

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ



ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΕΠΟΧΙΚΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΜΙΑ
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Β. ΚΟΥΙΚΟΓΛΟΥ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Ε. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ

Ε.ΓΡΗΓΟΡΟΥΔΗΣ

ΜΑΡΙΑ Ι. ΝΤΑΡΙΛΑ

ΧΑΝΙΑ 2004

Στους γονείς μου!

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με στήριξαν και βοήθησαν με τον τρόπο τους στη διεξαγωγή αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Κατ' αρχάς οφείλω να ευχαριστήσω την εταιρεία Coca-Cola 3 Ε Ηρακλείου που μου εμπιστεύτηκε και πολύ εγκάρδια μου παρεχώρησε όλες τις απαραίτητες πληροφορίες, δεδομένα και αρχεία της, προκειμένου να απασχοληθώ σ' αυτή εδώ την εργασία. Συγκεκριμένα θέλω να ευχαριστήσω τα στελέχη του τμήματος της Παραγωγής για το χρόνο που διέθεσαν και το ενδιαφέρον που έδειξαν προκειμένου να με κατατοπίσουν στο χώρο του εργοστασίου και να μου εξηγήσουν όλες τις διαδικασίες και τις μεθόδους που ήταν απαραίτητο να γνωρίσω για να μπορέσω να οδηγηθώ στα επιθυμητά αποτελέσματα.

Πολύ θερμά θέλω φυσικά να ευχαριστήσω τους φίλους μου και πολύ περισσότερο τους γονείς μου, που σ' αυτή την προσπάθεια μου με στήριξαν ψυχολογικά κάθε στιγμή.

Πιο πολύ, όμως, απ' όλους θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς τον Καθηγητή του Τμήματος κ. Βασίλειο Κουικόγλου, που αρχικά δέχτηκε να συνεργαστούμε στη διπλωματική μου εργασία και κατόπιν με τη γνώση του, την υπομονή και το χρόνο του μου έδειξε δρόμους να σκέφτομαι, τρόπο να μελετάω τα επιστημονικά κείμενα, εμπιστοσύνη στην προσωπική μου προσπάθεια. Χωρίς τη βοήθειά του δε θα είχα φτάσει ως εδώ. Πραγματικά θα ήθελα να είχα καταφέρει περισσότερα για να μπορέσω να τον αποζημιώσω για το ενδιαφέρον του.

1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το θέμα που διαπραγματευόμαστε στην εργασία αυτή έχει να κάνει με την πρόβλεψη της ζήτησης ορισμένων προϊόντων του εργοστασίου της εταιρείας Coca- Cola 3 E στο Ηράκλειο. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούμε είναι οι μηνιαίες πωλήσεις των προϊόντων για τα έτη 2002 και 2003. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο μοντέλο που να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την πορεία που θα ακολουθήσουν οι μελλοντικές πωλήσεις κάθε προϊόντος. Με λίγα λόγια αποσκοπούμε στο μοντέλο της ζήτησης κάθε προϊόντος.

Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε κάποια ήδη γνωστά στοχαστικά μοντέλα διακριτού χρόνου με εποχικότητα τα οποία θα τα προσαρμόσουμε στα δεδομένα του προβλήματος μας. Ειδικότερα θα δοκιμάσουμε τα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα σταθμισμένου μέσου (ARMA(p,q)) καθώς και τα μοντέλα Holt - Winters με τάση και εποχικότητα. Κατόπιν θα τα συγκρίνουμε μεταξύ τους ως προς το σφάλμα προσαρμογής τους στην εκάστοτε σειρά και ως προς το σφάλμα της πρόβλεψης που δίδει καθένα από αυτά για τις μελλοντικές τιμές κάθε χρονοσειράς.

Είναι προφανώς εύκολο να καταλάβει κανείς ότι δε θα χρησιμοποιήσουμε όλες τις τιμές των δεδομένων για την προσαρμογή – εκπαίδευση του μοντέλου, παρά θα κρατήσουμε τις πιο πρόσφατες (4 τελευταίες) για να τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που θα δώσει το μοντέλο που θα κατασκευάσουμε. Από τη σύγκριση αυτή θα υπολογίσουμε και τα σφάλματα πρόβλεψης, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σαν κριτήριο για την επιλογή του πιο κατάλληλου μοντέλου. Γενικά κατάλληλο θεωρείται το μοντέλο που αποδίδει το μικρότερο δυνατό σφάλμα.

Σκοπός της πρόβλεψης της ζήτησης δεν είναι φυσικά η ικανοποίηση της περιέργειας για την εξέλιξη του μέλλοντος. Η πρακτική της σημασία παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην οργάνωση και την οικονομία την βιομηχανίας. Με τη βοήθεια της πρόβλεψης της ζήτησης των προϊόντων βελτιστοποιούνται οι στάθμες των αποθεμάτων, πράγμα που σημαίνει ότι παίρνουμε πληροφορία τόσο για το χρόνο όσο και για την ποσότητα που θα παράγουμε. Ως γνωστόν, η παραγωγική διαδικασία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και υπόκειται σε πολλούς περιορισμούς. Με την πρόβλεψη μπορούμε να διαχειριστούμε μερικούς από αυτούς ώστε να οδηγούμαστε σε μικρότερα κόστη και φυσικά σε μεγαλύτερα κέρδη.

Μετά από την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου για την έκφραση της ζήτησης κάθε προϊόντος συνεχίζουμε την εργασία αυτή με την περιγραφή μιας μεθόδου υπολογισμού αποθεμάτων βάσει προβλέψεων ζήτησης, όπου καταδεικνύεται η σημαντικότητα της πρόβλεψης στην οργάνωση της παραγωγής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
2.1 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ	8
2.2 ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.....	10
2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ	11
2.4 ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ	12
3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	16
3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	16
3.2 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ – ΜΕΡΙΚΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ	16
3.3 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ $AR(p)$ και $AR(1)$	18
3.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ $MA(q)$	21
3.5 ΤΟ ΜΙΚΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΥΤΟΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ (ARMA).	22
3.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΤΑ ΕΠΟΧΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ AR	23
3.6.1 ΜΟΝΤΕΛΟ $AR(1 \times 12)$	23
3.6.2 ΜΟΝΤΕΛΟ $AR(2 \times 12)$	26
4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ HOLT ΚΑΙ WINTERS	28
4.1 ΓΕΝΙΚΑ	28
4.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΤΑΣΗ	28
4.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΑ	32
4.3.1 ΤΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	33
4.3.2 ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	34
4.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ	34

4.5 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ α , β , γ	37
5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ	38
5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ.....	38
5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΟΝΤΕΛΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ.....	40
5.2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ AR(1×12)	40
5.2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ AR(2×12)	41
5.2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ HOLT-WINTERS	42
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ	46
5.3.1 ΤΥΠΟΣ 0.25L GLASS	47
5.3.2 ΤΥΠΟΣ 0.33L CAN.....	49
5.3.3 ΤΥΠΟΣ 1.5L x 6 BOTTLES	51
5.3.4 0.5L PET	52
5.3.5 ΤΥΠΟΣ 0.25L GLASS	54
5.3.6 ΤΥΠΟΣ 0.33L, CAN.....	56
5.3.7 ΤΥΠΟΣ 0.33L x 6 PCS, CAN	58
5.3.8 ΤΥΠΟΣ 0.5L, PET	60
5.3.9 ΤΥΠΟΣ 0.5L x6 BOTTLES	62
5.3.10 ΤΥΠΟΣ 1.5L x 6 BOTTLES	64
5.3.11 ΤΥΠΟΣ 0.25L, GLASS	66
5.3.12 ΤΥΠΟΣ 0.33L, CAN.....	68
5.3.13 ΤΥΠΟΣ 0.33L x 6PCS, CAN	70
5.3.14 ΤΥΠΟΣ 0.5L, PET	71
5.3.15 ΤΥΠΟΣ 0.5L x 6 BOTTLES, PET	73
5.3.16 ΤΥΠΟΣ 1.5 L, PET	75
5.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ	76

6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	78
6.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	78
6.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	79
7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	83
7.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ EXCEL ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ AR	83
7.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ EXCEL ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ HOLT-WINTERS	88
8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	92

2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2.1 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ

Το μεγαλύτερο κομμάτι της στατιστικής μεθόδου ασχολείται με μοντέλα στα οποία οι παρατηρήσεις θεωρούνται ότι μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Σε πολλές εφαρμογές η εξάρτηση μεταξύ των παρατηρήσεων αποτελεί «βραχνά» γι' αυτό και εισάγεται στο σχεδιασμό των πειραμάτων η δημιουργία συνθηκών τυχαιότητας που συμβάλλει στην έγκυρη ανάλυση των παρατηρήσεων σαν αυτές να είναι ανεξάρτητες. Ωστόσο, πολλά δεδομένα φαινομένων των επιχειρήσεων, των οικονομικών, των φυσικών επιστημών και της επιστήμης των μηχανικών απαντώνται με τη μορφή *χρονοσειρών*, όπου οι παρατηρήσεις είναι εξαρτημένες και ο τύπος της εξάρτησης που εμφανίζουν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ο κορμός των τεχνικών που έχουν αναπτυχθεί προκειμένου τη μελέτη τέτοιων σειρών εξαρτημένων παρατηρήσεων ονομάζεται γενικά ανάλυση χρονοσειρών (time series analysis).

Τις τελευταίες δεκαετίες πολλοί επιστήμονες έχουν δουλέψει με πραγματικά δεδομένα από παραδείγματα επιχειρήσεων και βιομηχανιών και με μεθόδους δοκιμής – σφάλματος καθώς και με συνεχείς συγκρίσεις, αλληλεπιδράσεις και αναθεωρήσεις θεωρίας – πράξης έχουν αποπειραθεί να επιλέξουν, να υιοθετήσουν και να εδραιώσουν πρακτικές τεχνικές προκειμένου να απαντήσουν στις ανάγκες της βιομηχανίας.

Στο παρακάτω κείμενο θα ασχοληθούμε με την κατασκευή στοχαστικών μοντέλων χρονοσειρών διακριτού χρόνου και την εφαρμογή αυτών των μοντέλων στα δεδομένα του προβλήματός μας. Κύριος σκοπός μας κατά τη διαδικασία αυτή είναι η δημιουργία μοντέλων το δυνατόν απλούστερα και με το μικρότερο δυνατό αριθμό κατάλληλων και αντιπροσωπευτικών παραμέτρων. Η παραγωγή τέτοιων μοντέλων κρίνεται απαραίτητη για τους εξής λόγους:

1. Μας επιτρέπουν να δούμε χαρακτηριστικά του συστήματος που γεννά τη χρονοσειρά .
2. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή βέλτιστων προβλέψεων μελλοντικών τιμών της σειράς.

3. Στην περίπτωση που δύο ή περισσότερες συγγενείς (σχετισμένες) σειρές βρίσκονται υπό μελέτη, τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έκφραση δυναμικών σχέσεων μεταξύ των σειρών, από τις οποίες να εκτιμηθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς.

4. Τα μοντέλα δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή βέλτιστων πολιτικών ελέγχου, οι οποίες να δείχνουν πως μπορεί μια μεταβλητή να αξιοποιηθεί ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο θόρυβος σε μια εξαρτημένη μεταβλητή.

Η δυνατότητα βέλτιστης πρόβλεψης, κατανόησης δυναμικών σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και βέλτιστου ελέγχου είναι εξαιρετικής σημασίας για πολλούς τομείς της παραγωγής και των επιχειρήσεων. Για παράδειγμα η βελτιστοποίηση πρόβλεψης των πωλήσεων είναι ζωτικής σημασίας στην οργάνωση των επιχειρήσεων, τα μοντέλα συναρτήσεων μεταφοράς χρειάζονται στη βελτίωση του σχεδιασμού και του ελέγχου των εργοστασιακών διαδικασιών και η βελτιστοποίηση πολιτικών ελέγχου είναι απαραίτητη στη ρύθμιση διάφορων παραγόντων των διαδικασιών τόσο με χειρωνακτικό τρόπο όσο και με τη βοήθεια ηλεκτρονικών δικτύων.

Συγκεκριμένα η πρόβλεψη της ζήτησης των προϊόντων παίζει ένα θεμελιώδη ρόλο σε όλες τις δραστηριότητες της οργάνωσης και της διοίκησης μιας επιχείρησης. Η σημασία της μπορεί να γίνει αντιληπτή αν σκεφτούμε τι ενδέχεται να συμβεί σε περίπτωση εσφαλμένης πρόβλεψης. Εδώ διαχωρίζουμε δύο ενδεχόμενα:

- (i) Όταν η πρόβλεψη είναι μικρότερη από την πραγματική ζήτηση, οπότε και η σύμφωνα με την πρόβλεψη παραγόμενη ποσότητα δεν επαρκεί να καλύψει τις ανάγκες κι έτσι δημιουργείται έλλειψη προϊόντος. Οι ελλείψεις οδηγούν με τη σειρά τους σε μια αλυσίδα ανεπιθύμητων για την εταιρεία φαινομένων, όπως είναι οι ανικανοποίητες παραγγελίες, η αύξηση του κόστους, η διατάραξη της ισορροπίας της παραγωγής με έκτακτες προσπάθειες κάλυψης της ζήτησης.
- (ii) Όταν η πρόβλεψη είναι μεγαλύτερη από την πραγματική ζήτηση, οπότε και δημιουργείται απόθεμα. Το απόθεμα αυτό μπορεί να παραμείνει στην αποθήκη και να εξαντληθεί εν καιρώ, πράγμα που σημαίνει αύξηση του κόστους αποθήκευσης. Η χειρότερη περίπτωση είναι αυτή στην οποία το απόθεμα αναμένει μεν στην αποθήκη την πιθανή διοχέτευση του στην αγορά, μένει όμως τελικά απώλητο και καταστρέφεται. Επιπρόσθετα με την προαναφερόμενη αύξηση του κόστους αποθήκευσης δημιουργείται και ένα μεγάλο κόστος από την καταστροφή του απώλητου προϊόντος.

Αβίαστα, λοιπόν, οδηγούμαστε στην κατανόηση της ανάγκης για σωστή και έγκυρη πρόβλεψη. Ωστόσο δεν είναι εύκολο να κατασκευάσουμε μοντέλο πιστό στην πραγματικότητα, γι αυτό πρώτα εξετάζουμε ένα πλήθος υποψήφιων μοντέλων και κατόπιν επιλέγουμε αυτό που συγκριτικά δίδει το μικρότερο σφάλμα. Η έννοια του σφάλματος ορίζεται με πολλούς τρόπους τους οποίους θα αναφέρουμε σε ακόλουθο κεφάλαιο όπου θα κάνουμε τη σύγκριση των υπό εξέταση μοντέλων. Γενικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι διαχωρίζεται σε σφάλμα προσαρμογής του μοντέλου και σε σφάλμα πρόβλεψης που εξάγεται από την εφαρμογή του.

2.2 ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα δεδομένα του προβλήματός μας είναι οι μηνιαίες πωλήσεις συγκεκριμένων προϊόντων του εργοστασίου της Coca-Cola 3 E του Ηρακλείου για τα έτη 2002 και 2003. Η πρώτη απόπειρα για την επεξεργασία τους βασίστηκε στη χρήση έτοιμου προγράμματος πρόβλεψης, ειδικά διαμορφωμένο γι αυτό το σκοπό (Statgraphics). Ωστόσο, λόγω μικρού πλήθους δεδομένων, το προαναφερόμενο πρόγραμμα δε δούλεψε επαρκώς, με αποτέλεσμα να μην είναι εφικτή η διερεύνηση της εποχικότητας των δεδομένων και η εξαγωγή προβλέψεων με τη χρήση του.

Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με την ολοκληρωτική κατασκευή των μοντέλων ARMA και Holt – Winters μέσω μαθηματικού προγραμματισμού με τη βοήθεια του Microsoft Excel. Αφού διατυπώσαμε στο Excel τις εξισώσεις κάθε μοντέλου και κατασκευάσαμε ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες και οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου, χρησιμοποιήσαμε το Solver του Excel για την επίλυσή του. Το κτίσιμο των εξισώσεων, η επίλυσή τους και τελικά η κατασκευή του εκάστοτε μοντέλου θα παρουσιαστεί αναλυτικά στα αντίστοιχα κεφάλαια όπου γίνεται η παρουσίαση του θεωρητικού υπόβαθρου κάθε μοντέλου.

Πρώτα όμως πρέπει να δούμε τι είναι μια χρονοσειρά και στη συνέχεια πώς επεξεργαζόμαστε τα δεδομένα της προκειμένου να φτάσουμε σε αποτελέσματα πρόβλεψης.

2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ

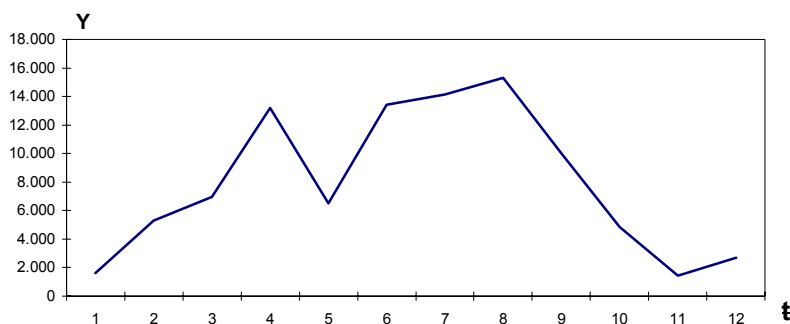
Σαν χρονολογική σειρά (ή απλά χρονοσειρά, σειρά) ορίζεται μια χρονολογικά διατεταγμένη ακολουθία παρατηρήσεων. Η ακολουθία αυτή μπορεί να χαρακτηρίζει ένα οποιοδήποτε μετρήσιμο μέγεθος π.χ. θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως

Y_t : Σύνολο πωλήσεων ενός προϊόντος το μήνα t .

και παρακολουθώντας τους τελευταίους 12 μήνες των πωλήσεων να καταγράψουμε τις εξής παρατηρήσεις :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_t	1604	5275	6956	13199	6493	13432	14127	15327	10030	4836	1428	2679

Στην προκειμένη περίπτωση το φαινόμενο Y_t είναι διακεκριμένης κατάστασης (ακέραιες τιμές), διακεκριμένου χρόνου. Καθ' όλη την έκταση αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε με τέτοια φαινόμενα. Έχουμε σαν δεδομένο ότι οι τιμές της σειράς καταγράφονται ανά ίσα (ή σχεδόν ίσα) χρονικά διαστήματα (ανά μήνα). Έχει καθιερωθεί τέτοια φαινόμενα να συμβολίζονται ως X_t , Y_t , Z_t . Επίσης συνηθίζεται (ακόμα και για φαινόμενα διακεκριμένου χρόνου) το γράφημα μιας σειράς να απεικονίζεται με μια συνεχή γραμμή. Έτσι η παραπάνω σειρά παίρνει τη μορφή:



Σχήμα Ι : Το γράφημα μιας χρονοσειράς

Πάντα στα διαγράμματα χρονοσειρών ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το χρόνο t , ενώ στον κάθετο άξονα παριστάνεται η τιμή Y_t .

Όπως προαναφέραμε θα ασχοληθούμε με διακεκριμένες χρονοσειρές και θα αποπειραθούμε να «μαντέψουμε» την πιθανή συνέχειά τους! Όταν ένα φαινόμενο εξελίσσεται πιθανοκρατικά στο χρόνο τότε λέμε ότι αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία. Η χρονοσειρά που εξετάζουμε ενδέχεται να αναλυθεί με μια πλειάδα πιθανών μοντέλων που υπόκεινται στους πιθανολογικούς κανόνες που προκύπτουν από την εξέτασή της και θα δείχνουν μια πιθανή μελλοντική εξέλιξή της. Μια τέτοια αποτύπωσή της θεωρούμε πως είναι μια στοχαστική διαδικασία. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια παρατήρηση z_t σε δεδομένο χρόνο t σαν την απεικόνιση μιας τυχαίας μεταβλητής z_t με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(z_t)$. Ομοίως δύο παρατηρήσεις σε δύο οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές μπορούν να θεωρηθούν σαν απεικονίσεις δύο τυχαίων μεταβλητών z_{t_1} και z_{t_2} σαν συνάρτηση πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών $p(z_{t_1}, z_{t_2})$. Γενικά παρατηρήσεις που αποτελούν μια χρονοσειρά ίσων χρονικών διαστημάτων μπορούν να περιγραφούν από μια N διάστασης τυχαία μεταβλητή (z_1, z_2, \dots, z_N) με πιθανότητα κατανομής $p(z_1, z_2, \dots, z_N)$ (Box and Jenkins 1976).

2.4 ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Μια ειδική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών, ονόματι Αμετάβλητες Διαδικασίες, χρησιμοποιούνται εκτενώς στην περιγραφή χρονοσειρών και βασίζονται στην υπόθεση ότι η διαδικασία βρίσκεται σε μια κατάσταση στατιστικής ισορροπίας γύρω από ένα μέσο όρο. Βέβαια η πρόβλεψη είναι θέμα υψίστης σημασίας στη βιομηχανία, στις επιχειρήσεις και στα οικονομικά, όπου οι περισσότερες χρονοσειρές είναι εκ φύσεως μεταβλητές και υπολείπονται μιας φυσικής μέσης τιμής. Γι' αυτό δεν είναι περίεργο που οι περισσότερες μέθοδοι, που έχουν προταθεί για την πρόβλεψη και χρησιμοποιούν εκθετικά σταθμισμένους κινητούς μέσους (exponentially weighted moving average), αποδεικνύονται κατάλληλες για ένα συγκεκριμένο τύπο μεταβλητών διαδικασιών. Παρότι τέτοιες μέθοδοι δεν προσαρμόζονται ικανά σε όλες τις χρονοσειρές, το γεγονός ότι δίνουν τη σωστή συνάρτηση πρόβλεψης προσφέρει αξιόπιστες πληροφορίες για το είδος της μεταβλητής διαδικασίας.

