονται από τον αντίστοιχο κόμβο στο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ του αντίστοιχου κόμβου και του επιπέδου αναφοράς. Έτσι η μάζα  $M_1$ , το ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και ο αποσβεστήρας

$B_1$  σχεδιάζονται παράλληλα και συνδέονται με τον κόμβο  $n_1$  και το επίπεδο αναφοράς. Ομοίως, η μάζα  $M_2$ , το ελατήριο σταθεράς  $k_3$  και ο αποσβεστήρας  $B_2$  σχεδιάζονται παράλληλα και συνδέονται με τον κόμβο  $n_2$  και το επίπεδο αναφοράς.

3. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους εξαρτάται από τη διαφορά δύο μετατοπίσεων, συνδέονται μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Επομένως το ελατήριο σταθεράς  $k_2$  σχεδιάζεται μεταξύ των κόμβων  $n_1$  και  $n_2$ .
4. Η δύναμη  $f$  συνδέεται με το επίπεδο αναφοράς και τον κόμβο που αντιστοιχεί στην μετατόπιση που προκαλείται στην αντίστοιχη μάζα λόγω της δύναμης αυτής. Άρα, η δύναμη  $f$  σχεδιάζεται μεταξύ του κόμβου  $n_1$  και του επιπέδου αναφοράς.



**Σχεδιάγραμμα 4.2:** Απεικόνιση μηχανικού συστήματος ελατηρίου – μάζας – αποσβεστή ως διάγραμμα κόμβων.

Αφού κατασκευάσουμε το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος, προχωράμε στη μαθηματική του μοντελοποίηση με τη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή των φυσικών νόμων της μηχανικής, όπως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ( $F=m \cdot a$ ) για τη δυναμική των μαζών, η σχέση παραμόρφωσης των ελατηρίων (νόμος του Hook  $F=k \cdot x$ ) και οι σχέσεις για την τριβή ( $F=b \cdot \dot{x}$ ).

Βάσει του διαγράμματος κόμβων, κάθε κόμβος που αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση της ανάλογης μάζας, οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση. Επομένως, για τους **δύο κόμβους** θα προκύψουν **δύο διαφορικές εξισώσεις**:

Για τον κόμβο  $n_1$ :

$$\begin{aligned}\Sigma F(t) &= M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow \\ F(t) - b_1 \cdot v_1(t) - k_1 \cdot x_1(t) - k_2 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) &= M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow \\ F(t) &= b_1 \cdot v_1(t) + k_1 \cdot x_1(t) + M_1 \cdot a_1(t) + k_2 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) \Leftrightarrow \\ F(t) &= b_1 \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 \cdot x_1(t) + M_1 \cdot \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + k_2 \cdot (x_1(t) - x_2(t))\end{aligned}\quad (4.1.1)$$

Για τον κόμβο  $n_2$ :

$$\begin{aligned}\Sigma F(t) &= M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow \\ 0 - b_2 \cdot v_2(t) - k_3 \cdot x_2(t) - k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) &= M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow \\ 0 &= k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + M_2 \cdot a_2(t) + k_3 \cdot x_2(t) + b_2 \cdot v_2(t) \Leftrightarrow \\ 0 &= k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + M_2 \cdot \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + k_3 \cdot x_2(t) + b_2 \cdot \frac{dx_2(t)}{dt}\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

Υστερα γίνεται εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στις εξισώσεις (4.1.1) και (4.1.2) αντιστοίχως:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1 \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 \cdot x_1(t) + M_1 \cdot \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + k_2 \cdot (x_1(t) - x_2(t))\} \Leftrightarrow \\ F(s) &= b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s) + k_2 \cdot (x_1(s) - x_2(s))\end{aligned}\quad (4.1.3)$$

και

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}\{k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + M_2 \cdot \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} + k_3 \cdot x_2(t) + b_2 \cdot \frac{dx_2(t)}{dt}\} \Leftrightarrow \\ 0 &= k_2 \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s) + k_3 \cdot x_2(s) + b_2 \cdot s \cdot x_2(s)\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

**1α. Επίλυση με χρήση της αναλογίας εμπέδησης**

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας εμπέδησης, αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.1.3) και (4.1.4), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας εμπέδησης:

- 1) Η δύναμη  $f$  αντικαθίσταται με πηγή τάσης  $V$ .
- 2) Τα μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε παράλληλη σύνδεση και σε εν σειρά σύνδεση, αντίστοιχα.
- 3) Τα στοιχεία του μηχανικού συστήματος αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.1**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των βρόγχων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$F \rightarrow V \quad M \rightarrow L \quad b \rightarrow R \quad k \rightarrow \frac{1}{C} \quad x \rightarrow q$$

στην εξίσωση (4.1.3),

$$F(s) = b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s) + k_2 \cdot (x_1(s) - x_2(s))$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$\begin{aligned} V(s) &= R_1 \cdot s \cdot q_1(s) + \frac{1}{C_1} \cdot q_1(s) + L_1 \cdot s^2 \cdot q_1(s) + \frac{1}{C_2} \cdot (q_1(s) - q_2(s)) \Leftrightarrow \\ V(s) &= R_1 \cdot I_1(s) + \frac{1}{s \cdot C_1} \cdot I_1(s) + L_1 \cdot s \cdot I_1(s) + \frac{1}{s \cdot C_2} \cdot (I_1(s) - I_2(s)) \Leftrightarrow \\ V(s) &= I_1(s) \cdot R_1 + \frac{I_1(s)}{s \cdot C_1} + s \cdot L_1 \cdot I_1(s) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{s \cdot C_2} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

όπου

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dq(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow I(s) = s \cdot q(s) \quad (4.1.6)$$

Ομοίως για την (4.1.4),

$$0 = k_2 \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s) + k_3 \cdot x_2(s) + b_2 \cdot s \cdot x_2(s)$$

προκύπτει

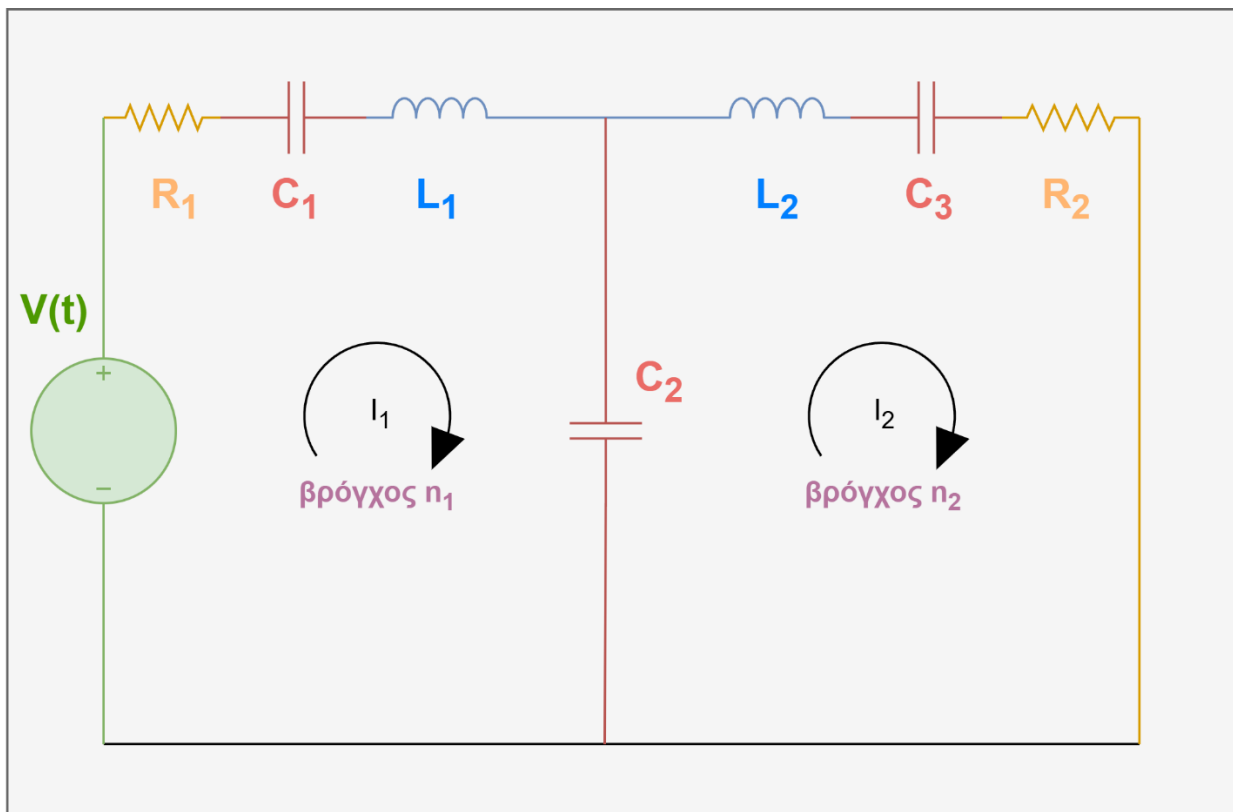
$$0 = \frac{1}{C_2} \cdot (q_2(s) - q_1(s)) + L_2 \cdot s^2 \cdot q_2(s) + \frac{1}{C_3} \cdot q_2(s) + R_2 \cdot s \cdot q_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.1.6) καταλήγουμε στο ότι:

$$0 = \frac{1}{s \cdot C_2} \cdot (I_2(s) - I_1(s)) + L_2 \cdot s \cdot I_2(s) + \frac{1}{s \cdot C_3} \cdot I_2(s) + R_2 \cdot I_2(s) \Leftrightarrow$$

$$0 = s \cdot L_2 \cdot I_2(s) + \frac{I_2(s)}{s \cdot C_3} + I_2 \cdot R_2(s) + \frac{(I_2(s) - I_1(s))}{s \cdot C_2} \quad (4.1.7)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.3:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγή τάσης  $V$  όπου:  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  οι πυκνωτές,  $L_1$  και  $L_2$  τα πηνία και  $I_1$  και  $I_2$  τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντίστοιχους βρόγχους στο κύκλωμα.



Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.1.5) και (4.1.7) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα πηγή τάσης  $V$  χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από **δύο βρόγχους** όπου ο ένας έχει πηγή τάσης  $V$  ενώ στον δεύτερο **δεν υπάρχει πηγή**. Άρα σύμφωνα με το νόμο των τάσεων του Kirchhoff ισχύει:

$$V(t) = I_1(t) \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int I_1(t) dt + L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int (I_1(t) - I_2(t)) dt$$

για τον **πρώτο βρόγχο**  $n_1$  [ $V(t)$ - $R_1$ - $C_1$ - $L_1$ - $C_2$ ]

και

$$0 = L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_3} \cdot \int I_2(t) dt + I_2(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C_2} \cdot \int (I_2(t) - I_1(t)) dt$$

για τον **δεύτερο βρόγχο**  $n_2$  [ $L_2$ - $C_3$ - $R_2$ - $C_2$ ].

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής τάσης  $V$ , προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\{I_1(t) \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int I_1(t) dt + L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int (I_1(t) - I_2(t)) dt\} \Leftrightarrow$$

$$V(s) = I_1(s) \cdot R_1 + \frac{I_1(s)}{s \cdot C_1} + s \cdot L_1 \cdot I_1(s) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{s \cdot C_2}$$

και

$$0 = \mathcal{L}\{L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_3} \cdot \int I_2(t) dt + I_2(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C_2} \cdot \int (I_2(t) - I_1(t)) dt\} \Leftrightarrow$$

$$0 = s \cdot L_2 \cdot I_2(s) + \frac{I_2(s)}{s \cdot C_3} + I_2(s) \cdot R_2 + \frac{I_2(s) - I_1(s)}{s \cdot C_2}$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας εμπίδης εφαρμόζεται επιτυχώς.

