



ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
Τμήμα Στρατιωτικών Επιστημών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2023-24

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ
ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ –
MASTER OF SCIENCE IN OPERATIONAL
RESEARCH AND DECISION MAKING

(ΠΔ 59 /2021 /ΦΕΚ 145Α'/17.08.2021)



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής & Διοίκησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΟΛΥ-ΚΡΙΤΗΡΙΑΚΟΙ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Διατριβή που υπεβλήθη για την μερική ικανοποίηση των απαιτήσεων
για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Υπό:

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΤΣΙΡΟΓΙΑΝΝΗ

Α.Μ.:

2023018108

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2025

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

Η Μεταπτυχιακή Διατριβή του Γεώργιου Τσιρογιάννη εγκρίνεται:

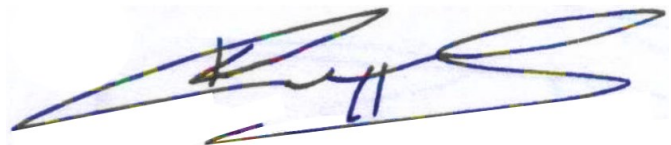
ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής Νικόλαος Ιω. Δάρας (Επιβλέπων)



Καθηγητής Νικόλαος Ματσατσίνης

Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Καραματσούκης



ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

© Copyright υπό

Έτος 2025

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στον επιβλέποντά μου, Καθηγητή κ. Νικόλαο Δάρα, για την ακατάπαυστη καθοδήγησή του, την ενθάρρυνση και την πολύτιμη εμπειρία που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Η υποστήριξή του ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση αυτού του έργου.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αδιάκοπη υποστήριξή της καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο	Περιεχόμενα Κεφαλαίου	Σελίδες
	ΠΕΡΙΛΗΨΗ	9
1	Εισαγωγή στην πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση και στους εξελικτικούς πολυ-κριτηριακούς υπολογισμούς	11-12
2	Πολυ-κριτηριακό πρόβλημα (Multi Objective Problem ή MOP)	12-14
3	Κατάτμηση των πολυ-κριτηρίων αλγόριθμων βελτιστοποίησης.	14-15
4	Προκλήσεις της μελέτης της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης.	15-16
5	Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στην αποσύνθεση (Multi-Objective Evolutionary Algorithms based on Decomposition ή MOEA/D).	17
	§5.1 Η προσέγγιση του σταθμισμένου αθροίσματος	17-18
	§5.2 Η προσέγγιση Tchebycheff	18
	§5.3 Η προσέγγιση Boundary Intersection (BI)	19
	§5.4 Η προσέγγιση MOEA/D-DRA (με δυναμική κατανομή πόρων ή Dynamic Resource Allocation ή DRA)	19-20
6	Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στις σχέσεις υπεροχής (Dominant Relation-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithms)	20
	§6.1 Γενετικός αλγόριθμος διανυσμάτων αξιολόγησης (Vector Evaluation Genetic Algorithm ή VEGA)	20-21
	§6.2 Λεξικογραφική μέθοδος βελτιστοποίησης (Lexicographic multi-/many-objective ή LMO)	21-22
	§6.3 Γενετικός αλγόριθμος Pareto κατάτμησης πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης (Niche Pareto Genetic Algorithm ή NPGA)	22-24

7	Μη κυριαρχούμενος γενετικός αλγόριθμος ταξινόμησης II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II ή NSGA-II)	25
§7.1	Μια σύντομη ιστορική αναδρομή	25
§7.2	Βασικά χαρακτηριστικά του NSGA-II	25-26
§7.3	Διαδικασία κατάταξης του πληθυσμού σε ομάδες κυριαρχίας μέσω του ταχύ μη κυριαρχούμενου αλγόριθμου ταξινόμησης (Fast Non-Dominated Sorting Algorithm)	26-27
§7.4	Ταχεία μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση των λύσεων	27-29
§7.5	Εκτίμηση πυκνότητας (density estimation) και τελεστής σύγκρισης συνωστισμού (Crowded Comparison Operator)	30-32
§7.6	Περιγραφή της λειτουργίας του NSGA-II	32-33
8	Ο εξελικτικός αλγόριθμος ισχυρής κυριαρχίας Pareto 2 (Strong Pareto Evolutionary Algorithm 2 ή SPEA2)	34
§8.1	Μια εισαγωγή στον SPEA2	34
§8.2	Ψευδοκώδικας του SPEA2	34-35
§8.3	Ανάθεση καταλληλότητας (Fitness Assignment) και επιλογή περιβάλλοντος (Environmental Selection).	35-38
9	Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι σε δείκτες αξιολόγησης (Evaluation Index-Based MOEA Algorithms)	39
§9.1	Μετρικές των MOEA	39-40
§9.2	Ο αλγόριθμος πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης βασισμένος στην επιλογή μέσω της S Μετρικής (S-Metric Selection-based Evaluative Multi-Objective Optimization Algorithm ή SMS-EMOA)	40-42
§9.3	Εξελικτικός αλγόριθμος βασισμένος σε ενδείκτες (Indicator-Based Evolution Algorithm ή IBEA)	42-44
§9.4	MOEA υψηλών διαστάσεων (High-Dimensioned MOEA)	44-45
10	Αξιολόγηση της απόδοσης των MOEA	46
§10.1	Πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης αναφοράς (Multi-Objective Optimization Benchmark Problems)	46-47
§10.2	Κρίσιμοι ενδείκτες αξιολόγησης των MOEA	47-48
11	Επίλογος - Το μέλλον της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης	49-50

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

51-53

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή έχει ως στόχο την επισκόπηση των πολυ-αντικειμενικών ή πολυ-κριτήριων εξελικτικών αλγορίθμων. Η εργασία επικεντρώνεται στην πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση και στους εξελικτικούς αλγόριθμους πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης. Αναλύονται οι βασικές αρχές της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης, η έννοια των αντικειμενικών συναρτήσεων, η χρήση των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων προκειμένου να επιτύχουμε την βέλτιστη δυνατή λύση με βάση τους περιορισμούς κάθε αντικειμενικής συνάρτησης. Η εργασία κατηγοριοποιεί τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους σε 3 κατηγορίες:

1. Τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης βασισμένους στην αποσύνθεση.
2. Τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης βασισμένους στις σχέσεις κυριαρχίας.
3. Τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης βασισμένους σε δείκτες αξιολόγησης.

Με βάση την παραπάνω κατάτμηση, γίνεται ανάλυση στις έννοιες και τις τεχνικές που χρησιμοποιεί η κάθε κατηγορία ενώ παρουσιάζονται και ενδεικτικά παραδείγματα αλγορίθμων. Στη συνέχεια, παραθέτονται λίγο εκτενέστερα δύο αλγόριθμοι οι οποίοι κατά την άποψη του συγγραφέα αλλά και με βάση την διεθνή βιβλιογραφία θεωρούνται “σημείο αναφοράς”. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ο NSGA-II και ο SPEA2.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την ανάλυση του τρόπου αξιολόγησης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης και ελέγχου τους, ενώ γίνεται αναφορά στην μελλοντική εξέλιξη της πολυ-κριτηριακής ανάλυσης.

ΣΕΛΙΔΑ ΣΚΟΠΙΜΑ ΚΕΝΗ

1. Εισαγωγή στην πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση και στους εξελικτικούς πολυ-κριτηριακούς υπολογισμούς

Αποτελεί κοινή παραδοχή το γεγονός ότι τα τελευταία έτη η έρευνα στο πεδίο της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης έχει σημειώσει μεγάλη πρόοδο. Οι αλγόριθμοι οι οποίοι εφαρμόζονται στην επίλυση πολυ-κριτηρίων προβλημάτων, συνεχώς εξελίσσονται ώστε να ανταποκρίνονται και στα πιο απαιτητικά προβλήματα και μάλιστα ορισμένοι σημειώνουν πολύ καλή απόδοση ακόμα και σε προβλήματα πολλών διαστάσεων ή με πολυάριθμες αντικειμενικές συναρτήσεις. Παρά την ανάπτυξη των τελευταίων ετών, η ίδια η φύση των πολυ-κριτηρίων προβλημάτων, γεννά πολλές φορές δυσκολίες και εμπόδια στην αποτελεσματική βελτιστοποίηση. Σήμερα όλο και περισσότεροι κλάδοι στηρίζονται στην πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση προκειμένου να κατανείμουν αποτελεσματικά τους πόρους τους, να ελαχιστοποιήσουν το κόστος παραγωγής, να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη κ.α. Ίσως να μην είναι εφικτό να ικανοποιηθούν όλοι οι περιορισμοί ή απαιτήσεις, έτσι σε κάθε περιορισμό ή απαίτηση πρέπει να ανατεθεί ένα βάρος στο πλαίσιο μιας μεθόδου αξιολόγησης. Ο καθορισμός των βαρών αυτών αποτελεί προτεραιότητα στην έρευνα Wang et al (2023).