Μια διαδικασία ονομάζεται αυστηρά αμετάβλητη όταν οι ιδιότητες της μένουν ανεπηρέαστες από τις αλλαγές του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση κατανομής m παρατηρήσεων $z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_m}$ που συμβαίνουν τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_m είναι η ίδια με αυτή που αποτελείται από m παρατηρήσεις $z_{t_1+k}, z_{t_2+k}, \dots, z_{t_m+k}$ που συμβαίνουν σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές $t_1+k, t_2+k, \dots, t_m+k$. Συμπερασματικά για να είναι μια διακριτή διαδικασία

αυστηρά αμετάβλητη η συνάρτηση κατανομής της πρέπει να παραμένει ανεπηρέαστη έστω κι αν αλλάξουμε το διάστημα k των παρατηρήσεων (είτε το αυξήσουμε είτε το μειώσουμε) (Φίλης, 2003).

Μέσος και διακύμανση μιας αμετάβλητης διαδικασίας: Στην περίπτωση που $m=1$ η υπόθεση αμεταβλητότητας συνεπάγεται ότι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $p(z_t)$ είναι η ίδια για κάθε χρόνο t και μπορεί να γραφεί $p(z)$. Γι' αυτό το λόγο η στοχαστική διαδικασία έχει σταθερό μέσο:

$$\mu = E[z_t] = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz,$$

που εκφράζει το επίπεδο στο οποίο κυμαίνεται,

και σταθερή διακύμανση:

$$\sigma_z^2 = E[(z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2 p(z)dz,$$

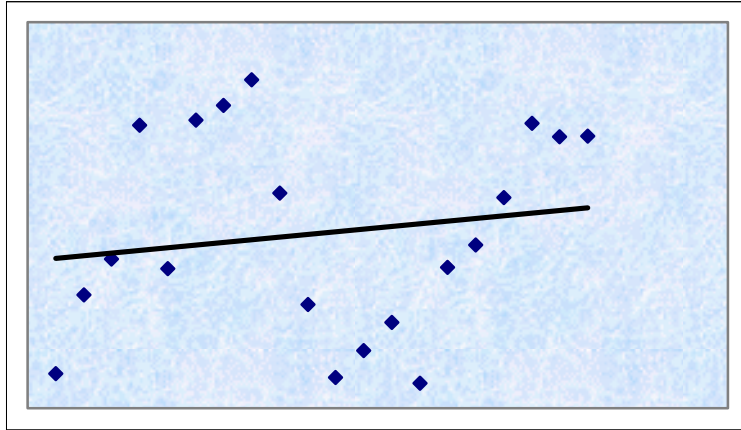
που μετράει τη διασπορά γύρω από το μέσο.

Επειδή η συνάρτηση κατανομής είναι ίδια για κάθε χρονική στιγμή t μπορούμε να εκτιμήσουμε τη διαδικασία από τον μέσο και τη διασπορά της χρονοσειράς ως εξής:

$$\text{Ο μέσος } \mu : \quad \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t$$

$$\text{Η εκτίμηση της διασποράς } \sigma_z^2 : \quad \hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2$$

Συντελεστής συνδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης: Η υπόθεση για τη σταθερότητα μιας χρονοσειράς σημαίνει επίσης και ότι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $p(z_{t_1}, z_{t_2})$ είναι η ίδια για όλους τους χρόνους t_1, t_2 που απέχουν μεταξύ τους ένα σταθερό χρονικό διάστημα. Για τη φύση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα αν την αναπαραστήσουμε σε ένα καρτεσιανό διάγραμμα χρησιμοποιώντας ζευγάρια τιμών της (z_t, z_{t+k}) με σταθερό k , όπου θα παρατηρήσουμε ότι ανάμεσα μεταξύ των γειτονικών τιμών υπάρχει συσχέτιση. Πχ. Η συσχέτιση μεταξύ z_t και z_{t+1} μπορεί να είναι θετική, ενώ η συσχέτιση μεταξύ z_t και z_{t+2} αρνητική.



Έτσι τη σχέση μεταξύ z_t και της τιμής της z_{t+k} την ονομάζουμε συντελεστή συνδιακύμανσης στο k και ορίζεται από τη σχέση:

$$\gamma_k = \text{cov}[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]$$

Ομοίως ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης στο k ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]E[(z_{t+k} - \mu)^2]}} = \\ &= \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \end{aligned}$$

Αφού για μια αμετάβλητη διαδικασία η διακύμανση $\sigma_z^2 = \gamma_0$ είναι η ίδια στο t και στο $t+k$.

Λόγω αυτού η αυτοσυσχέτιση στο διάστημα k είναι :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.1)$$

που δίνει $\rho_0=1$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να προσθέσουμε ότι η γραφική παράσταση του μεγέθους γ_k έναντι του διαστήματος του χρόνου k αποτελεί τη συνάρτηση συνδιακύμανσης $\{\gamma_k\}$ της στοχαστικής διαδικασίας. Ομοίως και η γραφική αναπαράσταση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_k έναντι του διαστήματος του χρόνου k αποτελεί τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\{\rho_k\}$ της διαδικασίας. Πρέπει να προσθέσουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι αδιάστατη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την κλίμακα μέτρησης της χρονοσειράς. Επίσης οι τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρικές ως προς το μηδέν κι έτσι πολλές φορές μπορούμε να παραλείψουμε το αρνητικό μέρος και να μελετάμε μόνο το θετικό.

Από τα παραπάνω περιγράφεται θεωρητικά μια θεμελιώδης στοχαστική διαδικασία. Στην πράξη από μια χρονοσειρά N παρατηρήσεων μπορούμε να εξάγουμε μόνο εκτιμήσεις για τις αυτοσυσχετίσεις της. Έχουν προταθεί από διάφορους μελετητές πιθανές εκφράσεις εκτίμησης της συνάρτησης αυτοσυσχετίσης, αλλά η επικρατέστερη δίνεται από την παρακάτω σχέση (2.1):

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}$$

$$\text{όπου } c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$$

η εκτίμηση της συνδιακύμανσης γ_k και \bar{z} η μέση τιμή της χρονοσειράς (Box and Jenkins, 1976).

3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ένα γενικό γραμμικό στοχαστικό μοντέλο μπορεί να περιγραφεί με την υπόθεση ότι μια χρονοσειρά μπορεί να παραχθεί σαν ένα γραμμικό άθροισμα (linear aggregation) τυχαίων δονήσεων (random shocks). Για την πρακτική αναπαράσταση των χρονοσειρών με αυτό τον τρόπο γίνεται χρήση μοντέλων που χρησιμοποιούν λίγες αλλά αντιπροσωπευτικές παραμέτρους. Για να διατηρηθεί μικρός ο αριθμός των παραμέτρων, προκειμένου να υπάρχει οικονομία χρόνου και κόπου στην εφαρμογή του μοντέλου, επικράτησε η έκφραση της γραμμικής διαδικασίας να γίνεται με ένα μικρό αριθμό όρων αυτοπαλινδρομικών (autoregressive) και σταθμισμένου μέσου (moving average).

Πρώτα όμως πρέπει να δούμε δύο βασικές έννοιες που θα μας βοηθήσουν στην ανάπτυξη των μοντέλων πρόβλεψης. Αυτές είναι η αυτοσυσχέτιση και η μερική αυτοσυσχέτιση.

3.2 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ – ΜΕΡΙΚΗΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Ένας τρόπος για να προβούμε στην πρόβλεψη ενός φαινομένου είναι η γνώση της συσχέτισης που αναμένεται να έχει αυτό με το παρόν. Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τη συσχέτιση, η οποία δίνεται από τη σχέση (2.1):

$$\rho_k = \text{Corr}(z_t, z_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

και επίσης ισχύει $\rho_k = \rho_{-k}$ (3.1)

όπου παρατηρούμε ότι με σταθερή διασπορά και συνδιακύμανση ορίζεται μια σταθερή αυτοσυσχέτιση (Box and Jenkins, 1976).

Η ρ_k μετράει τη μέση συσχέτιση μεταξύ των τιμών z_{t-k} και z_t η οποία είναι ίδια (λόγω στασιμότητας) με την αυτοσυσχέτιση της z_t με την z_{t-k} . Αυτό αποδεικνύεται και από την πλήρη σχέση της (3.1): $\rho_k = \rho_{-k} \Rightarrow \text{Corr}(z_t, z_{t-k}) = \text{Corr}(z_{t+k}, z_t)$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function ή ACF) δίνεται από (N-k) ζεύγη τιμών, δηλαδή η ρ_2 μετρά την αυτοσυσχέτιση που επικρατεί μεταξύ των παρατηρήσεων που απέχουν μεταξύ τους 2 χρονικές περιόδους και δίνεται από τα ζεύγη τιμών $\{(z_1, z_3), (z_2, z_4), \dots, (z_{N-2}, z_N)\}$. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα που παρουσιάζει η ACF είναι που δε λαμβάνει υπόψη της ότι σε μια σειρά ένα μεγάλο μέρος της αυτοσυσχέτισης μεταξύ z_{t-k} και z_t μπορεί να οφείλεται στη συσχέτιση αυτών των τιμών με τις ενδιάμεσες $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k-1}$. Την αδυναμία αυτή της ACF καλύπτει η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (Partial Autocorrelation Function- PACF). Αυτή ορίζεται ως εξής:

$$\phi_{kk} = \text{Corr}(z_t, z_{t-k} \mid z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k+1}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Η PACF είναι ένα μέτρο της «υπό όρους» εξάρτησης που υπάρχει στις παρατηρήσεις μιας χρονοσειράς. Η έκφραση «υπό όρους» σημαίνει ότι η εξάρτηση μεταξύ z_{t-k} και z_t δεν επηρεάζεται από τις ενδιάμεσες τιμές. Εξ' ορισμού $\phi_{11} = \rho_1$. Συνεπώς η PACF μας πληροφορεί ότι υπάρχει μια αμερόληπτη συσχέτιση της z_t με την z_{t-1} καθώς και με την z_{t-2} , σε αντίθεση με την ACF που μεροληπτεί.

Μπορούμε δηλαδή να αποπειραθούμε την περιγραφή -πρόβλεψη της χρονοσειράς από το ίδιο της το παρελθόν χρησιμοποιώντας σε κάθε επόμενη χρονική στιγμή ($t > 3$) τις παρατηρήσεις z_{t-1} και z_{t-2} . Σ' αυτό το σκεπτικό βασίζονται και τα μοντέλα AR (Autoregressive Models ή μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης), στα οποία οι τιμές της χρονοσειράς εξαρτώνται άμεσα από το παρελθόν της (Box and Jenkins, 1976).

3.3 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ AR(p) και AR(1).

Όπως αναφέραμε προηγουμένως μεταξύ των δεδομένων υπάρχει συσχέτιση, η οποία, όμως, μετά το πρώτο βήμα ($\phi_{kk} = 0, k > 1$) είναι μεροληπτική. Π.χ. η $\phi_{22} = 0$ δίδει την πληροφορία ότι όλο το μέρος της συσχέτισης, των παρατηρήσεων που απέχουν $k=2$ περιόδους μεταξύ τους, οφείλεται στην εξάρτηση των z_t και z_{t-2} με την z_{t-1} . Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε αυτό το φαινόμενο μέσω του παρελθόντος του και με βάση μόνο τις αμερόληπτες συσχετίσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $z_t = \phi_1 z_{t-1}$. Η παράμετρος ϕ_1 θα περιγράφει την εξάρτηση επιρροή της z_{t-1} στη διαμόρφωση της z_t . Επειδή όμως θα υπάρχει κάποια απόκλιση της z_t από την $\phi_1 z_{t-1}$ εισάγουμε στην παραπάνω έκφραση μια ακόμα παράμετρο, που στην ουσία είναι μια τυχαία μεταβλητή, αφού και η απόκλιση είναι τυχαία, ώστε να είναι επαρκής και πλήρης η περιγραφή της. Έτσι έχουμε :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t \quad (3.2)$$

Η ακολουθία-τυχαία μεταβλητή a_t συναντάται με διάφορες ονομασίες όπως: random error (τυχαίο σφάλμα), random shock (τυχαία δόνηση), error term (όρος σφάλματος), white noise series (σειρά λευκού θορύβου), random disturbance (τυχαία διαταραχή).

Με άλλα λόγια σ' αυτό το μοντέλο η παροντική τιμή της διαδικασίας εκφράζεται με το πεπερασμένο άθροισμα των παρελθοντικών τιμών της και μια δόνηση a_t . Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι τις τιμές της σειράς $z_t, z_{t-1}, z_{t-2} \dots$ τις λαμβάνουμε στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα $t, t-1, t-2 \dots$ που είναι ίσα μεταξύ τους. Επίσης συμβολίζουμε ως $\tilde{z}_t, \tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}$ τις διαφορές των τιμών της σειράς με την προηγούμενή τους. Σε κάποιες περιπτώσεις (Box and Jenkins, 1976) έτσι συμβολίζουμε τις διαφορές των τιμών της σειράς από τη μέση τιμή της, πχ. : $\tilde{z}_t = z_t - \mu$. Επομένως έχουμε πιο αναλυτικά:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (3.3)$$

Που είναι η διαδικασία αυτοπαλινδρόμησης (autoregressive) AR τάξης p (Box and Jenkins, 1976).

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να εισάγουμε κάποιους απλούς τελεστές που βοηθούν καταλυτικά στη μελέτη και την κατασκευή των στοχαστικών μοντέλων που εξετάζουμε. Έτσι ορίζουμε τον τελεστή αντίστροφης μετατόπισης B ο οποίος δίνεται από τη σχέση : $B z_t = z_{t-1}$ και κατ' επέκταση $B^m z_t = z_{t-m}$. Αυτή είναι η περίπτωση που τελεστής B συνδέει την παροντική τιμή

της σειράς με προηγούμενη τιμή αυτής. Υπάρχει και αντίστοιχη έκφραση του B που συνδέει την παροντική τιμή με μελλοντική τιμή της σειράς. Αυτή είναι η $F = B^{-1}$ όπου $Fz_t = z_{t+1}$ και κατ' επέκταση $F^m z_t = z_{t+m}$ (Box and Jenkins, 1976).

Έτσι λοιπόν μπορούμε να γράψουμε τη διαφορά $z_t - z_{t-1}$ σε σχέση με τον B ως:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - B)z_t$$

που ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\nabla^{-1} z_t &= S z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j} \\ &= z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots \\ &= (1 + B + B^2 + \dots) z_t \\ &= (1 - B)^{-1} z_t\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τελεστή B τάξης p το μοντέλο AR μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

και πιο οικονομικά γράφεται:

$$\phi(B) \tilde{z}_t = a_t$$

κι έτσι το μοντέλο περιέχει $p+2$ άγνωστες παραμέτρους, $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_a^2$ που πρακτικά θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα. Η επιπρόσθετη παράμετρος σ_a^2 είναι η διακύμανση της διαδικασίας λευκού θορύβου a_t .

Με μια δεύτερη ματιά θα αντιληφθούμε ότι το μοντέλο AR αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικού γραμμικού μοντέλου. Για παράδειγμα αν εξαλείψουμε τον όρο \tilde{z}_{t-1} από το δεξί μέλος της (3.3) με αντικατάσταση ώστε:

$$\tilde{z}_{t-1} = \phi_1 \tilde{z}_{t-2} + \phi_2 \tilde{z}_{t-3} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p-1} + a_{t-1} \quad (3.4)$$

με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο \tilde{z}_{t-2} και ούτω καθεξής, μέχρι να δημιουργήσουμε μια μη πεπερασμένη σειρά για το a .

Συμβολικά γράφουμε $\phi(B) \tilde{z}_t = a_t$, που είναι ισοδύναμο με το $\tilde{z}_t = \psi(B) a_t$ με $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$.

Οι διαδικασίες AR μπορεί να είναι μεταβλητές ή αμετάβλητες. Για να είναι η διαδικασία αμετάβλητη οι συντελεστές ϕ πρέπει να επιλεγθούν ώστε να τα βάρη ψ_1, ψ_2, \dots στη σχέση

$\psi(B)=\phi^{-1}(B)$ να σχηματίζουν μια συγκλίνουσα σειρά. Η συνάρτηση $\psi(B)$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού μοντέλου που συσχετίζει το \tilde{Z}_t με το a_t .

Για να μπορεί να θεωρηθεί η ακολουθία - τυχαία μεταβλητή a_t πλήρως τυχαία πρέπει:

$$E(a_t) = 0$$

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \text{Var}(a_t) = E(a_t^2) = \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(a_t, z_{t-k}) = 0, \quad k > 0$$

Η σχέση $E(a_t)=0$ προκύπτει με το σκεπτικό ότι η τ.μ. a_t πρέπει να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές με ίδιες πιθανότητες και άρα η μέση τιμή θα είναι 0 (Box and Jenkins 1976). Η επόμενη σχέση σημαίνει ότι η διασπορά θα πρέπει να είναι πεπερασμένη και σταθερή. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$\rho_k = \text{Corr}(a_t, a_{t-k}) = \frac{\text{Cov}(a_t, a_{t-k})}{[\text{Var}(a_t)\text{Var}(a_{t-k})]^{1/2}} = \frac{\text{Cov}(a_t, a_{t-k})}{\sigma_a^2} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Η σχέση αυτή καθώς και η $\text{Cov}(a_t, z_{t-k}) = 0, \quad k > 0$, εκφράζουν ότι η a_t είναι ανεξάρτητη άρα και ασυσχέτιστη με τον εαυτό της. Με άλλα λόγια η a_t έχει όλες τις μαθηματικές ιδιότητες της τυχειότητας και γι αυτό η κατανομή της θεωρείται κανονική.

Για τη μετάβαση από το θεωρητικό μοντέλο [σχέση (3.2)] στο πρακτικό του (τις εκτιμήσεις) δουλεύουμε ως ακολούθως :

$$\underbrace{z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t}_{\text{θεωρητικά}} \Leftrightarrow \underbrace{\hat{z}_t = \hat{\phi}_1 z_{t-1} + a_t}_{\text{πρακτικά}} \Rightarrow \underbrace{\hat{z}_{t-1}(1)}_{\text{τιμές προσαρμογής}} = \hat{\phi}_1 z_{t-1} + a_t \Rightarrow \underbrace{\hat{a}_t = e_t}_{\substack{\text{σφάλματα} \\ \text{προσαρμογής}}} = z_t - \underbrace{\hat{\phi}_1 z_{t-1}}_{\hat{z}_t = \hat{z}_{t-1}(1)}$$

Αυτό που κάνουμε δηλαδή, είναι να εκτιμήσουμε την ακολουθία a_t από τα σφάλματα προσαρμογής, που συχνά αναφέρονται και σαν κατάλοιπα-Residuals, τα οποία εδώ είναι συναρτήσει της σειράς και της εκτίμησης $\hat{\phi}_1$ της παραμέτρου ϕ_1 . Τα σφάλματα e_t είναι:

- (1) Η καλύτερη (και μοναδική) εκτίμηση των \hat{a}_t που μπορούμε να κάνουμε
- (2) Τυχαίες μεταβλητές, αφού προκύπτουν από διαφορά δύο τυχαίων μεταβλητών $(z_t - \hat{z}_t)$.

Περιορισμός της παραμέτρου: Η υπόθεση της στασιμότητας επιβάλλει για το μοντέλο AR(1) να ισχύει $|\phi_1| < 1$. Ο περιορισμός αυτός θα δείξει αν το μοντέλο που επιλέξαμε είναι στάσιμο και προκύπτει αν υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση (3.2) και πάρουμε μέσες τιμές, ώστε:

$$E(z_t) = \text{Var}(z_t) = E[(\phi_1 z_{t-1} + a_t)^2] = \phi_1^2 E(z_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(z_{t-1} a_t) + E(a_t^2)$$

δηλαδή:

$$\text{Var}(z_t) = \phi_1^2 \text{Var}(z_t) + \sigma_a^2 \Rightarrow \text{Var}(z_t) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \quad (\text{επειδή } E(z_t^2) = E(z_{t-1}^2) = \text{Var}(z_t))$$

και επειδή $\text{Var}(z_t) \geq 0$ και $\sigma_a^2 \geq 0$ θα πρέπει $1 - \phi_1^2 \geq 0 \Rightarrow \phi_1^2 \leq 1$ ή $|\phi_1| \leq 1$ και για να είναι πεπερασμένη η διασπορά της z_t θα πρέπει $|\phi_1| < 1$ (Box and Jenkins, 1976).

3.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ MA(q).

Όπως είδαμε παραπάνω το μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης AR εκφράζει την απόκλιση \tilde{z}_t της διαδικασίας σαν ένα πεπερασμένο σταθμισμένο άθροισμα p προηγούμενων αποκλίσεων (διαφορών) $\tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}, \dots, \tilde{z}_{t-p}$ συν μια τυχαία δόνηση a_t . Ισοδύναμα είδαμε ότι εκφράζει την \tilde{z}_t σαν ένα μη πεπερασμένο άθροισμα των a .

Ένα άλλο είδος μοντέλου με μεγάλη πρακτική σημασία στη δημιουργία μοντέλων χρονοσειρών μέσω των παρατηρήσεών τους, είναι και η επονομαζόμενη πεπερασμένη διαδικασία κινητού μέσου. Σ' αυτό εκφράζουμε τη \tilde{z}_t γραμμικά εξαρτημένη από ένα πεπερασμένο αριθμό q προηγούμενων a . Συμπερασματικά η σχέση

$$\tilde{z}_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

ονομάζεται διαδικασία κινούμενου μέσου όρου (moving average- MA) τάξης q .