**1β. Επίλυση με χρήση της αναλογίας κινητικότητας**

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας κινητικότητας αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.1.3) και (4.1.4), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας:

- 1) Η δύναμη  $f$  αντικαθίσταται με πηγή ρεύματος  $I$ .
- 2) Μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση, αντίστοιχα. Δηλαδή η τοπολογία του ηλεκτρικού κυκλώματος παραμένει ίδια με εκείνη του μηχανικού συστήματος.
- 3) Τα μηχανικά στοιχεία αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.2**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των κόμβων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$F \rightarrow I \quad M \rightarrow C \quad b \rightarrow \frac{1}{R} \quad k \rightarrow \frac{1}{L} \quad x \rightarrow \varphi$$

στην εξίσωση (4.1.3),

$$F(s) = b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s) + k_2 \cdot (x_1(s) - x_2(s))$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{R_1} \cdot s \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{L_1} \cdot \varphi_1(s) + C_1 \cdot s^2 \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{L_2} \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_2(s)) \Leftrightarrow \\ I(s) &= \frac{1}{R_1} \cdot V_1(s) + \frac{1}{L_1} \cdot \frac{V_1(s)}{s} + C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{1}{L_2} \cdot \frac{(V_1(s) - V_2(s))}{s} \Leftrightarrow \\ I(s) &= \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{s \cdot L_1} + C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s \cdot L_2} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

όπου

$$V(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow V(s) = s \cdot \varphi(s) \quad (4.1.9)$$

Ομοίως για την (4.1.4),

$$0 = k_2 \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s) + k_3 \cdot x_2(s) + b_2 \cdot s \cdot x_2(s)$$

προκύπτει

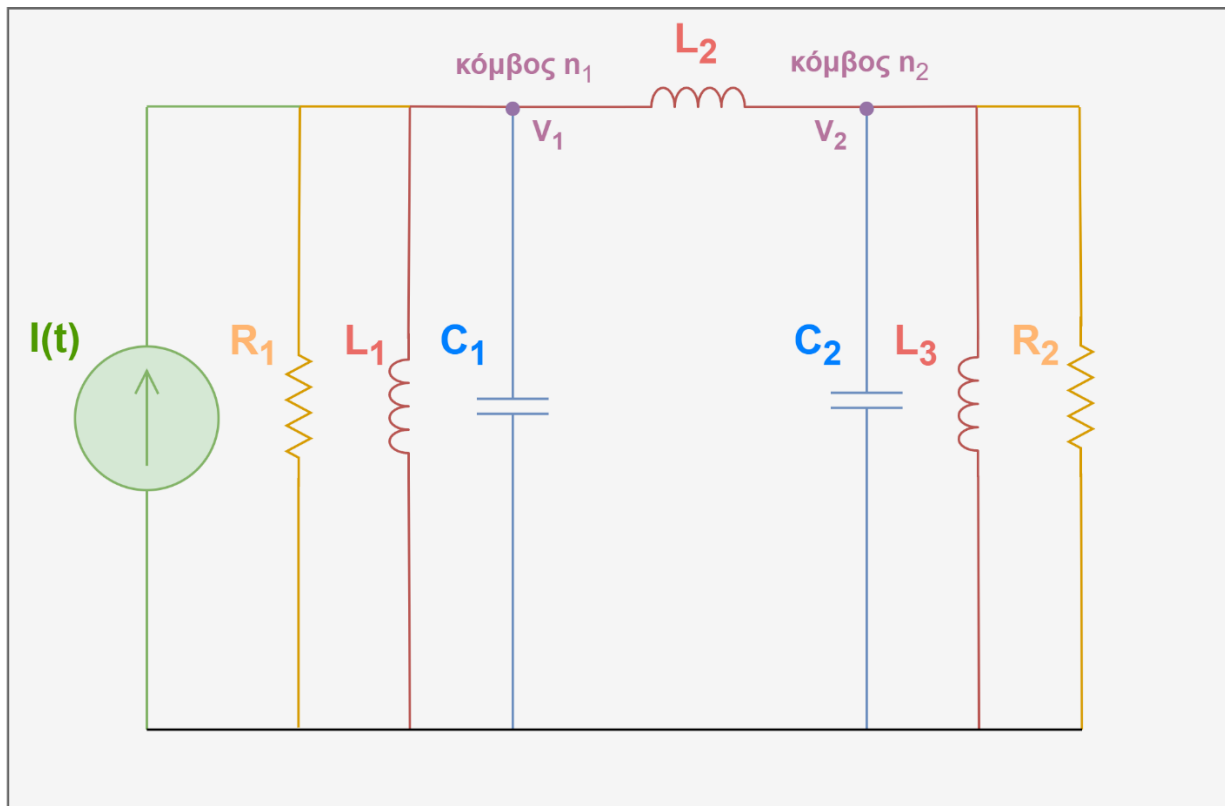
$$0 = \frac{1}{L_2} \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) + C_2 \cdot s^2 \cdot \varphi_2(s) + \frac{1}{L_3} \cdot \varphi_2(s) + \frac{1}{R_2} \cdot s \cdot \varphi_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.1.9) καταλήγουμε στο ότι:

$$0 = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{(V_2(s) - V_1(s))}{s} + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{1}{L_3} \cdot \frac{V_2(s)}{s} + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(s) \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{s \cdot L_2} + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{V_2(s)}{s \cdot L_3} + \frac{V_2(s)}{R_2} \quad (4.1.10)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.4:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος  $I$  όπου:  $V_1$  και  $V_2$  οι διαφορές δυναμικού στους κόμβους  $n_1$  και  $n_2$ ,  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$  και  $C_2$  οι πυκνωτές και  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_3$  τα πηνία στο κύκλωμα.

Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.1.8) και (4.1.10) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα με πηγή ρεύματος  $I$ , χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από **δύο κόμβους** συνδέονται με αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές και δημιουργούν διαφορές δυναμικού  $V_1-V_2$ . Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτουν δύο διαφορικές εξισώσεις. Η πρώτη διαφορική εξίσωση περιλαμβάνει την **πηγή ρεύματος  $I$**  αφού ο κόμβος  $n_1$  επηρεάζεται άμεσα από την πηγή αυτή. Οι άλλη εξίσωση που αφορά τον κόμβο  $n_2$  είναι **ίση με μηδέν**, υποδηλώνοντας ότι καμία εξωτερική πηγή ρεύματος δεν επηρεάζει άμεσα τον κόμβο αυτό. Επομένως έχουμε:

$$I(t) = \frac{1}{R_1} \cdot V_1(t) + \frac{1}{L_1} \cdot \int V_1(t) dt + C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{1}{L_2} \cdot \int (V_1(t) - V_2(t)) dt$$

για τον **πρώτο κόμβο  $n_1$**  και

$$0 = \frac{1}{L_2} \cdot \int (V_2(t) - V_1(t)) dt + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_3} \cdot \int V_2(t) dt + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(t)$$

για τον **δεύτερο κόμβο  $n_2$** .

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος  $I$ , προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{R_1} \cdot V_1(t) + \frac{1}{L_1} \cdot \int V_1(t) dt + C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{1}{L_2} \cdot \int (V_1(t) - V_2(t)) dt\right\} \Leftrightarrow$$

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{s \cdot L_1} + C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s \cdot L_2}$$

και

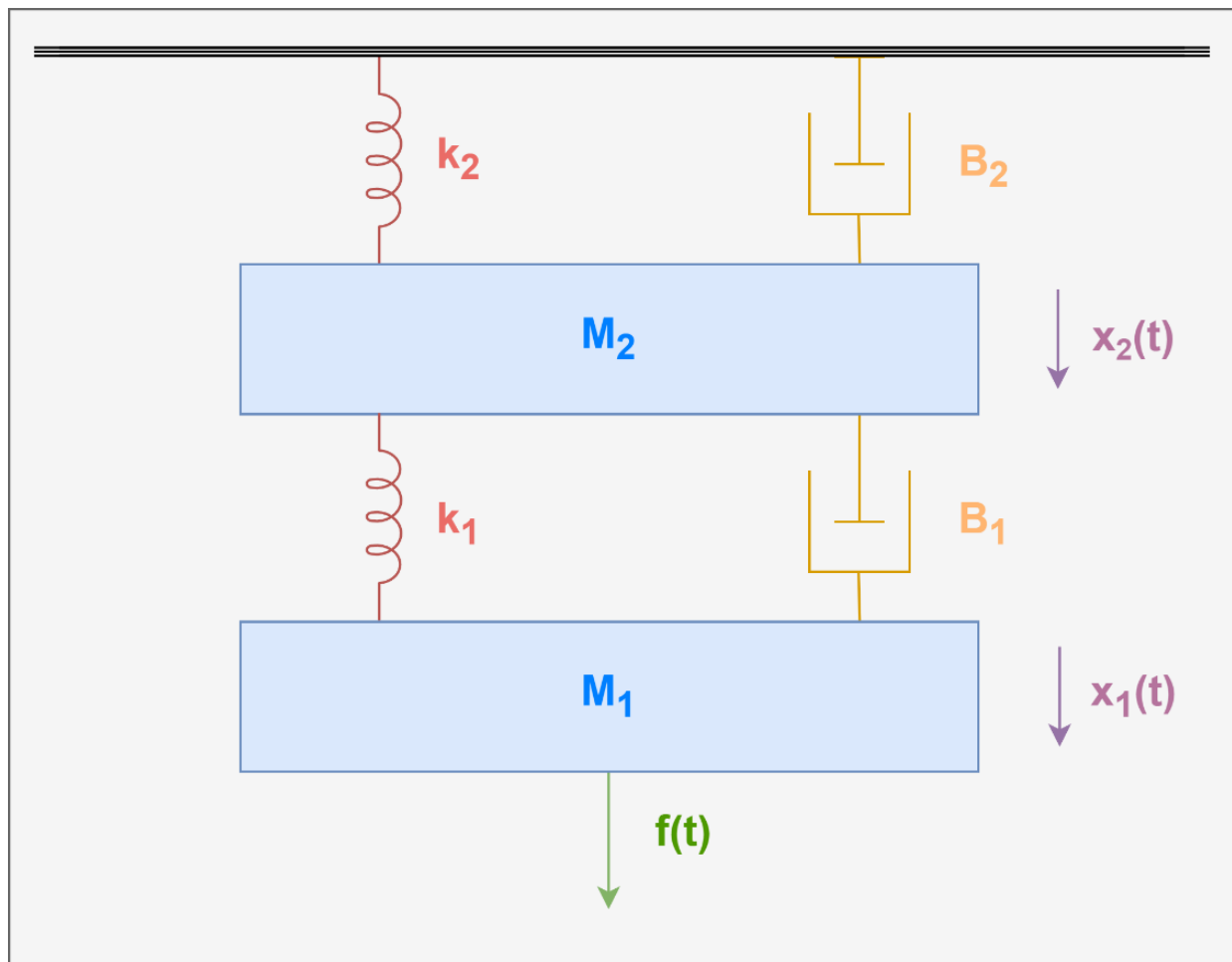
$$0 = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{L_2} \cdot \int (V_2(t) - V_1(t)) dt + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_3} \cdot \int V_2(t) dt + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(t)\right\} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{s \cdot L_2} + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{V_2(s)}{s \cdot L_3} + \frac{V_2(s)}{R_2}$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας κινητικότητας εφαρμόζεται επιτυχώς.

**Παράδειγμα 2°:**

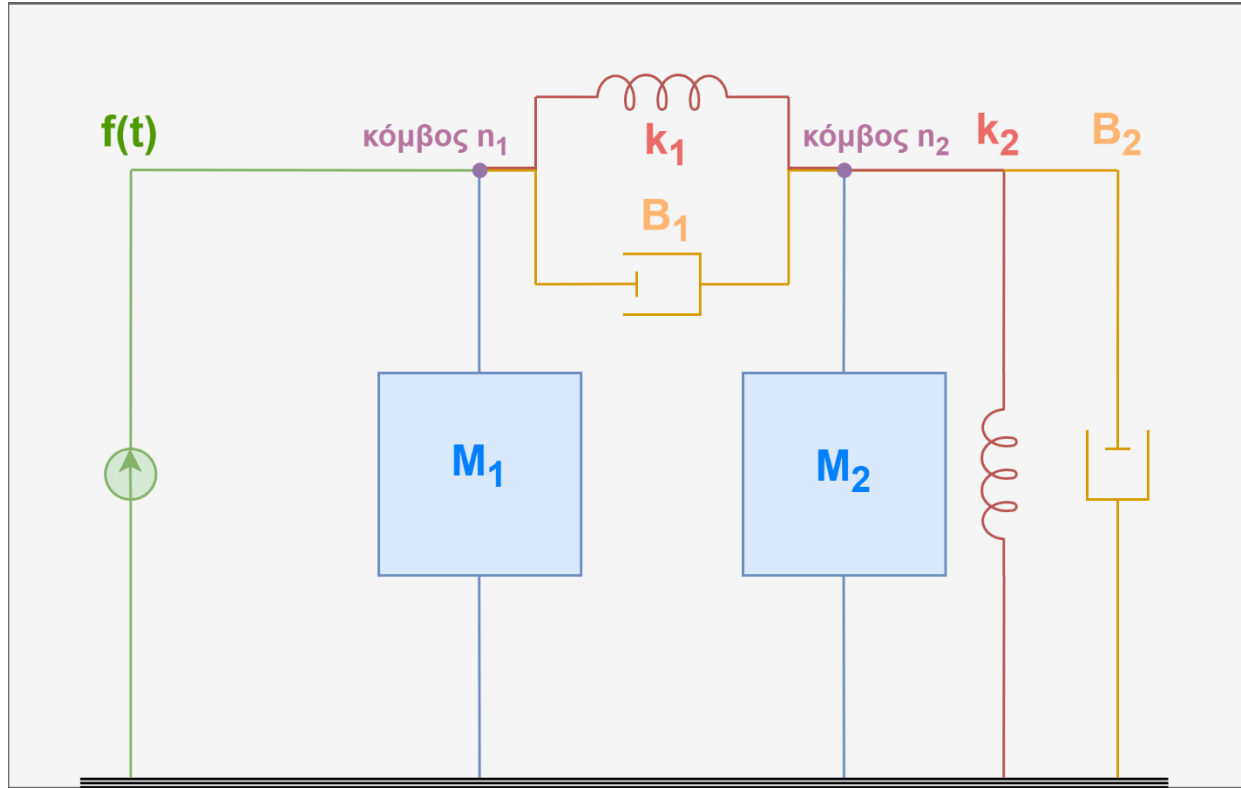
Σε ένα μηχανικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη δύο σώματα με μάζες  $M_1$  και  $M_2$  συνδέονται μεταξύ τους κάθετα με ένα ελατήριο σταθεράς  $k_1$ , ενώ ενδιάμεσα υπάρχει εσωτερική τριβή με συντελεστή ιξώδους  $b_1$ . Η μάζα  $M_2$ , η οποία βρίσκεται πάνω από την μάζα  $M_1$ , συνδέεται με ένα ελατήριο σταθεράς  $k_2$  σε σταθερό οριζόντιο επίπεδο. Ενδιάμεσα του οριζόντιου επιπέδου και της μάζας  $M_2$  υπάρχει εσωτερική τριβή με συντελεστή ιξώδους  $b_2$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σύστημα βρίσκεται σε ακινησία ενώ την χρονική στιγμή  $t$  ασκείται στη μάζα  $M_1$  δύναμη  $f$  με τις ακόλουθες μετατοπίσεις  $x_1$  και  $x_2$  στις μάζες  $M_1$  και  $M_2$ , αντίστοιχα. Το σύστημα αναπαρίσταται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.5:** Μηχανικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη όπου:  $M_1$  η μάζα 1,  $M_2$  η μάζα 2,  $k_1$  και  $k_2$  οι σταθερές των ελατηρίων,  $B_1$  ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής με συντελεστή ιξώδους  $b_1$ ,  $B_2$  ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής με συντελεστή ιξώδους  $b_2$ ,  $x_1$  η μετατόπιση της μάζας 1,  $x_2$  η μετατόπιση της μάζας 2 και  $f$  η δύναμη που ασκείται στην μάζα 1.