Στο μεταξύ, η προσθήκη του όρου “εξελικτική” στην διαδικασία της βελτιστοποίησης γεννά νέες δυνατότητες οι οποίες είναι εμπνευσμένες από διαδικασίες της φύσης, όπως η επιλογή των καλύτερων λύσεων ή οντοτήτων ώστε να περάσουν στην επόμενη γενιά, και η μετάλλαξη. Ως εκ τούτου ονομάστηκε “εξελικτική βελτιστοποίηση”. Ο γενετικός αλγόριθμος, εμπνευσμένος από τις αρχές της βιολογικής εξέλιξης έχει συγκεντρώσει τα βλέμματα πάνω του.

Σύμφωνα με τους Wang et al (2023) συνήθως η πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση μπορεί να μετατραπεί σε ενός αντικειμένου συνάρτηση βελτιστοποίησης με την απόδοση βαρών και την προ-επεξεργασία, μετά την οποία μπορεί να επιλυθεί με την εφαρμογή κατάλληλων μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος μπορεί να αποδώσει μόνο μια βέλτιστη λύση για ένα συγκεκριμένο ζεύγος βαρών ανά επανάληψη. Επιπλέον, υπάρχει το ενδεχόμενο η αντικειμενική συνάρτηση καθώς και οι συναρτήσεις περιορισμοί των προβλημάτων να είναι μη συνεχής και μη γραμμικές με αποτέλεσμα να μην βρίσκουν εφαρμογή οι κλασσικές μέθοδοι μαθηματικού προγραμματισμού. Διαφαίνεται ξεκάθαρα η ανεπάρκεια των παραδοσιακών μεθόδων. Η λύση ενός πολυ-κριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης (Multi Objective Problem ή MOP) βασίζεται συχνά στην εύρεση μιας πληθώρας κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Σκοπεύει στην ταυτόχρονη ικανοποίηση όλων των περιορισμών και απαιτήσεων κάθε πλευράς με τρόπο κατά το δυνατό αποδοτικό ή βέλτιστο.

Στην πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση, εφόσον πολλαπλές συναρτήσεις βελτιστοποιούνται ταυτόχρονα, και συχνά μια βέλτιστη λύση μιας συνάρτησης μπορεί να μην είναι αποδεκτή για την άλλη (να έχουμε δηλαδή σύγκρουση), η υπερ-βελτιστοποίηση μιας

συνάρτησης θα οδηγήσει αναπόφευκτα στην κακή ή μη βέλτιστη λύση κάποιας άλλης αντικειμενικής συνάρτησης.

Οι Wang et al (2023) αναφέρουν τρεις διαφορετικές κατηγορίες της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης:

- Η ελαχιστοποίηση όλων των συναρτήσεων.
- Η μεγιστοποίηση όλων των συναρτήσεων.
- Η ελαχιστοποίηση ορισμένων συναρτήσεων και η μεγιστοποίηση των υπολοίπων.

2. Πολυ-κριτηριακό πρόβλημα (*Multi Objective Problem ή MOP*)

Ο Deb (2001) αναφέρει πως ένα πολυ-κριτηριακό πρόβλημα περιλαμβάνει αριθμό από αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες πρέπει είτε να ελαχιστοποιηθούν είτε να μεγιστοποιηθούν. Όπως και στα προβλήματα βελτιστοποίησης ενός κριτηρίου, έτσι και στα πολυ-κριτηριακά είναι δυνατό να περιλαμβάνεται αριθμός συναρτήσεων - περιορισμών τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν όλες οι δυνατές λύσεις (feasible solutions) και φυσικά οι βέλτιστες λύσεις. Η γενική μορφή ενός MOP μπορεί να ορισθεί όπως στην Εξίσωση (1):

$$\begin{aligned}
 &\text{Ελαχιστοποίηση/Μεγιστοποίηση της} && f_m(x) && m=1,2,\dots,M \\
 &\text{υπό τους περιορισμούς} && g_j(x) \geq 0 && j=1,2,\dots,J \quad (1) \\
 & && h_k(x) = 0 && k=1,2,\dots,K \\
 & && x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}
 \end{aligned}$$

Μια λύση ή οντότητα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από n μεταβλητές απόφασης (decision variables): $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Οι λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις συναρτήσεις - περιορισμούς καθώς και τα διάφορα όρια για τις τιμές των μεταβλητών απόφασης τα οποία προκύπτουν και πάλι από τις αρχικές συνθήκες περιορισμών, συνιστούν το εφικτό διάστημα μεταβλητών απόφασης (feasible decision variable space) $S \subset \mathbb{R}^n$. Στα προβλήματα βελτιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, ο χώρος των μεταβλητών απόφασης είναι μιας μονής διάστασης, σε αντίθεση με τα πολυ-κριτηριακά προβλήματα στα οποία είναι πολλών διαστάσεων. Ο πολυδιάστατος χώρος ο οποίος προκύπτει από την τοποθέτηση κάθε διανύσματος λύσης στις αντικειμενικές συναρτήσεις ονομάζεται αντικειμενικός χώρος (objective space) και ο αριθμός των διαστάσεων που θα έχει καθορίζεται από το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων.

Σε αντίθεση με τα ενός κριτηρίου προβλήματα βελτιστοποίησης, τα οποία συνήθως έχουν μια βέλτιστη λύση η οποία μπορεί να εντοπιστεί χρησιμοποιώντας κλασσικά μαθηματικά μοντέλα, η πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση εμπλέκει πολλούς αντικρουόμενους στόχους. Σε τέτοιου είδους προβλήματα, η εύρεση μιας μονής λύσης η

οποία να βελτιστοποιεί όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα είναι αρκετά δύσκολη διότι η βελτιστοποίηση μιας μπορεί να σημαίνει ότι οδηγούμαστε σε μη βέλτιστη λύση κάποιας άλλης συνάρτησης. Αντιθέτως, μια λύση πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης, η οποία συνήθως θα είναι η κατά Pareto βέλτιστη λύση, συμβιβάζει τους αντικρουόμενους στόχους.

Οι Coello et al (2007) ορίζουν τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις ως τις λύσεις εκείνες για τις οποίες καμία αντικειμενική συνάρτηση δεν μπορεί να βελτιστοποιηθεί περαιτέρω χωρίς να χειροτερεύσει κάποια άλλη. Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω αντιλαμβανόμαστε ότι η έννοια της κατά Pareto βέλτιστης λύσης στην ουσία είναι η εύρεση μιας ισορροπίας ανάμεσα στις λύσεις των αντικειμενικών συναρτήσεων ή η εύρεση ικανοποιητικών συμβιβαστικών λύσεων που να ικανοποιούν με τρόπο που να τείνει στον βέλτιστο όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις.

Ο καθορισμός των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων είναι το ίδιο απαιτητικός με την επιλογή των πλέον επιθυμητών από αυτές, χωρίς να γνωρίζουμε επιπλέον λεπτομέρειες. Ως αποτέλεσμα, όλες οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις μπορούν να θεωρηθούν εξίσου επιθυμητές. Συνεπώς, η εύρεση τέτοιων λύσεων σε ένα δεδομένο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ο πρωταρχικός στόχος της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης. Ο Deb (2001) ορίζει ως δυο τους σημαντικότερους ή ιδανικότερους στόχους της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης, όπως παρακάτω:

- Η εύρεση μιας ομάδας λύσεων όσο πιο κοντά στις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις.
- Η εύρεση μιας ομάδας λύσεων οι οποίες να διαφέρουν μεταξύ τους όσο το δυνατό περισσότερο γίνεται, ώστε να καταλαμβάνουν όλο το όριο Pareto (Pareto front).

Από τους προαναφερθέντες στόχους, η εύρεση ομάδας λύσεων οι οποίες να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στο όριο Pareto (σύγκλιση ή convergence) είναι απαραίτητη προϋπόθεσή ώστε να προχωρήσει η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Ο δεύτερος στόχος (διαφοροποίηση ή διαφορετικότητα ή diversity) είναι εξίσου σημαντικός, αφού για την εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων πρέπει να εξερευνηθεί ολόκληρο όριο Pareto ώστε να μην εγκλωβιστούμε πρόωρα σε τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Προηγουμένως, έγινε αντιληπτή η διαφορά μεταξύ του χώρου μεταβλητών απόφασης και του αντικειμενικού χώρου. Οι Wang et al (2023) αναφέρουν σχετικά με την διαφορετικότητα ότι σε έναν πολυ-κριτηριακό εξελικτικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης (Multi-Objective Evolutionary Algorithm ή MOEA), η διαφορετικότητα μπορεί να εντοπιστεί τόσο στον χώρο μεταβλητών απόφασης (decision variable space) όσο και στον αντικειμενικό χώρο (objective space). Για παράδειγμα, εάν η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δυο λύσεων είναι μεγάλη στον χώρο μεταβλητών απόφασης, τότε αυτές θεωρούνται διαφορετικές στον συγκεκριμένο χώρο. Ομοίως, λύσεις οι οποίες απέχουν μεταξύ τους αρκετά και στον αντικειμενικό χώρο, τότε θεωρούνται διαφορετικές. Ωστόσο, σε περιπτώσεις πολύπλοκων και μη γραμμικών βελτιστοποιήσεων, η διαφοροποίηση των λύσεων στον έναν

χώρο δεν συνεπάγεται απαραίτητα και την διαφοροποίηση των λύσεων αυτών και στον άλλο χώρο.