Η ονομασία «κινούμενος μέσος όρος» είναι κατά μία έννοια παραπλανητική επειδή τα βάρη $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_p$ που πολλαπλασιάζονται με τα a δε χρειάζεται να έχουν απόλυτη συνέχεια ούτε να είναι θετικά. Παρόλαυτα είναι κοινή ονοματολογία για το συγκεκριμένο μοντέλο στη διεθνή βιβλιογραφία γι αυτό και τη χρησιμοποιούμε (Box and Jenkins, 1976).

Όμοια με το προηγούμενο μοντέλο, έτσι κι εδώ, αν ορίσουμε ένα τελεστή B αντίστροφης μετατόπισης q μπορούμε το υπό εξέταση μοντέλο να το εκφράσουμε όπως ακολούθως:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

που πιο οικονομικά γράφεται: $\tilde{z}_t = \theta(B)a_t$.

Αυτό το μοντέλο περιλαμβάνει $q+2$ άγνωστες παραμέτρους $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$ που στην πράξη πρέπει να εκτιμηθούν από τα δεδομένα μας.

Ευρύτερα το μοντέλο MA μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μοντέλο AR το οποίο αποτελείται από πάρα πολλούς όρους του AR και κατόπιν σχηματίζει και την ακολουθία των όρων a . Εδώ όμως διαθέτουμε πολύ λίγα δεδομένα ώστε να εξετάσουμε τους άπειρους πρώτους όρους του AR και κατόπιν να ορίσουμε και τους υπόλοιπους a .

Για το λόγο ότι διαθέτουμε ανεπαρκές πλήθος δεδομένων αποκλείουμε από τώρα τη διερεύνηση του μοντέλου σταθμισμένου μέσου (Box and Jenkins, 1976).

3.5 ΤΟ ΜΙΚΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΥΤΟΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ (ARMA).

Στο σημείο αυτό εξετάζουμε τα μοντέλα ARMA (p, q) όπου απαντούν στην περίπτωση που η σειρά μπορεί να περιγράφεται τόσο από το παρελθόν της, όσο και από κάποιες τ.μ. a_t . Αυτό το σκεπτικό μας οδηγεί να συνδυάσουμε τα μοντέλα AR(p) και MA(q) και να επιτύχουμε μ' αυτό τον τρόπο μεγαλύτερη ευχέρεια στην προσέγγιση της σειράς από το μοντέλο. Το μοντέλο που προκύπτει είναι το ARMA(p, q):

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.5)$$

που γίνεται:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

που μπορούμε να την εκφράζουμε και σαν :

$$\phi_p(B) z_t = \theta_q(B) a_t$$

όπου τα $\phi(B)$ και $\theta(B)$ είναι πολυώνυμα του βαθμού p και q στο B .

Εδώ το μοντέλο περικλείει $p+q+2$ άγνωστες παραμέτρους $\mu; \phi_1, \dots, \phi_p; \theta_1, \dots, \theta_q; \sigma_a^2$, οι οποίες υπολογίζονται από τα δεδομένα.

Π.χ. αν συνδυάσουμε το AR(1) με το MA(1) προκύπτει το μοντέλο ARMA (1,1):

$$(1 - \phi_1 B) z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Μια διαδικασία ARMA (p,q) μπορεί να θεωρηθεί με δύο τρόπους:

(α) Σαν μια p-οστής τάξης διαδικασία AR:

$$\phi_p(B)z_t = e_t$$

με το e_t να ακολουθεί την q-οστή τάξη μιας διαδικασίας MA:

$$e_t = \theta(B)a_t$$

(β) Σαν μια q-οστής τάξης διαδικασία MA:

$$\tilde{z}_t = \theta(B)b_t$$

με το b_t να ακολουθεί την p-οστή τάξη μιας διαδικασίας AR:

$$\phi(B)b_t = a_t$$

έτσι ώστε:

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B)\phi(B)b_t = \theta(B)a_t$$

Για να είναι το μοντέλο αντιστρέψιμο και στάσιμο θα πρέπει οι παράμετροι του να είναι τέτοιες ώστε οι ρίζες των πολωνύμων

$$\phi_p(B) = 0 \Rightarrow 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$$

$$\theta_q(B) = 0 \Rightarrow 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0$$

ως προς B, να έχουν μέτρο >1 (για το κάθε πολυώνυμο) (Box and Jenkins, 1976).

3.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΤΑ ΕΠΟΧΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ AR

3.6.1 ΜΟΝΤΕΛΟ AR(1×12)

Λόγω του περιορισμένου πλήθους δεδομένων, όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο 3.4., τα μοντέλα που τελικά θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση των χρονοσειρών ζήτησης των προϊόντων μας είναι ARMA με μηδενικής τάξης μοντέλο MA, δηλαδή είναι μοντέλα AR.

Εδώ θα εξετάσουμε το μοντέλο AR (1×12). Επομένως για αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$(1 - \theta B)(1 - \phi B^{12})z_t = a_t$$

$$\text{ή } (1 - \theta B - \phi B^{12} + \theta\phi B^{13})z_t = a_t$$

$$z_t - \theta z_{t-1} - \phi z_{t-12} + \theta\phi z_{t-13} = a_t$$

Για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μια πολύ σημαντική επαναληπτική σχέση προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (3.5) με τον όρο \tilde{z}_{t-k} , ώστε να παράγουμε τη σχέση (Φίλης, 2003).

$$\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_t = \phi\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1\tilde{z}_{t-k}a_{t-1} - \dots - \theta_q\tilde{z}_{t-k}a_{t-q} \quad (3.6)$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Yule- Walker: Έτσι παίρνουμε τη συνδιακύμανση των τιμών και στα δύο μέλη - π.χ. $E(z_t z_{t-p})$ είναι η συνδιακύμανση της τωρινής μας τιμής με την τιμή της χρονοσειράς πριν από p περιόδους, όπου p η εποχικότητα για την οποία θα εξετάσουμε το μοντέλο- και στη συνέχεια διαιρούμε κάθε όρο με την συνδιακύμανση (autocovariance) $E(z_t z_t)$ και έτσι παράγουμε εξισώσεις αυτοσυσχέτισης (autocorrelation), η οποία μας δίνει καλύτερη άποψη για την επαναληπτική σχέση των δεδομένων μας σε σχέση με το παρελθόν (Φίλης, 2003).

$$\left(\frac{E(z_t z_{t-p})}{E(z_t z_t)} \right) - \left(\frac{\theta E(z_{t-1} z_{t-p})}{E(z_t z_t)} \right) - \left(\frac{\phi E(z_{t-12} z_{t-p})}{E(z_t z_t)} \right) + \left(\frac{\theta\phi E(z_{t-13} z_{t-p})}{E(z_t z_t)} \right) = \left(\frac{a_t E(z_{t-p})}{E(z_t z_t)} \right)$$

$$= \rho_p - \theta\rho_{p-1} - \phi\rho_{p-12} + \theta\phi\rho_{p-13} = E(a_t)E(z_{t-p}) = 0 \quad (3.7)$$

γιατί $E(a_t) = 0$.

Ο γενικός τύπος του συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ (Φίλης, 2003) όπως χρησιμοποιείται εδώ είναι :

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n z_i z_{i-k}}{\sum_{i=1}^n z_i^2} \quad . \quad (3.8)$$

Ισχύει από τη σχέση (3.8) ότι

$$\rho_k = \rho_{-k} \text{ και } \left(\frac{E(z_t z_{t-p})}{E(z_t^2)} \right) = \rho_k \quad (3.9)$$

$$\text{επίσης } \rho_0 = \frac{E(z_t z_{t-0})}{E(z_t z_t)} = 1 \quad (3.10)$$

Άρα από (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων :

$$\rho_1 - \theta \rho_0 - \phi \rho_{11} + \theta \phi \rho_{12} = 0$$

$$\rho_2 - \theta \rho_1 - \phi \rho_{10} + \theta \phi \rho_{11} = 0$$

$$\rho_3 - \theta \rho_2 - \phi \rho_9 + \theta \phi \rho_{10} = 0$$

Από αυτές τις εξισώσεις υπολογίζουμε τα θ, ϕ που λειτουργούν σαν μεταβλητές και $\theta \phi$ το γινόμενο τους, που θα πρέπει να δίνουν το ελάχιστο άθροισμα τετραγωνικού σφάλματος

$$\min \sum_{i=1}^n a_i^2. \text{ Αυτό επιτυγχάνεται εύκολα με τη βοήθεια του Excel – Solver όπου}$$

δημιουργούμε ένα γραμμικό σύστημα με τις τρεις εξισώσεις συσχέτισης, όπου την πρώτη χρησιμοποιούμε σαν βασική εξίσωση, τη δεύτερη σαν περιορισμό και την τρίτη δεν τη συμπεριλαμβάνουμε στη διαδικασία επίλυσης, παρά τη χρησιμοποιούμε για να παρατηρούμε αν όντως το σύστημα βρίσκει λύση κοντά στο μηδέν. Αρχικά δίνουμε τιμές για τα θ και ϕ ίσες με το 1, και κατόπιν το Solver τις βελτιστοποιεί σύμφωνα με τους περιορισμούς που έχουμε εισάγει. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για το κάθε προϊόν ξεχωριστά. Από το μοντέλο που προκύπτει για το καθένα από αυτά υπολογίζουμε τις τιμές των προβλέψεων και φυσικά το σφάλμα πρόβλεψης, όπως θα δούμε σε ακόλουθα κεφάλαια.

Έτσι η εκτίμηση της z θα δοθεί γενικά από τον τύπο (Φίλης, 2003):

$$\hat{z}_{t+1} = \theta z_t + \phi z_{t-11} - \theta \phi z_{t-12} + \alpha_{t+1} \text{ όπου } \alpha_{t+1} = 0.$$

άρα η τελική μορφή της εξίσωσης που χρησιμοποιείται για απόδοση προβλέψεων είναι :

$$\hat{z}_{t+1} = \theta z_t + \phi z_{t-11} - \theta \phi z_{t-12} \quad (3.11)$$

για $t=22$ θα δώσει την εκτίμηση της τιμής της ζήτησης για το 23^ο δεδομένο (z_{23}). Η επόμενη τιμή της ζήτησης, για το 24^ο δεδομένο, θα προκύψει από την ίδια εξίσωση για $t=23$. Αν όπου z_{23} αντικαταστήσουμε την αντίστοιχη εκτίμηση, τότε θα προκύψει εκτίμηση δύο βημάτων

μπροστά, ενώ αν όπου z_{23} αντικαταστήσουμε την πραγματική τιμή της ζήτησης με βελτιωμένες τις παραμέτρους θ και ϕ για το δεδομένο 23 θα προκύψει εκτίμηση ενός βήματος μπροστά. Από κάθε περίπτωση θα συγκρίνουμε τόσο το σφάλμα προσαρμογής όσο και το σφάλμα πρόβλεψης για να αποφανθούμε για το καταλληλότερο μοντέλο για κάθε προϊόν ξεχωριστά.

3.6.2 ΜΟΝΤΕΛΟ AR(2×12)

Μια δεύτερη περίπτωση του μοντέλου AR είναι το AR(2×12), που προκύπτει με όμοιο τρόπο με το προηγούμενο μοντέλο. Επομένως η γενική του εξίσωση γράφεται ως εξής (Φίλης, 2003):

$$(1 - \theta_1 B_1 - \theta_2 B^2)(1 - \phi B^{12})z_t = a_t$$

$$\Rightarrow z_t = \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \phi z_{t-12} - \phi \theta_1 z_{t-13} - \phi \theta_2 z_{t-14} + a_t \quad (3.12)$$

Με τη χρήση των εξισώσεων Yule-Walker, όπως και προηγουμένως, παίρνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις των συσχετίσεων από τις οποίες υπολογίζουμε τις τιμές των θ_1, θ_2, ϕ . Γενικά προκύπτει η εξίσωση:

$$\rho_p = \theta_1 \rho_{p-1} + \theta_2 \rho_{p-2} + \phi \rho_{p-12} - \phi \theta_1 \rho_{p-13} - \phi \theta_2 \rho_{p-14}$$

Έπειτα από την (3.6) για $p=1,2,3$ δημιουργούμε τις παρακάτω εξισώσεις, ώστε να κατασκευάσουμε το σύστημα των 3 αγνώστων που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Έτσι προκύπτει:

$$\rho_1 = \theta_1 \rho_0 + \theta_2 \rho_{-1} + \phi \rho_{-11} - \phi \theta_1 \rho_{-12} - \phi \theta_2 \rho_{-13}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \theta_1 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_{11} - \phi \theta_1 \rho_{12} - \phi \theta_2 \rho_{13} \Rightarrow$$

$$-\rho_1 + \theta_1 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_{11} - \phi \theta_1 \rho_{12} - \phi \theta_2 \rho_{13} = 0$$

$$\rho_2 = \theta_1 \rho_1 + \theta_2 \rho_0 + \phi \rho_{-10} - \phi \theta_1 \rho_{-11} - \phi \theta_2 \rho_{-12}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \theta_1 \rho_1 + \theta_2 + \phi \rho_{10} - \phi \theta_1 \rho_{11} - \phi \theta_2 \rho_{12} \Rightarrow$$

$$-\rho_2 + \theta_1 \rho_1 + \theta_2 + \phi \rho_{10} - \phi \theta_1 \rho_{11} - \phi \theta_2 \rho_{12} = 0$$

$$\rho_3 = \theta_1 \rho_2 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_{-9} - \phi \theta_1 \rho_{-10} - \phi \theta_2 \rho_{-11}$$

$$\Rightarrow \rho_3 = \theta_1 \rho_2 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_9 - \phi \theta_1 \rho_{10} - \phi \theta_2 \rho_{11} \Rightarrow$$

$$-\rho_3 + \theta_1 \rho_2 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_9 - \phi \theta_1 \rho_{10} - \phi \theta_2 \rho_{11} = 0$$

Ομοίως με το προηγούμενο σύστημα, έτσι κι εδώ, με τις τρεις παραπάνω εξισώσεις των συσχετίσεων υπολογίζουμε αρχικά μέσω του Solver τις μεταβλητές θ_1, θ_2, ϕ και τις $\phi\theta_1, \phi\theta_2$ σαν γινόμενο τους. Από το μοντέλο που δημιουργείται για κάθε προϊόν παίρνουμε τις προβλέψεις σύμφωνα με την εξίσωση:

$$z_t = \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \phi z_{t-12} - \phi\theta_1 z_{t-13} - \phi\theta_2 z_{t-14} .$$

Για παράδειγμα την πρόβλεψη z_{23} θα την πάρουμε από την εξίσωση $z_{23} = \theta_1 z_{21} + \theta_2 z_{21} + \phi z_{11} - \phi\theta_1 z_{10} - \phi\theta_2 z_9$, ενώ μπορούμε να πάρουμε εκτιμήσεις από την τιμή z_{15} και μετά.

4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ HOLT ΚΑΙ WINTERS

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η πρόβλεψη που χρησιμοποιεί μοντέλα χρονοσειρών συχνά βασίζεται σε μεθόδους γραμμικής παλινδρόμησης ή σε μεθόδους που χρησιμοποιούν ποικίλες τεχνικές εξομάλυνσης. Για την εκτίμηση των παραμέτρων των τεχνικών αυτών είναι πολύ σύνηθες να βελτιστοποιούμε τις σταθερές εξομάλυνσης(παραμέτρους). Η τάση αυτή δημιουργείται καθώς υπάρχει μεγάλη ευκολία επίλυσης τέτοιων προβλημάτων στο Solver του Excel. Επιπλέον το Solver έχει τέτοιες δυνατότητες οι οποίες αν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα μπορεί να βελτιστοποιηθεί το πρόβλημα και για περισσότερες παραμέτρους, ειδικά τις αρχικές (initial or starting parameters). Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα τεχνικών εκθετικής εξομάλυνσης που παρουσιάζουν βελτιωμένα μοντέλα βελτιστοποίησης τόσο των αρχικών παραμέτρων όσο και των σταθερών εξομάλυνσης (μοντέλα Holt, Holt-Winters). Αυτές οι τεχνικές είναι εξαιρετικά χρήσιμες για βραχυπρόθεσμες προβλέψεις σειρών με δεδομένα πωλήσεων προϊόντων ή επιπέδου ζήτησης αγαθών. Από τα παραδείγματα αυτά συμπεραίνεται επίσης ότι η γραμμική παλινδρόμηση είναι υποπερίπτωση του μοντέλου εκθετικής εξομάλυνσης με εποχιακή τάση του Holt.

4.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΤΑΣΗ

Τα μοντέλα εκθετικής εξομάλυνσης εξετάζουν το πρόβλημα σύμφωνα με κάποια ή κάποιες παραμέτρους. Το πιο απλό μοντέλο εξομάλυνσης είναι αυτό που εξετάζει αν στη σειρά υπάρχει μια μέση τιμή, που εκφράζεται σαν επίπεδο μέσου και διερευνά τις αποκλίσεις των τιμών από το επίπεδο αυτό. Ένα επόμενο μοντέλο προκύπτει από την εξέταση της σειράς ως προς την εμφάνιση κάποιας τάσης (trend) των τιμών της. Για να είμαστε πιο σαφείς τα μοντέλα με τάση που εξετάζουμε εδώ αφορούν σε γραμμική τάση και έχουν ένα μεγάλο βαθμό συγγενείας με το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης χρονοσειρών(Rasmussen, 2003).

Ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης μπορεί εύκολα να επιλυθεί στο Excel με την εφαρμογή της συνάρτησης TREND, που προβλέπει την μεταβλητή Y_t μιας χρονοσειράς. Η μεταβλητή αυτή αποτελεί τα ιστορικά δεδομένα της χρονοσειράς για δεδομένους χρόνους $t=1,2,3,\dots,n$. Οι προβλέψεις που προκύπτουν από τη γραμμική παλινδρόμηση υπολογίζονται βάσει της σχέσης (Rasmussen, 2003) :

$$f_t = c_0 + c_1 t$$

στην οποία οι παράμετροι της γραμμικής παλινδρόμησης c_0, c_1 εκτιμώνται με την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (mean square error-MSE), το οποίο ορίζεται από τη σχέση :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - f_t)^2$$

(στο συγκεκριμένο μοντέλο δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το Solver του Excel για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος, γιατί η συνάρτηση TREND από μόνη της δίνει πολύ καλά και γρήγορα αποτελέσματα (Rasmussen, 2003).

Αυτό το μοντέλο μας δίνει μια ευθεία. Αν, λοιπόν, επιθυμούμε να περιγράψουμε «τοπικές» γραμμικές κυμάνσεις θα πρέπει να δημιουργήσουμε τη συνάρτηση που θα περιέχει τις μεταβλητές c_0 και c_1 . Έστω ότι το $c_0 = F_t$ ο τοπικός μέσος και $c_1 = b_t$ η αναμενόμενη μείωση ή αύξηση ως προς το μέσο. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε σαν πρόβλεψη την αναμενόμενη αύξηση για m περιόδους (Rasmussen, 2003).

$$\hat{f}_{t+m} = F_t + m b_t \quad (4.1)$$

δηλαδή η συνάρτηση πρόβλεψης θα δίνει ουσιαστικά μια ευθεία, που όμως κατά την περίοδο προσαρμογής της θα δίνει τοπικές ευθείες που θα μπορούν να περιγράψουν διάφορες ροές. Για να προσαρμοστεί αυτή η ευθεία σε εποχιακές κυμάνσεις θα πρέπει να προσθέσουμε στην παραπάνω σχέση ή να πολλαπλασιάσουμε με αυτή κάποιους εποχιακούς δείκτες. Πρόκειται για τις δύο εκδοχές, τα additive και τα multiplicative εποχιακά μοντέλα, όπως εκτενέστερα θα δούμε παρακάτω, καθώς θα εξετάζουμε το μοντέλο Holt- Winters με τάση και εποχικότητα.

Το μοντέλο του Holt είναι πιο ευέλικτο από την γραμμική παλινδρόμηση αφού ενημερώνει (updates) βηματικά τις παραμέτρους του μέσου (level) και της τάσης(trend), οι οποίες στη γραμμική παλινδρόμηση θεωρούνται σταθερές.

Έτσι σύμφωνα με τον τύπο (4.1) οι προβλέψεις τη στιγμή t για περίοδο k γίνονται από τις σχέσεις:

$$f_{t+k} = F_t + kb_t$$

όπου η παράμετρος για το επίπεδο που βρίσκεται ο μέσος (mean level) F_t ενημερώνεται από τη σχέση :

$$F_t = aY_t + (1 - a)[F_{t-1} + b_{t-1}]$$

Η έννοια της τάσης σ' αυτές της μεθόδους είναι παρεμφερής με αυτή της καθομιλουμένης και στην ουσία εννοούμε (και) την αναμενόμενη αύξηση ή μείωση ως προς την παρούσα τιμή κάποιου φαινομένου (τιμή επιπέδου του μέσου).

Επομένως η παράμετρος τάσης b_t στο μοντέλο του Holt ενημερώνεται από τη σχέση :

$$b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$$

Εδώ πρέπει να υπολογιστούν οι αρχικές τιμές ώστε να ενημερώνονται οι εξισώσεις των παραπάνω παραμέτρων. Για να κρατήσουμε το μοντέλο απλό εισάγουμε τις εξής αρχικές τιμές:

$$F_1 = Y_1, b_1 = 0.$$

Οι σταθερές εξομάλυνσης α , β είναι παράμετροι που παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1 (Rasmussen, 2003) .