Αρχικά, κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάγραμμα κόμβων του παραπάνω συστήματος ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Ο αριθμός των κόμβων ισούται με τον αριθμό των μετατοπίσεων των στοιχείων στο σύστημα, εξαιτίας της δύναμης που ασκείται. Στο σύστημα εμφανίζονται δύο διαφορετικές μετατοπίσεις  $x_1$ ,  $x_2$  για τις μάζες  $M_1$ ,  $M_2$  και τα υπόλοιπα στοιχεία με τα οποία είναι συνδεδεμένες αντιστοίχως, επομένως θα αντιστοιχούν σε δύο κόμβους  $n_1$  και  $n_2$ .
2. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους προσδιορίζεται σε σχέση με ένα σταθερό σημείο, συνδέονται από τον αντίστοιχο κόμβο στο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ του αντίστοιχου κόμβου και του επιπέδου αναφοράς. Έτσι η μάζα  $M_2$ , το ελατήριο σταθεράς  $k_2$  και ο αποσβεστήρας  $B_2$  σχεδιάζονται παράλληλα και συνδέονται με τον κόμβο  $n_2$  και το επίπεδο αναφοράς. Η μάζα  $M_1$  σχεδιάζεται ξεχωριστά, συνδέοντας την με τον κόμβο  $n_1$  και το επίπεδο αναφοράς.
3. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους εξαρτάται από τη διαφορά δύο μετατοπίσεων, συνδέονται μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Επομένως το ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και ο αποσβεστήρας  $B_1$  σχεδιάζονται μεταξύ των κόμβων  $n_1$  και  $n_2$ .
4. Η δύναμη  $f$  συνδέεται με το επίπεδο αναφοράς και τον κόμβο που αντιστοιχεί στην μετατόπιση που προκαλείται στην αντίστοιχη μάζα λόγω της δύναμης αυτής. Άρα, η δύναμη  $f$  σχεδιάζεται μεταξύ του κόμβου  $n_1$  και του επιπέδου αναφοράς.



**Σχεδιάγραμμα 4.6:** Απεικόνιση μηχανικού συστήματος ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη ως διάγραμμα κόμβων.

Αφού κατασκευάσουμε το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος, προχωράμε στη μαθηματική του μοντελοποίηση με τη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή των φυσικών νόμων της μηχανικής, όπως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ( $F=m \cdot a$ ) για τη δυναμική των μαζών, η σχέση παραμόρφωσης των ελατηρίων (νόμος του Hook  $F=k \cdot x$ ) και οι σχέσεις για την τριβή ( $F=b \cdot \dot{x}$ ).

Βάσει του διαγράμματος κόμβων, κάθε κόμβος που αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση της ανάλογης μάζας, οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση. Επομένως, για τους **δύο κόμβους** θα προκύψουν **δύο διαφορικές εξισώσεις**.

Για τον κόμβο  $n_1$ :

$$\Sigma F(t) = M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow$$

$$F(t) - B_1 \cdot (v_1(t) - v_2(t)) - k_1 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) = M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow$$

$$F(t) = B_1 \cdot (v_1(t) - v_2(t)) + k_1 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) + M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow$$

$$F(t) = B_1 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} + k_1 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) + M_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \quad (4.2.1)$$



Για τον κόμβο  $n_2$ :

$$\Sigma F(t) = M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow$$

$$0 - k_1 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) - B_1 \cdot (v_2(t) - v_1(t)) - k_2 \cdot x_2(t) - B_2 \cdot v_2(t) = M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow$$

$$0 = k_1 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + B_1 \cdot (v_2(t) - v_1(t)) + k_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot v_2(t) + M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow$$

$$0 = k_1 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + B_1 \cdot \frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + k_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} + M_2 \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \quad (4.2.2)$$

Ύστερα γίνεται εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στις εξισώσεις (4.2.1) και (4.2.2) αντιστοίχως:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L}\{B_1 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} + k_1 \cdot (x_1(t) - x_2(t)) + M_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}\} \Leftrightarrow$$

$$F(s) = B_1 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) + k_1 \cdot (x_1(s) - x_2(s)) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s) \quad (4.2.3)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\{k_1 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) + B_1 \cdot \frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + k_2 \cdot x_2(t) + B_2 \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} + M_2 \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}\} \Leftrightarrow$$

$$0 = k_1 \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + B_1 \cdot s \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + k_2 \cdot x_2(s) + B_2 \cdot s \cdot x_2(s) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s) \quad (4.2.4)$$

## 2α. Επίλυση με χρήση της αναλογίας εμπέδησης

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας εμπέδησης, αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.2.3) και (4.2.4), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας εμπέδησης:

- 1) Η δύναμη  $f$  αντικαθίσταται με πηγή τάσης  $V$ .
- 2) Μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε παράλληλη σύνδεση και σε εν σειρά σύνδεση, αντίστοιχα.
- 3) Τα στοιχεία του μηχανικού συστήματος αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.1**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των βρόγχων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V} \quad \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{L} \quad \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{R} \quad \mathbf{k} \rightarrow \frac{1}{\mathbf{C}} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$$

στην εξίσωση (4.2.3),

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{B}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)) + \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)) + \mathbf{M}_1 \cdot s^2 \cdot \mathbf{x}_1(s)$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(s) &= \mathbf{R}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{q}_1(s) - \mathbf{q}_2(s)) + \frac{1}{\mathbf{C}_1} \cdot (\mathbf{q}_1(s) - \mathbf{q}_2(s)) + \mathbf{L}_1 \cdot s^2 \cdot \mathbf{q}_1(s) \Leftrightarrow \\ \mathbf{V}(s) &= \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s)) + \frac{1}{s \cdot \mathbf{C}_1} \cdot (\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s)) + \mathbf{L}_1 \cdot s \cdot \mathbf{I}_1(s) \Leftrightarrow \\ \mathbf{V}(s) &= (\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s)) \cdot \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{I}_1(s) - \mathbf{I}_2(s)}{s \cdot \mathbf{C}_1} + s \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{I}_1(s) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

όπου

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{\mathbf{I}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dq(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{I}(s) = s \cdot \mathbf{q}(s) \quad (4.2.6)$$

Ομοίως για την (4.2.4),

$$\mathbf{0} = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_2(s) - \mathbf{x}_1(s)) + \mathbf{B}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{x}_2(s) - \mathbf{x}_1(s)) + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2(s) + \mathbf{B}_2 \cdot s \cdot \mathbf{x}_2(s) + \mathbf{M}_2 \cdot s^2 \cdot \mathbf{x}_2(s)$$

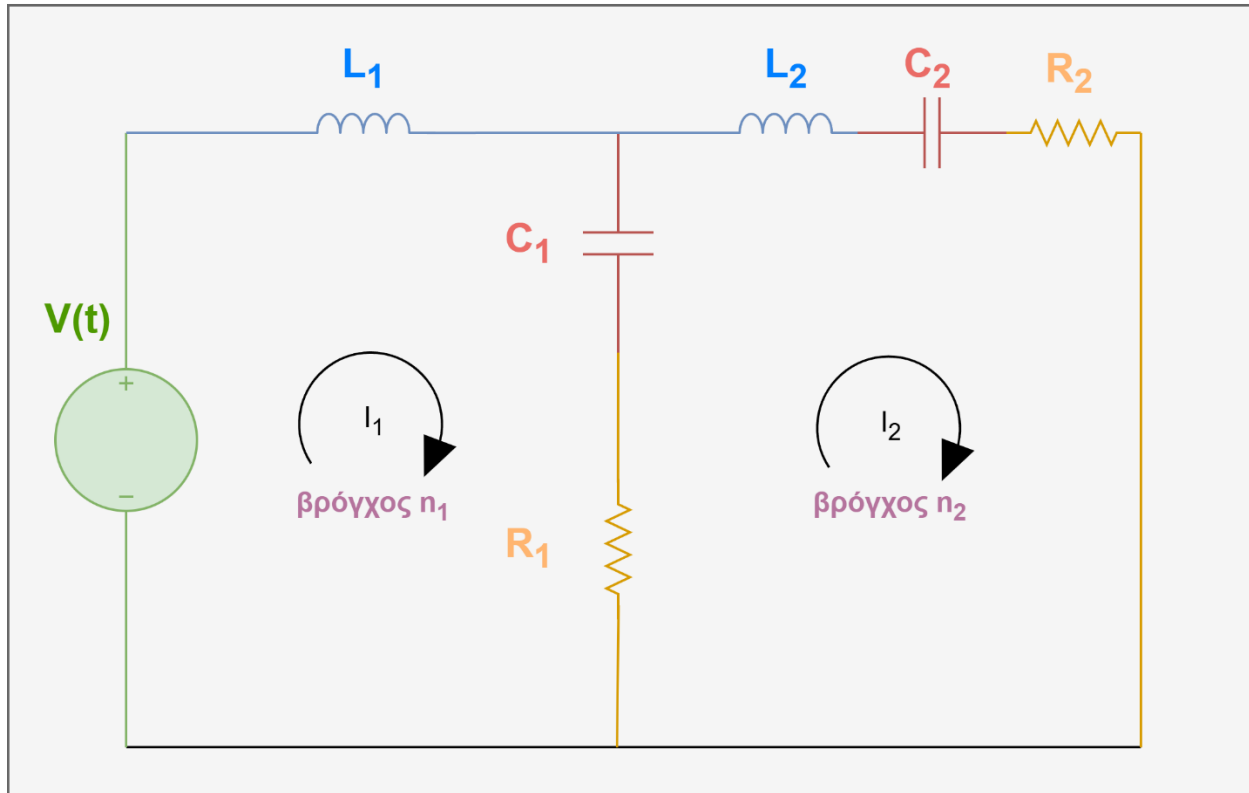
προκύπτει

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\mathbf{C}_1} \cdot (\mathbf{q}_2(s) - \mathbf{q}_1(s)) + \mathbf{R}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{q}_2(s) - \mathbf{q}_1(s)) + \frac{1}{\mathbf{C}_2} \cdot \mathbf{q}_2(s) + \mathbf{R}_2 \cdot s \cdot \mathbf{q}_2(s) + \mathbf{L}_2 \cdot s^2 \cdot \mathbf{q}_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.2.6) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{1}{s \cdot \mathbf{C}_1} \cdot (\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)) + \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)) + \frac{1}{s \cdot \mathbf{C}_2} \cdot \mathbf{I}_2(s) + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{I}_2(s) + \mathbf{L}_2 \cdot s \cdot \mathbf{I}_2(s) \Leftrightarrow \\ \mathbf{0} &= \frac{\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)}{s \cdot \mathbf{C}_1} + (\mathbf{I}_2(s) - \mathbf{I}_1(s)) \cdot \mathbf{R}_1 + \frac{\mathbf{I}_2(s)}{s \cdot \mathbf{C}_2} + \mathbf{I}_2(s) \cdot \mathbf{R}_2 + s \cdot \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{I}_2(s) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.7:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής τάσης  $V$  όπου:  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$  και  $C_2$  οι πυκνωτές,  $L_1$  και  $L_2$  τα πηνία και  $I_1$  και  $I_2$  τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντίστοιχους βρόγχους στο κύκλωμα.

Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.2.5) και (4.2.7) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα πηγή τάσης  $V$  χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από δύο βρόγχους όπου ο ένας έχει πηγή τάσης  $V$  ενώ στον δεύτερο δεν υπάρχει πηγή. Άρα σύμφωνα με το νόμο των τάσεων του Kirchhoff ισχύει:

$$V(t) = L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int (I_1(t) - I_2(t))dt + R_1 \cdot (I_1(t) - I_2(t))$$

για τον πρώτο βρόγχο  $n_1$   $[V(t) - L_1 - C_1 - R_1]$  και

$$0 = L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int I_2(t)dt + I_2(t) \cdot R_2 + (I_2(t) - I_1(t)) \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int (I_2(t) - I_1(t))dt$$

για τον δεύτερο βρόγχο n2 [L<sub>2</sub>-C<sub>2</sub>-R<sub>2</sub>-R<sub>1</sub>-C<sub>1</sub>].