3. Κατάτμηση των πολυ-κριτηρίων αλγόριθμων βελτιστοποίησης

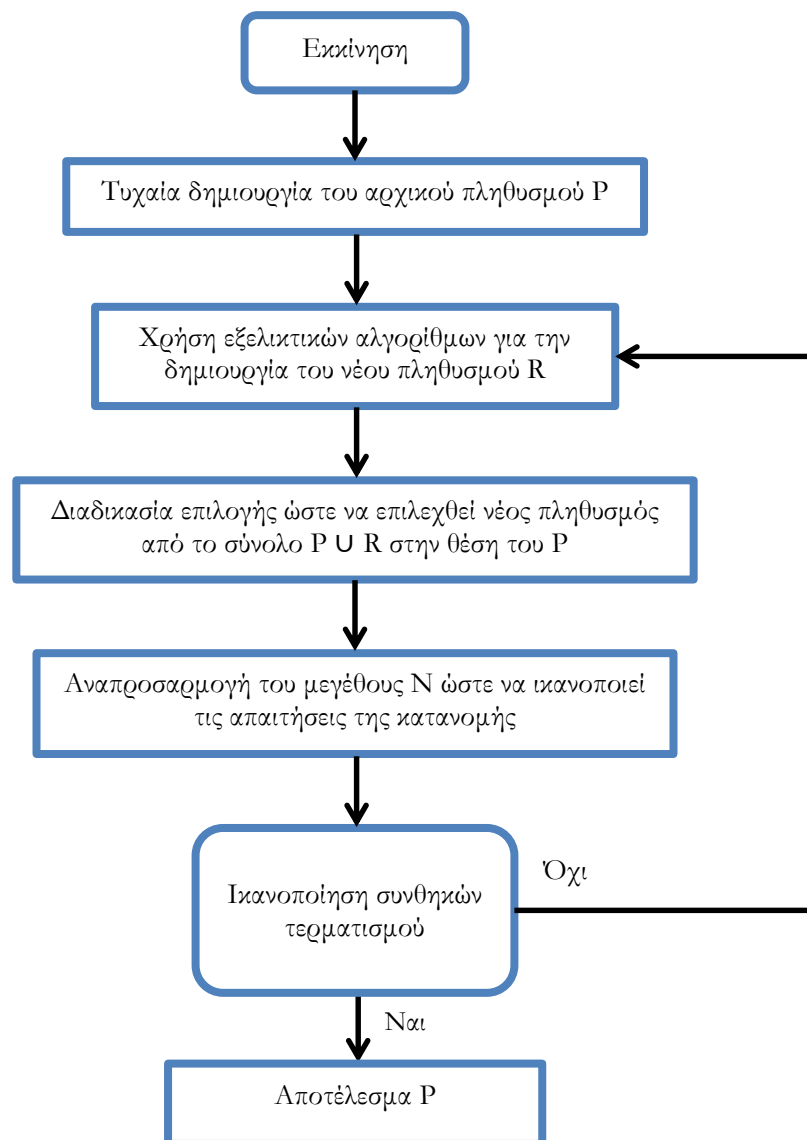
Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί πως η ταξινόμηση των πολυ-κριτηρίων αλγόριθμων βελτιστοποίησης ακολουθεί την ταξινόμηση την οποία προτείνουν στην εργασία τους οι Wang et al (2023), οι οποίοι ταξινομούν τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς υπολογιστικούς αλγόριθμους ή multi-objective evolutionary computational algorithms με βάση ορισμένα χαρακτηριστικά τους. Στην παρούσα διατριβή, γίνεται επισκόπηση των αλγορίθμων οι οποίοι βασίζονται στην διαφορική εξέλιξη ενώ προτείνεται και μια μέθοδος κατηγοριοποίησης τους, η οποία εδώ στηρίζεται στην τεχνική αναζήτησης του κάθε αλγορίθμου, όπως πιο κάτω:

4. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στην αποσύνθεση.
5. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στις σχέσεις κυριαρχίας.
6. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι σε δείκτες αξιολόγησης.

Για την βαθύτερη κατανόηση της διαδικασίας αναζήτησης στους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης, παρατίθεται η βασική ροή των βασιζόμενων στις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις πολυ-κριτηριακών εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης, όπως στο Σχήμα 1. Αρχικά, αρχικοποιείται ο πληθυσμός P και ένας εξελικτικός αλγόριθμος όπως ένας ο οποίος βασίζεται στην αποσύνθεση, επιλέγεται ώστε να εφαρμόσει εξελικτική διαδικασία στο σύνολο P ώστε να αποκτήσουμε τον νέο πληθυσμό R . Στην συνέχεια, η βέλτιστη ομάδα λύσεων $P \cup R$ κατασκευάζεται και το μέγεθος της ορίζεται ως N . Εάν το μέγεθος της τρέχουσας ομάδας βέλτιστων λύσεων N είναι ασύμβατο με το αρχικό σέτ N τότε το τρέχον N χρειάζεται προσαρμογή ενώ το N το οποίο πρόκειται να τεθεί σε διαδικασία προσαρμογής θα πρέπει να ικανοποιεί τις απαιτήσεις της κατανομής. Το παραπάνω καθορίζει το κατά πόσο ο αλγόριθμος έχει ολοκληρωθεί ή όχι. Οι λύσεις στο N θα αντιγράφουν στον πληθυσμό P ώστε να περάσουμε στον επόμενο γύρο της εξελικτικής διαδικασίας, διαφορετικά η διαδικασία τερματίζεται. Ο αριθμός των επαναλήψεων της εξελικτικής διαδικασίας χρησιμοποιείται ώστε να έχουμε τον έλεγχο της εκτέλεσης της όλης διαδικασίας.

Στους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους, η διατήρηση και η ενσωμάτωση της βέλτιστης ομάδας λύσεων από προγενέστερες γενιές στην εξελικτική διαδικασία της τρέχουσας γενιάς είναι κρίσιμη απαίτηση για την διαφοροποίηση. Αυτό επιτρέπει να

προσεγγίσουμε πραγματικά μια σύγκλιση προς τα όρια των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων και κατά συνέπεια να οδηγηθούμε σε ένα ικανοποιητικό εξελικτικό αποτέλεσμα.



Σχήμα 1. Η ροή των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων των πολυκριτηριακών αλγορίθμων εξελικτικής βελτιστοποίησης. Το βέλτιστο σετ λύσεων από προηγούμενες γενιές διατηρείται και προστίθεται στις νέες γενιές ώστε να συνεχιστεί η σύγκλιση προς τα όρια των πραγματικών κατά Pareto βέλτιστων λύσεων. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

4. Προκλήσεις της μελέτης της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης.

Είναι γεγονός ότι η πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση έχει ένα τεράστιο πλήθος πρακτικών εφαρμογών σε πολλούς τομείς. Ως εκ τούτου, οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης αρκετών ερευνητών παγκοσμίως, γεγονός το οποίο καταδεικνύεται από

την ολοένα αυξανόμενη δημοσίευση επιστημονικών εργασιών σχετικά με το συγκεκριμένο πεδίο. Ενδεικτικά παραθέτονται πιο κάτω κάποιες από τις δυσκολίες που εντοπίζονται στην μελέτη και προσπάθεια επίλυσης πολυ-κριτήριων προβλημάτων.

- Όσο οι διαστάσεις ενός ΜΟΡ αυξάνονται οι συνηθισμένοι αλγόριθμοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες ως προς την επίλυσή τους.
- Η πολυπλοκότητα αυξάνεται καθώς αυξάνονται οι διαστάσεις του προβλήματος με αποτέλεσμα την απαίτηση αυξημένων υπολογιστικών πόρων για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων.
- Η φύση των παραπάνω αλγορίθμων εμπεριέχει την τυχαιότητα αφού αρκετές παράμετροι είναι αναγκαίο να καθοριστούν από τον επιλύοντα το πρόβλημα, όπως θα δούμε και στην συνέχεια.
- Η ύπαρξη αντικειμενικής δυσκολίας στην επιλογή του κατάλληλου αλγόριθμου κάθε φορά για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος αφού όλοι οι αλγόριθμοι παρουσιάζουν δυνατότητες αλλά και αδυναμίες.

5. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στην αποσύνθεση (Multi-Objective Evolutionary Algorithms based on Decomposition ή MOEA/D).