Τα περισσότερα μοντέλα χρησιμοποιούν τις τιμές του πρώτου έτους σαν αρχικές τιμές ενώ προβλέψεις γίνονται για την χρονική περίοδο μετά το πρώτο έτος. Για όλα τα μοντέλα που θα εξετάσουμε τα συνολικά δεδομένα μας είναι 24 για κάθε προϊόν, δηλαδή είναι μηνιαίες μετρήσεις των πωλήσεων κάθε προϊόντος για δύο συνολικά χρόνια. Άρα οι 12 πρώτες μετρήσεις του πρώτου έτους θα χρησιμοποιηθούν εδώ σαν αρχικές τιμές, ενώ προβλέψεις θα γίνουν για $t=12-24$. Το MSE και το RMSE (Root of Mean Square Error) αυτής της περιόδου θα χρησιμοποιηθεί για συγκρίσεις. Επιπλέον η χρήση του MSE και του RMSE του τελευταίου κύκλου χρησιμοποιείται σαν πιο αντιπροσωπευτικό μέσο σύγκρισης και για το λόγο ότι οι τιμές που εξετάζονται στα σφάλματα αυτά είναι πιο πρόσφατες και επομένως πιο αξιόπιστες για τις προβλέψεις του μέλλοντος σε σχέση με τις προβλέψεις που δίνουν πιο παλιές μετρήσεις.

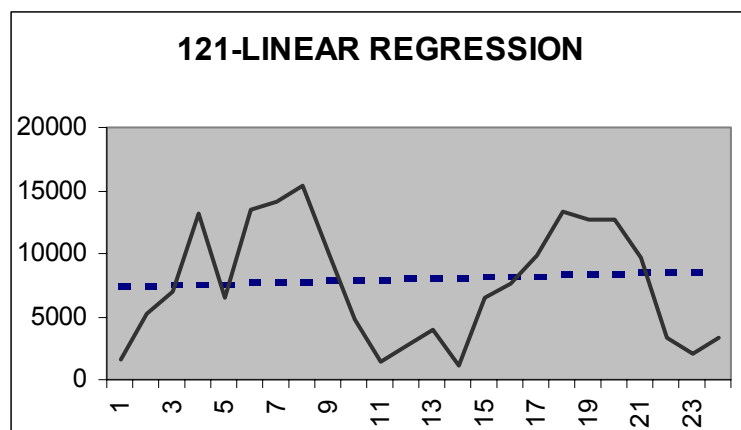
Προκειμένου να λάβουμε στα αποτελέσματά μας το μικρότερο τετραγωνικό σφάλμα υπολογίζουμε μέσω του Solver τις παραμέτρους α και β . Η εξαγωγή των τιμών αυτών

εξαρτάται φυσικά από τον τρόπο που θα ορίσουμε το πρόβλημά μας και τους περιορισμούς του μέσα στο εργαλείο αυτό. Στην περίπτωση που οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων α , β είναι $=0$ τότε $F_0=c_0$, $b_0=c_1$. Η περίπτωση αυτή του μοντέλου του Holt είναι η γραμμική παλινδρόμηση (Rasmussen, 2003) .

Είναι πιο εύκολο, όμως, να κατανοήσουμε τι συμβαίνει αν δούμε και τη γραφική αναπαράσταση κάθε μοντέλου.

Έτσι για τα δεδομένα των μηνιαίων πωλήσεων ενός προϊόντος, του «Fanta lemon 0,25l» με κωδικό 121, για τις χρονιές 2002-2003 λάβαμε :

- Το γράφημα για τη γραμμική παλινδρόμηση

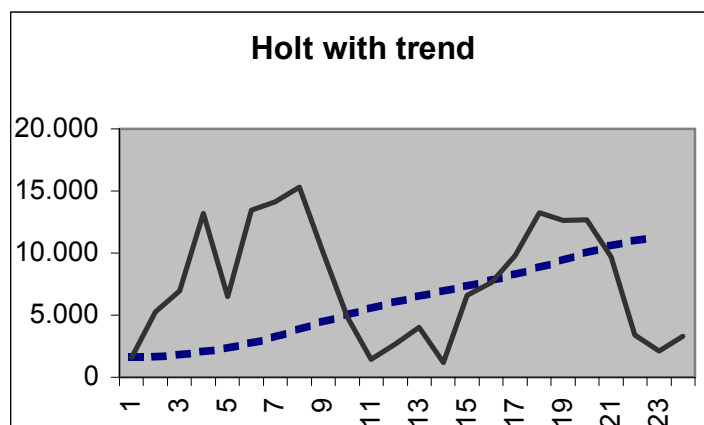


Σχήμα 4.1

Όπου με τη συνεχή γραμμή απεικονίζεται η πραγματική χρονοσειρά που διαθέτουμε. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται η προσέγγιση της χρονοσειράς σύμφωνα με τη γραμμική παλινδρόμηση (Rasmussen, 2003).

Το MSE υπολογίστηκε για το παράδειγμα αυτό και βρέθηκε ίσο με : 21 551 281.

- Το γράφημα για το μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης του Holt με τάση



Σχήμα 4.11

Όπου με τη συνεχή γραμμή απεικονίζεται η πραγματική χρονοσειρά που διαθέτουμε. Με τη διακεκομμένη γραμμή φαίνεται η προσέγγιση της χρονοσειράς σύμφωνα με το μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης του Holt με τάση που προκύπτει (Rasmussen, 2003).

.

Το MSE υπολογίστηκε για το παράδειγμα αυτό και βρέθηκε ίσο με : 13 851 840, που είναι σαφώς μικρότερο από αυτό που δίδει η γραμμική παλινδρόμηση.

Οι παράμετροι εξομάλυνσης υπολογίστηκαν, για ελαχιστοποίηση του σφάλματος MSE, $\alpha=0.008572$ και $\beta=1$.

4.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΑ

Τα μοντέλα εκθετικής εξομάλυνσης βασίζονται στην ενημέρωση, για κάθε περίοδο, των αντίστοιχων παραμέτρων που μπορεί, εκτός από μοντέλα μιας (mean level) ή δύο (mean level and trend) παραμέτρων, να είναι μέχρι και τριών: mean level, trend and seasonality (Holt-Winters Model (Winters 1960)).

Η μέθοδος Holt- Winter's προσαρμόζεται σε εποχιακές επιδράσεις και παρουσιάζεται σε δύο εκδοχές- την πολλαπλασιαστική και την αθροιστική- ανάλογα με το αν η μεταβολή της εποχικότητας θεωρείται ανάλογη με το επίπεδο του τοπικού μέσου ή ανεξάρτητη από αυτό αντίστοιχα.

Έτσι η ακολουθία της ζήτησης D μπορεί να εκφραστεί κατ' αντιστοιχία ως:

$$D_t = (F + bt)I_t + \varepsilon_t, \quad \text{για το πολλαπλασιαστικό}$$

$$\text{ή } D_t = F + bt + I_t + \varepsilon_t, \quad \text{για το αθροιστικό}$$

όπου F : το μέσο επίπεδο(mean level), b : η τάση (trend), I :η εποχικότητα, ε_t : το σφάλμα πρόβλεψης και p είναι το πλήθος των περιόδων που εξετάζουμε ανά κύκλο. Εν προκειμένω $p=12$, επειδή εξετάζουμε τη μηνιαία ζήτηση των προϊόντων ανά έτος (ο κύκλος εδώ είναι το έτος).

Σ' αυτό το μοντέλο οι προβλέψεις δίδονται γενικά σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$f_{t+k} = (F_t + kb_t)I_{t+k-p} \quad (\text{για το πολλαπλασιαστικό μοντέλο}) \text{ και}$$

$$f_{t+k} = F_t + b_t + I_{t+k-p} \quad (\text{για το αθροιστικό μοντέλο})$$

Παρακάτω ακολουθούν οι σχέσεις ενημέρωσης (update) των παραμέτρων τόσο για το πολλαπλασιαστικό μοντέλο όσο και για το αθροιστικό (Rasmussen, 2003).

.

4.3.1 ΤΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Οι σχέσεις που δίνουν κάθε φορά το μέσο, την τάση και την εποχικότητα είναι για το πολλαπλασιαστικό (multiplicative) μοντέλο οι ακόλουθες (Segura- Vercher, 2000):

Η εξίσωση που δίνει την παράμετρο επιπέδου του μέσου F (mean level):

$$F_t = \alpha \frac{D_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + b_{t-1}) \quad (4.2)$$

Η εξίσωση που δίνει την παράμετρο της τάσης b :

$$b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad (4.3)$$

Οι παράμετροι εποχικότητας δίνονται ως:

$$I_t = \gamma \left[\frac{D_t}{F_t} \right] + (1 - \gamma)I_{t-p} \quad (4.4)$$

και τελικά οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση:

$$f_{t+1} = (F_t + b_t)I_{t+1-p} \quad (4.5)$$

ή γενικά για k περιόδους (βήματα) μπροστά:

$$f_{t+k} = (F_t + kb_t)I_{t+k-p} \quad (4.6)$$

4.3.2 ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Οι σχέσεις που δίνουν το επίπεδο του μέσου, την τάση και την εποχικότητα γι αυτόν τον τύπο του μοντέλου εκθετικής εξομάλυνσης του Winters είναι οι ακόλουθες (Segura- Vercher, 2000):

$$\text{Mean level: } F_t = \alpha(D_t - I_{t-p}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + b_{t-1}) \quad (4.7)$$

$$\text{Trend: } b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad (4.8)$$

$$\text{Seasonality: } I_t = \gamma[D_t - F_t] + (1 - \gamma)I_{t-p} \quad (4.9)$$

Και οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση:

$$f_{t+1} = F_t + b_t + I_{t+1-p} \quad (4.10)$$

ή γενικά για k περιόδους πρόβλεψης μπροστά:

$$f_{t+k} = F_t + b_t + I_{t+k-p} \quad (4.11)$$

4.4 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Όπως και προηγουμένως για να ξεκινήσουμε τη διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων πρέπει να ορίσουμε τις αρχικές τιμές $F_0; b_0; I_{-1}, \dots, I_0$. Για τον προσδιορισμό των αρχικών

τιμών των παραμέτρων αναφέρονται στη βιβλιογραφία 4 διαφορετικοί τρόποι (Segura-Vercher, 2000) :

1. Η πρώτη μέθοδος προσδιορισμού των αρχικών παραμέτρων προτείνεται από τον Winters (1960) και θεωρεί $m_1 \times p$ περιόδους από προηγούμενα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσει για να τις εξάγει. Ωστόσο, παρόλο που οι συνιστώσες ενημερώνονται από την πρώτη κιόλας περίοδο, μόνο το σφάλμα που γίνεται κατά την πρόβλεψη των εναπομείναντων περιόδων $(m - m_1) \times p$ λαμβάνεται υπόψη.

Δηλαδή :

$$F_0 = \bar{D}_1 \quad (4.12)$$

η αρχική τάση:

$$b_0 = \frac{\bar{D}_{m1} - \bar{D}_1}{(m_1 - 1)p}$$

και η αρχική τιμή της περιόδου:

$$I'_{t,i} = \frac{D_t}{\bar{D}_i - \left(\frac{p+1}{2} - t \right) b_0}, i = 1 \dots m_1; t = 1 \dots p$$

$$I'_t = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} I'_{t,i} \quad \} \rightarrow I_{t-p} = 12 \frac{I'_t}{\sum_{t=1}^p I'_t}, t = 1 \dots p$$

όπου το \bar{D}_i είναι ο αριθμητικός μέσος των τιμών των πωλήσεων για το i -οστό έτος.

2. Η τεχνική προσδιορισμού των αρχικών τιμών των παραμέτρων των Granger και Newbold (1986) που είναι βασισμένη στη χρήση των δεδομένων μόνο του πρώτου έτους. Αυτή είναι και η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε αφού έχουμε δεδομένα μόνο για δύο χρόνια. Άρα το πρώτο έτος θα το χρησιμοποιήσουμε για τον προσδιορισμό των αρχικών τιμών και το δεύτερο για τη σύγκριση με τις προβλέψεις που θα προκύψουν.

Έτσι οι εξισώσεις που χρησιμοποιεί η μέθοδος αυτή είναι η (4.12):

$$F_0 = \bar{D}_1$$

όπου \bar{D}_1 η μέση τιμή των πωλήσεων του πρώτου έτους.

$$b_0=0$$

και

$$I_{t-p} = \frac{D_t}{\bar{D}_1}, t = 1, \dots, p$$

3. Η τεχνική Larraneta et al. (1988), που είναι τροποποιημένη η μέθοδος του Winters και εφαρμόζεται για τα δεδομένα των δύο πρώτων ετών. Οι εξισώσεις προσδιορισμού των αρχικών τιμών είναι οι :

$$b_0 = \frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{p}$$

όπου \bar{D}_1, \bar{D}_2 οι μέσες τιμές των πωλήσεων του πρώτου και δεύτερου έτους αντίστοιχα.

$$F_0 = \bar{D}_1 - \frac{p+1}{2} b_0$$

και

$$I'_{t,i} = \frac{D_t}{\bar{D}_i - \left(\frac{p+1}{2} - t\right) b_0}, i = 1, 2; t = 1, \dots, p \rightarrow I_{t-p} = 12 \frac{\frac{1}{2} (I'_{t,1} + I'_{t,2})}{\sum_{t=1}^p \frac{1}{2} (I'_{t,1} + I'_{t,2})}, t = 1, \dots, p$$

4. Τέλος η τεχνική προσδιορισμού των αρχικών παραμέτρων του Μακριδάκη (1998), που είναι μια τροποποίηση της μεθόδου 2 των Granger – Newbold, και συγκεκριμένα έχει μια διαφοροποίηση στον υπολογισμό της τάσης. Έτσι οι εξισώσεις είναι :

$$H (4.12) : F_0 = \bar{D}_1$$

$$\eta \ b_0 = \frac{\bar{D}_2 - \bar{D}_1}{p}$$

$$\text{και } \eta \ I_{t-p} = \frac{D_t}{\bar{D}_1}, t = 1, \dots, p$$

4.5 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ α, β, γ .

Το πιο επιθυμητό μοντέλο είναι αυτό που θα δώσει το μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης για μια χρονική περίοδο. Έτσι το αντικειμενικό κριτήριο σ' αυτό τον τομέα είναι η επιλογή τέτοιων τιμών για τις παραμέτρους εξομάλυνσης α, β, γ που να σχετίζονται άμεσα με το μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης.

Η μέτρηση του σφάλματος που χρησιμοποιείται συνήθως είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων (Sum Squared Error- SSE), ή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean square error-MSE) ή η ρίζα του MSE, (root MSE-RMSE). Εδώ τελικά οι συγκρίσεις θα γίνουν από το RMSE.

Γενικά ισχύει ο τύπος :

$$\text{RMSE } \phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{1}{mp-1} \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^p (D_{t+pi} - (F_{t+pi-1} + b_{t+pi-1}) I_{t+p(i-1)})^2}$$

Που όμως στο Excel υπολογίζεται πολύ πιο απλά μέσω έτοιμης συνάρτησης για το MSE και στη συνέχεια ρίζα αυτού.

Οι παράμετροι εξομάλυνσης α, β, γ παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1. Κι εδώ το Solver θα χρησιμοποιηθεί για να δώσει τιμές του σφάλματος για τις προβλέψεις της δεύτερης χρονιάς. Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων α, β, γ θα προκύψουν από την επίλυση του ακόλουθου μη γραμμικού προβλήματος (Segura- Vercher, 2000):

$$(\text{NLP}) \text{ Min. } \phi_i(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\text{υπό περιορισμούς } (\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega, \text{ όπου } \Omega \text{ το } [0,1].$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του μη γραμμικού αυτού προβλήματος είναι η συνάρτηση του σφάλματος που επιλέγουμε να υπολογίσουμε (RMSE) και σχετίζεται άμεσα με το μοντέλο πρόβλεψης του Winters.

5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε εκτενώς στο θεωρητικό μέρος των μοντέλων που θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση των χρονοσειρών ζήτησης της εφαρμογής μας. Στο παρών κεφάλαιο σκοπός είναι να ορίσουμε τις μαθηματικές σχέσεις που θα περιγράφουν για κάθε περίπτωση τη χρονοσειρά που εξετάζουμε, τα αποτελέσματα που θα δίνουν οι σχέσεις αυτές και φυσικά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου. Σαν κριτήριο βέλτιστου μοντέλου είναι τόσο το σφάλμα προσαρμογής του στη χρονοσειρά όσο και το σφάλμα πρόβλεψης που δίδει σε σχέση με τις πραγματικές τιμές αυτής.

5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Πριν προβούμε σε οποιαδήποτε ανάλυση οφείλουμε να εξηγήσουμε και κατόπιν να ορίσουμε με σαφήνεια τι ακριβώς εννοούμε σφάλμα προσαρμογής και σφάλμα πρόβλεψης.

Αρχικά πρέπει να πούμε πως για κάθε προϊόν διαθέτουμε 24 συνολικά δεδομένα, που είναι οι τιμές των μηνιαίων πωλήσεων του για τα 2002 και 2003 (D_1 η τιμή πώλησης του Γενάρη του 2002, D_2 η τιμή του Φεβρουαρίου του 2002 κ.ο.κ.). Τα δεδομένα κάθε προϊόντος τα χωρίζουμε σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από τα 20 πρώτα δεδομένα (D_1 έως D_{20}) και η δεύτερη από τα υπόλοιπα 4 (D_{21} έως D_{24}). Έτσι τα δεδομένα της πρώτης ομάδας τα χρησιμοποιούμε για την εκπαίδευση του μοντέλου. Με τον όρο «εκπαίδευση» εννοούμε την προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα της σειράς, δηλαδή τη δημιουργία της σχέσης που θα περιγράφει τη χρονοσειρά της ζήτησης του προϊόντος και από την οποία θα πάρουμε και μελλοντικές τιμές για τη ζήτησή του.

Για να μπορούμε να εξετάσουμε αν όντως οι τιμές που θα δίνει η σχέση αυτή σαν μελλοντικές ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε τις τιμές της δεύτερης ομάδας δεδομένων σαν «άγνωστες» και τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που δίδει η εξίσωση που κατασκευάσαμε. Λέμε τότε ότι τα δεδομένα της δεύτερης ομάδας χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση του μοντέλου. Με λίγα λόγια τα δεδομένα της πρώτης ομάδας χρησιμοποιούνται σαν το παρελθόν της χρονοσειράς, ενώ τα δεδομένα της δεύτερης

ομάδας χρησιμοποιούνται σαν το μέλλον της σειράς (ενώ στην πραγματικότητα ανήκουν και αυτά στο παρελθόν της).

Είδη σφαλμάτων

(i) Το κυριότερο κριτήριο σύγκρισης μεταξύ μοντέλων, ώστε να αποφανθούμε για το καταλληλότερο, είναι φυσικά το σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος μπροστά. Αυτό ορίζεται σαν η Ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Root Mean Square Error-RMSE) μεταξύ των τιμών που έχουν προβλεφθεί από το εφαρμοζόμενο μοντέλο, και των αντίστοιχων πραγματικών τιμών της σειράς, δηλαδή των τιμών της δεύτερης ομάδας (το υποσύνολο τιμών αξιολόγησης του μοντέλου).

Ο τύπος έχει ως εξής:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i - z_i)^2}$$

όπου \hat{z}_i οι εκτιμήσεις ενός βήματος μπροστά (θα αναφέρουμε παρακάτω πως προκύπτουν αυτές) και z_i οι πραγματικές τιμές της ζήτησης τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές (για $t > 20$).

(ii) Ένα δεύτερο, αλλά εξίσου σημαντικό κριτήριο για την επιλογή μας είναι το σφάλμα προσαρμογής, το οποίο ορίζεται πάλι σαν RMSE μεταξύ όμως των τιμών που προβλέπει η εξίσωση του μοντέλου που κατασκευάσαμε και των αντίστοιχων πραγματικών τιμών της σειράς για $t \leq 20$, δηλαδή για το υποσύνολο τιμών εκπαίδευσης του μοντέλου) και δίνεται από τη μαθηματική σχέση :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{20} (\hat{z}_i - z_i)^2$$

όπου το άθροισμα τετραγώνων των διαφορών δεν υπολογίζεται απαραίτητα από $i=1$ έως 20, αλλά από « $i=$ με την πρώτη τιμή την οποία μπορεί να δώσει η εξίσωση που κατασκευάζεται για το κάθε μοντέλο» μέχρι $i=20$. Πχ. το ARMA(1,1) δίδει σαν πρώτη τιμή το z_{14} . Άρα το άθροισμα του παραπάνω τύπου μπορεί να πάρει τιμές από $i=z_{14}$ έως το $i=z_{20}$ και το πλήθος n των τιμών θα είναι $(20-14)$ ίσο με 7.

Ωστόσο επειδή δεν αρχίζουν όλα τα μοντέλα να προβλέπουν από την ίδια χρονική στιγμή και επειδή το πλήθος των τιμών που λαμβάνουμε είναι σημαντικά μικρό, για τη σύγκριση του σφάλματος προσαρμογής θα θέσουμε $i=$ την κοινή τιμή από την οποία δίνουν πρόβλεψη όλα τα μοντέλα.

(iii) Και τέλος ένα τρίτο κριτήριο είναι το σφάλμα πρόβλεψης τιμών πολλών βημάτων μπροστά. Και αυτό ορίζεται σαν RMSE μεταξύ των πραγματικών τιμών της σειράς και των αντίστοιχων τιμών που προβλέπουμε μέσω της εξίσωσης που κατασκευάσαμε για πολλά βήματα μπροστά (θα αναφέρουμε παρακάτω πως προκύπτουν αυτές). Η γενική ιδέα αυτού του είδους πρόβλεψης είναι ότι όλες οι προβλέψεις γίνονται βάση της πραγματικής τιμής τη στιγμή $t=20$ και οι τιμές των προβλέψεων ανανεώνονται σύμφωνα με τις ακριβώς προηγούμενες και όχι με τις πραγματικές.

5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΜΟΝΤΕΛΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ

5.2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ AR(1×12)

Στο κεφάλαιο 3 αναφέραμε πως κατασκευάζουμε την εξίσωση που δίνει τις εκτιμήσεις της χρονοσειράς καθώς και τον τρόπο που υπολογίζουμε τις παραμέτρους θ και ϕ αυτής στο Excel.