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής τάσης V, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\left\{L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int (I_1(t) - I_2(t))dt + R_1 \cdot (I_1(t) - I_2(t))\right\} \Leftrightarrow$$

$$V(s) = (I_1(s) - I_2(s)) \cdot R_1 + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{s \cdot C_1} + s \cdot L_1 \cdot I_1(s)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\left\{L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int I_2(t)dt + I_2(t) \cdot R_2 + (I_2(t) - I_1(t)) \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int (I_2(t) - I_1(t))dt\right\} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{I_2(s) - I_1(s)}{s \cdot C_1} + (I_2(s) - I_1(s)) \cdot R_1 + \frac{I_2(s)}{s \cdot C_2} + I_2(s) \cdot R_2 + s \cdot L_2 \cdot I_2(s)$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας εμπέδησης εφαρμόζεται επιτυχώς.

## 2β. Επίλυση με χρήση της αναλογίας κινητικότητας

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας κινητικότητας αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.2.3) και (4.2.4), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας:

- 1) Η δύναμη **f** αντικαθίσταται με πηγή ρεύματος **I**.
- 2) Τα μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση, αντίστοιχα. Δηλαδή η τοπολογία του ηλεκτρικού κυκλώματος παραμένει ίδια με εκείνη του μηχανικού συστήματος.
- 3) Τα μηχανικά στοιχεία αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.2**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των κόμβων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{I} \quad \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{C} \quad \mathbf{b} \rightarrow \frac{1}{R} \quad \mathbf{k} \rightarrow \frac{1}{L} \quad \mathbf{x} \rightarrow \varphi$$

στην εξίσωση (4.2.3),

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{M}_1 \cdot s^2 \cdot \mathbf{x}_1(s) + \mathbf{B}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)) + \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s))$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$\begin{aligned} I(s) &= C_1 \cdot s^2 \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{R_1} \cdot s \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_2(s)) + \frac{1}{L_1} \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_2(s)) \Leftrightarrow \\ I(s) &= C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{1}{R_1} \cdot (V_1(s) - V_2(s)) + \frac{1}{L_1} \cdot \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s} \Leftrightarrow \\ I(s) &= C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s \cdot L_1} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

όπου

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{\mathbf{V}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{V}(s) = s \cdot \varphi(s) \quad (4.2.9)$$

Ομοίως για την (4.2.4),

$$\mathbf{0} = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_2(s) - \mathbf{x}_1(s)) + \mathbf{B}_1 \cdot s \cdot (\mathbf{x}_2(s) - \mathbf{x}_1(s)) + \mathbf{M}_2 \cdot s^2 \cdot \mathbf{x}_2(s) + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2(s) + \mathbf{B}_2 \cdot s \cdot \mathbf{x}_2(s)$$

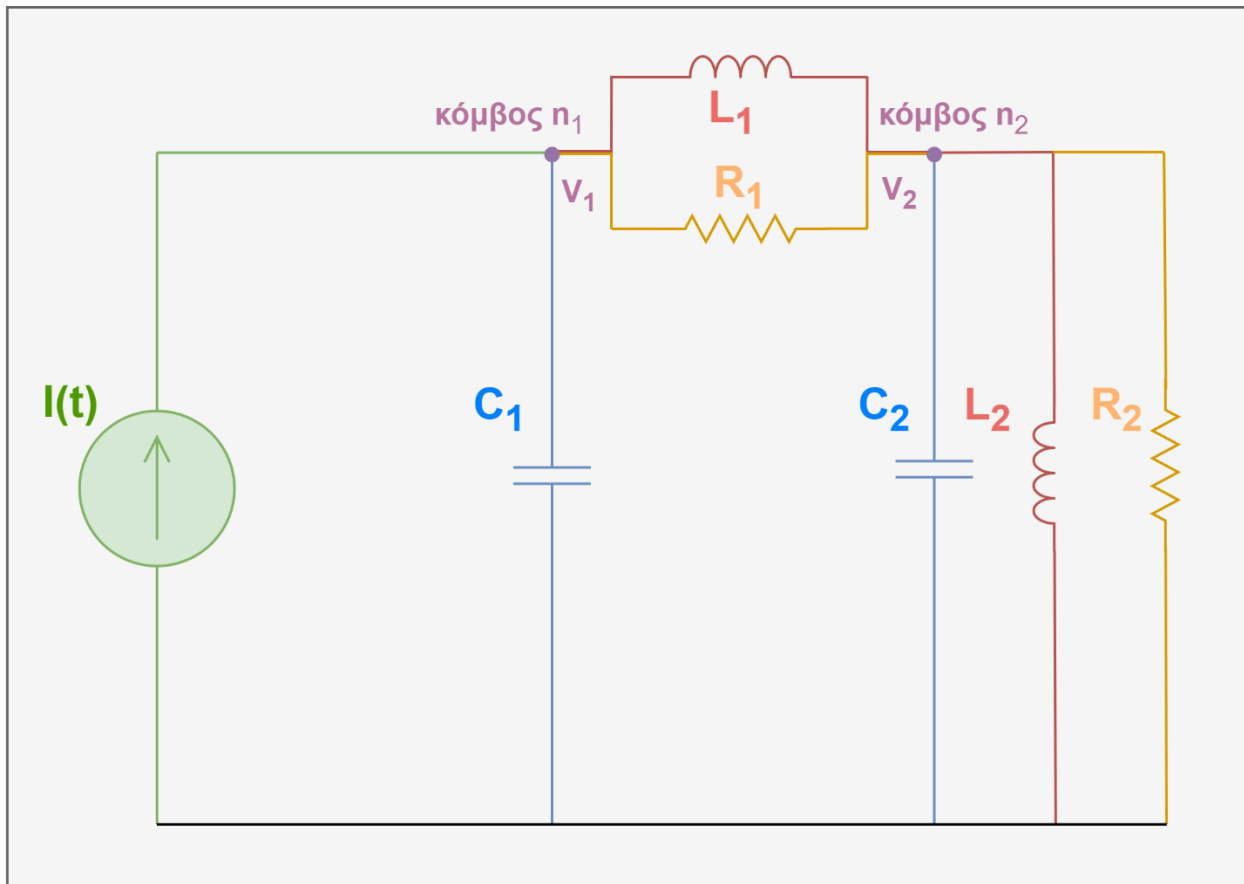
προκύπτει

$$\mathbf{0} = \frac{1}{L_1} \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) + \frac{1}{R_1} \cdot s \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) + C_2 \cdot s^2 \cdot \varphi_2(s) + \frac{1}{L_2} \cdot \varphi_2(s) + \frac{1}{R_2} \cdot s \cdot \varphi_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.2.9) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{1}{L_1} \cdot \frac{V_2(s) - V_1(s)}{s} + \frac{1}{R_1} \cdot (V_2(s) - V_1(s)) + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{1}{L_2} \cdot \frac{V_2(s)}{s} + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(s) \Leftrightarrow \\ \mathbf{0} &= \frac{V_2(s) - V_1(s)}{s \cdot L_1} + \frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_1} + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{V_2(s)}{s \cdot L_2} + \frac{V_2(s)}{R_2} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.8:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος  $I$  όπου:  $V_1$  και  $V_2$  οι διαφορές δυναμικού στους κόμβους  $n_1$  και  $n_2$ ,  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$  και  $C_2$  οι πυκνωτές και  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_3$  τα πηνία στο κύκλωμα.

Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.2.8) και (4.2.10) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα με πηγή ρεύματος  $I$ , χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από δύο κόμβους συνδέονται με αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές, και δημιουργούν διαφορές δυναμικού  $V_1 - V_2$ . Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτουν δύο διαφορικές εξισώσεις. Η πρώτη διαφορική εξίσωση περιλαμβάνει την **πηγή ρεύματος  $I$**  αφού ο κόμβος  $n_1$  επηρεάζεται άμεσα από την πηγή αυτή. Οι άλλη εξίσωση που αφορά τον κόμβους  $n_2$  είναι **ίση με μηδέν**, υποδηλώνοντας ότι καμία εξωτερική πηγή ρεύματος δεν επηρεάζει άμεσα τον κόμβο αυτό. Επομένως έχουμε:

$$I(t) = C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{1}{R_1} \cdot (V_1(t) - V_2(t)) + \frac{1}{L_1} \cdot \int (V_1(t) - V_2(t)) dt \Leftrightarrow$$

για τον **πρώτο κόμβο  $n_1$**  και

$$0 = \frac{1}{L_1} \cdot \int (V_2(t) - V_1(t))dt + \frac{1}{R_1} \cdot (V_2(t) - V_1(t)) + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_2} \cdot \int V_2(t)dt + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(t)$$

για τον δεύτερο κόμβο n2.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος I, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{1}{R_1} \cdot (V_1(t) - V_2(t)) + \frac{1}{L_1} \cdot \int (V_1(t) - V_2(t))dt\right\} \Leftrightarrow$$

$$I(s) = C_1 \cdot s \cdot V_1(s) + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_1} + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s \cdot L_1}$$

και

$$0 = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{L_1} \cdot \int (V_2(t) - V_1(t))dt + \frac{1}{R_1} \cdot (V_2(t) - V_1(t)) + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_2} \cdot \int V_2(t)dt + \frac{1}{R_2} \cdot V_2(t)\right\} \Leftrightarrow$$

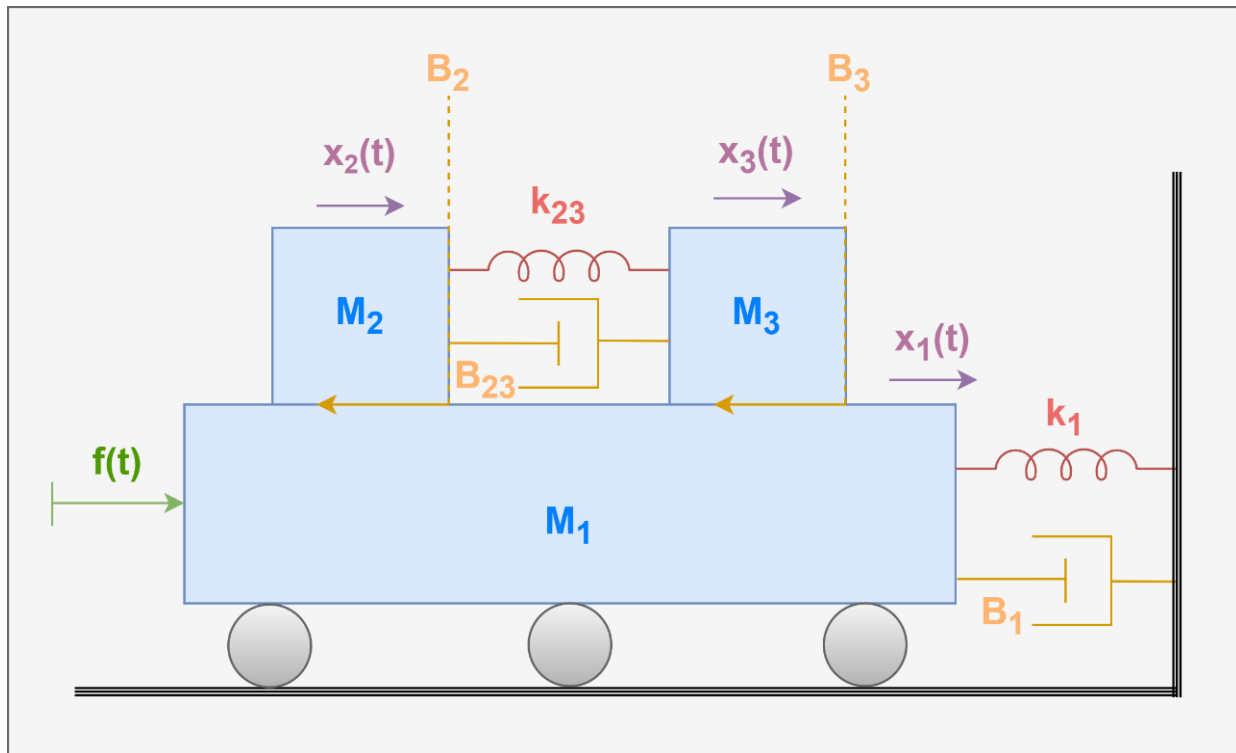
$$0 = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{s \cdot L_1} + \frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_1} + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) + \frac{V_2(s)}{s \cdot L_2} + \frac{V_2(s)}{R_2}$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας κινητικότητας εφαρμόζεται επιτυχώς.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>:

Σε ένα μηχανικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβεστή υπάρχουν τρία σώματα με μάζες  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  και  $\mathbf{M}_3$  όπου τα σώματα με μάζα  $\mathbf{M}_2$  και  $\mathbf{M}_3$  βρίσκονται πάνω στο σώμα μάζας  $\mathbf{M}_1$ . Η μάζα  $\mathbf{M}_1$  είναι συνδεδεμένη σε μία κάθετη σταθερή επιφάνεια με ένα ελατήριο σταθεράς  $\mathbf{k}_1$  και έναν αποσβεστήρα εσωτερικής τριβής  $\mathbf{B}_1$ . Μεταξύ του οριζόντιου επιπέδου και της μάζας  $\mathbf{M}_1$  δεν υπάρχει τριβή. Οι μάζες  $\mathbf{M}_1$  και  $\mathbf{M}_2$  ολισθαίνουν πάνω στη μάζα  $\mathbf{M}_1$  επομένως θα υπάρχει τριβή  $\mathbf{B}_2$  και  $\mathbf{B}_3$  αντιστοίχως. Μεταξύ τους, συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς  $\mathbf{k}_{23}$  και έναν αποσβεστήρα εσωτερικής τριβής  $\mathbf{B}_{23}$ . Τη χρονική στιγμή  $\mathbf{t=0}$  το σύστημα βρίσκεται σε ακινησία ενώ την χρονική στιγμή  $\mathbf{t}$  ασκείται στη μάζα  $\mathbf{M}_1$  δύναμη  $\mathbf{f}$  με τις ακόλουθες μετατοπίσεις  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  και  $\mathbf{x}_3$  των μαζών  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  και  $\mathbf{M}_3$  αντίστοιχα. Το μηχανικό σύστημα απεικονίζεται παρακάτω:





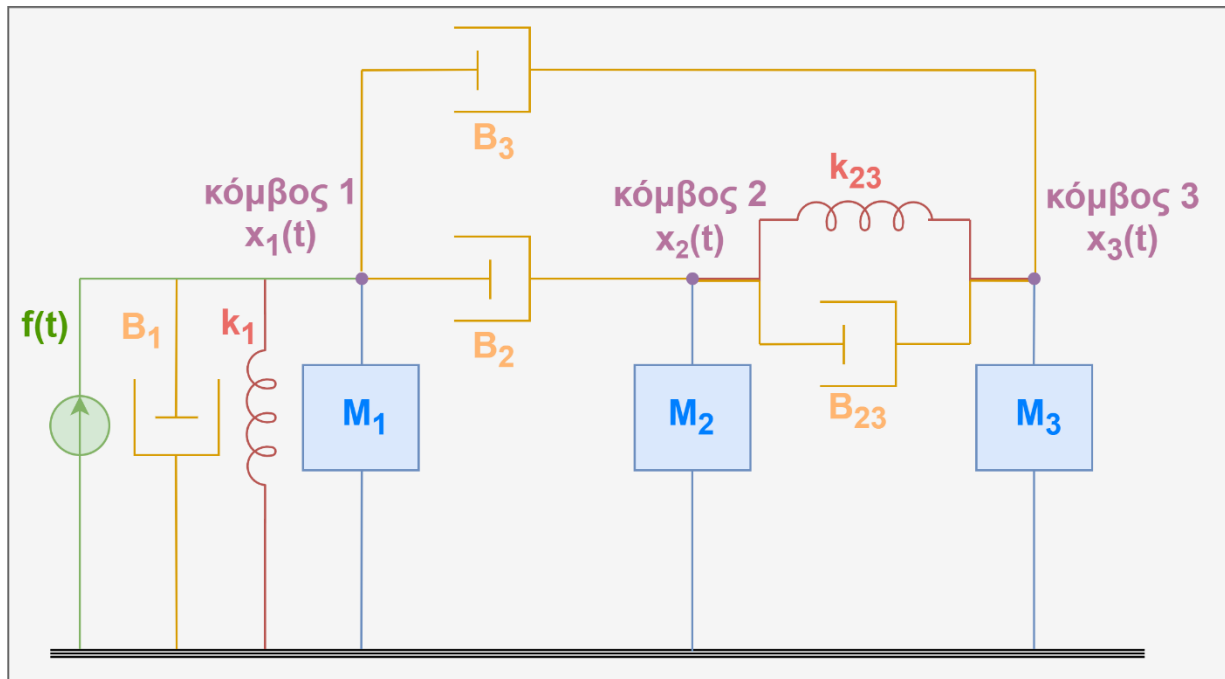
**Σχεδιάγραμμα 4.9:** Μηχανικό σύστημα ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη όπου:  $M_1$  η μάζα 1,  $M_2$  η μάζα 2,  $M_3$  η μάζα 3,  $k_1$  και  $k_{23}$  οι σταθερές των ελατηρίων,  $B_{23}$  ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής με συντελεστή ιξώδους  $b_{23}$ ,  $B_2$  η απεικόνιση υπάρχουσας τριβής μεταξύ των μαζών 1 και 2 με συντελεστή ιξώδους  $b_2$ ,  $B_3$  η απεικόνιση υπάρχουσας τριβής μεταξύ των μαζών 1 και 3 με συντελεστή ιξώδους  $b_3$ ,  $x_1$  η μετατόπιση της μάζας 1,  $x_2$  η μετατόπιση της μάζας 2,  $x_3$  η μετατόπιση της μάζας 3 και  $f$  η δύναμη που ασκείται στην μάζα 1.

Αρχικά, κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάγραμμα κόμβων του παραπάνω συστήματος ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Ο αριθμός των κόμβων ισούται με τον αριθμό των μετατοπίσεων των στοιχείων στο σύστημα, εξαιτίας της δύναμης που ασκείται. Στο σύστημα εμφανίζονται **τρεις διαφορετικές μετατοπίσεις**  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  για τις μάζες  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  και τα υπόλοιπα στοιχεία με τα οποία είναι συνδεδεμένες αντιστοίχως, επομένως θα αντιστοιχούν σε **τρεις κόμβους**:  $n_1$ ,  $n_2$  και  $n_3$ .
2. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους προσδιορίζεται σε σχέση με ένα σταθερό σημείο τότε αυτά συνδέονται από τον αντίστοιχο κόμβο στο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ του αντίστοιχου κόμβου και του επιπέδου αναφοράς. Έτσι η μάζα  $M_1$ , το ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και ο αποσβεστήρας εσωτερικής τριβής  $B_1$  σχεδιάζονται παράλληλα και συνδέονται με τον κόμβο  $n_1$  και το επίπεδο αναφοράς. Οι μάζες  $M_2$  και  $M_3$  συνδέονται με τους αντίστοιχους κόμβους,  $n_2$  και  $n_3$ , και το επίπεδο αναφοράς ξεχωριστά.
3. Τα στοιχεία των οποίων η μετατόπιση τους εξαρτάται από τη διαφορά δύο μετατοπίσεων τότε αυτά συνδέονται μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Στοιχεία που έχουν ίδια μετατόπιση τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Επομένως, οι

αποσβεστήρες  $B_2$  και  $B_3$  τοποθετούνται αντίστοιχα μεταξύ των κόμβων  $n_1$ ,  $n_2$  και  $n_1$ ,  $n_3$  ενώ το ελατήριο σταθεράς  $k_{23}$  και αποσβεστήρας  $B_{23}$  σχεδιάζονται παράλληλα και μεταξύ των κόμβων  $n_2$ ,  $n_3$ .

4. Η δύναμη  $f$  συνδέεται με το επίπεδο αναφοράς και τον κόμβο που αντιστοιχεί στην μετατόπιση που προκαλείται στην αντίστοιχη μάζα λόγω της δύναμης αυτής. Άρα, η δύναμη  $f$  σχεδιάζεται μεταξύ του κόμβου  $n_1$  και του επιπέδου αναφοράς.



**Σχεδιάγραμμα 4.10:** Απεικόνιση μηχανικού συστήματος ελατηρίου – μάζας – αποσβέστη ως διάγραμμα κόμβων.

Αφού κατασκευάσουμε το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος, προχωράμε στη μαθηματική του μοντελοποίηση με τη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή των φυσικών νόμων της μηχανικής, όπως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ( $F=m \cdot a$ ) για τη δυναμική των μαζών, η σχέση παραμόρφωσης των ελατηρίων (νόμος του Hook  $F=k \cdot x$ ) και οι σχέσεις για την τριβή ( $F=b \cdot x$ ).

Βάσει του διαγράμματος κόμβων, κάθε κόμβος που αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση της ανάλογης μάζας, οδηγεί σε μία διαφορική εξίσωση. Επομένως, για τους τρεις κόμβους θα προκύψουν τρεις διαφορικές εξισώσεις:

Για τον κόμβο  $n_1$ :

$$\Sigma F(t) = M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow$$

$$F(t) - b_1 \cdot v_1(t) - k_1 \cdot x_1(t) - b_2 \cdot (v_1(t) - v_2(t)) - b_3 \cdot (v_1(t) - v_3(t)) = M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 F(t) &= b_1 \cdot v_1(t) + k_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot (v_1(t) - v_2(t)) + b_3 \cdot (v_1(t) - v_3(t)) + M_1 \cdot a_1(t) \Leftrightarrow \\
 F(t) &= b_1 \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} + b_3 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_3(t))}{dt} + M_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \quad (4.3.1)
 \end{aligned}$$

Για τον κόμβο  $n_2$ :

$$\begin{aligned}
 \Sigma F(t) &= M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow \\
 0 - b_2 \cdot (v_2(t) - v_1(t)) - k_{23} \cdot (x_2(t) - x_3(t)) - b_{23} \cdot (v_2(t) - v_3(t)) &= M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow \\
 0 &= b_2 \cdot (v_2(t) - v_1(t)) + k_{23} \cdot (x_2(t) - x_3(t)) + b_{23} \cdot (v_2(t) - v_3(t)) + M_2 \cdot a_2(t) \Leftrightarrow \\
 0 &= b_2 \cdot \frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + k_{23} \cdot (x_2(t) - x_3(t)) + b_{23} \cdot \frac{d(x_2(t) - x_3(t))}{dt} + M_2 \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \quad (4.3.2)
 \end{aligned}$$

Για τον κόμβο  $n_3$ :

$$\begin{aligned}
 \Sigma F(t) &= M_3 \cdot a_3(t) \Leftrightarrow \\
 0 - b_3 \cdot (v_3(t) - v_1(t)) - k_{23} \cdot (x_3(t) - x_2(t)) - b_{23} \cdot (v_3(t) - v_2(t)) &= M_3 \cdot a_3(t) \Leftrightarrow \\
 0 &= b_3 \cdot (v_3(t) - v_1(t)) + k_{23} \cdot (x_3(t) - x_2(t)) + b_{23} \cdot (v_3(t) - v_2(t)) + M_3 \cdot a_3(t) \Leftrightarrow \\
 0 &= b_3 \cdot \frac{d(x_3(t) - x_1(t))}{dt} + k_{23} \cdot (x_3(t) - x_2(t)) + b_{23} \cdot \frac{d(x_3(t) - x_2(t))}{dt} + M_3 \cdot \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} \quad (4.3.3)
 \end{aligned}$$

Υστερα γίνεται εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στις εξισώσεις (4.3.1), (4.3.2) και (4.3.3) αντιστοίχως:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1 \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_2(t))}{dt} + b_3 \cdot \frac{d(x_1(t) - x_3(t))}{dt} + M_1 \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2}\} \Leftrightarrow \\
 F(s) &= b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + b_2 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) + b_3 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_3(s)) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s) \quad (4.3.5)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathcal{L}\{b_2 \cdot \frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + k_{23} \cdot (x_2(t) - x_3(t)) + b_{23} \cdot \frac{d(x_2(t) - x_3(t))}{dt} + M_2 \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2}\} \Leftrightarrow \\
 0 &= b_2 \cdot s \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s) \quad (4.3.6)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathcal{L}\{b_3 \cdot \frac{d(x_3(t) - x_1(t))}{dt} + k_{23} \cdot (x_3(t) - x_2(t)) + b_{23} \cdot \frac{d(x_3(t) - x_2(t))}{dt} + M_3 \cdot \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2}\} \Leftrightarrow \\
 0 &= b_3 \cdot s \cdot (x_3(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + M_3 \cdot s^2 \cdot x_3(s) \quad (4.3.7)
 \end{aligned}$$

**3α. Επίλυση με χρήση της αναλογίας εμπίδησης**

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας εμπίδησης, αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.3.5), (4.3.6) και (4.3.7), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας εμπίδησης:

- 1) Η δύναμη  $f$  αντικαθίσταται με πηγή τάσης  $V$ .
- 2) Μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε παράλληλη σύνδεση και σε εν σειρά σύνδεση, αντίστοιχα.
- 3) Τα στοιχεία του μηχανικού συστήματος αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.1**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των βρόγχων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$F \rightarrow V \quad M \rightarrow L \quad b \rightarrow R \quad k \rightarrow \frac{1}{C} \quad x \rightarrow q$$

στην εξίσωση (4.3.5),

$$F(s) = b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + b_2 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) + b_3 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_3(s)) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s)$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$V(s) = R_1 \cdot s \cdot q_1(s) + \frac{1}{C_1} \cdot q_1(s) + R_2 \cdot s \cdot (q_1(s) - q_2(s)) + R_3 \cdot s \cdot (q_1(s) - q_3(s)) + L_1 \cdot s^2 \cdot q_1(s) \Leftrightarrow$$

$$V(s) = R_1 \cdot I_1(s) + \frac{1}{s \cdot C_1} \cdot I_1(s) + R_2 \cdot (I_1(s) - I_2(s)) + R_3 \cdot (I_1(s) - I_3(s)) + L_1 \cdot s \cdot I_1(s) \Leftrightarrow$$

$$V(s) = I_1(s) \cdot R_1 + \frac{I_1(s)}{s \cdot C_1} + (I_1(s) - I_2(s)) \cdot R_2 + (I_1(s) - I_3(s)) \cdot R_3 + s \cdot L_1 \cdot I_1(s) \quad (4.3.8)$$