Οι Zhang et al (2007) διασπούν τα ανωτέρω προβλήματα αποσύνθεσης σε 3 τύπους υπο-προβλημάτων: αυτά της προσέγγισης του σταθμισμένου αθροίσματος (Weighted Sum Approach), αυτά που αντιμετωπίζονται μέσω της προσέγγισης Tchebycheff (Tchebycheff Approach) και σε αυτά στα οποία επιλέγονται λύσεις που βρίσκονται στην τομή μεταξύ μιας κατευθυντήριας γραμμής και του ορίου Pareto (Pareto front) δηλαδή αντιμετωπίζουν τα προβλήματα αυτά μέσω της προσέγγισης Boundary Intersection.

Στην κατηγορία των πολυ-κριτηρίων εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης βασισμένων στην αποσύνθεση ανήκουν οι αλγόριθμοι οι οποίοι επιχειρούν να “διασπάσουν” το αρχικό πολυ-κριτηριακό πρόβλημα (MOP) σε προβλήματα βελτιστοποίησης ενός κριτηρίου. Αυτή είναι και η βασική μεθοδολογία που ακολουθούν οι πιο πάνω αλγόριθμοι.

5.1 Η προσέγγιση του σταθμισμένου αθροίσματος

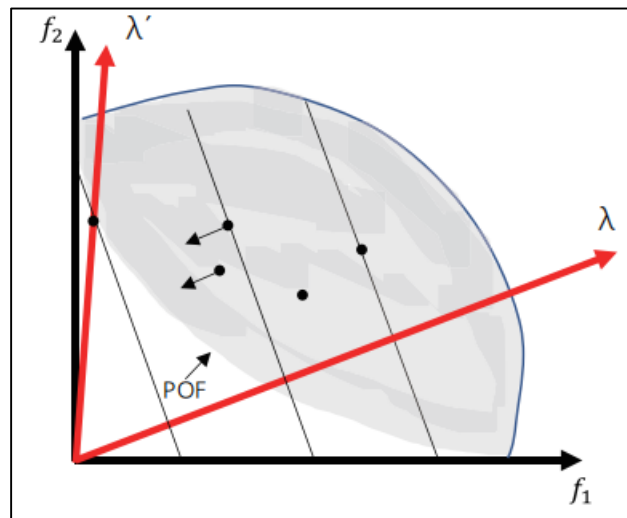
Η προσέγγιση του σταθμισμένου αθροίσματος ή Weighted Sum Approach βρίσκει καλή εφαρμογή στις περιπτώσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης μεγιστοποίησης τα οποία παρουσιάζουν κοίλο (concave) Pareto front καθώς και σε προβλήματα βελτιστοποίησης ελαχιστοποίησης τα οποία παρουσιάζουν κυρτό (convex) Pareto front. Η προσέγγιση του σταθμισμένου αθροίσματος συνήθως βρίσκει εφαρμογή σε γραμμικές πολυκριτηρίες μεθόδους συνολοποίησης. Υποθέτοντας ότι το πολυκριτηριακό πρόβλημα προς βελτιστοποίηση έχει m συνολικά κριτήρια, η συνάρτηση τότε θα μετατρέψει το παραπάνω πρόβλημα σε ενός κριτηρίου πρόβλημα μέσω της απόδοσης βαρών σε κάθε κριτήριο με την εφαρμογή ενός μη αρνητικού διανύσματος βάρους $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$. Η μαθηματική έκφραση των ανωτέρω έχει όπως στην Εξίσωση (2):

$$\text{maximize } g^{ws}(x|\lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), \text{ με } x \in \Omega \quad (2)$$

Το διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ είναι ένα σέτ διανυσμάτων βαρών. Κάθε στοιχείο λ_i αναφέρεται στο i -οστό διάνυσμα, ενώ ισχύει ότι $\lambda_i \geq 0$, και το άθροισμα των λ_i είναι 1.

Στην Εικόνα 2, οι άξονες f_1 και f_2 αντιπροσωπεύουν δύο αντικειμενικούς στόχους που πρέπει να βελτιστοποιηθούν. Συνήθως σε τέτοιες αναπαραστάσεις γίνεται προσπάθεια να ελαχιστοποιηθούν και οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις. Η γκριζα σκιασμένη περιοχή αντιπροσωπεύει τον εφικτό χώρο λύσεων (feasible solution space). Η μπλε καμπύλη στο εξωτερικό της γκριζας περιοχής αναπαριστά το μέτωπο Pareto (Pareto Optimal Front) σε προβλήματα μεγιστοποίησης ενώ το POF υποδεικνύει το Pareto front σε περίπτωση προβλημάτων ελαχιστοποίησης. Τα κόκκινα βέλη λ και λ' αναπαριστούν τα διανύσματα των βαρών που αποδίδονται σε κάθε αντικειμενική συνάρτηση. Χρησιμοποιούνται ώστε να

ορίσουν γραμμικούς συνδυασμούς των στόχων που χρησιμοποιούνται σε αλγόριθμους αποσύνθεσης, όπως ο MOEA/D. Οι μαύρες τελείες στο διάγραμμα αναπαριστούν λύσεις ή οντότητες στον χώρο επιθυμητών λύσεων. Η θέση τους σε σχέση με το μέτωπο Pareto υποδηλώνει πόσο κοντά ή μακριά είναι αυτές οι λύσεις από το Pareto front. Οι γραμμές που φαίνεται να κατευθύνονται προς το μέτωπο Pareto από τις μαύρες τελείες υποδηλώνουν την κατεύθυνση της βελτίωσης (εδώ στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης). Αυτές οι γραμμές δείχνουν πώς οι λύσεις μετακινούνται προς το μέτωπο Pareto μέσω της βελτιστοποίησης.



Εικόνα 2. Επεξήγηση της έννοιας της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης, ειδικότερα στο πλαίσιο της αποσύνθεσης των πολυ-κριτήριων προβλημάτων μέσω αλγορίθμων όπως ο MOEA/D. Οι κόκκινες γραμμές δείχνουν διαφορετικές κατευθύνσεις ή βάρη που χρησιμοποιούνται για τη βελτιστοποίηση. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

5.2 Η προσέγγιση *Tchebycheff*

Σε αυτήν την κατηγορία προσέγγισης, η βελτιστοποίηση η οποία θα εφαρμοστεί αφορά ακόμα μονο-κριτηριακά προβλήματα τα οποία είναι στην γενική μορφή:

$$\text{Ελαχιστοποίηση της} \quad g^{te}(x|\lambda, z^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i |f_i(x) - z_i^*|\}$$

$$\text{υπό τους περιορισμούς:} \quad x \in \Omega \quad (3)$$

όπου, $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*)^T$, είναι το σημείο αναφοράς δηλαδή $z_i^* = \max\{f_i(x) | x \in \Omega\}$, για κάθε $i=1, 2, \dots, m$.

Για κάθε Pareto βέλτιστο σημείο x^* υπάρχει ένα διάνυσμα βάρους λ τέτοιο ώστε το x^* να είναι βέλτιστη λύση της εξίσωσης (3) και κάθε βέλτιστη λύση της (3) να είναι κατά Pareto βέλτιστη λύση της (1). Έτσι είμαστε σε θέση να λαμβάνουμε διαφορετικές κατά Pareto βέλτιστες λύσεις μεταβάλλοντας το διάνυσμα βάρους λ .

5.3 Η προσέγγιση *Boundary Intersection (BI)*

Οι Zhang et al (2007) αναφέρονται σε αυτήν την προσέγγιση μέσω δυο υπο-προσεγγίσεων της ανωτέρω προσέγγισης: της Normal-Boundary Intersection Method καθώς και της Normalized Normal Constraint Method, οι οποίες όπως ήδη αναφέρθηκε αποτελούν “υπο-κατηγορίες” της προσέγγισης Boundary Intersection (BI). Έχουν σχεδιαστεί για συνεχή (continuous) προβλήματα πολλαπλών κριτηρίων (MOP). Η βασική τους προσέγγιση περιγράφεται από την εύρεση λύσεων πάνω στο Pareto Front (PF) χρησιμοποιώντας γεωμετρικές προσεγγίσεις που αναζητούν σημεία τομής (intersection points) ανάμεσα σε κατευθυντήριες γραμμές και τα όρια του εφικτού συνόλου των αντικειμενικών τιμών (objective set). Η γεωμετρική προσέγγιση των BI έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποιούν κατευθυντήριες γραμμές που ξεκινούν από ένα σημείο αναφοράς (reference point) και τέμνουν το Pareto Front σε σημεία τομής. Αν αυτές οι γραμμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, τότε οι λύσεις που προκύπτουν θα καλύπτουν ομοιόμορφα το PF.

Η προσέγγιση αυτή μειονεκτεί ως προς το γεγονός ότι χειρίζεται περιορισμούς ισότητας (equality constraints), κάτι που αυξάνει την περιπλοκότητα της επίλυσης του MOP. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιείται μια μέθοδος προσέγγισης της BI η οποία βασίζεται στην ποινή (penalty method), κάθε φορά όπου χρησιμοποιούνται περιορισμοί ισότητας. Απαιτείται προσεκτική επιλογή της παραμέτρου ποινής αφού υπερβολικά μεγάλες ή μικρές παράμετροι ποινής χειροτερεύουν την απόδοση της προσέγγισης η οποία βασίζεται στην ποινή.