Η γενική εξίσωση που δίνει εκτιμήσεις είναι η (3.11):

$$\hat{z}_{t+1} = \theta z_t + \phi z_{t-11} - \theta \phi z_{t-12}$$

Έτσι παράγεται η παρακάτω ακολουθία για τις προβλέψεις των δεδομένων από z_{21} έως z_{24} :

$$\hat{z}_{21} = \theta z_{20} + \phi z_9 - \theta \phi z_8$$

$$\hat{z}_{22} = \theta z_{21} + \phi z_{10} - \theta \phi z_9$$

$$\hat{z}_{23} = \theta z_{22} + \phi z_{11} - \theta \phi z_{10}$$

$$\hat{z}_{24} = \theta z_{23} + \phi z_{12} - \theta \phi z_{11}$$

Ωστόσο μπορούμε να πάρουμε εκτιμήσεις σύμφωνα με τη σχέση (3.11) για $t=13$ από την τιμή z_{14} και μετά:

$$\hat{z}_{14} = \theta z_{13} + \phi z_2 - \theta \phi z_1, \dots$$

Στο αριστερό μέλος είναι οι εκτιμήσεις των τιμών της ζήτησης. Για να τις υπολογίσουμε δοκιμάζουμε δύο πειράματα. Το πρώτο πείραμα είναι για προβλέψεις ενός βήματος μπροστά και το άλλο για προβλέψεις πολλών βημάτων μπροστά.

Στο πρώτο πείραμα αντικαθιστούμε όπου z στο δεξί μέλος τις πραγματικές τιμές της ζήτησης για την αντίστοιχη χρονική στιγμή που καθορίζει ο δείκτης του z . Για τις τιμές που παίρνουμε μέχρι το z_{20} θα υπολογίσουμε το σφάλμα προσαρμογής (ii) .

Όταν αρχίζουμε να προβλέπουμε τις τιμές για την αξιολόγηση του μοντέλου, ξεκινώντας από την τιμή z_{21} κι έπειτα θα ανανεώνουμε και τους συντελεστές θ και ϕ με τρόπο ανάλογο με τον αρχικό μέσω του Solver του Excel. Επίσης στο δεξί μέλος αντικαθιστούμε τις πραγματικές τιμές της ζήτησης. Μ' αυτό τον τρόπο λέμε ότι κάνουμε προβλέψεις ενός βήματος μπροστά. Με άλλα λόγια η εκτίμηση, για παράδειγμα, της τιμής \hat{z}_{23} θα δοθεί με βάση την ακριβώς προηγούμενη χρονική στιγμή. Από αυτό το πείραμα υπολογίζουμε το σφάλμα πρόβλεψης (i).

Στο δεύτερο πείραμα υπολογίζουμε την πρόβλεψη για την τιμή \hat{z}_{21} με βάση την πραγματική τιμή της z_{20} , ωστόσο κατά τον υπολογισμό της επόμενης εκτίμησης, δηλαδή της \hat{z}_{22} , θα χρησιμοποιήσουμε όπου z_{21} την προηγούμενη εκτίμηση γι' αυτήν, δηλαδή την \hat{z}_{21} και όχι την πραγματική τιμή της z_{21} . επίσης τις αρχικές παραμέτρους θ και ϕ τις διατηρούμε, και δεν τις ανανεώνουμε όπως στο πρώτο πείραμα. Με αυτό τον τρόπο λέμε ότι κάνουμε πρόβλεψη πολλών βημάτων μπροστά. Έτσι θα υπολογίζουμε την κάθε εκτίμηση, για παράδειγμα, την \hat{z}_{23} με βάση τη χρονική στιγμή $t=20$. Από αυτό το πείραμα υπολογίζουμε το σφάλμα (iii).

5.2.2 MONTEΛΟ AR(2×12)

Για το μοντέλο αυτό εργαζόμαστε ακριβώς όπως και για το AR(1×12). Έτσι λοιπόν οι εκτιμήσεις δίνονται από τη γενική εξίσωση (3.12):

$$z_t = \theta_1 z_{t-1} + \theta_2 z_{t-2} + \phi z_{t-12} - \phi \theta_1 z_{t-13} - \phi \theta_2 z_{t-14}$$

Η ακολουθία εξισώσεων για τις προβλέψεις z_{21} έως z_{24} που θέλουμε είναι :

$$z_{21} = \theta_1 z_{20} + \theta_2 z_{19} + \phi z_9 - \phi \theta_1 z_8 - \phi \theta_2 z_7$$

$$z_{22} = \theta_1 z_{21} + \theta_2 z_{20} + \phi z_{10} - \phi \theta_1 z_9 - \phi \theta_2 z_8$$

$$z_{23} = \theta_1 z_{22} + \theta_2 z_{21} + \phi z_{11} - \phi \theta_1 z_{10} - \phi \theta_2 z_9$$

$$z_{24} = \theta_1 z_{23} + \theta_2 z_{22} + \phi z_{12} - \phi \theta_1 z_{11} - \phi \theta_2 z_{10}$$

Ενώ η εξίσωση για την πρώτη εκτίμηση γίνεται για $t=15$:

$$z_{15} = \theta_1 z_{14} + \theta_2 z_{13} + \phi z_3 - \phi \theta_1 z_2 - \phi \theta_2 z_1$$

όπου όπως και πριν υπολογίζουμε τα σφάλματα για να κάνουμε συγκρίσεις. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε στο παράρτημα πως έγιναν οι υπολογισμοί στο Excel.

5.2.3 MONTELA HOLT-WINTERS

Για το μοντέλο Holt- Winters, όπως έχουμε προαναφέρει, έχουμε δύο περιπτώσεις για το είδος της εποχικότητας- το πολλαπλασιαστικό και το αθροιστικό. Επειδή τα δεδομένα μας περιορίζονται σε μηνιαίες τιμές πωλήσεων δύο ετών θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές του πρώτου έτους για τον προσδιορισμό των αρχικών παραμέτρων μέσου, τάσης και εποχικότητας και θα κάνουμε προβλέψεις μόνο για τις τιμές του δευτέρου έτους. Επομένως στην προκειμένη περίπτωση οι προβλέψεις αρχίζουν από το z_{13} και φτάνουν μέχρι το z_{24} . Άρα τις τιμές z_{13} έως z_{20} θα χρησιμοποιήσουμε για την εκπαίδευση του μοντέλου και τον υπολογισμό του σφάλματος προσαρμογής, ενώ τις τιμές z_{21} έως z_{24} θα τις χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό του σφάλματος πρόβλεψης του μοντέλου όπως και προηγουμένως.

Για το πολλαπλασιαστικό η εξίσωση που δίνει τις προβλέψεις είναι η (4.6) με $p=12$. Έτσι έχουμε την παρακάτω ακολουθία για τις εκτιμήσεις από z_{13} έως z_{24} (όπου z_{13} η εκτίμηση f_1 , όπου z_{14} η εκτίμηση f_2 κ.ο.κ.).

$$f_1 = (F_0 + b_0)I_{-11}$$

$$f_2 = (F_1 + b_1)I_{-10}$$

$$f_3 = (F_2 + b_2)I_{-9}$$

$$f_4 = (F_3 + b_3)I_{-8}$$

$$f_5 = (F_4 + b_4)I_{-7}$$

$$f_6 = (F_5 + b_5)I_{-6}$$

$$f_7 = (F_6 + b_6)I_{-5}$$

$$f_8 = (F_7 + b_7)I_{-4}$$

$$f_9 = (F_8 + b_8)I_{-3}$$

$$f_{10} = (F_9 + b_9)I_{-2}$$

$$f_{11} = (F_{10} + b_{10})I_{-1}$$

$$f_{12} = (F_{11} + b_{11})I_0$$

Οι τιμές των παραμέτρων F , b και I προκύπτουν κατ' αντιστοιχία από τις σχέσεις (4.2)-(4.4). π.χ. για $F_1 \dots F_{12}$, $b_1 \dots b_{12}$ και $I_1 \dots I_{12}$ έχουμε επίσης αντίστοιχα:

$$F_1 = \alpha \frac{D_1}{I_{-11}} + (1 - \alpha)(F_0 + b_0)$$

.....

.....

$$F_{12} = \alpha \frac{D_{12}}{I_0} + (1 - \alpha)(F_{11} + b_{11}),$$

$$b_1 = \beta(F_1 - F_0) + (1 - \beta)b_0$$

.....

.....

.....

$$b_{12} = \beta(F_{12} - F_{11}) + (1 - \beta)b_{11}$$

και

$$I_1 = \gamma \left[\frac{D_1}{F_1} \right] + (1 - \gamma)I_{-11}$$

.....

.....

.....

$$I_{12} = \gamma \left[\frac{D_{12}}{F_{12}} \right] + (1 - \gamma)I_0$$

Οι αρχικές τιμές του μοντέλου Holt-Winters είναι οι F_0 , b_0 και $I_i : I_{-11}, I_{-10}, I_{-9}, \dots, I_0$ προσδιορίζονται σύμφωνα με τη μέθοδο Granger και Newbold (1986), όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 4, λόγω που μόνο αυτή δίδει έτοιμους τύπους για τον υπολογισμό αρχικών τιμών βάσει του πρώτου έτους πωλήσεων. Άρα:

$$F_0 = \bar{D}_1$$

όπου \bar{D}_1 η μέση τιμή των πωλήσεων του πρώτου έτους, δηλαδή $F_0 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} D_i$

$b_0=0$ και

για το πολλαπλασιαστικό :

$$I_{t-p} = \frac{D_t}{D_1}, t = 1, \dots, p, \text{ δηλαδή } I_{-11} = \frac{D_1}{D_1}, I_{-10} = \frac{D_2}{D_1} \text{ κ.ο.κ.}$$

ενώ για το αθροιστικό διαφοροποιείται ο τύπος της εποχικότητας και γίνεται:

$$I_{t-p} = D_t + \bar{D}_1, t = 1, \dots, p \text{ δηλαδή } I_{-11} = D_1 + \bar{D}_1, I_{-10} = D_2 + \bar{D}_1 \text{ κ.ο.κ.}$$

Για το αθροιστικό μοντέλο οι εξισώσεις είναι :

Για την πρόβλεψη από τη σχέση (4.11) και συγκεκριμένα:

$$f_1 = F_0 + b_0 + I_{-11}$$

.....

.....

.....

.....

$$f_{12} = F_{11} + b_{11} + I_0$$

για τον μέσο F , την τάση b και την εποχικότητα I οι σχέσεις που προκύπτουν, σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις (4.7)-(4.9), είναι κατ' αντιστοιχία:

γι το μέσο:

$$F_1 = \alpha(D_1 + I_{-11}) + (1 - \alpha)(F_0 + b_0)$$

.....

.....

.....

$$F_{12} = \alpha(D_{12} + I_0) + (1 - \alpha)(F_{11} + b_{11}),$$

την τάση:

$$b_1 = \beta(F_1 - F_0) + (1 - \beta)b_0$$

.....

.....

.....

$$b_{12} = \beta(F_{12} - F_{11}) + (1 - \beta)b_{11}$$

και για την εποχικότητα:

$$I_1 = \gamma[D_1 + F_1] + (1 - \gamma)I_{-11}$$

.....

.....

$$I_{12} = \gamma[D_{12} + F_{12}] + (1 - \gamma)I_0$$

Σε ένα φύλλο του Excel εισάγουμε τις πραγματικές τιμές πωλήσεων ενός προϊόντος των ετών 2002 και 2003 και φυσικά τις παραπάνω εξισώσεις για την πρόβλεψη και τις παραμέτρους της. Θέτουμε στο ίδιο φύλλο τις αρχικές τιμές σύμφωνα με τη μέθοδο Granger και Newbold και μέσω του Solver υπολογίζουμε τις παραμέτρους εξομάλυνσης α , β και γ , εισάγοντας στο κελί προορισμού τη συνάρτηση του σφάλματος, ώστε να παίρνει μηδενική τιμή ή την ελάχιστη δυνατή τιμή, ενώ μεταβάλλονται τα κελιά όπου έχουμε ορίσει κάποιες τιμές για τα α , β , γ και τα κελιά των αρχικών τιμών, ώστε να δοθούν καταλληλότερες πρακτικά αρχικές τιμές. Οι περιορισμοί είναι οι τιμές για τα α , β , γ να κινούνται στο διάστημα $[0,1]$. Αναλυτικά οι διαδικασίες στο Excel περιγράφονται στο παράρτημα που ακολουθεί.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό του σφάλματος προσαρμογής θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές από z_{15} έως z_{20} για να περιέχει ίσους όρους για κάθε περίπτωση μοντέλου και να μπορούμε να κάνουμε τη σύγκριση σωστά. Αν είχαμε μεγάλο αριθμό δεδομένων δε θα ήταν απαραίτητο να συμβαίνει αυτό. Τώρα όμως που διαθέτουμε 6 μόνο δεδομένα για να συγκρίνουμε τα σφάλματα προσαρμογής κάθε μοντέλου, ακόμα και μια τιμή λιγότερη ή περισσότερη θα κάνει σημαντική αριθμητική διαφορά στον υπολογισμό του σφάλματος προσαρμογής.

Ένα ακόμα σημείο που πρέπει να αναφέρουμε είναι ότι λόγω της φύσης της διαδικασίας προσαρμογής του μοντέλου Holt-Winters στο Excel το σφάλμα προσαρμογής γίνεται πάρα

πολύ μικρό, σχεδόν μηδενικό, πράγμα που δείχνει ότι το μοντέλο αυτό εκπαιδεύεται εύκολα. Κατά τη σύγκριση του με τα μοντέλα AR δεν θα αποτελέσει κριτήριο, γιατί γνωρίζουμε από πριν ότι υπερέχει. Θα χρησιμοποιηθεί μόνο σαν κριτήριο σύγκρισης ανάμεσα στα πολλαπλασιαστικά και αθροιστικά μοντέλα του Holt-Winters, που όμως και πάλι είναι και τα δύο πολύ κοντά στο μηδέν.

Το γεγονός όμως ότι το μοντέλο Holt-Winters εκπαιδεύεται εύκολα δε σημαίνει απαραίτητα ότι δίνει και πολύ καλές προβλέψεις. Αυτό θα το διαπιστώσουμε ούτως ή άλλως κατά τη σύγκριση του σφάλματος πρόβλεψης, που, όπως θα δούμε είναι και αυτό αρκετά μεγάλο.

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Για κάθε προϊόν θα παραθέσουμε τον πίνακα με τα σφάλματα κάθε μοντέλου που δοκιμάστηκε ώστε να είναι πιο εύκολη η σύγκριση των μοντέλων και η εξαγωγή συμπερασμάτων.

Για τους διάφορους τύπους **FANTA LEMON** προέκυψαν τα αποτελέσματα που ακολουθούν. Για κάθε τύπο απλώς δηλώνουμε το είδος της συσκευασίας.

5.3.1 ΤΥΠΟΣ 0.25L GLASS

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.877$ $\phi = -0,0287$	3476.304	2363.61	5231.33
AR (2)	$\theta_1 = 0.359$ $\theta_2 = -0.256$ $\phi = 1.40357$	5157.452	5573.152	1567.789
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0$ $\beta = 0.199786$ $\gamma = 0.01$	0.0004168	873.45399	874.4434
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.99999$ $\beta = 0.758577$ $\gamma = 0$	8.040073 E- 06	3419.9438	6997.054

Από τον συγκεντρωτικό πίνακα των σφαλμάτων για το προϊόν αυτό εύκολα διακρίνουμε το μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος του μοντέλου Holt Winters multiplicative, που είναι ελάχιστο και για το σφάλμα προσαρμογής και για το σφάλμα πρόβλεψης πολλών βημάτων. Άρα επιλέγεται σίγουρα για την έκφραση της ζήτησης του προϊόντος.

Επομένως η έκφραση αναλυτικά γράφεται:

$$f_{t+1} = (F_t + b_t)I_{t+1-12}$$

όπου:

$$\eta \quad F_t = \alpha \frac{D_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + b_{t-1}) \text{ για } \alpha=0 \text{ γίνεται } : F_t = F_{t-1} + b_{t-1}$$

$$\eta \quad b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad \text{για} \quad \beta=1.99786 \quad \text{να} \quad \text{γίνεται:}$$

$$b_t = 1.99786b_{t-1} - 0.99786b_{t-1} \Rightarrow b_t = b_{t-1} \quad \text{και}$$

$$\eta \ I_t = \gamma \left[\frac{D_t}{F_t} \right] + (1 - \gamma) I_{t-p} \quad \text{με } \gamma = -0.01 \text{ να γίνεται: } I_t = 0.01 \left[\frac{D_t}{F_{t-1} + b_{t-1}} \right] + 0.99 I_{t-12}$$

και τελικά οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση:

$$f_{t+1} = (F_{t-1} + 2b_{t-1}) I_{t+1-p}.$$

Με αρχικές τιμές όπως υπολογίστηκαν στο Solver:

Μέσου $F_0 = 3.015$:

Τάσης $b_0 = -4512.6808$:

Και εποχικότητας I_i , όπως δίνονται από τον πίνακα:

i	I
-11	5.511,6
-10	11.418,5
-9	15.948,4
-8	19.544,5
-7	14.865,5
-6	22.869,8
-5	23.191,4
-4	21.720,6
-3	17.978,8
-2	12.784,8
-1	9.376,8
0	10.627,2

5.3.2 ΤΥΠΟΣ 0.33L CAN

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.7472$ $\phi = 0.9225$	3303.054	4394.6	5621.91
AR (2)	$\theta_1 = 0.8759$ $\theta_2 = -0.0764$ $\phi = 0.998$	2386.443	4098.023	5614.899
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.4886$ $\beta = 0.6296$ $\gamma = 0$	0.021752	426.084	2780.92
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.5369$ $\beta = 0.4942$ $\gamma = 0$	0.00000136	3622.676	12460.558

Από τη σύγκριση των σφαλμάτων εύκολα επιλέγουμε το μοντέλο Holt-Winters multiplicative να είναι το καλύτερο κατά όλες τις έννοιες του σφάλματος. Άρα οι τυπικές εξισώσεις της ζήτησης αυτού του προϊόντος διαμορφώνονται ως εξής:

$$F_t = \alpha \frac{D_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + b_{t-1}) \text{ για } \alpha=0.4886 \Rightarrow F_t = 0.4886 \frac{D_t}{I_{t-p}} + 0.5114(F_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \text{ για } \beta=0.6296 \Rightarrow b_t = 0.6296(F_t - F_{t-1}) + 0.3704b_{t-1}$$

$$I_t = \gamma \left[\frac{D_t}{F_t} \right] + (1 - \gamma)I_{t-p} \text{ για } \gamma=0 \Rightarrow I_t = I_{t-p}$$

και τελικά οι προβλέψεις δίνονται από τη σχέση:

$$f_{t+1} = (F_t + b_t)I_{t+1-12} \text{ με αντικατάσταση των παραπάνω εξισώσεων.}$$

Με αρχικές τιμές όπως υπολογίστηκαν στο Solver:

Μέσου $F_0=7344.3$:

Τάσης $b_0=-232.544$:

Και εποχικότητας από τον πίνακα:

h	I
-11	0,483143
-10	0,606332
-9	1,236248
-8	1,232118
-7	1,311929
-6	1,919124
-5	1,88704
-4	1,4428
-3	0,884413
-2	0,620435
-1	0,525915
0	0,483143

5.3.3 ΤΥΠΟΣ 1.5L x 6 BOTTLES

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \text{τα } t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \text{τα } t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.721$ $\phi = 1.237$	2080.184	1481.1447	2317.1144
AR (2)	$\theta_1 = 0.851$ $\theta_2 = -0.18046$ $\phi = 1.39835$	2456.57	1445.472	2185.198
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0$ $\beta = 0.8405$ $\gamma = 0$	0.001544	330,9999	364.994
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.9999$ $\beta = 0.15341$ $\gamma = 0$	0.00323	1076.574	1030.576

Κι εδώ επίσης υπερτερεί το μοντέλο Holt-Winters multiplicative.

Άρα οι εξισώσεις του είναι :

$$\eta \quad F_t = \alpha \frac{D_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + b_{t-1}) \quad \text{για } \alpha=0 \text{ γίνεται} \quad : \quad F_t = F_{t-1} + b_{t-1}$$

$$\eta \quad b_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad \text{για } \beta=0.8405 \quad \text{να γίνεται:}$$

$$b_t = 0.8405b_{t-1} + 0.1595b_{t-1} \Rightarrow b_t = b_{t-1} \quad \text{και}$$

$$\eta \quad I_t = \gamma \left[\frac{D_t}{F_t} \right] + (1 - \gamma)I_{t-p} \quad \text{με } \gamma=0 \text{ να γίνεται: } I_t = I_{t-12}$$

άρα οι προβλέψεις δίνονται από τη σχέση: $f_{t+1} = (F_{t-1} + 2b_{t-1})I_{t+1-p}$.

5.3.4 0.5L PET

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.638$ $\phi = 1.386$	1475.75	734.86	858.769
AR (2)	$\theta_1 = 0.643$ $\theta_2 = -0.1361$ $\phi = 1.038$	2115.477	364.72575	416.0097
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.5064$ $\beta = 0.60826$ $\gamma = 0$	0.000469	934.261	1189.33
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.9959$ $\beta = 0.9524$ $\gamma = 0$	0.0174	1686.283	4353.621

Όπως συμπεραίνουμε από τον παραπάνω πίνακα το βέλτιστο μοντέλο της ζήτησης περιγράφεται από το AR(2×12), όπου τα σφάλματα πρόβλεψης είναι μικρότερα από των άλλων.