όπου

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dq(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow I(s) = s \cdot q(s) \quad (4.3.9)$$

Ομοίως για την (4.3.6),

$$0 = b_2 \cdot s \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s)$$

προκύπτει

$$0 = R_2 \cdot s \cdot (q_2(s) - q_1(s)) + \frac{1}{C_{23}} \cdot (q_2(s) - q_3(s)) + R_{23} \cdot s \cdot (q_2(s) - q_3(s)) + L_2 \cdot s^2 \cdot q_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.3.9) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= R_2 \cdot (I_2(s) - I_1(s)) + \frac{1}{s \cdot C_{23}} \cdot (I_2(s) - I_3(s)) + R_{23} \cdot (I_2(s) - I_3(s)) + L_2 \cdot s \cdot I_2(s) \Leftrightarrow \\ 0 &= (I_2(s) - I_1(s)) \cdot R_2 + \frac{I_2(s) - I_3(s)}{s \cdot C_{23}} + (I_2(s) - I_3(s)) \cdot R_{23} + s \cdot L_2 \cdot I_2(s) \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Ομοίως για την (4.3.7),

$$0 = b_3 \cdot s \cdot (x_3(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + M_3 \cdot s^2 \cdot x_3(s)$$

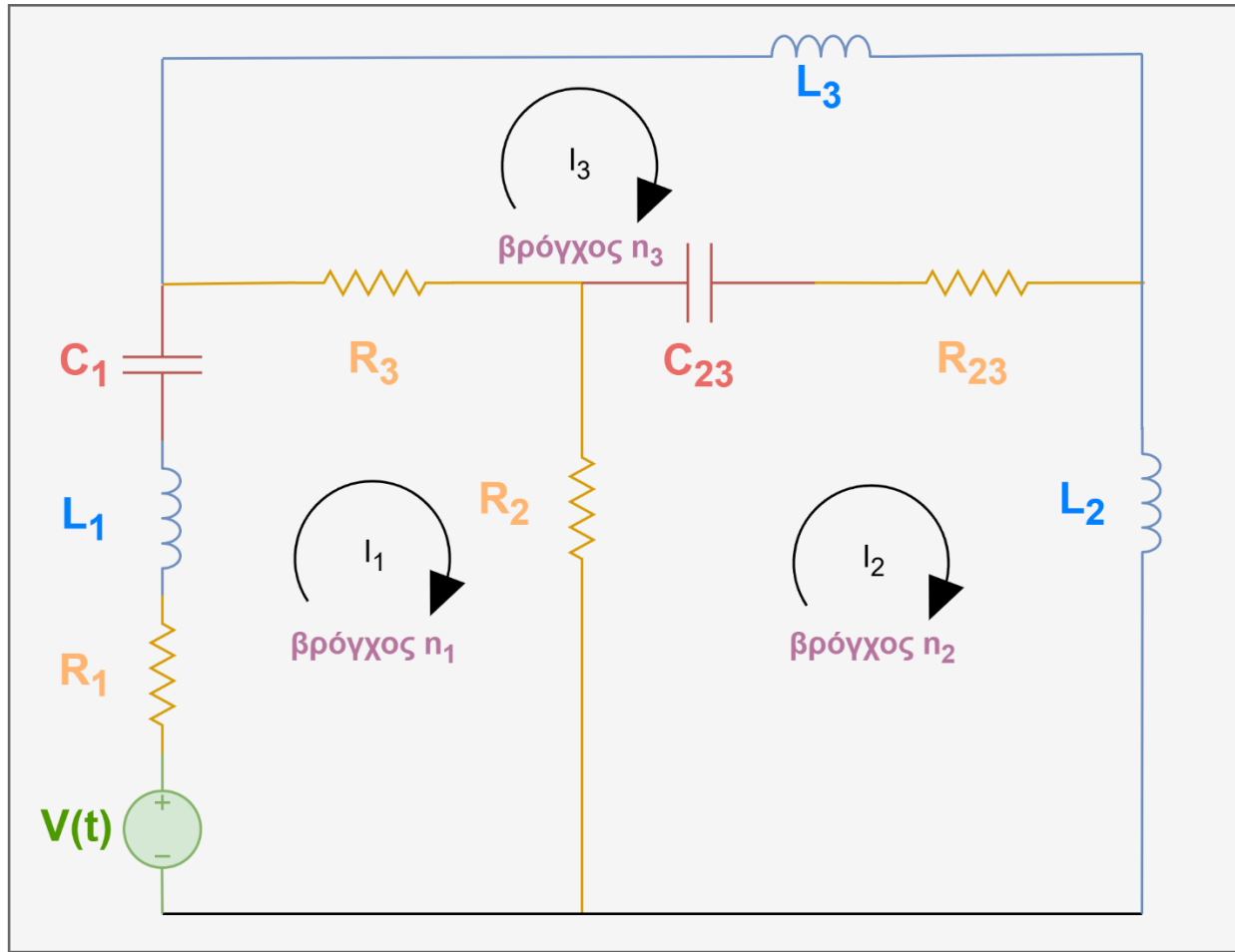
προκύπτει

$$0 = R_3 \cdot s \cdot (q_3(s) - q_1(s)) + \frac{1}{C_{23}} \cdot (q_3(s) - q_2(s)) + R_{23} \cdot s \cdot (q_3(s) - q_2(s)) + L_3 \cdot s^2 \cdot q_3(s)$$

και σύμφωνα με την (4.3.9) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= R_3 \cdot (I_3(s) - I_1(s)) + \frac{1}{s \cdot C_{23}} \cdot (I_3(s) - I_2(s)) + R_{23} \cdot (I_3(s) - I_2(s)) + L_3 \cdot s \cdot I_3(s) \Leftrightarrow \\ 0 &= (I_3(s) - I_1(s)) \cdot R_3 + \frac{I_3(s) - I_2(s)}{s \cdot C_{23}} + (I_3(s) - I_2(s)) \cdot R_{23} + s \cdot L_3 \cdot I_3(s) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.11:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής τάσης  $V$  όπου:  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$  και  $C_2$  οι πυκνωτές,  $L_1$  και  $L_2$  τα πηνία και  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$  τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντίστοιχους βρόγχους στο κύκλωμα.

Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.3.8), (4.3.10) και (4.3.11) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα πηγή τάσης  $V$  χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από **τρεις βρόγχους** όπου ο πρώτος έχει πηγή τάσης  $V$  ενώ στον δεύτερο και τρίτο βρόγχο **δεν υπάρχει πηγή**. Άρα σύμφωνα με το νόμο των τάσεων του Kirchhoff ισχύει:

$$V(t) = I_1(t) \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int I_1(t) dt + (I_1(t) - I_3(t)) \cdot R_3 + (I_1(t) - I_2(t)) \cdot R_2$$

για τον **πρώτο βρόγχο**  $n_1$  [ $V(t) - R_1 - L_1 - C_1 - R_3 - R_2$ ],

$$0 = (I_2(t) - I_1(t)) \cdot R_2 + \frac{1}{C_{23}} \cdot \int (I_2(t) - I_3(t)) dt + (I_2(t) - I_3(t)) \cdot R_{23} + L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt}$$

για τον δεύτερο βρόγχο  $n_2$  [ $R_2$ - $C_{23}$ - $R_{23}$ - $L_2$ ] και

$$0 = (I_3(t) - I_1(t)) \cdot R_3 + L_3 \cdot \frac{dI_3(t)}{dt} + (I_3(t) - I_2(t)) \cdot R_{23} + \frac{1}{C_{23}} \cdot \int (I_3(t) - I_2(t)) dt$$

για τον δεύτερο βρόγχο  $n_3$  [ $R_3$ - $L_3$ - $R_{23}$ - $C_{23}$ ].

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής τάσης  $V(t)$ , καταλήγουμε:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\{I_1(t) \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int I_1(t) dt + (I_1(t) - I_3(t)) \cdot R_3 + (I_1(t) - I_2(t)) \cdot R_2\} \Leftrightarrow$$

$$V(s) = I_1(s) \cdot R_1 + \frac{I_1(s)}{s \cdot C_1} + (I_1(s) - I_2(s)) \cdot R_2 + (I_1(s) - I_3(s)) \cdot R_3 + s \cdot L_1 \cdot I_1(s)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\{(I_2(t) - I_1(t)) \cdot R_2 + \frac{1}{C_{23}} \cdot \int (I_2(t) - I_3(t)) dt + (I_2(t) - I_3(t)) \cdot R_{23} + L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt}\} \Leftrightarrow$$

$$0 = (I_2(s) - I_1(s)) \cdot R_2 + \frac{I_2(s) - I_3(s)}{s \cdot C_{23}} + (I_2(s) - I_3(s)) \cdot R_{23} + s \cdot L_2 \cdot I_2(s)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\{(I_3(t) - I_1(t)) \cdot R_3 + L_3 \cdot \frac{dI_3(t)}{dt} + (I_3(t) - I_2(t)) \cdot R_{23} + \frac{1}{C_{23}} \cdot \int (I_3(t) - I_2(t)) dt\} \Leftrightarrow$$

$$0 = (I_3(s) - I_1(s)) \cdot R_3 + \frac{I_3(s) - I_2(s)}{s \cdot C_{23}} + (I_3(s) - I_2(s)) \cdot R_{23} + s \cdot L_3 \cdot I_3(s)$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας εμπέδησης εφαρμόζεται επιτυχώς.

### 3β. Επίλυση με χρήση της αναλογίας κινητικότητας

Βάσει των κανόνων και αντιστοιχίσεων της αναλογίας κινητικότητας αντικαθιστούμε τις μηχανικές παραμέτρους με τις ηλεκτρικές παραμέτρους στις εξισώσεις (4.3.5), (4.3.6) και (4.3.7), και κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα από το διάγραμμα κόμβων του μηχανικού συστήματος. Συγκεκριμένα για την κατασκευή του ανάλογου ηλεκτρικού συστήματος με εφαρμογή της αναλογίας κινητικότητας:

- 1) Η δύναμη  $f$  αντικαθίσταται με πηγή ρεύματος  $I$ .
- 2) Μηχανικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση αντικαθίστανται με ηλεκτρικά στοιχεία σε εν σειρά σύνδεση και σε παράλληλη σύνδεση, αντίστοιχα. Δηλαδή η τοπολογία του ηλεκτρικού κυκλώματος παραμένει ίδια με εκείνη του μηχανικού συστήματος.
- 3) Τα μηχανικά στοιχεία αντικαθίστανται με τα ηλεκτρικά στοιχεία, σύμφωνα με τον **πίνακα 4.2**.
- 4) Ο αριθμός των μετατοπίσεων των μαζών του μηχανικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό των κόμβων του κυκλώματος.

Αρχικά, αντιστοιχίζοντας και αντικαθιστώντας τα μηχανικά στοιχεία με τα ηλεκτρικά στοιχεία

$$F \rightarrow I \quad M \rightarrow C \quad b \rightarrow \frac{1}{R} \quad k \rightarrow \frac{1}{L} \quad x \rightarrow \varphi$$

στην εξίσωση (4.3.5),

$$F(s) = b_1 \cdot s \cdot x_1(s) + k_1 \cdot x_1(s) + b_2 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_2(s)) + b_3 \cdot s \cdot (x_1(s) - x_3(s)) + M_1 \cdot s^2 \cdot x_1(s)$$

προκύπτει η παρακάτω νέα εξίσωση:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{R_1} \cdot s \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{L_1} \cdot \varphi_1(s) + \frac{1}{R_2} \cdot s \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_2(s)) + \frac{1}{R_3} \cdot s \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_3(s)) + C_1 \cdot s^2 \cdot \varphi_1(s) \Leftrightarrow \\ I(s) &= \frac{1}{R_1} \cdot V_1(s) + \frac{1}{L_1} \cdot \frac{V_1(s)}{s} + \frac{1}{R_2} \cdot (V_1(s) - V_2(s)) + \frac{1}{R_3} \cdot (V_1(s) - V_3(s)) + C_1 \cdot s \cdot V_1(s) \Leftrightarrow \\ I(s) &= \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{s \cdot L_1} + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_2} + \frac{V_1(s) - V_3(s)}{R_3} + s \cdot C_1 \cdot V_1(s) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

όπου

$$V(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow V(s) = s \cdot \varphi(s) \quad (4.3.13)$$

Ομοίως για την (4.3.6),

$$0 = b_2 \cdot s \cdot (x_2(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_2(s) - x_3(s)) + M_2 \cdot s^2 \cdot x_2(s)$$

προκύπτει



$$0 = \frac{1}{R_2} \cdot s \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_1(s)) + \frac{1}{L_{23}} \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_3(s)) + \frac{1}{R_{23}} \cdot s \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_3(s)) + C_2 \cdot s^2 \cdot \varphi_2(s)$$