5.4 Η προσέγγιση *MOEA/D-DRA (με δυναμική κατανομή πόρων ή Dynamic Resource Allocation ή DRA)*

Οι Zhang et al (2009) αναλύουν την παραπάνω προσέγγιση. Ας ορίσουμε ως $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N$ ένα σετ από ομοιόμορφα κατανεμημένα διανύσματα βάρους (weight vectors), και z^* ως το σημείο αναφοράς. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρόβλημα της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλαπλών (N) μονο-κριτηριακών προβλημάτων. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση του j -οστού προβλήματος θα έχει την μορφή:

$$g^{te}(x|\lambda^j, z^*) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i^j |f_i(x) - z_i^*|\} \quad (4)$$

όπου $\lambda^j = (\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_m^j)^T$, και $j=1, 2, \dots, N$. Με την προσέγγιση MOEA/D καταφέρνουμε να ελαχιστοποιήσουμε όλες αυτές τις N αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα σε μια μόνο εκτέλεση του αλγορίθμου.

Οι σχέσεις γειτνίασης (neighborhood relations) μεταξύ αυτών των υπο-προβλημάτων ενός κριτηρίου ορίζονται με βάση τις αποστάσεις μεταξύ των διανυσμάτων βαρών τους. Κάθε υπο-πρόβλημα βελτιστοποιείται κυρίως χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τα γειτονικά του υπο-προβλήματα. Ωστόσο, αυτά τα υπο-προβλήματα συνήθως έχουν

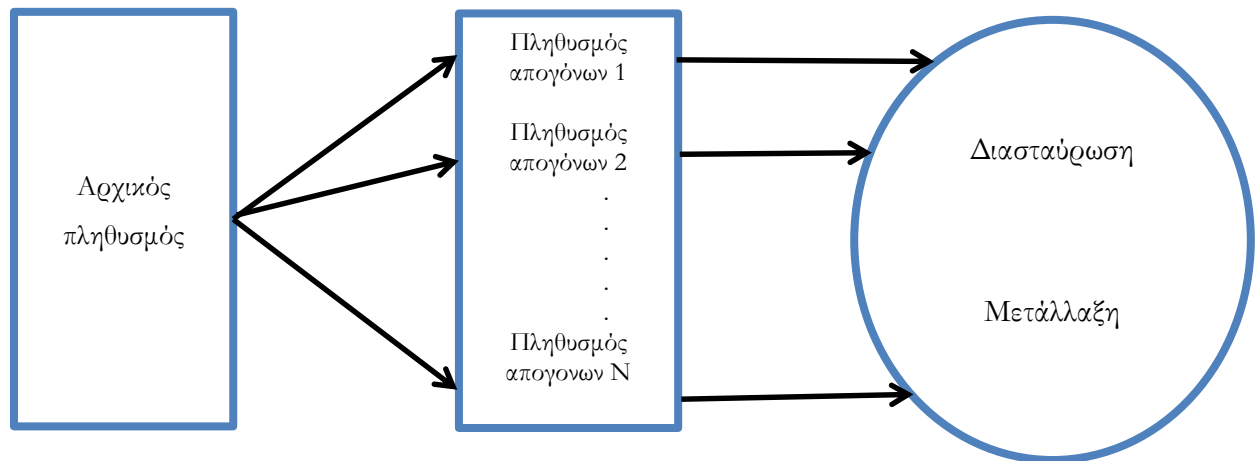
διαφορετικές δυσκολίες επίλυσης, επομένως είναι πολύ πιθανό να κατανέμεται διαφορετική ποσότητα υπολογιστικού χρόνου σε διαφορετικά προβλήματα εξού και η δυναμική κατανομή πόρων.

6. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι στις σχέσεις υπεροχής (Dominant Relation-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithms)

6.1 Γενετικός αλγόριθμος διανυσμάτων αξιολόγησης (Vector Evaluation Genetic Algorithm ή VEGA)

Είναι γεγονός πως οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι πολλά υποσχόμενοι στην διαδικασία επίλυσης πολυ-κριτήριων προβλημάτων. Ο Schaffer (1985) πρότεινε την χρήση ενός γενετικού αλγόριθμου διανυσμάτων αξιολόγησης (Vector Evaluation Genetic Algorithm ή VEGA), η κύρια ιδέα του οποίου είναι η διαίρεση του αρχικού πληθυσμού σε υποσύνολα το καθένα από τα οποία βελτιστοποιείται για έναν συγκεκριμένο στόχο ή κριτήριο. Στη συνέχεια εφαρμόζονται οι διαδικασίες αναπαραγωγής (crossover) και μετάλλαξης (mutation) και τα υποσύνολα συνδυάζονται ξανά σε έναν νέο πληθυσμό, ο οποίος διατηρεί τα χαρακτηριστικά των βέλτιστων οντοτήτων ή λύσεων των μεμονωμένων μονο-κριτηριακών προβλημάτων. Η δημιουργία του ανωτέρω αλγορίθμου ήρθε μέσα από την βελτίωση και εξέλιξη του απλού γενετικού αλγόριθμου (Simple Genetic Algorithm ή SGA). Η δημιουργία του VEGA παρείχε μια κατά Pareto βέλτιστη λύση στο πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια παράλληλη προσέγγιση η οποία οδήγησε στην επίλυση απαιτητικών πολυ-κριτήριων προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Οι Wang et al (2023) αναφέρουν για τον VEGA πως η αξιολόγηση των διανυσμάτων του γενετικού αλγορίθμου θεωρείται ως η βελτιωμένη εκδοχή του απλού γενετικού αλγόριθμου. Όπως παρατηρούμε στην Εικόνα 3, τα k πολυ-κριτήρια προβλήματα πρέπει να ανατεθούν σε k τυχαίες ομάδες, με το μέγεθος της κάθε ομάδας να είναι N/k , όπου N το σύνολο της ομάδας. Κάθε συνάρτηση των υπο-προβλημάτων αξιολογεί και επιλέγει ανεξάρτητα στο δεδομένο υποσύνολό της τις λύσεις και σχηματίζει μια νέα ομάδα ώστε να προχωρήσει στην διασταύρωση και την μετάλλαξη των απογόνων. Με τον τρόπο αυτό η διαδικασία της τμηματοποίησης, παράλληλης αξιολόγησης, επιλογής και συγχώνευσης, προχωρά σε έναν κύκλο και το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι μια κατά Pareto βέλτιστη λύση.



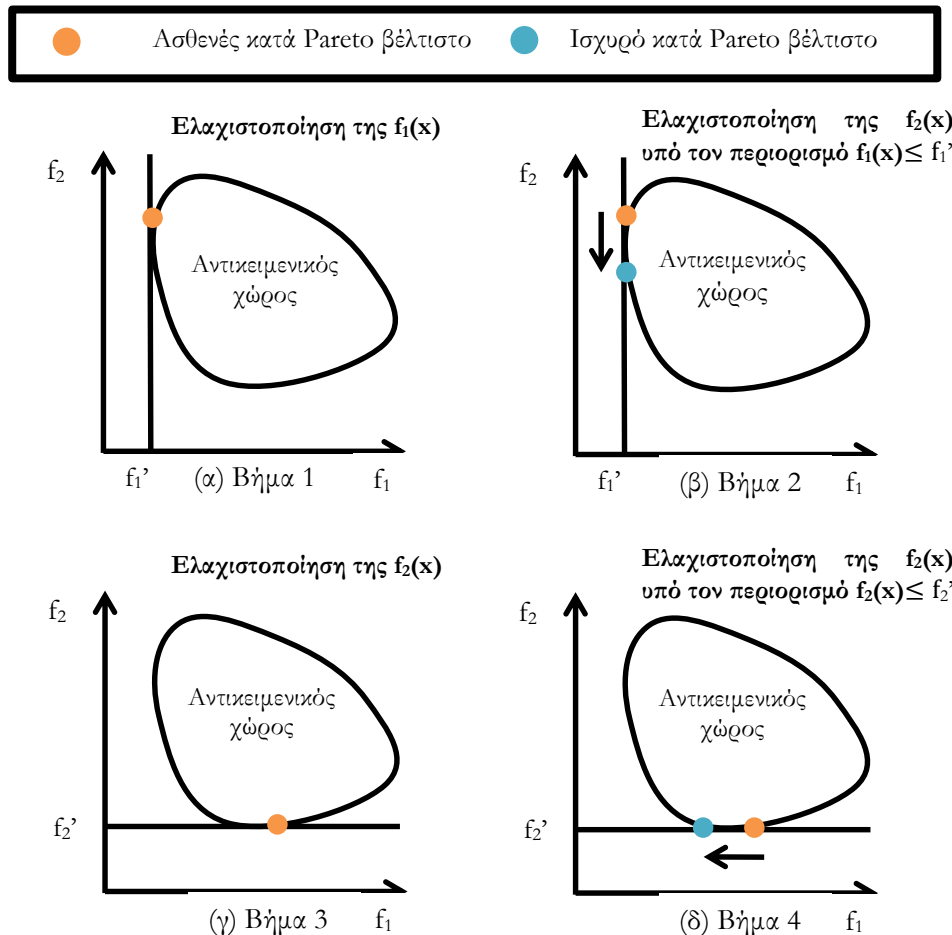
Εικόνα 3. Η λειτουργία του μηχανισμού VEGA. Το πολυ-κριτηριακό πρόβλημα διασπάται σε υπο-προβλήματα με το κάθε ένα από αυτά να βελτιστοποιείται ως προς ένα κριτήριο. Ο πληθυσμός των απογόνων που προκύπτει αξιολογείται και στην συνέχεια ένα νέο σύνολο δημιουργείται, διασταυρώνεται ενώ παράλληλα λαμβάνουν χώρα διαδικασίες διαφοροποίησης (μετάλλαξης). Αυτή η διαδικασία η οποία εκτελείται σε κύκλο οδηγεί στην προσέγγιση βέλτιστων λύσεων του προβλήματος. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