Με παραμέτρους εξομάλυνσης :

$$\theta_1 = 0.643$$

$$\theta_2 = -0.1361$$

$$\phi = 1.038$$

άρα από εξίσωση (3.12) έχουμε:

$$\Rightarrow z_t = 0.643z_{t-1} - 0.1361z_{t-2} + 1.038z_{t-12} - 0.667434z_{t-13} + 0.1413z_{t-14}$$

Για τους διάφορους τύπους **COCA-COLA** προέκυψαν τα αποτελέσματα που ακολουθούν.
Για κάθε τύπο απλώς δηλώνουμε το είδος της συσκευασίας.

5.3.5 ΤΥΠΟΣ 0.25L GLASS

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.9275$ $\phi = -1.2219$	72359.77	45669.072	85387.33
AR (2)	$\theta_1 = 0.24956$ $\theta_2 = 0.4016$ $\phi = 1.21535$	18324.95	14009.6	4691.747
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0$ $\beta = 0.499$ $\gamma = 0$	0.000282	3572.375	3572.375
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.999$ $\beta = 0.226814$ $\gamma = 1$	0.023046	1564.866	7765.941

Στην προκειμένη περίπτωση επιλέγουμε το μοντέλο Holt-Winters additive γιατί δίνει πολύ καλό σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος, παρόλο που το σφάλμα πρόβλεψης πολλών βημάτων μπροστά είναι αρκετά πιο μεγάλο, σχεδόν διπλάσιο από το σφάλμα που δίνει το αντίστοιχο multiplicative Holt-Winters. Έτσι κι αλλιώς το σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος έχει μεγαλύτερο συντελεστή βαρύτητας για την επιλογή μας. Άρα το μοντέλο της ζήτησης του προϊόντος της Coca-Cola 0.25 L, glass περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

Για τον μέσο παίρνουμε από τη σχέση (4.7) και για $\alpha=0.999$:

$$F_t = 0.999(D_t - I_{t-p}) + 0.001(F_{t-1} + b_{t-1})$$

για την τάση από τη σχέση (4.8) και για $\beta=0.226814$ παίρνουμε :

$$b_t = 0.226814(F_t - F_{t-1}) + 0.773b_{t-1}$$

και για την εποχικότητα από τη σχέση (4.9) και για $\gamma=1$ παίρνουμε:

$$I_t = D_t - F_t$$

Και οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση (4.10):

$$f_{t+1} = F_t + b_t + I_{t+1-p}$$

που με αντικατάσταση των παραπάνω παραμέτρων όπως αυτές προκύπτουν βηματικά καθώς και των αρχικών παραμέτρων υπολογίζουμε τις αντίστοιχες προβλέψεις. Έτσι για το μέσο έχουμε $F_0=27533$ και $b_0=-16808.7$

Και οι αρχικές τιμές της εποχικότητας δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

ti	I
-11	45.901,8
-10	59.343,7
-9	96.580,7
-8	100.082,8
-7	94.636,3
-6	134.778,0
-5	127.263,7
-4	134.295,4
-3	124.505,8
-2	81.891,8
-1	69.027,8
0	73.126,5

5.3.6 ΤΥΠΟΣ 0.33L, CAN

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.1386$ $\phi = 1.838852$	288884.5	10913.3124	12571.88
AR (2)	$\theta_1 = 0.270465$ $\theta_2 = 0.3047$ $\phi = 1.2204$	19812.69	3130.8	3546.054
HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.000317$ $\beta = 0.472834$ $\gamma = 0$	6.203 E-05	2504.128	2559.76
HOLT- WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.487256$ $\beta = 0.2484$ $\gamma = 0$	0.000309	1850.2	1654.893

Ομοίως με πριν το καλύτερο μοντέλο είναι το Holt-Winters additive. Οι εξισώσεις διαμορφώνονται ίδια με πριν με αλλαγή των παραμέτρων $\alpha=0.487256$, $\beta=0.2484$, $\gamma=0$ και των αρχικών παραμέτρων $F_0=6366$, $b_0=-4271.97$, και I_i από τον πίνακα:

Ii	I
-11	17.143,5
-10	13.549,5
-9	64.128,0
-8	40.522,0
-7	45.812,2
-6	49.499,3
-5	43.754,6
-4	37.892,9
-3	37.220,0
-2	31.666,0
-1	29.828,0
0	32.192,8

5.3.7 ΤΥΠΟΣ 0.33L x 6 PCS, CAN

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha \ t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha \ t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.9444$ $\phi = -0.676$	1813852	21167.063	18641.175
AR (2)	$\theta_1 = 0.45205$ $\theta_2 = 0.185814$ $\phi = 1.312106$	10716.45	14614.4	13159.51
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.4956$ $\beta = 0.08503$ $\gamma = 0$	0.001099	5180.605	6101.64
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.999892$ $\beta = 0.007568$ $\gamma = 0$	0.02868	8454.94	18993.12

Γι αυτό το προϊόν η χρονοσειρά της ζήτησής του περιγράφεται καλύτερα από το μοντέλο Holt-Winters multiplicative.

Έτσι έχουμε :

Για $\alpha=0.4956$ από (4.2):

$$F_t = 0.4956 \frac{D_t}{I_{t-p}} + 0.5044(F_{t-1} + b_{t-1})$$

για $\beta=0.08503$ και την (4.3)

$$b_t = 0.08503(F_t - F_{t-1}) + 0.91497b_{t-1}$$

για $\gamma=0$ και την (4.4):

$$I_t = I_{t-p}$$

και τελικά οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση:

$$f_{t+1} = (F_t + b_t)I_{t+1-12}$$

και τις αρχικές τιμές F_0 , b_0 , I_i :

$$F_0=13737, b_0= - 5896.6$$

Ii	I
-11	39.785,2
-10	42.904,0
-9	60.087,2
-8	67.015,2
-7	75.891,0
-6	90.039,9
-5	82.614,2
-4	92.949,3
-3	93.949,0
-2	66.057,0
-1	61.872,9
0	82.555,6

5.3.8 ΤΥΠΟΣ 0.5L, PET

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.795$ $\phi = 1.1435$	1772.417	4088.8346	3907.99
AR (2)	$\theta_1 = 0.9877$ $\theta_2 = -0.3435$ $\phi = 1.6488$	4064.013	4156.426	1541.598
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0$ $\beta = 0.299842$ $\gamma = 0.01$	0.000271	1572.875	1705.114
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.842397$ $\beta = 0.5451147$ $\gamma = 0$	0.004696	2369.406	5299.364

Κι εδώ θα επιλεγθεί το Holt-Winters multiplicative. Το σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος που δίνει είναι μικρότερο από κάθε άλλο, ενώ το σφάλμα πρόβλεψης πολλών βημάτων είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από αυτό που δίνει το AR(2×12).

Ετσι έχουμε για $\alpha=0$ από την (4.2):

$$F_t = F_{t-1} + b_{t-1}$$

για $\beta=0.299842$ η (4.3) δίνει:

$$b_t = 0.299842(F_t - F_{t-1}) + 0.7b_{t-1}$$

για $\gamma=0.01$ η (4.4) δίνει:

$$I_t = 0.01 \left[\frac{D_t}{F_t} \right] + 0.99 I_{t-p}$$

και τελικά οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση (4.5):

$$f_{t+1} = (F_t + b_t) I_{t+1-p}$$

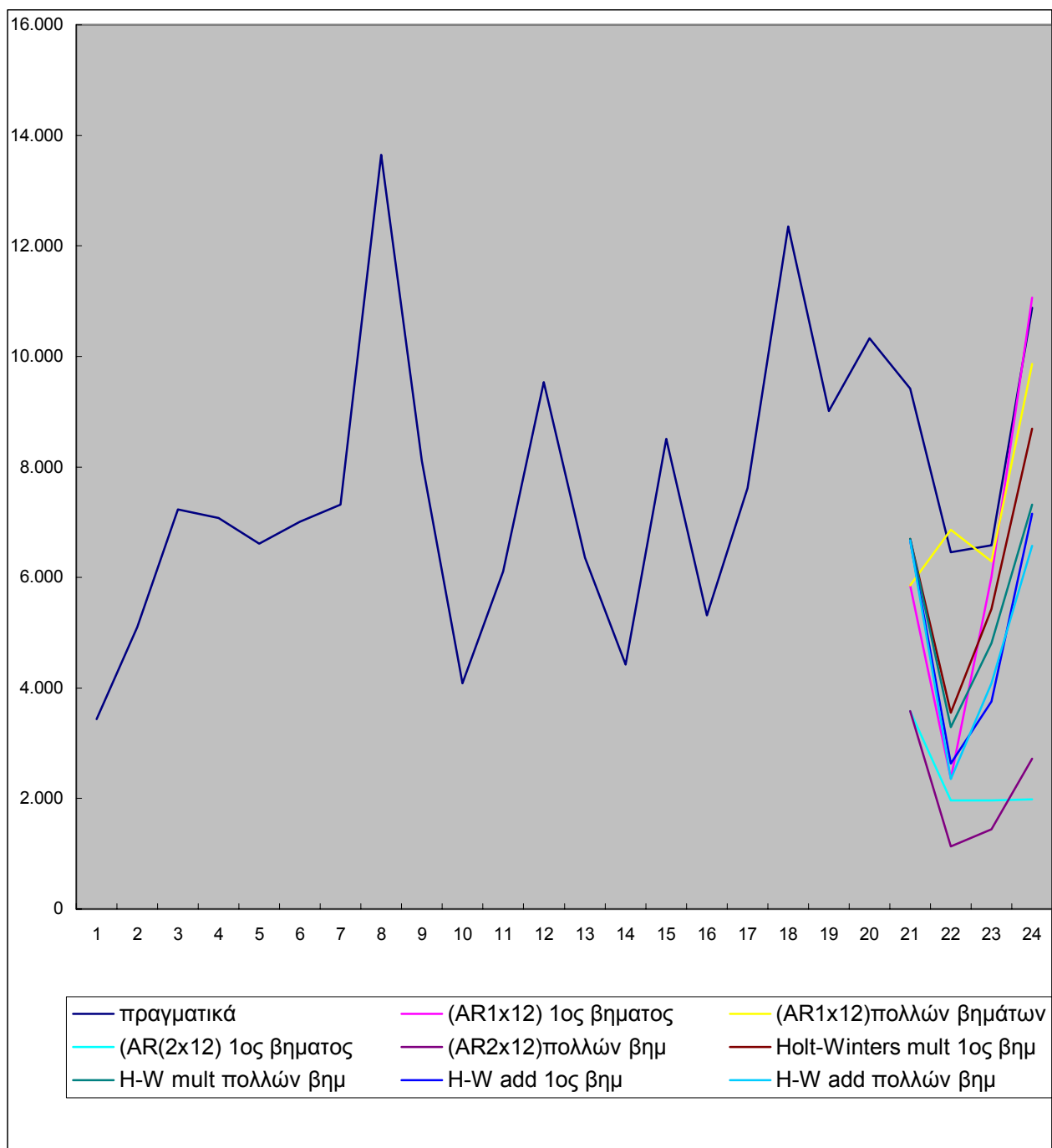
5.3.9 ΤΥΠΟΣ 0.5L x6 BOTTLES

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \text{ για } t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \text{ για } t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.633$ $\phi = 1.282$	3717.837	1868.187	2727.31
AR (2)	$\theta_1 = 0.6398$ $\theta_2 = -0.08513$ $\phi = 1.4646$	4209.845	5612.734	2701.344
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.08161$ $\beta = 0.41711$ $\gamma = 0$	0.000566	2340.42	2880.283
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.9373$ $\beta = 0.05093$ $\gamma = 0$	0.0072	3320.87	2509.694

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι εδώ το μικρότερο σφάλμα δίνεται από το μοντέλο AR(1×12). Οι παράμετροί του είναι $\theta=0.633$ και $\phi =1.282$. Αρα από τη σχέση (3.11) παίρνουμε την εξίσωση που περιγράφει τη ζήτηση του προϊόντος της Coca-Cola της εξαάδας από μισόλιτρα πλαστικά μπουκάλια.

$$z_{t+1} = 0.633z_t + 1.282z_{t-11} - 0.633z_{t-12}$$

Χαρακτηριστικά προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της χρονοσειράς και των προβλέψεων για όλα τα μοντέλα.



Σχήμα 5.Π

5.3.10 ΤΥΠΟΣ 1.5L x 6 BOTTLES

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.706$ $\phi = 1.3689$	13619.61	9939.2335	6424.68
AR (2)	$\theta_1 = 0.6398$ $\theta_2 = 0.20408$ $\phi = 0.3573$	5034.338	13640.99	4018.805
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.450603$ $\beta = 0.35949$ $\gamma = 0$	0.030944	3568.85	4446.54
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.999$ $\beta = 0.552$ $\gamma = 0$	0.025944	4458.132	7372.96

Και εδώ προτιμάται το Holt-Winters multiplicative.

Έτσι για $\alpha=0.450603$ η (4.2) γίνεται:

$$F_t = 0.450603 \frac{D_t}{I_{t-p}} + 0.5494(F_{t-1} + b_{t-1})$$

για $\beta=0.35949$ η (4.3) γίνεται:

$$b_t = 0.35949(F_t - F_{t-1}) + 0.64b_{t-1}$$

και για $\gamma=0$ η (4.4) γίνεται:

$$I_t = I_{t-p}$$

και τελικά οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση (4.5):

$$f_{t+1} = (F_t + b_t)I_{t+1-p}$$

επίσης οι αρχικές τιμές δίνονται:

$$F_0 = 30284.1, b_0 = -720.265$$

Και οι αρχικές παράμετροι εποχικότητας :

h	I
-11	1,067621
-10	0,663776
-9	1,479117
-8	1,053548
-7	1,350603
-6	1,251795
-5	1,610435
-4	1,146429
-3	0,861514
-2	0,761857
-1	0,584944
0	1,112876

Τα παραπάνω συμπεράσματα αφορούσαν το προϊόν της Coca-Cola. Συνεχίζουμε την εξαγωγή συμπερασμάτων για την τρίτη ομάδα προϊόντων, Coca-Cola light.

5.3.11 ΤΥΠΟΣ 0.25L, GLASS

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.7629$ $\phi = 0.795$	1594.662	1644.703	551.6716
AR (2)	$\theta_1 = 0.42421$ $\theta_2 = 0.0679$ $\phi = 1.507$	3496.264	1625.3	1093.718
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.001456$ $\beta = 0.59905$ $\gamma = 0$	0.00114	354.97	360.33
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.2962$ $\beta = 0.45776$ $\gamma = 0$	0.0013	2996.85	13434

Είναι προφανές ότι θα επιλέξουμε το Holt-Winters multiplicative. Εργαζόμαστε όμοια με προηγούμενα παραδείγματα σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.2)- (4.5) και τις νέες τιμές των παραμέτρων α , β , γ και των αρχικών παραμέτρων F_0 , b_0 , I_1 .

$F_0 = 5439.3$, $b_0 = 0.093707$ και

li	I
-11	0,123175
-10	0,033436
-9	0,392596
-8	1,061545
-7	1,503585
-6	2,285153
-5	2,043345
-4	2,222665
-3	1,532885
-2	0,325954
-1	-0,00092
0	0,031993

5.3.12 ΤΥΠΟΣ 0.33L, CAN

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma, \alpha, t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.761$ $\phi = 1.7270$	3147.5	735.75	1216.8
AR (2)	$\theta_1 = 1.3725$ $\theta_2 = -0.45022$ $\phi = -0.342$	1161.56	13421.72	1449.7
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.000115$ $\beta = 0.008556$ $\gamma = 0.79$	0.00025	688.04	688.94
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.407089$ $\beta = 0.38011$ $\gamma = 0$	0.001706	267.07	127.36

Είναι οφθαλμοφανές ότι η καλύτερη επιλογή εδώ είναι το μοντέλο Holt-Winters additive.

Για $\alpha=0.407089$ και τη σχέση (4.7) παίρνουμε

$$F_t = 0.407089(D_t - I_{t-p}) + 0.59(F_{t-1} + b_{t-1})$$

Για $\beta=0.38011$ και τη σχέση (4.8) παίρνουμε:

$$b_t = 0.38011(F_t - F_{t-1}) + 0.621b_{t-1}$$

για $\gamma=0$ και τη σχέση (4.9) παίρνουμε:

$$I_t = I_{t-p}$$

Και οι προβλέψεις δίδονται από τη σχέση (4.11) για πρόβλεψη πολλών βημάτων μπροστά :

$$f_{t+k} = F_t + b_t + I_{t+k-p}$$

επίσης οι αρχικές τιμές είναι :

$$F_0 = 2027, b_0 = -2725.96$$

li	I
-11	3.869,4
-10	5.938,7
-9	8.948,1
-8	11.013,3
-7	13.038,1
-6	14.009,1
-5	13.308,0
-4	11.414,5
-3	10.084,0
-2	7.704,0
-1	6.921,0
0	7.236,0

5.3.13 ΤΥΠΟΣ 0.33L x 6PCS, CAN

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.70664$ $\phi = 1.219$	1652.266	3099.81	3307.78
AR (2)	$\theta_1 = 0.693$ $\theta_2 = 0.063489$ $\phi = 1.01381$	1683.418	3522.311	2795.425
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.004113$ $\beta = 0.071476$ $\gamma = 0$	0.001744	3357.355	3391.252
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.792862$ $\beta = 6.8E - 05$ $\gamma = 0$	0.009185	3276.3	3182.864

Εδώ η επιλογή εξαρτάται από τον αποφασίζοντα. Τα σφάλματα πρόβλεψης δε διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους, εκτός από το μοντέλο AR(1×12). Για την πρόβλεψη ενός βήματος αυτό είναι και το πιο καθοριστικό κριτήριο. Άρα επιλέγουμε το AR(1×12). Ετσι από την εξίσωση(3.11) παίρνουμε για $\theta=0.70664$ και $\phi=1.219$:

$$\hat{z}_{t+1} = \theta z_t + \phi z_{t-1} - \theta \phi z_{t-12}$$

$$z_{t+1} = 0.70664 z_t + 1.219 z_{t-1} - 0.70664 z_{t-12}$$

5.3.14 ΤΥΠΟΣ 0.5L, PET

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.68$ $\phi = 1.47$	1331.816	498.709	428.598
AR (2)	$\theta_1 = 0.7932$ $\theta_2 = -0.08671$ $\phi = 1.40836$	1204.608	1447.536	382.9058
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.023997$ $\beta = 0.0957$ $\gamma = 0$	0.001881	295.5936	296.638
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.941398$ $\beta = 0.281429$ $\gamma = 0$	0.00169	1178.78	2136.3

Επιλέγουμε σίγουρα το Holt-Winters multiplicative γιατί δίδει το ελάχιστο σφάλμα σε όλες τις περιπτώσεις και μάλιστα με μεγάλη διαφορά από τα άλλα μοντέλα. Οι εξισώσεις ορίζονται επίσης από τις σχέσεις (4.2)- (4.5) για τις νέες παραμέτρους α , β , γ και αρχικές τιμές F_0 , b_0 και I_i :

$$F_0=2276, b_0=-42.079$$

li	I
-11	0,185321009
-10	0,26763184
-9	0,506569429
-8	0,878925538
-7	1,383241782
-6	1,570675863
-5	1,67642325
-4	1,407544024
-3	1,378522855
-2	0,554201971
-1	0,29979272
0	0,373540856

5.3.15 ΤΥΠΟΣ 0.5L x 6 BOTTLES, PET

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha \ t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha \ t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.747$ $\phi = 0.842$	792.075	778.471	987.798
AR (2)	$\theta_1 = 0.6948$ $\theta_2 = -0.2489$ $\phi = 1.619$	918.53	1864.4	1129.115
HOLT- WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.070287$ $\beta = 0.391153$ $\gamma = 0$	0.000688	438.14	673.38
HOLT- WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.719078$ $\beta = 9.21E - 05$ $\gamma = 0$	0.000969	1116.797	890.0366

Επιλέγουμε σίγουρα το Holt-Winters multiplicative γιατί δίδει το ελάχιστο σφάλμα σε όλες τις περιπτώσεις και μάλιστα με μεγάλη διαφορά από τα άλλα μοντέλα. Οι εξισώσεις ορίζονται επίσης από τις σχέσεις (4.2)- (4.5) για τις νέες παραμέτρους α , β , γ και αρχικές τιμές F_0 , b_0 και I_1 που δίνονται στον επόμενο πίνακα:

$$F_0 = 1728, b_0 = 246.3$$

li	I
-11	0,832193
-10	0,347448
-9	0,732671
-8	0,732357
-7	0,75986
-6	1,321233
-5	1,385448
-4	1,266605
-3	1,232338
-2	0,683084
-1	0,596488
0	1,108801

5.3.16 ΤΥΠΟΣ 1.5 L, PET

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{6} \sum_{t=15}^{20} (\hat{z}_t - z_t)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=i} - z_i)^2}$	ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ RMSE= $\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=21}^{24} (\hat{z}_i _{\gamma \alpha t=20} - z_i)^2}$
AR (1)	$\theta = 0.7382$ $\phi = 1.29884$	1847.933	1936.714	1970.811
AR (2)	$\theta_1 = 1.3335$ $\theta_2 = -0.299$ $\phi = 2.6436$	4155.505	6921.277	16840.89
HOLT-WINTERS MULTIPLICATIVE	$\alpha = 0.12091$ $\beta = 0.404371$ $\gamma = 0$	0.002061	853.77	840.743
HOLT-WINTERS ADDITIVE	$\alpha = 0.965013$ $\beta = 0.605256$ $\gamma = 0$	0.005672	609.4106	1781.33

Εδώ μπορούμε να επιλέξουμε το Holt-Winters additive για το λόγο ότι δίνει το μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος, δίνει μεγάλο, όμως, σφάλμα, σχεδόν διπλάσιο απ' ότι το multiplicative, για πρόβλεψη πολλών βημάτων μπροστά. Οπότε είναι στη γνώμη του αποφασίζοντα πιο από τα δύο επιλέγει. Μια καλή εκτίμηση είναι η επιλογή του multiplicative που φαίνεται πιο εξισορροπημένο, έστω κι αν δίνει λίγο μεγαλύτερο σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος. Άρα για να βρούμε τις εξισώσεις της σειράς θα δουλέψουμε ομοίως με προηγούμενα παραδείγματα σύμφωνα με τις σχέσεις (4.2)- (4.5) και τις αρχικές τιμές του.

$$F_0 = 4590.3, b_0 = -58.8896$$

Και τα I_i που δίνονται από τον πίνακα:

li	I
-11	0,527865
-10	0,438176
-9	0,633883
-8	0,927233
-7	1,221848
-6	1,795582
-5	1,761413
-4	1,572184
-3	0,975892
-2	0,737244
-1	0,405789
0	0,599228

5.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε αναλυτικά τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων μας, τις τιμές που έδωσε κάθε μοντέλο για τα σφάλματα που αποτέλεσαν τα κριτήρια αξιολόγησης των μοντέλων και τη σύγκριση αυτών μεταξύ τους, ώστε να οδηγηθούμε τελικά στην επιλογή ενός μοντέλου για κάθε περίπτωση προϊόντος.