και σύμφωνα με την (4.3.13) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{R_2} \cdot (V_2(s) - V_1(s)) + \frac{1}{L_{23}} \cdot \frac{V_2(s) - V_3(s)}{s} + \frac{1}{R_{23}} \cdot (V_2(s) - V_3(s)) + C_2 \cdot s \cdot V_2(s) \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_2} + \frac{V_2(s) - V_3(s)}{s \cdot L_{23}} + \frac{V_2(s) - V_3(s)}{R_{23}} + s \cdot C_2 \cdot V_2(s) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Ομοίως για την (4.3.7),

$$0 = b_3 \cdot s \cdot (x_3(s) - x_1(s)) + k_{23} \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + b_{23} \cdot s \cdot (x_3(s) - x_2(s)) + M_3 \cdot s^2 \cdot x_3(s)$$

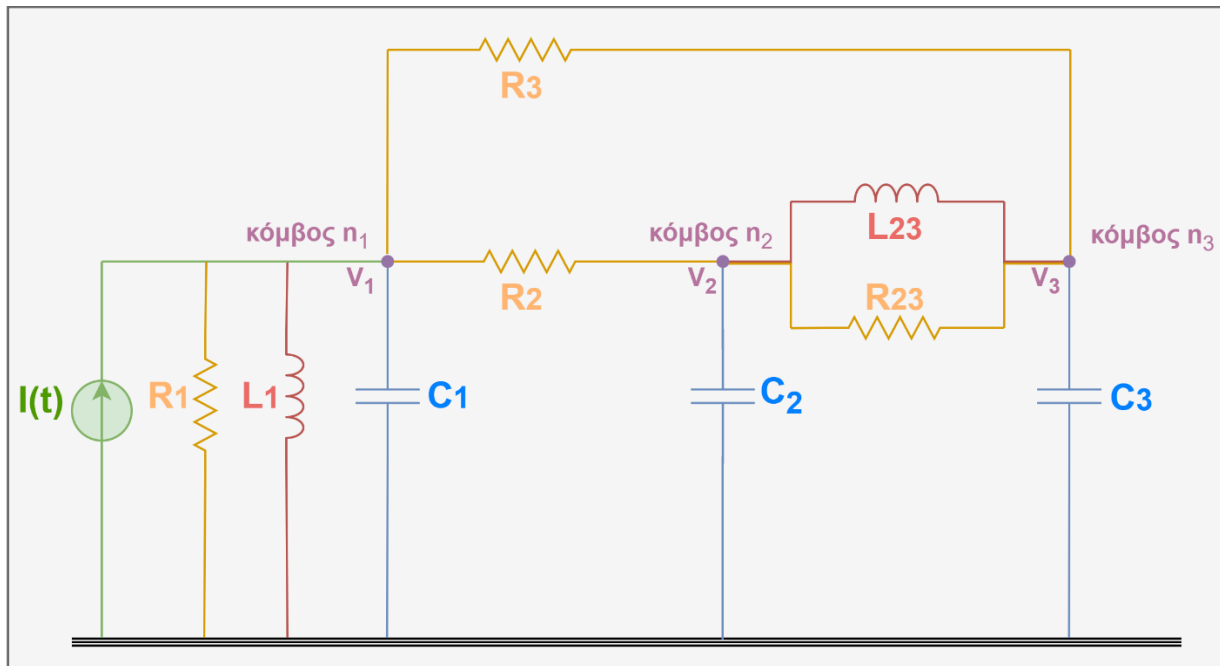
προκύπτει

$$0 = \frac{1}{R_3} \cdot s \cdot (\varphi_3(s) - \varphi_1(s)) + \frac{1}{L_{23}} \cdot (\varphi_3(s) - \varphi_2(s)) + \frac{1}{R_{23}} \cdot s \cdot (\varphi_3(s) - \varphi_2(s)) + C_3 \cdot s^2 \cdot \varphi_3(s)$$

και σύμφωνα με την (4.3.9) καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{R_3} \cdot (V_3(s) - V_1(s)) + \frac{1}{L_{23}} \cdot \frac{V_3(s) - V_2(s)}{s} + \frac{1}{R_{23}} \cdot (V_3(s) - V_2(s)) + C_3 \cdot s \cdot V_3(s) \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{V_3(s) - V_1(s)}{R_3} + \frac{V_3(s) - V_2(s)}{s \cdot L_{23}} + \frac{V_3(s) - V_2(s)}{R_{23}} + s \cdot C_3 \cdot V_3(s) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε το ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



**Σχεδιάγραμμα 4.12:** Ανάλογο ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος  $I$  όπου:  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$  η διαφορές δυναμικού στους κόμβους  $n_1$ ,  $n_2$  και  $n_3$ ,  $R_1$  και  $R_2$  οι αντιστάσεις,  $C_1$  και  $C_2$  οι πυκνωτές και  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_3$  τα πηνία στο κύκλωμα.

Τέλος, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις (4.3.12), (4.3.14) και (4.3.15) μοντελοποιούμε μαθηματικά το σχετικό ηλεκτρικό κύκλωμα πηγή τάσης  $I$  χρησιμοποιώντας τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Το κύκλωμα αποτελείται από **τρεις κόμβους** οι οποίοι συνδέονται με αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές και δημιουργούν διαφορές δυναμικού  $V_1-V_2$ ,  $V_1-V_3$  και  $V_2-V_3$ . Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων του Kirchhoff προκύπτουν τρεις διαφορικές εξισώσεις. Η πρώτη διαφορική εξίσωση περιλαμβάνει την **πηγή ρεύματος  $I$**  αφού ο κόμβος  $n_1$  επηρεάζεται άμεσα από την πηγή αυτή. Οι άλλες δυο εξισώσεις που αφορούν τους κόμβους  $n_2$  και  $n_3$  είναι **ίσες με μηδέν**, υποδηλώνοντας ότι καμία εξωτερική πηγή ρεύματος δεν επηρεάζει άμεσα τους κόμβους αυτούς. Επομένως έχουμε:

$$I(t) = \frac{V_1(t)}{R_1} + \frac{1}{L_1} \int V_1(t) dt + C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t) - V_3(t)}{R_3} + \frac{V_1(t) - V_2(t)}{R_2}$$

για τον **πρώτο κόμβο  $n_1$** ,

$$0 = \frac{V_2(t) - V_1(t)}{R_2} + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_{23}} \cdot \int (V_2(t) - V_3(t)) dt + \frac{V_2(t) - V_3(t)}{R_{23}}$$

για τον **δεύτερο κόμβο**  $n_2$  και

$$0 = \frac{V_3(t) - V_1(t)}{R_3} + \frac{V_3(t) - V_2(t)}{R_{23}} + \frac{1}{L_{23}} \cdot \int (V_3(t) - V_2(t)) dt + C_3 \cdot \frac{dV_3(t)}{dt}$$

για τον **τρίτο κόμβο**  $n_3$ .

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στις παραπάνω εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό κύκλωμα πηγής ρεύματος  $I$ , καταλήγουμε:

$$\mathcal{L}\{I(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{V_1(t)}{R_1} + \frac{1}{L_1} \int V_1(t) dt + C_1 \cdot \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t) - V_3(t)}{R_3} + \frac{V_1(t) - V_2(t)}{R_2}\right\} \Leftrightarrow$$

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{s \cdot L_1} + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_2} + \frac{V_1(s) - V_3(s)}{R_3} + s \cdot C_1 \cdot V_1(s)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\left\{\frac{V_2(t) - V_1(t)}{R_2} + C_2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{1}{L_{23}} \cdot \int (V_2(t) - V_3(t)) dt + \frac{V_2(t) - V_3(t)}{R_{23}}\right\} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_2} + \frac{V_2(s) - V_3(s)}{s \cdot L_{23}} + \frac{V_2(s) - V_3(s)}{R_{23}} + s \cdot C_2 \cdot V_2(s)$$

και

$$0 = \mathcal{L}\left\{\frac{V_3(t) - V_1(t)}{R_3} + \frac{V_3(t) - V_2(t)}{R_{23}} + \frac{1}{L_{23}} \cdot \int (V_3(t) - V_2(t)) dt + C_3 \cdot \frac{dV_3(t)}{dt}\right\} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{V_3(s) - V_1(s)}{R_3} + \frac{V_3(s) - V_2(s)}{s \cdot L_{23}} + \frac{V_3(s) - V_2(s)}{R_{23}} + s \cdot C_3 \cdot V_3(s)$$

Συνεπώς, η επαλήθευση είναι ορθή και η μέθοδος της αναλογίας κινητικότητας εφαρμόζεται επιτυχώς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Σύνοψη

### 5.1 Ανακεφαλαίωση

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως βασικό αντικείμενο τη μελέτη των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών και την εφαρμογή τους στην ανάλυση γραμμικών μηχανικών συστημάτων μονοδιάστατων στοιχείων. Συγκεκριμένα, η ανάλυση βασίστηκε στη σύνδεση μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων μέσω του θεωρητικού υπόβαθρου των αναλογιών και της αντιστοίχισης των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα μηχανικά και τα ηλεκτρικά συστήματα, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της δυναμικής τους συμπεριφοράς.

Στο **Κεφάλαιο 1** εξετάστηκε η θεμελιώδης έννοια του *συστήματος* και παρουσιάστηκαν οι διαφορετικοί τύποι συστημάτων στη φυσική, ανάλογα με τον βαθμό αλληλεπίδρασής τους με το περιβάλλον. Ειδικότερα, αναλύθηκαν τα απομονωμένα, κλειστά και ανοιχτά συστήματα, ενώ δόθηκε έμφαση στη σημασία του καθορισμού των ορίων ενός συστήματος για την ορθή εφαρμογή των νόμων της φυσικής. Παρουσιάστηκαν επίσης παραδείγματα από τη θερμοδυναμική, τη μηχανική και τη βιολογία, αναδεικνύοντας τη σημασία της συστημικής προσέγγισης στην επιστημονική ανάλυση και μοντελοποίηση.

Στο **Κεφάλαιο 2** εξετάστηκαν οι βασικές φυσικές αρχές και μαθηματικά εργαλεία που διέπουν τα γραμμικά μηχανικά και ηλεκτρικά συστήματα. Στην ενότητα των μηχανικών συστημάτων παρουσιάστηκαν οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα, τα στοιχεία μάζας, ελατηρίου και αποσβέστη (με έμφαση στην ιξώδη απόσβεση), και η έννοια της μηχανικής εμπέδησης και κινητικότητας, που συνδέουν δύναμη και ταχύτητα στο πεδίο της συχνότητας. Στην ενότητα των ηλεκτρικών συστημάτων αναλύθηκαν τα βασικά ηλεκτρικά μεγέθη (ρεύμα, τάση, ισχύς, αντίσταση, πηνίο, πυκνωτής), οι νόμοι του Ohm και του Kirchhoff, καθώς και η έννοια της ηλεκτρικής εμπέδησης και αγωγιμότητας. Τέλος, παρουσιάστηκε ο μετασχηματισμός Laplace ως βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μετατροπή διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές, επιτρέποντας την ευκολότερη ανάλυση τόσο ηλεκτρικών όσο και μηχανικών συστημάτων.

Στο **Κεφάλαιο 3** εισήχθησαν τα ηλεκτρομηχανικά συστήματα, τα οποία συνδυάζουν ηλεκτρικά και μηχανικά στοιχεία για τη μετατροπή ενέργειας μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής μορφής. Αναδείχθηκε η σημασία τους σε πλήθος εφαρμογών και θεμελιώδης φυσική αρχή στην οποία βασίζονται η οποία είναι η ηλεκτρομαγνητική επαγωγή, και εξηγεί τη λειτουργία κινητήρων και γεννητριών. Παρουσιάστηκαν οι βασικές φυσικές ποσότητες που εμπλέκονται στη μετατροπή ενέργειας —όπως η ροπή, η δύναμη, η ταχύτητα και η απόδοση— καθώς και οι βασικοί τύποι απωλειών. Στη συνέχεια, αναδείχθηκαν οι τεχνικές μοντελοποίησης και ανάλυσης των ηλεκτρομηχανικών συστημάτων, όπως τα μοντέλα κυκλωμάτων και συγκεντρωμένων παραμέτρων, η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (*FEA*), και τα δυναμικά μοντέλα. Τέλος, έγινε αρχική αναφορά στην εφαρμογή των **ηλεκτρομηχανικών αναλογιών** — αναλογίας δύναμης–τάσης (*impedance*) και δύναμης–ρεύματος (*mobility*) — οι οποίες αποτελούν τη βάση της κύριας ανάλυσης που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο **Κεφάλαιο 4**, αναπτύχθηκε αναλυτικά η έννοια των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών, εστιάζοντας στις δύο κύριες προσεγγίσεις: την **αναλογία εμπέδησης (force-voltage)** και την **αναλογία κινητικότητας (force-current)**. Αρχικά, έγινε ιστορική αναδρομή των βασικών επιστημονικών γεγονότων και προσώπων που διαμόρφωσαν το θεωρητικό πλαίσιο σύνδεσης μηχανικών και ηλεκτρικών συστημάτων.