6.2 Λεξικογραφική μέθοδος βελτιστοποίησης (Lexicographic multi-/many-objective ή LMO)

Στην εργασία τους οι Lai et al (2022) αναλύουν την λεξικογραφική μέθοδο πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης (Lexicographic multi-/many-objective ή LMO) ως την μέθοδο εκείνη η οποία μέσα από μια αυστηρώς καθορισμένη σχέση (διαδοχικής βελτιστοποίησης), η πολυ-κριτηριακή βελτιστοποίηση διασπάται σε προβλήματα βελτιστοποίησης ενός κριτηρίου τα οποία βελτιστοποιούνται και οι βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν λαμβάνονται ως περιορισμοί για την επόμενη μονο-κριτηριακή βελτιστοποίηση. Οι Wang et al (2023) αναφέρουν σχετικά ότι πρόκειται για μια μέθοδο πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης η οποία οδηγεί σε κατά Pareto βέλτιστες λύσεις. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η διαδικασία ξεκινά με τον ορισμό μιας αντικειμενικής συνάρτησης και τον καθορισμό της εφικτής κυριαρχίας του αντικειμενικού χώρου με την χρήση περιορισμών. Αναλόγως της σημαντικότητάς τους οι αντικειμενικές συναρτήσεις αναγνωρίζονται και η βελτιστοποίηση διεξάγεται επαναληπτικά. Η ενός κριτηρίου βελτιστοποίηση έχει την δυνατότητα του πιο εύκολου εντοπισμού του βέλτιστου καθώς μόνο ένα κριτήριο λαμβάνεται υπόψη κατά την διαδικασία.

Στην Εικόνα 4 διακρίνεται ένα παράδειγμα της διαδικασίας της λεξικογραφικής βελτιστοποίησης για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο κριτηρίων με στόχο την ελαχιστοποίηση, όπου $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι οι αντικειμενικές συναρτήσεις και f_1' και f_2' είναι οι βέλτιστες λύσεις των παραπάνω δυο αντικειμενικών συναρτήσεων αντίστοιχα. Για την αποτροπή της εύρεσης αδύναμων κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, οι αντικειμενικές συναρτήσεις ελαχιστοποιούνται διαδοχικά, ενώ οι λύσεις οι οποίες βρέθηκαν χρησιμοποιούνται ως περιορισμοί. Η κατά Pareto βέλτιστη λύση ανακαλύπτεται με την

χρήση της βέλτιστης τιμής μιας από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις ως περιορισμό την ώρα όπου η άλλη αντικειμενική συνάρτηση έχει ελαχιστοποιηθεί. Με τον τρόπο αυτό, εάν υπάρχουν n προβλήματα, τότε n αρχικές βέλτιστες λύσεις θα είναι διαθέσιμες ως σημείο εκκίνησης για την εύρεση της επόμενης κατά Pareto βέλτιστης λύσης της αντικειμενικής συνάρτησης.



Εικόνα 4. Ένα παράδειγμα της διαδικασίας της λεξικογραφικής βελτιστοποίησης για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο αντικειμενικών συναρτήσεων. Αρχικά, η $f_1(x)$ ελαχιστοποιείται, ενώ η βέλτιστη τιμή η οποία αποκτάται χρησιμοποιείται ως περιορισμός. Στην συνέχεια, αφού η $f_2(x)$ ελαχιστοποιηθεί και αυτή, η βέλτιστη τιμή της χρησιμοποιείται επίσης ως περιορισμός ώστε να συνεχιστεί η κυκλική διαδικασία βελτιστοποίησης. Τελικά, οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις εντοπίζονται. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

6.3 Γενετικός αλγόριθμος Pareto κατάτμησης πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης (Niche Pareto Genetic Algorithm ή NPGA)

Με βάση την κυριαρχία Pareto, οι Horn et al. (1994) πρότειναν τον γενετικό αλγόριθμο Pareto κατάτμησης (Niche Pareto Genetic Algorithm ή NPGA). Επιλέγει

τυχαία δυο οντότητες i και j από τον πληθυσμό, και με τυχαία πάλι επιλογή μιας ομάδας οντοτήτων ή λύσεων ή διαφορετικά μιας ομάδας ελέγχου (comparison set), συγκρίνει την οντότητα i και την οντότητα j με τις οντότητες της ομάδας ελέγχου. Αν μία από τις οντότητες κυριαρχείται από το ζεύγος σύγκρισης ενώ η άλλη οντότητα δεν κυριαρχείται, τότε η τελευταία οντότητα θα επιλεγεί ώστε να συνεχίσει στην επόμενη γενιά της εξελικτικής διαδικασίας, ενώ αν και οι δύο οντότητες δεν κυριαρχούνται από άλλες οντότητες μέσα στην ομάδα ελέγχου ή κυριαρχούνται και οι δύο τότε η οντότητα με την μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα θα επιλεγεί ώστε να συμμετέχει στην επόμενη γενιά της εξέλιξης χρησιμοποιώντας έναν μηχανισμό κατανομής.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα πως μπορούμε να ορίσουμε με έναν ασφαλή τρόπο την προσαρμοστικότητα ώστε να είμαστε σε θέση να διαχωρίζουμε δυο οντότητες για τις οποίες η κατάταξή τους από άποψη κυριαρχίας η μια ως προς την άλλη δεν είναι δυνατή (συνήθως οι δύο αυτές οντότητες θα ανήκουν στο ίδιο Pareto front και ως εκ τούτου δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για κυριαρχία της μίας οντότητας πάνω στην άλλη).

Η κατανομή της προσαρμοστικότητας (fitness sharing) είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος ώστε να επιτευχθεί η ποικιλομορφία του πληθυσμού. Αν ορίσουμε ως $fitness(i)$ την προσαρμοστικότητα μιας οντότητας i του πληθυσμού, τότε ο προσδιορισμός της πυκνότητας των οντοτήτων οι οποίες ανήκουν στην ίδια περιοχή με την οντότητα i , θα είναι m_i και θα υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση (Εξίσωση 5):

$$m_i = \sum_{j \in P} S[d(i, j)] \quad (5)$$

Ο πληθυσμός P είναι ο τρέχων εξελικτικός πληθυσμός, το $d(i, j)$ είναι η απόσταση ή η ομοιότητα μεταξύ δύο οντοτήτων i και j , και η συνάρτηση κατανομής είναι η $S[d]$, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

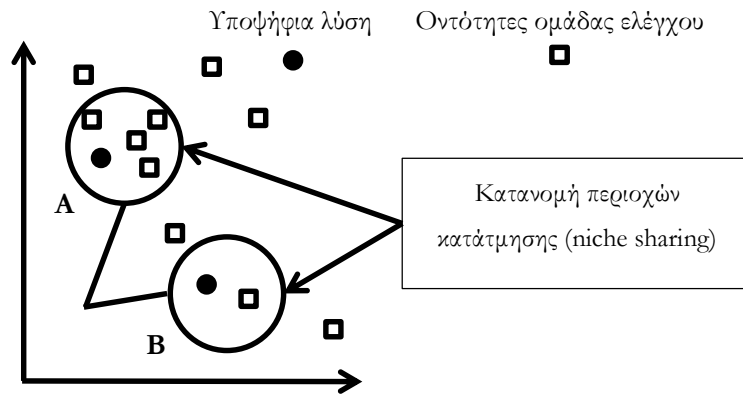
$$S[d(i, j)] = \begin{cases} 0, & d > \sigma_{shared} \\ 1 - d/\sigma_{shared}, & d < \sigma_{shared} \end{cases} \quad (6)$$

Η ακτίνα κατάτμησης (niche radius) είναι σ_{shared} και συνήθως καθορίζεται από τον επιλύοντα το πρόβλημα με βάση την ελάχιστη επιθυμητή απόσταση μεταξύ των οντοτήτων στο βέλτιστο σετ λύσεων.