Από τη σύγκριση αυτή μπορούμε να εστιάσουμε την προσοχή σε κάποια καίρια σημεία που μαρτυρούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης του εκάστοτε μοντέλου. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι τα μοντέλα Holt –Winters είναι προτιμότερα και επιλέχθηκαν για 14 από τα συνολικά 16 προϊόντα που εξετάστηκαν, δίνοντας σφάλματα πολύ μικρότερα από τα μοντέλα με εξαρτημένες παρατηρήσεις. Αν και η διαδικασία επεξεργασίας τους στο Excel είναι ελαφρώς πιο χρονοβόρα από αυτή των AR μοντέλων, έχουν ασύγκριτα καλύτερη προσαρμογή, σχεδόν μηδενικό σφάλμα προσαρμογής.

Επίσης από όσες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν Holt Winters για την περιγραφή των χρονοσειρών ζήτησης των προϊόντων, η πλειοψηφία τους ήταν η πολλαπλασιαστική εκδοχή εποχικότητας και πολύ λιγότερο η αθροιστική. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της εποχικότητας είναι ανάλογη ως προς τον τοπικό μέσο που μπορεί να εμφανίζει η σειρά και όχι ανεξάρτητη από αυτόν.

Εν κατακλείδι οι εξισώσεις που μπορούν να περιγράψουν τη χρονοσειρά της ζήτησης των προϊόντων είναι απλοϊκές, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δε δίνουν έγκυρα αποτελέσματα. Τουναντίον, ενώ δίνουν καλά αποτελέσματα είναι και εξαιρετικά εύκολος, γρήγορος και αριθμητικά απλός ο προσδιορισμός τους.

6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ

ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

6.1 ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο σύμφωνα με την οποία μπορούμε να καταπιαστούμε και κατόπιν να επιλύσουμε το δύσκολο πρόβλημα προσδιορισμού οικονομικών ποσοτήτων παραγγελίας και κατ' επέκταση των αποθεμάτων σε πολλαπλές γραμμές παραγωγής περιορισμένης χωρητικότητας. Γενικά η μέθοδος υποθέτει σταθερή ζήτηση των προϊόντων (την οποία έχουμε προβλέψει σε προηγούμενα κεφάλαια) και υπολογίζει το πλήθος των φορών που θα παραχθούν αυτά μέσα σε ένα βέλτιστο χρονικό διάστημα καθώς και τη μέγιστη ποσότητα που παράγεται κάθε φορά από το εκάστοτε προϊόν. Αυτό το χρονικό διάστημα δεν επιτρέπεται να είναι πολύ μεγάλο (π.χ. να ξεπερνά τον ένα χρόνο) γιατί σκοπός του μοντέλου είναι να αποφύγει υπερβολικά μεγάλες ποσότητες αποθέματος, τα οποία, στην περίπτωση που δεν πουληθούν ή δεν λήξουν, θα αυξάνουν αδικαιολόγητα το κόστος αποθήκευσής τους ή απλά το χώρο αποθήκευσης που θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διαφορετικά. Επίσης δεν πρέπει να είναι και υπερβολικά μικρό ώστε να οδηγήσει σε υπερβολικά πολλές φορές παραγωγής του ίδιο προϊόντος, με κίνδυνο εξάντλησης αποθέματος κάποιου άλλου προϊόντος (Box and Jenkins, 1976).

Η συγκεκριμένη εφαρμογή αφορά σε οργάνωση παραγωγής περισσότερων από ένα προϊόντων στην ίδια μηχανή ή ευρύτερα γραμμή παραγωγής. Το πρόβλημα της παραγωγής πολλών προϊόντων σε κοινή μηχανή είναι ιδιαίτερα διαδεδομένο στη βιβλιογραφία. Ο Bomberger (1966) πρώτος παρουσίασε ένα πρόβλημα που είχε να κάνει με την παραγωγή 10 διαφορετικών προϊόντων με διαφορετικά τη ζήτηση, το χρόνο προετοιμασίας της γραμμής, το κόστος προετοιμασίας και το κόστος αποθήκευσης σε μια κοινή μηχανή. Το πρόβλημα του Bomberger έχει από τότε χρησιμοποιηθεί για τη δοκιμή της αποδοτικότητας διάφορων μεθόδων και αλγορίθμων επίλυσης παρόμοιων προβλημάτων. Μια γνωστή μέθοδος βασισμένη στο πρόβλημα του Bomberger είναι και η πρακτική μέθοδος του Segerstedt που υπολογίζει οικονομικές ποσότητες παραγωγής σε κοινή μηχανή ακολουθώντας μια πολιτική

δοκιμής διαφορετικών συχνοτήτων παραγωγής των προϊόντων μέσα σε ένα χρονικό διάστημα, οι οποίες έχουν το χαρακτηριστικό ότι είναι δυνάμεις του 2, ώστε να είναι εύκολη και πρακτική η εφαρμογή της λύσης που προκύπτει (Brander et al., 2004).

6.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουμε στο κείμενο αυτό διαθέτουμε τρεις συνολικά γραμμές παραγωγής σε κάθε μια από τις οποίες κατασκευάζονται διαφορετικές συσκευασίες των προϊόντων της εταιρείας. Τα προϊόντα είναι αναψυκτικά τριών γεύσεων (Coca-Cola, Coca-Cola light και Fanta lemon) και συσκευάζονται στην πρώτη γραμμή παραγωγής (glass) σε γυάλινες φιάλες των 250ml, στη δεύτερη γραμμή παραγωγής (can) σε δοχεία των 330 ml σε ατομικές συσκευασίες καθώς και σε συσκευασίες των 6 και στην τρίτη γραμμή παραγωγής (pet) σε πλαστικές φιάλες των 500ml ή του 1.5 L είτε σε ατομικές συσκευασίες είτε σε συσκευασίες των 6. Βέβαια το εργοστάσιο δεν παράγει μόνο αυτές τις γεύσεις. Οπότε μπορούμε να γενικεύσουμε το πρόβλημα για όλα τα είδη των προϊόντων που παράγονται σ' αυτές τις γραμμές με τις προαναφερθείσες μορφές.

Έτσι λοιπόν συμβολίζουμε με i το προϊόν ανάλογα με τη γεύση έτσι ώστε $i = 1, \dots, N$, όπου N το πλήθος των γεύσεων που παράγονται, και με j τις διάφορες μορφές του προϊόντος i ανάλογα με τη συσκευασία του, δηλαδή $j = 1, \dots, n_i$, όπου n_i το πλήθος των ειδών συσκευασίας.

Θεωρούμε ένα χρονικό διάστημα \hat{T} , που θα είναι η περίοδος μέσα στην οποία θα παραχθούν όλα τα προϊόντα τουλάχιστον από μία φορά. Επομένως έστω f_i η συχνότητα με την οποία θα παραχθούν τα j προϊόντα σε χρόνο \hat{T} . Ειδικότερα ονομάζουμε κύκλο παραγωγής ενός προϊόντος το χρόνο από τη στιγμή που θα αρχίσει η πρώτη παραγωγή του μέχρι τη στιγμή που θα αρχίσει η επόμενη. Επομένως ισχύει ότι ο κύκλος πολλαπλασιασμένος με τη συχνότητα παραγωγής του προϊόντος θα πρέπει να δίνει το χρόνο \hat{T} .

Το κόστος ανά μονάδα χρόνου του προϊόντος i δίνεται σαν το άθροισμα των κόστους προετοιμασίας της παραγωγής του (set-up cost) και του κόστους αποθεματοποίησης του (inventory holding cost). Η σχέση που εκφράζει το άθροισμα αυτό είναι η ακόλουθη (Brander et al., 2004):

$$C = \sum_{i=1}^N \left[\frac{f_i A_i}{T} + \sum_{j=1}^{n_i} \left(h_{ij} \left(1 - \frac{d_{ij}}{p_{ij}} \right) \frac{d_{ij} T}{2f_i} \right) \right]$$

A_i : το κόστος προετοιμασίας ανά παραγόμενη παρτίδα παραγωγής του προϊόντος i

h_{ij} : το κόστος ανά μονάδα προϊόντος

d_{ij} : ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος ij

p_{ij} : ο ρυθμός παραγωγής του προϊόντος ij .

Το κόστος αυτό θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ως προς το χρόνο. Επομένως αρκεί να πάρουμε την παράγωγο του ίση με μηδέν.

Αρα για $\min C(T)$ παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^N \left[-\frac{f_i A_i}{T^2} + \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \left(1 - \frac{d_{ij}}{p_{ij}} \right) \frac{d_{ij}}{2f_i} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^N f_i A_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \left(1 - \frac{d_{ij}}{p_{ij}} \right) \frac{d_{ij}}{2f_i} \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i A_i}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} \left(1 - \frac{d_{ij}}{p_{ij}} \right) \frac{d_{ij}}{2f_i}}}$$

Το χρονικό διάστημα \hat{T} περιορίζεται από ένα ελάχιστο χρόνο T_{\min} ένα μέγιστο T_{\max} . Το T_{\min} παριστάνει τον ελάχιστο χρόνο που απαιτείται ώστε να παραχθούν όλα τα προϊόντα και δίνεται από τον τύπο (Brander et al., 2004):

$$T_{\min} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i t}{1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{d_{ij}}{p_{ij}}}$$

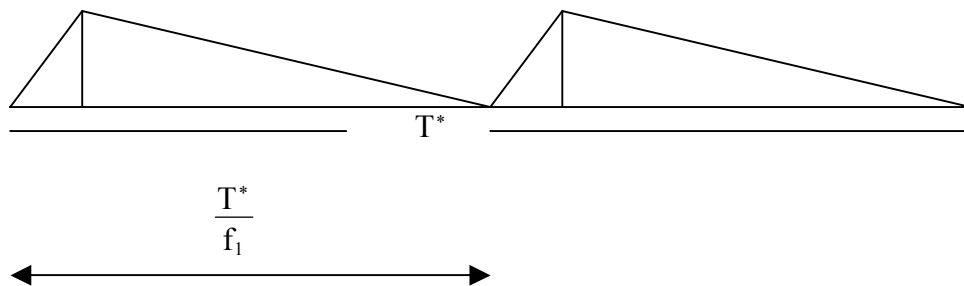
Επιπλέον πρέπει να ισχύει $T^* \geq T_{\min}$ όπου

$$T^* = \max \{T, T_{\min}\}.$$

Το T_{\max} μπορούμε να το ορίσουμε με τον περιορισμό του πλήθους των χρονικών περιόδων της ζήτησης που επιτρέπεται να καλύψει ή να ικανοποιήσει μια παραγόμενη παρτίδα (Brander et al., 2004).

Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε για τον χρόνο T^* ότι αφού είναι ο χρόνος παραγωγής τότε θα λαμβάνουν χώρα f_i παραγωγές του κάθε προϊόντος άρα και f_i set ups διάρκειας t_i το καθένα. Άρα ο συνολικός χρόνος της παραγωγής που διατίθεται για set up είναι ίσος με $\sum_{i=1}^N f_i t_i$. Άρα ο «καθαρός» χρόνος παραγωγής είναι $T^* - \sum_{i=1}^N f_i t_i$. Αυτός πρέπει να είναι φυσικά αρκετά μεγάλος ώστε, με συνεχή παραγωγή της γραμμής, να μπορεί να παράξει τα κομμάτια που θα ζητηθούν σε όλη τη διάρκεια T^* σε χρόνο $\leq T^* - \sum_{i=1}^N f_i t_i$.

Έστω ότι σε μια περίοδο παραγωγής παίρνουμε το εξής σχήμα:



Άρα $\frac{T^*}{f_i}$ ο κύκλος παραγωγής κάθε προϊόντος (i, j) της ομάδας i , που είναι η βάση του τριγώνου. Ομοίως και το ύψος του τριγώνου δίνεται (Φίλης, 2000) ως:

ύψος $= \frac{d_{ij}(p_{ij} - d_{ij})}{p_{ij}} T \Rightarrow d_{ij} \left(1 - \frac{d_{ij}}{p_{ij}} \right) T = I_{(i,j)\max}$ που είναι και το μέγιστο απόθεμα που μπορούμε να έχουμε. Όταν η στάθμη του αποθέματος φτάσει αυτή την τιμή τότε σταματάμε να παράγουμε το προϊόν.

Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε δύο βήματα ανάπτυξης της πολιτικής διαχείρισης της παραγωγής.

1. Υπολογισμό των χρόνων T, T_{\min}, T^*
2. Επιλογή της ομάδας προϊόντων που θα παραχθεί έτσι, ώστε να ανταποκρίνεται στις τιμές που υπολογίζονται στο βήμα 1.

Για την επιλογή του προϊόντος που θα παράξουμε πρώτο αναπτύσσουμε ένα κριτήριο k_i το οποίο δεν αποδίδει απλά το προϊόν με το μικρότερο απόθεμα, αλλά τη σχέση της παροντικής στάθμης του αποθέματος του προϊόντος με το μέγιστο απόθεμα που πρέπει να διαθέτουμε από το προϊόν αυτό (Perkins and Kumar, 1989). Έτσι λαμβάνουμε το κλάσμα:

$$k'_i = \min_{j=1, \dots, n_i} \frac{x_{ij}(\text{τώρα}) - d_{ij} t_{ir}}{I_{(i',j)}^{\max}}, \text{ όπου τα τονούμενα συμβολίζουν την ομάδα προϊόντος που θα}$$

οδηγηθεί σε παραγωγή, x είναι η διαθέσιμη ποσότητα από το προϊόν τη στιγμή που εξετάζουμε το κλάσμα και το γινόμενο $d_{ij} t_{ir}$ είναι η ποσότητα του προϊόντος που καταναλώνεται από το υπάρχον απόθεμα του κατά τη διάρκεια που ξεκινάμε τη νέα παραγωγή του.

Στην ιδανική περίπτωση η διαφορά του αριθμητή του κλάσματος είναι ίση με μηδέν, δηλαδή δε χρειάζεται να παράγουμε ξανά το προϊόν. αφού επιλέξουμε το προϊόν που θα οδηγήσουμε στη γραμμή παραγωγής και τελικά το παράξουμε στην επιθυμητή ποσότητα, συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία (βήμα 2) για να εύρουμε τα επόμενα προϊόντα και να δημιουργήσουμε την αλληλουχία τους στη γραμμή παραγωγής.

Αν είχαμε αρκετά αριθμητικά δεδομένα θα μπορούσαμε να παρουσιάσουμε μια εφαρμογή της μεθόδου αυτής. Ένα σημαντικό πρόβλημα όμως που τίθεται, πέρα από τον υπολογισμό απλών σταθερών μεγεθών, όπως π.χ. ο ρυθμός παραγωγής της γραμμής, είναι σαφώς ο υπολογισμός του κόστους αποθήκευσης. Για να το υπολογίσουμε χρειάζεται να το θεωρήσουμε σαν κέρδος που θα μπορούσε να προκύπτει από την ενοικίαση του χώρου όπου αποθηκεύουμε τα προϊόντα, αλλά τώρα χάνεται. Σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να γνωρίζουμε επιπλέον πόσα τετραγωνικά καταλαμβάνουν οι αποθηκευμένες ποσότητες και την αξία του ενός τετραγωνικού μέτρου στην περίπτωση της ενοικίασης. Έτσι θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος και κατ' επέκταση το συνολικό κόστος αποθήκευσης. Τελικά όμως ένας έγκυρος υπολογισμός του κόστους αποθήκευσης αποτελεί από μόνος του μια χρονοβόρα και πολύπλοκη διαδικασία, σταματάμε την διερεύνησή του εδώ. Με τη χρήση της παραπάνω μεθόδου και ένα σωστό υπολογισμό του κόστους αποθήκευσης το πρόβλημα λύνεται πολύ εύκολα.

7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εδώ αναφέρουμε από ένα παράδειγμα επίλυσης των μοντέλων στο Excel. Το πρώτο αφορά στην επίλυση ενός μοντέλου AR(2x12) και σημειώνονται και οι μικρές αλλαγές που απαιτούνται και για την επίλυση του AR(1x12).

7.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ EXCEL ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ AR

Στο παρακάτω φύλλο εργασίας φαίνεται ότι αρχικά υπολογίσαμε τις αυτοσυσχετίσεις των τιμών πωλήσεων σύμφωνα με τη σχέση (3.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2																	
3	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0	0
12	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0	0
13	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0	0
14	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0	0
15	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0	0
16	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0	0
17	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0	0
18	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438	0
19	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097	3.438
20	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233	5.097
21	9.014	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076	7.233
22	10.327	9.014	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609	7.076
23	9.417	10.327	9.014	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.011	6.609
24	6.452	9.417	10.327	9.014	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321	7.076
25	6.586	6.452	9.417	10.327	9.014	12.361	7.620	5.313	8.509	4.419	6.366	9.532	6.107	4.085	8.110	13.646	7.321
26																	
27	$\Sigma(x)^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28	$1E+09$	0.875	0.798	0.75	0.702	0.6646	0.607	0.578	0.5101	0.476	0.4667	0.437	0.392	0.299	0.266	0.2241	0.1

Πίνακας 7.1

Στο κελί A28 υπολογίζουμε το άθροισμα τετραγώνων των τιμών της στήλης A, η οποία περιέχει τις τιμές των πωλήσεων του προϊόντος, που είναι ο παρονομαστής του τύπου (3.9). Εν συνεχεία είναι οι αυτοσυσχετίσεις π.χ. η ρ_1 (B27) υπολογίζεται στο Excel από τον τύπο που μαρκάρεται στο αντίστοιχο κελί (B28) =SUMPRODUCT(B3:B22;\$A3:\$A22)/\$A28.

Μ' αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τους ρ_k όρους των εξισώσεων :

Για το AR(1x12) οι εξισώσεις Yule-Walker είναι:

$$\rho_1 - \theta\rho_0 - \phi\rho_{11} + \theta\phi\rho_{12} = 0$$

$$\rho_2 - \theta\rho_1 - \phi\rho_{10} + \theta\phi\rho_{11} = 0$$

$$\rho_3 - \theta\rho_2 - \phi\rho_9 + \theta\phi\rho_{10} = 0$$

όπου οι θ και ϕ είναι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου AR(1x12). Για την εύρεση των θ και ϕ απαιτούνται δύο εξισώσεις. Όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο την τρίτη εξίσωση την κρατάμε απλώς για την επαλήθευση της λύσης (ότι είναι όντως κοντά στο μηδέν όπως φαίνεται στο δεξί μέλος των εξισώσεων). Επομένως έχουμε δημιουργήσει ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα θ, ϕ .

Όμοια, για το AR(2x12) έχουμε τις εξισώσεις:

$$-\rho_1 + \theta_1 + \theta_2\rho_1 + \phi\rho_{11} - \phi\theta_1\rho_{12} - \phi\theta_2\rho_{13} = 0$$

$$-\rho_2 + \theta_1\rho_1 + \theta_2 + \phi\rho_{10} - \phi\theta_1\rho_{11} - \phi\theta_2\rho_{12} = 0$$

$$-\rho_3 + \theta_1\rho_2 + \theta_2\rho_1 + \phi\rho_9 - \phi\theta_1\rho_{10} - \phi\theta_2\rho_{11} = 0$$

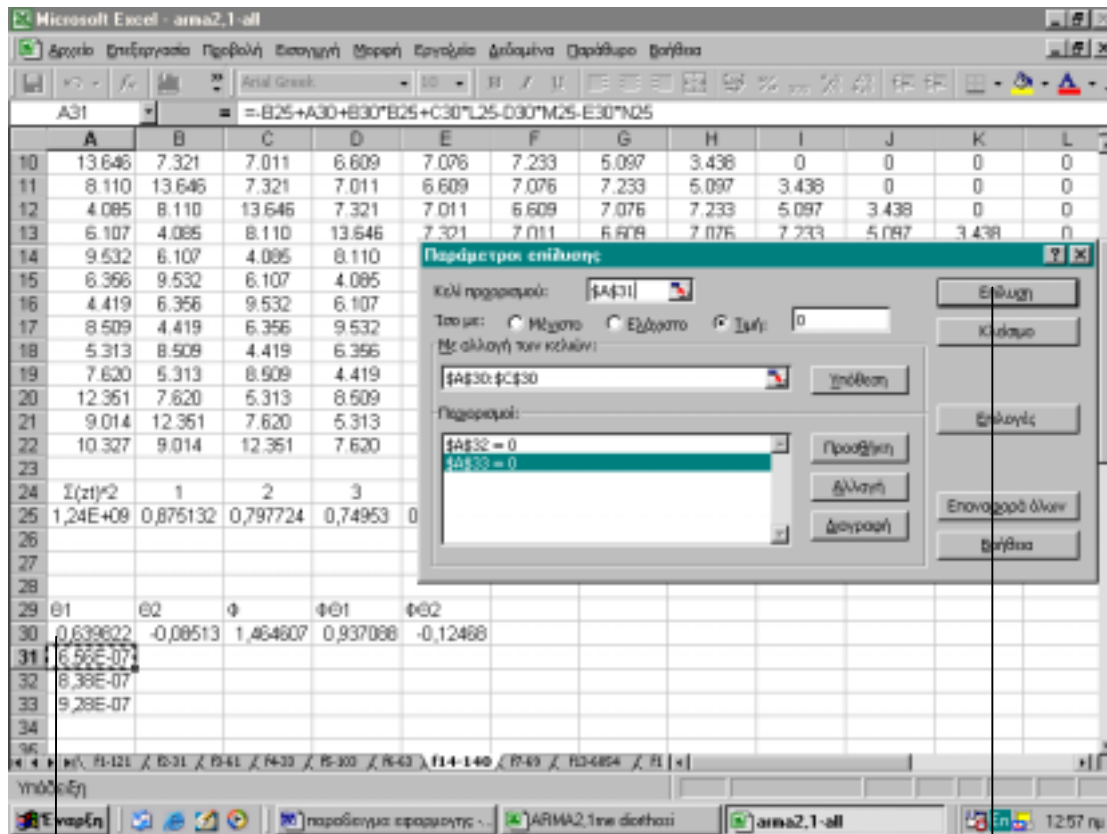
$$-\rho_4 + \theta_1\rho_3 + \theta_2\rho_2 + \phi\rho_8 - \phi\theta_1\rho_9 - \phi\theta_2\rho_{10} = 0$$

Οι άγνωστοι είναι τα θ_1, θ_2, ϕ . Εδώ επιλύουμε ένα μη γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Η τέταρτη εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο επάρκειας του μοντέλου AR(2x12).