Για κάθε αναλογία παρατέθηκαν πίνακες αντιστοίχισης φυσικών μεγεθών, οι ενεργειακές σχέσεις και οι σχέσεις μεταξύ των σύνθετων αντιστάσεων, ενώ δεν παραλήφθηκαν σημαντικές πρακτικές εφαρμογές των αναλογιών. Το κύριο μέρος του κεφαλαίου αφιερώθηκε στην εφαρμογή των αναλογιών αυτών σε **γραμμικά μηχανικά συστήματα μονοδιάστατων στοιχείων**. Για κάθε παράδειγμα:

- Κατασκευάστηκε διάγραμμα κόμβων της μηχανικής διάταξης.
- Καταγράφηκαν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις που μοντελοποιούν μαθηματικά το μηχανικό σύστημα.
- Οι εξισώσεις μετασχηματίστηκαν στο πεδίο Laplace.
- Πραγματοποιήθηκε η αντιστοίχιση των μηχανικών παραμέτρων με τις ηλεκτρικές.
- Κατασκευάστηκε το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα.
- Και έγινε επαλήθευση της ισοδυναμίας με βάση των διαφορικών εξισώσεων που μοντελοποιούν μαθηματικά το ηλεκτρικό κύκλωμα, μετασχηματισμένες στο πεδίο Laplace.

Η ανάλυση έδειξε ότι και οι δύο αναλογίες οδηγούν στην ίδια μαθηματική περιγραφή, γεγονός που επιβεβαιώνει τη θεωρητική τους εγκυρότητα και ως εκ τούτου αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο κατανόησης και ανάλυσης μηχανικών συστημάτων, διευκολύνοντας την προσέγγισή τους μέσω της καλά εδραιωμένης θεωρίας ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Συνολικά, η εργασία ανέδειξε τη θεωρητική και πρακτική σημασία των ηλεκτρομηχανικών αναλογιών τόσο για την κατανόηση των συστημάτων, όσο και για τον βελτιστοποιημένο σχεδιασμό εφαρμογών σύγχρονης τεχνολογίας.

---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### I. Βιβλία – Θεωρία και Εφαρμογές

**Alexander, C.K. & Sadiku, M.N.O., 2013.** *Fundamentals of electric circuits*. 5η έκδ. New York: McGraw-Hill.

**Borwick, J., 2001.** *Loudspeaker and headphone handbook*. 3η έκδ. Oxford: Focal Press.

**Carnot, S., 1824.** *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. Paris: Bachelier. [Μετάφραση στα Αγγλικά: *Reflections on the Motive Power of Fire and on Machines Fitted to Develop that Power*. Dover Publications, 1960.]

**Davim, J.P., επιμ., 2011.** *Mechatronics*. Chichester: John Wiley & Sons.

**DiStefano, J.J. III, Stubberud, A.R. & Williams, I.J., 2014.** *Schaum's outline of feedback and control systems*. 3η έκδ. New York: McGraw-Hill Education.

**Furlani, E.P., 2001.** *Permanent magnet and electromechanical devices: materials, analysis and applications*. San Diego: Academic Press.

**Heaviside, O., 1892.** *Electrical papers*. Τόμοι I & II. London: Macmillan.

**Krause, P.C. & Wasynczuk, O., 1989.** *Electromechanical motion devices*. New York: McGraw-Hill.

**Luhmann, N., 1995.** *Social systems*. Stanford, CA: Stanford University Press.

**Meriam, J.L., Kraige, L.G. & Bolton, J.N., 2015.** *Engineering mechanics, Volume 2: Dynamics*. 8η έκδ. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

**Olson, H.F., 1943.** *Dynamical analogies*. New York: D. Van Nostrand Company.

**Robinson, W., 1922.** *The elements of electricity: Part V. Electro-mechanics*. New York: John Wiley & Sons.

**Townsend, F., 1901.** *Course in electro-mechanics, for students in electrical engineering, 1st term of 3d year, Columbia University: Adapted from Prof. F.E. Nipher's "Electricity and Magnetism"*. New York: Columbia University.

**Van Valkenburg, M.E., 1974.** *Network analysis*. 3η έκδ. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

---

**Τομπράς, Γ.Σ., 2015.** *Εισαγωγικά θέματα ηλεκτρονικής: Γενικές αρχές ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών κυκλωμάτων και τελεστικοί ενισχυτές τάσης*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών.

**Ταϊρίδης, Γ. & Σταυρουλάκης, Γ., 2023.** *Εισαγωγή στη μηχανική*. Αθήνα: Κάλλιπος – Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

## **II. Επιστημονικά άρθρα – Περιοδικά και Πρακτικά**

**Axelos, K., [2006] 1984.** *The world: being, becoming, totality*. Στο: *Systematique ouverte*. Μετάφρ. G. Moore. *Environment and Planning D: Society and Space*, **24**, σ. 643–651.

**Belsheim, R.O., 1962.** *Mechanical impedance: Collection of papers presented at the 30th symposium on shock, vibration and associated environments, Statler-Hilton Hotel, Detroit, MI, 10–12 Οκτωβρίου 1961*. *Shock and Vibration Bulletin*, **30**.

**Boltzmann, L., 1872.** *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien*, **66**, σ. 275–370.

**Boltzmann, L., 1877.** *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*. *Wiener Berichte*, **76**, σ. 373–435.

**Clausius, R., 1850.** *Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen*. *Annalen der Physik*, **79**(4), σ. 368–397, 500–524. doi:10.1002/andp.18501550403.

**Darrieus, M., 1929.** *Les modèles mécaniques en électrotechnique: leur application aux problèmes de stabilité*. *Bulletin de la Société Française des Électriciens*, **96**, σ. 794–809.

**Fairlie-Clarke, A.C., 1999.** *Force as a flow variable*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, **213**(1), σ. 77–80.

**Firestone, F.A., 1933.** *A new analogy between mechanical and electrical systems*. *Journal of the Acoustical Society of America*, **4**, σ. 249–267.

**Firestone, F.A., 1938.** *The mobility method of computing the vibration of linear mechanical and acoustical systems: mechanical–electrical analogies*. *Journal of Applied Physics*, **9**, σ. 373–387.

**Gardonio, P. & Brennan, M.J., 2002.** *On the origins and development of mobility and impedance methods in structural dynamics*. *Journal of Sound and Vibration*, **249**(3), σ. 557–573.

**Hagood, N.W. & von Flotow, A., 1991.** *Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks*. *Journal of Sound and Vibration*, **146**(2), σ. 243–268.

---

**Hähnle, W., 1932.** *Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, **11**, σ. 1–23.

**Konowrocki, R., Szolc, T., Pochanke, A. & Pręgoska, A., 2016.** *An influence of the stepping motor control and friction models on precise positioning of the complex mechanical system. Mechanical Systems and Signal Processing*, **70–71**, σ. 397–413.

**Le Corbeiller, P. & Yeung, Y.W., 1952.** *Duality in mechanics. Journal of the Acoustical Society of America*, **24**, σ. 643–648.

**López-Martínez, J., García-Vallejo, D., Alcayde, A., Sánchez-Salinas, S. & Montoya, F.G., 2023.** *A comprehensive methodology to obtain electrical analogues of linear mechanical systems. Mechanical Systems and Signal Processing*, **200**, άρθρο 110511.

**Mahapatra, S.D. et al., 2021.** *Piezoelectric materials for energy harvesting and sensing applications: Roadmap for future smart materials. Advanced Science*, **8**(21), άρθρο 2100864.

**Maxfield, J.P. & Harrison, H.C., 1926.** *Methods of high quality recording and reproducing of music and speech based on telephone research. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, **45**, σ. 334–348.

**Smith, M.C., 2002.** *Synthesis of mechanical networks: The inerter. IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**(10), σ. 1648–1662.

**Szolc, T., Konowrocki, R., Michajłow, M. & Pręgoska, A., 2014.** *An investigation of the dynamic electromechanical coupling effects in machine drive systems driven by asynchronous motors. Mechanical Systems and Signal Processing*, **49**(1–2), σ. 118–134.

**Titze, I.R., 2021.** *The concept of impedance. Journal of Singing*, **77**(3), σ. 379–380.

**Webster, A.G., 1919.** *Acoustical impedance and theory of horns and of the phonograph. Proceedings of the National Academy of Sciences*, **5**(10), σ. 275–282.

**Wegel, R.L., 1921.** *Theory of magneto-mechanical systems as applied to telephone receivers and similar structures. Journal of the American Institute of Electrical Engineers*, **40**(10), σ. 791–802.

### **III. Εκπαιδευτικά εγχειρίδια και σχολικά βιβλία**

**Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2015.** *Φυσική – Τεύχος Γ' (Γ' Λυκείου – Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας): Βιβλίο μαθητή*. Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Διαθέσιμο στο: [https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2728/Fysiki-G-Lykeiou-ThSp\\_html-apli/index5\\_6.html](https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2728/Fysiki-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/index5_6.html) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].



---

**Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2019.** *Φυσική – Τεύχος Α' (Γ' Λυκείου – Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας): Βιβλίο μαθητή (εμπλουτισμένο).* Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Διαθέσιμο στο: [https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4710/Fysiki-Teuxos-A\\_G-Lykeiou-ThSp-SpYg\\_html-empl/index5\\_2.html](https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4710/Fysiki-Teuxos-A_G-Lykeiou-ThSp-SpYg_html-empl/index5_2.html) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2019.** *Φυσική – Τεύχος Β' (Γ' Λυκείου – Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας): Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. Διαθέσιμο στο: [https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4712/Fysiki-Teuxos-B\\_G-Lykeiou-ThSp-SpYg\\_html-apli/index5.html](https://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/4712/Fysiki-Teuxos-B_G-Lykeiou-ThSp-SpYg_html-apli/index5.html) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

#### **IV. Πηγές εικόνων, διπλωμάτων ευρεσιτεχνίας και grey literature**

**Arbab, M.N., χ.χ.** *Lecture 2: Transfer function of mechanical systems.* Διαλέξεις στο πλαίσιο του μαθήματος *Control System Engineering*, KorAcademy. Περιλαμβάνει μεθοδολογία κόμβων για τη σύνταξη εξισώσεων μεταφοράς σε μηχανικά συστήματα. [Α δημοσίευτο διδακτικό υλικό].

**Fox, J., 2011.** *Damper for a suspension system.* International patent WO2011089373A1. Geneva: World Intellectual Property Organization.

**Johnson, M.G., 1997.** *Equivalent circuit analysis of a seventh order bandpass loudspeaker system.* Μεταπτυχιακή διατριβή. New Jersey Institute of Technology. Διαθέσιμο στο: <https://digitalcommons.njit.edu/theses/1008> [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**Wikimedia Commons, χ.χ.** *Oheaviside.jpg.* Διαθέσιμο στο: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oheaviside.jpg> [Public Domain] [Ανακτήθηκε 24 Ιουνίου 2025].

**Wikimedia Commons, χ.χ.** *Arthur Gordon Webster – portrait.* Διαθέσιμο στο: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthur\\_Gordon\\_Webster\\_circa\\_1915\\_\(cropped\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arthur_Gordon_Webster_circa_1915_(cropped).jpg) [Public Domain] [Ανακτήθηκε 24 Ιουνίου 2025].

**Wikimedia Commons, χ.χ.** *Firestone impedance diagram.* Διαθέσιμο στο: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1925\\_Floyd\\_A.\\_Firestone.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1925_Floyd_A._Firestone.jpg) [Public Domain] [Ανακτήθηκε 24 Ιουνίου 2025].

#### **V. Διαδικτυακές πηγές και εγκυκλοπαίδειες**

**Cambridge Enterprise, 2008.** *Secrets of the inerter revealed.* [Online] Διαθέσιμο στο: <https://www.cam.ac.uk/research/news/secrets-of-the-inerter-revealed> [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

---

**Department of Physics and Astronomy – Georgia State University, χ.χ.** *Conservation laws: isolated systems. HyperPhysics.* Διαθέσιμο στο: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/conser.html> [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**Energy Education, χ.χ.** *System and surrounding. Energy Education Encyclopedia.* University of Calgary. Διαθέσιμο στο: [https://energyeducation.ca/encyclopedia/System\\_and\\_surrounding](https://energyeducation.ca/encyclopedia/System_and_surrounding) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**Encyclopaedia Britannica, χ.χ.** *System (physics).* Διαθέσιμο στο: <https://www.britannica.com/science/system-physics> [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**Ritter, M.E., χ.χ.** *Types of systems.* Στο: *The Physical Environment. LibreTexts: Earth and Environmental Sciences.* University of California – LibreTexts. Διαθέσιμο στο: [https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geography\\_\(Physical\)/The\\_Physical\\_Environment\\_\(Ritter\)/02:\\_The\\_Earth\\_System/2.03:\\_Natural\\_Systems/2.3.02:\\_Types\\_of\\_Systems](https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geography_(Physical)/The_Physical_Environment_(Ritter)/02:_The_Earth_System/2.03:_Natural_Systems/2.3.02:_Types_of_Systems) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025].

**University of California - Davis, χ.χ.** *A system and its surroundings. ChemWiki: Physical Chemistry – Thermodynamics.* Διαθέσιμο στο: [https://chemwiki.ucdavis.edu/Physical\\_Chemistry/Thermodynamics/A\\_System\\_And\\_Its\\_Surroundings](https://chemwiki.ucdavis.edu/Physical_Chemistry/Thermodynamics/A_System_And_Its_Surroundings) [Ανακτήθηκε 23 Ιουνίου 2025]. (Αρχειοθετήθηκε στις 3 Φεβρουαρίου 2016 στο Wayback Machine)