Ορίζουμε την τιμή $fitness(i)/m_i$ ως την κοινή προσαρμοστικότητα (shared fitness), όπου το m_i αναπαριστά το πόσο κοντά είναι μια οντότητα (λύση) με άλλες οντότητες μέσα στην περιοχή των λύσεων. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 5, οι υποψήφιες λύσεις A και B είναι και οι δύο μη κυριαρχούμενες με την A να έχει μεγαλύτερο βαθμό προσαρμοστικότητας από την B και έτσι η A έχει μικρότερη κοινή προσαρμοστικότητα από την B . Ο σκοπός της χρήσης της κοινής προσαρμοστικότητας είναι η διασπορά του εξελικτικού πληθυσμού σε διακριτές περιοχές μέσα σε όλη την περιοχή στην οποία αναζητούμε τις λύσεις.

Το κύριο πλεονέκτημα του NPGA είναι ότι λειτουργεί πιο αποτελεσματικά και επιτυγχάνει μεγαλύτερη σύγκλιση προς τις κατά Pareto βέλτιστες λύσεις. Από την άλλη ένα

μειονέκτημά του είναι η δυσκολία στην επιλογή και προσαρμογή της ακτίνας της περιοχής κατάτμησης (niche radius).



Εικόνα 5. Η κατανομή των περιοχών κατάτμησης (niche sharing). Καμία υποψήφια λύση από τις A και B δεν κυριαρχείται, όμως η A είναι περισσότερο προσαρμοσμένη (aggregated) από την B, έτσι επιλέγεται η B για να συμμετάσχει την επόμενη γενιά εξέλιξης. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

7. Μη κυριαρχούμενος γενετικός αλγόριθμος ταξινόμησης II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II ή NSGA-II)

Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα ακολουθήσει η εκτενής παρουσίαση του αλγορίθμου “Μη κυριαρχούμενος γενετικός αλγόριθμος ταξινόμησης II ή Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II). Θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο αυτόν πιο αναλυτικά και σε μεγαλύτερο βάθος λόγω της πληθώρας των πρακτικών εφαρμογών του καθώς και λόγω των πλεονεκτημάτων που παρουσιάζει. Σύμφωνα με τους Patrausanu et al. (2024) ο παραπάνω αλγόριθμος και ο εξελικτικός αλγόριθμος ισχυρής κυριαρχίας Pareto 2 ή Strong Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA2), αναγνωρίζονται ως οι κορυφαίοι εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης.

7.1 Μια σύντομη ιστορική αναδρομή

Το 1993 οι Srinivas και ο Deb παρουσίασαν τον NSGA. Σύμφωνα με τους Deb et al (2002), θα συνοψίζαμε τα αδύναμα σημεία του NSGA όπως ακολούθως:

- Το πρώτο σημείο αναφέρεται στην πρόκληση σχετικά με την κατασκευή της ομάδας κατά Pareto βέλτιστων λύσεων από άποψη χρόνου, με μια πολυπλοκότητα $O(R \times N^3)$, όπου R είναι ο αριθμός των κριτηρίων και N το μέγεθος του πληθυσμού. Το παραπάνω ενδέχεται να είναι προβληματικό διότι σε κάθε γενιά κατασκευάζεται μια μη κυριαρχούμενη ομάδα γεγονός το οποίο μπορεί να αποδειχθεί χρονοβόρο όταν το μέγεθος του πληθυσμού είναι μεγάλο. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω ζητημάτων προτάθηκε μια βελτίωση του NSGA.
- Το δεύτερο σημείο αφορά την μη ύπαρξη ελιτισμού, δηλαδή οι οντότητες ενσωματώνονται στις επόμενες εξελικτικές γενιές είτε είναι καλές είτε κυριαρχούμενες. Σχετικές μελέτες έχουν δείξει ότι η απόδοση των πολυ-κριτηρίων εξελικτικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης μπορεί να βελτιωθεί με την απώλεια ορισμένων λύσεων να είναι δυνατό να αποφευχθεί με την χρήση καλύτερου μηχανισμού διατήρησης οντοτήτων.
- Το τρίτο σημείο αφορά το ζήτημα του καθορισμού του σ_{shared} . Αν οι κοινοί παράμετροι τεθούν σε εφαρμογή κατά την διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας ώστε να διατηρηθεί η κατανομή του πληθυσμού, ενδέχεται να αποτελεί πρόκληση ο υπολογισμός του μεγέθους του πληθυσμού καθώς βρίσκεται υπό συνεχείς αλλαγές, δηλαδή σε μια δυναμική διαδικασία με την ταυτόχρονη ενσωμάτωση παραμέτρων.

7.2 Βασικά χαρακτηριστικά του NSGA-II

Στην εργασία τους, οι Wang et al (2023) αναφέρουν το βασικό πλαίσιο του NSGA-II. Μετά την μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση, καθορίζεται ο τυχαίος πληθυσμός μεγέθους N , ενώ τρεις βασικοί αλγόριθμοι διεξάγουν τις διαδικασίες της επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης, ώστε να δημιουργηθεί η πρώτη γενιά του πληθυσμού απογόνων. Με την δημιουργία της δεύτερης γενιάς, ο πληθυσμός-γονέας καθώς και ο πληθυσμός απογόνων αναμειγνύονται ώστε να παραχθεί ένας καθολικός μη κυριαρχούμενος πληθυσμός, ο οποίος

θα χρησιμοποιηθεί ως πληθυσμός γονέας για την επόμενη εξελικτική γενιά. Εάν ο πληθυσμός που προκύπτει έχει μέγεθος μικρότερο από N , τότε επιλέγονται και άλλες οντότητες με κριτήρια τα οποία θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

Για την δημιουργία του νέου πληθυσμού των απογόνων, οι οντότητες επιλέγονται με βάση τις σχέσεις μη κυριαρχίας καθώς και της απόστασης συνωστισμού. Οι διαδικασίες του τυπικού γενετικού αλγόριθμου διεξάγονται ώστε να παραχθεί ο νέος πληθυσμός απογόνων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως να ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου. Η ροή της παραπάνω διαδικασίας έχει όπως στην Εικόνα 6.

7.3 Διαδικασία κατάταξης του πληθυσμού σε ομάδες κυριαρχίας μέσω του ταχύ μη κυριαρχούμενου αλγόριθμου ταξινόμησης (Fast Non-Dominated Sorting Algorithm)

Οι Deb et al (2002) περιγράφουν έναν ταχύ αλγόριθμο ταξινόμησης των οντοτήτων βασισμένο στις μεταξύ των οντοτήτων σχέσεις κυριαρχίας. Αρχικά κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε συνοπτικά τι ακριβώς αφορά η κατάταξη σε κλάσεις ή διαφορετικά η ταξινόμηση των οντοτήτων (λύσεων) ανάλογα με τον βαθμό κυριαρχίας τους.

Η διαδικασία ξεκινά με την επιλογή μιας οντότητας και την σύγκρισή της με όλες τις υπόλοιπες ώστε να καθοριστεί ο βαθμός κυριαρχίας της. Εάν πρόκειται για μη κυριαρχούμενη λύση (δηλαδή έχει βαθμό κυριαρχίας 0) τότε εντάσσεται στο πρώτο Pareto front, διαφορετικά θα ενταχθεί σε μεταγενέστερο ανάλογα με τον πλήθος των οντοτήτων από τις οποίες κυριαρχείται. Μόλις ολοκληρωθεί η παραπάνω διαδικασία θα έχουμε καταφέρει να ταξινομήσουμε όλες τις οντότητες σε ένα Pareto front ανάλογα με τον βαθμό κυριαρχίας τους.

Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να αναγνωριστούν οι λύσεις του πρώτου μη κυρίαρχου επιπέδου σε έναν πληθυσμό μεγέθους N , κάθε λύση μπορεί να συγκριθεί με κάθε άλλη λύση στον πληθυσμό, για να διαπιστωθεί αν κυριαρχείται. Αυτό απαιτεί $O(MN)$ συγκρίσεις για κάθε λύση, όπου M είναι ο αριθμός των αντικειμενικών συναρτήσεων. Όπως ήδη αναφέραμε, η διαδικασία συνεχίζεται για να βρεθούν όλα τα μέλη του πρώτου επιπέδου (Pareto front) στον πληθυσμό, ενώ η συνολική πολυπλοκότητα είναι $O(MN^2)$.