Η επίλυση των εξισώσεων κάθε μοντέλου χρησιμοποιούμε το πρόσθετο πρόγραμμα (Add-in) του Excel που λέγεται Solver. Το πρόγραμμα αυτό καλείται από τα "Εργαλεία" του Excel και μπορεί να εύρει το σημείο μηδενισμού, μεγίστου, ή ελαχίστου μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Έχει τη δυνατότητα να λαμβάνει υπ' όψη και περιορισμούς ισότητας ή και ανισότητας.

Επι του προκειμένου, για ένα σύστημα N εξισώσεων και αγνώστους τα x_1, \dots, x_N , εμείς θα εύρουμε το σημείο (x_1, \dots, x_N) που μηδενίζει το αριστερό μέλος της πρώτης εξίσωσης με τον περιορισμό ότι για τις υπόλοιπες ισχύει το ίδιο επίσης. Ως "πρώτη" εξίσωση μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις N.

Έστω το παρακάτω φύλλο του Excel για την επίλυση του συστήματος του AR(2x12). Έχουμε τρεις εξισώσεις.



Πίνακας 7. II

Το κελί A31 περιέχει την "πρώτη" εξίσωση

$$-\rho_1 + \theta_1 + \theta_2 \rho_1 + \phi \rho_{11} - \phi \theta_1 \rho_{12} - \phi \theta_2 \rho_{13} = 0,$$

την οποία χρησιμοποιούμε σαν τη βασική εξίσωση προορισμού, ενώ τις άλλες δύο του συστήματος σαν περιορισμούς. Όλα αυτά γίνονται για να υπολογίσουμε τις τιμές των θ_1 , θ_2 , ϕ .

Το Solver κάνει αυτούς τους υπολογισμούς με την εισαγωγή των κελιών A30 έως C30 στο κελί αλλαγών.

Πατώντας το κουμπί «Επίλυση» το Solver δίδει μια πιθανή τριάδα θ_1 , θ_2 , ϕ που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Τη διαδικασία επίλυσης την εφαρμόζουμε για κάθε προϊόν ξεχωριστά. Ομοίως δουλεύουμε και για τα μοντέλα AR(1x12) με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε μια εξίσωση στους περιορισμούς, αφού συνολικά διαθέτουμε, αλλά και χρειαζόμαστε, μόνο δύο εξισώσεις.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος ενός βήματος μπροστά έχουμε αναφέρει ότι ανανεώνουμε τις τιμές των παραμέτρων θ , ϕ ή θ_1 , θ_2 , ϕ για κάθε επόμενη πρόβλεψη. Έτσι, για παράδειγμα, στο AR(2x12) φαίνονται οι επιπλέον υπολογισμοί αυτοσυσχετίσεων και οι μεταβολές των μεταβλητών σε κάθε βήμα.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
27	$\Sigma(z_t)^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
28	1,24E+09	0,875132	0,797724	0,74953	0,701625	0,664561	0,607011	0,578055	0,510133	0,47556	0,466736	0,437063
29	1,33E+09	0,889888	0,808348	0,786971	0,70879	0,657875	0,626767	0,570807	0,521112	0,51131	0,478845	0,436845
30	1,37E+09	0,907161	0,832371	0,805472	0,745344	0,673739	0,632732	0,593489	0,526079	0,529578	0,509124	0,452307
31	1,42E+09	0,909382	0,850671	0,828627	0,764435	0,710542	0,648789	0,60002	0,549537	0,530128	0,523089	0,482776
32												
33	θ_1	θ_2	ϕ	$\phi\theta_1$	$\phi\theta_2$	θ_1	θ_2	ϕ	$\phi\theta_1$	$\phi\theta_2$		
34	0,639823	-0,08513	1,464602	0,937086	-0,12468	1,041567	-0,62416	1,754614	1,827547	-1,09515		
35	8,01E-08					3,8E-07						
36	1,25E-07					4,72E-07						
37	1,45E-07					4,57E-07						
38												
39						θ_1	θ_2	ϕ	$\phi\theta_1$	$\phi\theta_2$		
40						1,051072	-0,98553	1,890009	1,985535	-1,85255		
41						8,73E-07						
42						9,4E-07						
43						9,53E-07						
44												
45												
46						θ_1	θ_2	ϕ	$\phi\theta_1$	$\phi\theta_2$		
47						0,744223	-0,39219	1,67303	1,245107	-0,65615		
48						-2,2E-07						
49						-2,4E-07						
50						-2,6E-07						
51												

Πίνακας 7. III

Οι τιμές προκύπτουν σύμφωνα με την εξίσωση (3.12) και για κάθε τύπο πρόβλεψης με τον τρόπο που έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 5.

Έτσι για το συγκεκριμένο παράδειγμα και τις τιμές των παραμέτρων που έχουν υπολογιστεί στους προηγούμενους πίνακες οι τιμές πρόβλεψης και τα αντίστοιχα σφάλματα δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Microsoft Excel - ARMA2.Twe diastasi

Δορυδα Επεξεργασία Προβλεψή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Διάγραμμα Παράθυρο Βοήθεια

C62 = \$F\$34*B61+\$G\$34*B60+\$H\$34*B60-\$I\$34*B49-\$J\$34*B48

	A	B	C	D	E	F
40	1	Πραγματικές τιμές				
41	1	3.438				
42	2	5.097				
43	3	7.233				
44	4	7.076				
45	5	6.609				
46	6	7.011				
47	7	7.321				
48	8	13.646				
49	9	8.110				
50	10	4.085				
51	11	6.107				
52	12	9.532				
53	13	6.356				
54	14	4.419				
55	15	8.509				
56	16	5.313				
57	17	7.620				
58	18	12.351				
59	19	9.014				
60	20	10.327	ΠΡΟΒΛΕΨΗ			
			Ενός βήματος μπροστά Πολλών βημάτων μπροστά			
61	21	9.417	5.843,33	5.843,33		
62	22	6.452	10.653,41	2.944,09		
63	23	6.586	16.034,22	7.205,52		
64	24	10.881	13.394,85	12.810,69		
65						
66		MSE	31.502.782,26	7.297.257,59		
67		RMSE	5.612,73	2.701,31		

Πίνακας 7. IV

Τα στοιχεία που περιγράφει ο τύπος του κελιού αυτού αναφέρονται στα αντίστοιχα των προηγούμενων πινάκων και είναι η εφαρμογή της εξίσωσης (3.12).

Οι τιμές των προβλέψεων πολλών βημάτων μπροστά προκύπτουν από την εφαρμογή της εξίσωσης (3.12) και τις τιμές των παραμέτρων όπως αυτές υπολογίστηκαν στον Πίνακα 7.Π .

7.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ EXCEL ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ HOLT-WINTERS

Το παρακάτω φύλλο δείχνει την κατασκευή του μοντέλου Holt-Winters multiplicative:

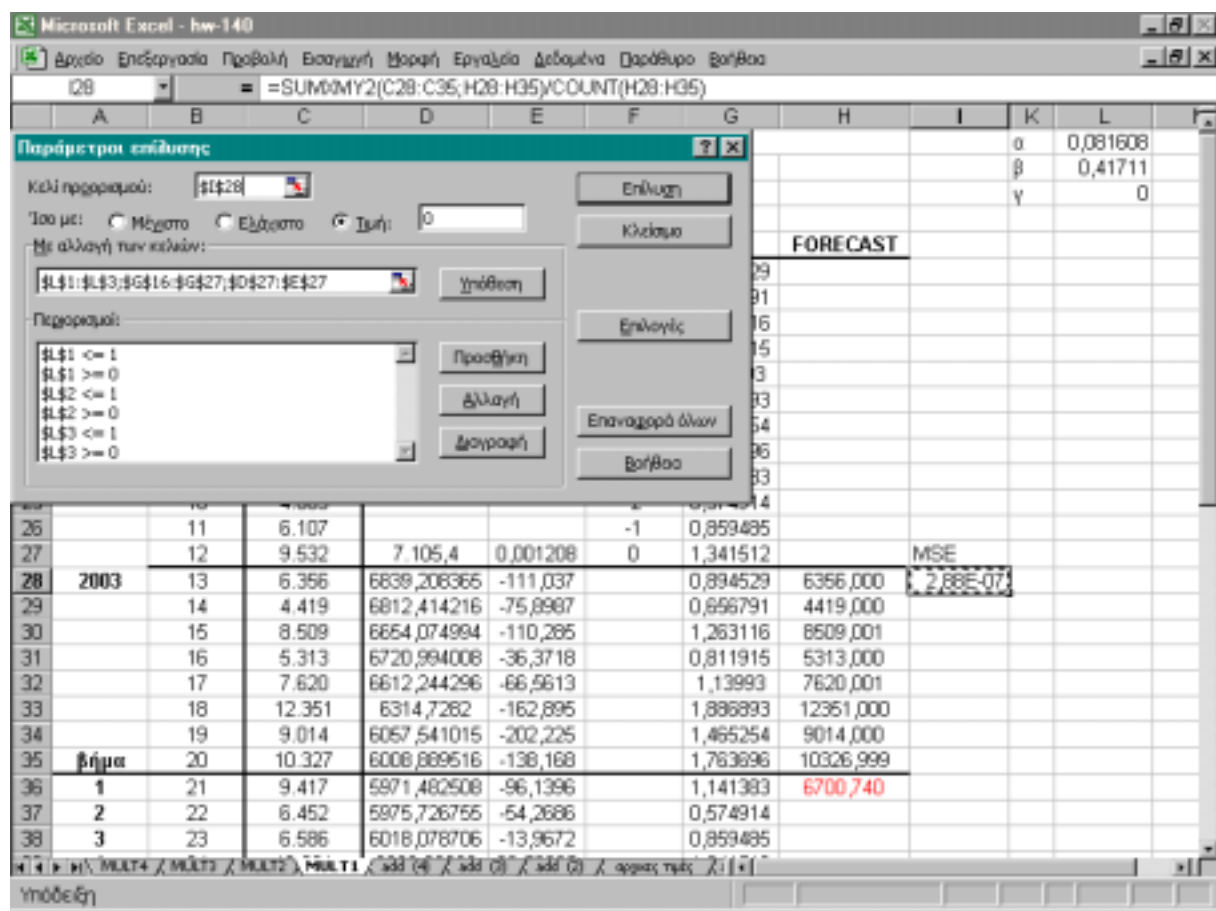
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M
1										α	1	
2										β	1	
3										γ	0	
15	year	t	D	F	b	I	I	FORECAST				
16	2002	1	3.438			-11	0.483856					
17		2	5.097			-10	0.71734					
18		3	7.233			-9	1.017956					
19		4	7.076			-8	0.99586					
20		5	6.609			-7	0.930135					
21		6	7.011			-6	0.986712					
22		7	7.321			-5	1.030341					
23		8	13.646			-4	1.920507					
24		9	8.110			-3	1.141383					
25		10	4.085			-2	0.574914					
26		11	6.107			-1	0.859485					
27		12	9.532	7.105,4	0	0	1.341512		MSE			
28	2003	13	6.356	7105,417	0		0.483856	3438,000	7141311			
29		14	4.419	7105,417	0		0.71734	5097,000				
30		15	8.509	7105,417	0		1.017956	7233,000				
31		16	5.313	7105,417	0		0.99586	7076,000				
32		17	7.620	7105,417	0		0.930135	6609,000				
33		18	12.351	7105,417	0		0.986712	7011,000				
34		19	9.014	7105,417	0		1.030341	7321,000				
35	βήμα	20	10.327	7105,417	0		1.920507	13646,000				
36	1	21	9.417	7105,417	-9,1E-13		1.141383					
37	2	22	6.452	7105,417	9,09E-13		0.574914					
38	3	23	6.586	7105,417	0		0.859485					
39	4	24	10.881	7105,417	0		1.341512					

Πίνακας 7.Υ

Σ' αυτό το φύλλο εισάγουμε σύμφωνα με τη μέθοδο Granger-Newbold αρχικές τιμές για το μέσο F, την τάση b και την εποχικότητα I. Έτσι στο κελί D27 είναι το F_0 ίσο με τη μέση τιμή των πωλήσεων του πρώτου έτους (AVERAGE(C16:C27)). Στο κελί E27 είναι η b_0 ίση με 0. Οι εποχικότητες από I_{-11} έως I_0 (κελιά G16 έως G27) δίνονται σαν το πηλίκο της τιμής πώλησης και της μέσης τιμής των πωλήσεων του πρώτου έτους. Γι αυτό εισάγουμε στο κελί G16 τον τύπο C16/AVERAGE(\$C\$16:\$C\$27) και τον σύρουμε με το ποντίκι έως και το κελί G27.

Στις τιμές των παραμέτρων α , β και γ δίνουμε τυχαίες τιμές στο [0,1]. Για την προσαρμογή του μοντέλου υπολογίζουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα όπως φαίνεται στο κελί I28.

Τώρα το πρόβλημα έχει διαμορφωθεί κατάλληλα για να επιλυθεί στο Solver.



Πίνακας 7. VI

Κελί προορισμού ορίζουμε το κελί που περιέχει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το οποίο θέλουμε όσο το δυνατόν μικρότερο (μηδέν). Οι περιορισμοί είναι το πεδίο τιμών των παραμέτρων α , β , γ , δηλαδή να ανήκουν στο $[0,1]$. Αλλαγή κελιών εννοείται η εύρεση τέτοιων τιμών για τα α , β , γ , F_0 , b_0 , $I_{-11} \dots I_0$, ώστε να μηδενίζεται το σφάλμα. Οι τιμές των κελιών D, E και G υπολογίζονται από τους τύπους που δίδονται στην παράγραφο για το πολλαπλασιαστικό μοντέλο Holt-Winters. Με την εντολή της επίλυσης δίδονται οι νέες τιμές για τα α , β , γ και F_0 , b_0 , $I_{-11} \dots I_0$. Η πρώτη πρόβλεψη είναι ίδια τόσο για προβλέψεις ενός βήματος όσο και για πολλών. Με όμοιο τρόπο υπολογίζονται οι αρχικές τιμές των παραμέτρων και για το αθροιστικό μοντέλο. Η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια στο Excel και το Solver. Το μόνο που αλλάζει είναι οι τύποι των παραμέτρων, οι οποίοι δίνονται σε προηγούμενα κεφάλαια.

Για την πρόβλεψη πολλών βημάτων προστά χρησιμοποιούμε τις τιμές του προηγούμενου φύλλου και ορίζουμε το βήμα της προς τα εμπρός πρόβλεψης, όπως φαίνεται στα κελιά A36 έως A39.

Για τις προβλέψεις πολλών βημάτων προστά ανανεώνουμε σε κάθε βήμα όλες τις παραμέτρους, διατηρώντας ίδια τη συνάρτηση του Solver, ενώ αλλάζουμε μόνο τη συνάρτηση υπολογισμού του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Ουσιαστικά σε κάθε βήμα προσαρμόζουμε στη συνάρτηση του σφάλματος το άθροισμα της διαφοράς των τιμών της ακριβώς προηγούμενης χρονικής περιόδου από αυτή που θέλουμε να προβλέψουμε. Πιο συγκεκριμένα στον προηγούμενο πίνακα η πρώτη πρόβλεψη αντιστοιχεί στο στοιχείο H36. Έτσι το MSE στον τύπο περιέχει το άθροισμα των τετραγωνικών διαφορών μέχρι μεταξύ των πραγματικών τιμών (από C28 μέχρι C35) και των προβλέψεων (από H28 έως H35).

Η ακριβώς επόμενη πρόβλεψη θα αντιστοιχεί στο κελί H37, ενώ στον τύπο του MSE θα διορθώσουμε τα C36 και H36, με C37 και H37. Ομοίως συνεχίζουμε μέχρι την πρόβλεψη H39, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή πρόβλεψης Z_{24} .

year	t	D	F	b	Ti	FORECAST	
2002	1	3.438			-11	0,894529	
	2	5.097			-10	0,631902	
	3	7.233			-9	1,215586	
	4	7.076			-8	0,765171	
	5	6.609			-7	1,089683	
	6	7.011			-6	1,776537	
	7	7.321			-5	1,319451	
	8	13.646			-4	1,531642	
	9	8.110			-3	1,393028	
	10	4.085			-2	0,964288	
	11	6.107			-1	1,00382	
	12	9.532	7.105,4	0,001109	0	1,341512	MSE
2003	13	6.356	7023,353	-30,1786		0,894529	6366,000
	14	4.419	7020,167	-20,2519		0,631902	4419,001
	15	8.509	6970,507	-29,9635		1,215586	8509,000
	16	5.313	7001,508	-8,6469		0,765171	5313,000
	17	7.620	6969,52	-17,2306		1,089683	7619,999
	18	12.351	6876,67	-45,0399		1,776537	12350,999
	19	9.014	6799,35	-56,9109		1,319451	9014,000
	20	10.327	6796,954	-36,8628		1,531642	10327,000
	21	9.417	6736,488	-45,5432		1,393028	9416,999
	22	6.452	6629,191	-68,253		0,964288	6451,999
	23	6.586	6548,933	-72,6678		1,00382	6586,002
	24	10.887	6492,094	-66,847		1,341512	8687,986

Πίνακας VII

Η τιμή του κελιού H39 είναι η τελευταία πρόβλεψη.

Όπως παρατηρούμε ο τύπος του MSE περιέχει τις τετραγωνικές διαφορές

μέχρι τα στοιχεία 38.

Τελικά συγκεντρώνουμε όλες τις προβλέψεις σε ένα πίνακα για κάθε περίπτωση και υπολογίζουμε από αυτές τα αντίστοιχα σφάλματα, όπως φαίνεται στο παραπάνω φύλλο.

Microsoft Excel - hw-140										
Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Δεδομένα Παράθυρο Βοήθεια										
C51		=SUM(MY2(C36:C39,C46:C49)/COUNT(C46:C49))								
	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
33	18	12.351	6314,7282	-162,9		1,8869	12351,000			
34	19	9.014	6057,541015	-202,2		1,4653	9014,000	ΠΡΟΒΛΕΨΗ		
35	20	10.327	6008,889516	-138,2		1,7637	10326,999	ΠΟΛΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ		
36	21	9.417	5971,482508	-96,14		1,1414	6700,740	6700,740		
37	22	6.452	5975,726755	-54,27		0,5749	3377,814	3322,542		
38	23	6.596	6018,078706	-13,97		0,8595	5069,405	4996,119		
39	24	10.881	6093,96683	23,521		1,3415	6054,586	7998,375		
40										
41										
42										
43										
44			ΠΡΟΒΛΕΨΗ							
45	ΤΙΜΗ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ	Ενός βήματος	Πολλών βημάτων							
46	z21	6700,74021	6.701							
47	z22	3555,628725	3.323							
48	z23	5431,054962	4.996							
49	z24	8687,986453	7.998							
50	ΣΦΑΛΜΑ									
51	MSE	5477560,067	7002206,159							
52	RMSE	2340,41878	2646,168203							
53										
54										
55										
56										
57										

8 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Φίλης Ι. Α., 2003, *Στοχαστικές Διαδικασίες: Γραμμικά Συστήματα- Αλυσίδες Markov- Θεωρία Πληροφοριών*, Σημειώσεις Μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης.

Φίλης Ι. Α., 2000, *Συστήματα Παραγωγής: Αποθέματα - Πρόβλεψη - Προγραμματισμός*, Σημειώσεις Μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης.

Box G. E. P., and Jenkins G. M., 1976, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, Oakland, California.

Rasmussen R., 2003, "On time series and optimal parameters", *Omega*, vol. 32, pp. 111-120.

Segura J.V., and Vercher E., 2000, "A spreadsheet modeling approach to the Holt-Winters optimal forecasting", *European Journal of Operational Research*, vol. 131, pp. 375-388.

Brander P., and Levén E., and Segerstedt A., 2004, "Lot sizes in a capacity constrained facility- a simulation study of stationary stochastic demand", *International Journal of Production Economics*, in press.

Perkins J.R., and Kumar P.R., 1989, "Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing/ assembly/ disassembly Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 2.