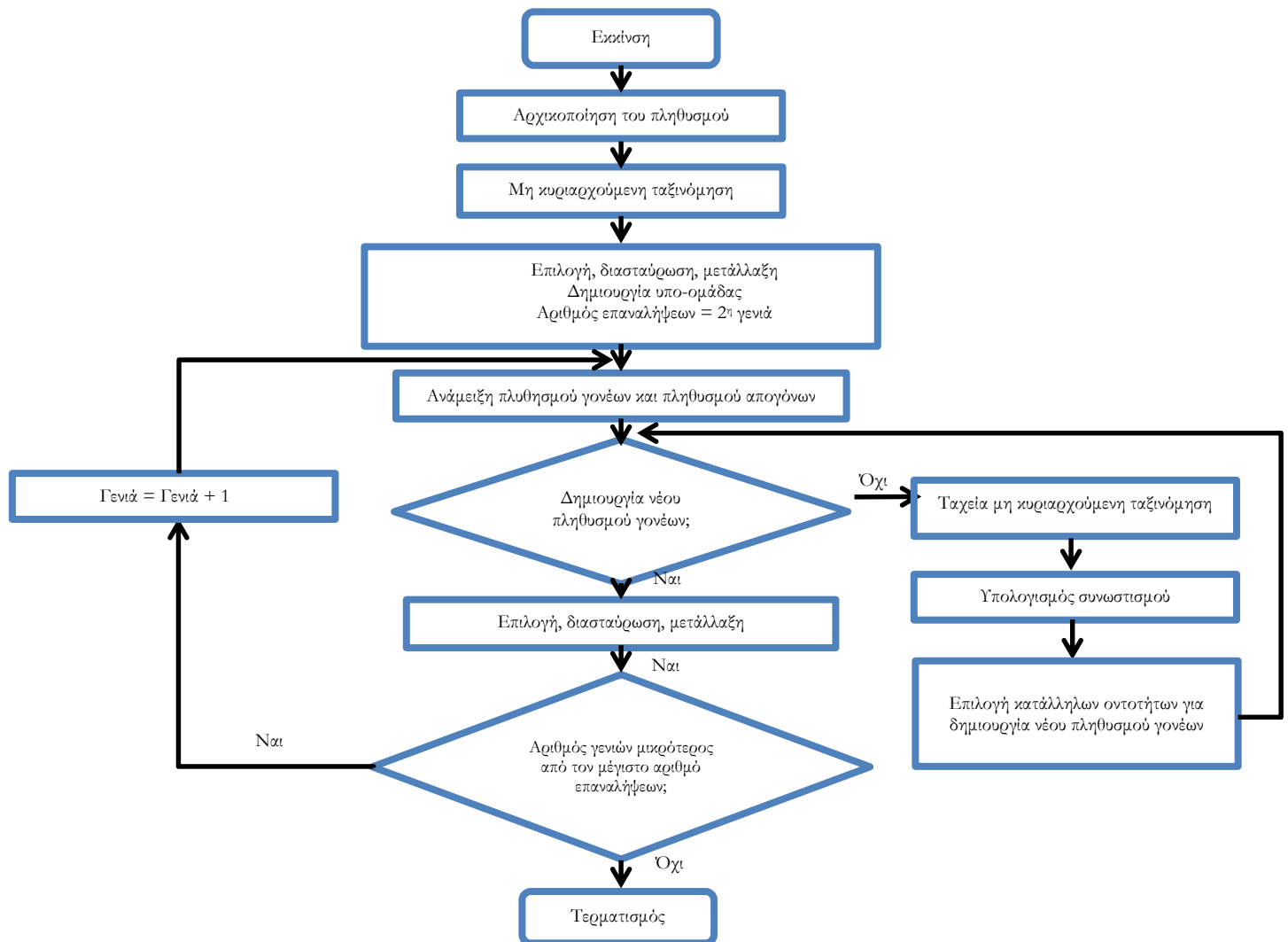
Οι οντότητες που ταξινομήθηκαν σε αυτό το επίπεδο κυριαρχίας δεν λαμβάνονται υπόψη και έτσι η διαδικασία κατάταξης συνεχίζεται μόνο με τις οντότητες οι οποίες προηγουμένως δεν είχαν καταταχθεί διότι ήταν κυριαρχούμενες. Η διαδικασία εύρεσης του δεύτερου επιπέδου απαιτεί επίσης $O(MN^2)$ υπολογισμούς, ειδικά όταν ένας αριθμός λύσεων ανήκει στο δεύτερο ή σε υψηλότερα επίπεδα μη κυριαρχίας. Αυτό ισχύει και για την εύρεση του τρίτου και των υψηλότερων επιπέδων μη κυριαρχίας. Έτσι, η χειρότερη περίπτωση είναι όταν υπάρχουν N επίπεδα και υπάρχει μόνο μία λύση σε κάθε επίπεδο. Αυτό απαιτεί συνολικά $O(MN^3)$ υπολογισμούς. Κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε πως αυτή η διαδικασία απαιτεί $O(N)$ μνήμη.

7.4 Ταχεία μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση των λύσεων

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε την διαδικασία ταχείας ταξινόμησης σύμφωνα με τους Deb et al (2002). Ξεκινώντας, για κάθε λύση υπολογίζουμε δύο στοιχεία: 1) τον αριθμό κυριαρχίας n_p , δηλαδή τον αριθμό των λύσεων που κυριαρχούν επί της λύσης p , και 2) το S_p , το σύνολο δηλαδή των λύσεων επί των οποίων κυριαρχεί η λύση p . Αυτό απαιτεί $O(MN^2)$ συγκρίσεις.

Οι οντότητες του πρώτου Pareto front θα έχουν τον αριθμό κυριαρχίας ίσο με μηδέν. Για κάθε λύση p με $n_p=0$, ανατρέχουμε σε κάθε στοιχείο q του συνόλου S_p και μειώνουμε τον αριθμό κυριαρχίας του κατά ένα. Συνεχίζοντας την διαδικασία, αν σε οποιαδήποτε οντότητα q ο αριθμός κυριαρχίας της γίνει μηδέν, την τοποθετούμε σε ένα ξεχωριστό σύνολο Q . Αυτές οι οντότητες του συνόλου Q σχηματίζουν το δεύτερο Pareto front. Η διαδικασία συνεχίζεται για κάθε μέλος του Q και έτσι κατασκευάζεται και το τρίτο Pareto front. Η διαδικασία τερματίζεται όταν όλες οι οντότητες καταταχθούν σε κάποιο Pareto front.

Για κάθε λύση p στο δεύτερο ή σε υψηλότερο επίπεδο μη κυριαρχίας, ο αριθμός κυριαρχίας μπορεί να πάρει μέγιστη τιμή ίση με $N - 1$. Έτσι, κάθε λύση p θα εξερευνηθεί σχετικά με τον βαθμό κυριαρχίας της από τον αλγόριθμο το πολύ $N - 1$ φορές, πριν ο βαθμός κυριαρχίας της γίνει μηδέν. Σε αυτό το σημείο, η λύση ανατίθεται σε ένα επίπεδο μη κυριαρχίας δηλαδή σε κάποιο Pareto front και ο αλγόριθμος θα σταματήσει να την λαμβάνει υπόψη του. Λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχουν το πολύ $N - 1$ τέτοιες λύσεις, η πολυπλοκότητα είναι $O(N^2)$. Η συνολική πολυπλοκότητα της διαδικασίας αυτής είναι εκθετική και ίση με $O(MN^2)$.



Εικόνα 6. Το βασικό πλαίσιο του NSGA-II. Γίνεται χρήση ενός τυχαίου αρχικού πληθυσμού, ενώ μέσω της διαδικασίας της επιλογής, της διασταύρωσης και της μετάλλαξης δημιουργείται η πρώτη γενιά του πληθυσμού των απογόνων. Οι πληθυσμοί γονείς καθώς και οι πληθυσμοί απογόνων αναμειγνύονται και επιλέγονται οντότητες για τον σχηματισμό του νέου πληθυσμού γονέων, με βάση τις σχέσεις μη κυριαρχίας καθώς και της απόστασης συνωστισμού, γεγονός το οποίο οδηγεί στην δημιουργία νέων πληθυσμών απογόνων. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παραθέσουμε τον ταχύ αλγόριθμο μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης Deb et al (2002):

- 1) για κάθε $p \in P$
 - i) $S_p = \emptyset$
 - ii) $n_p = 0$
 - iii) για κάθε $q \in P$

- αν $(p \prec q)$, δηλαδή εάν η p κυριαρχεί επί της q
 - τότε $S_p = S_p \cup \{q\}$, τοποθετούμε την q στο σύνολο λύσεων των κυριαρχούμενων από την λύση p
 - αλλιώς αν $(q \prec p)$
 - τότε $n_p = n_p + 1$, αυξάνουμε τον βαθμό κυριαρχίας της p κατά 1
- iv) αν $n_p = 0$, τότε η οντότητα p θα ανήκει στο πρώτο Pareto front
- v) τότε βαθμός κυριαρχίας της p ή $p_{\text{rank}} = 1$
- vi) $F_1 = F_1 \cup \{p\}$
- 2) $i = 1$, εκκινούμε τον δείκτη του πλήθους των Pareto fronts
- 3) όσο $F_i \neq \emptyset$
- i) $Q = \emptyset$, το χρησιμοποιούμε ώστε να αποθηκεύσουμε τις λύσεις του επόμενου front
- για κάθε $p \in F_i$
 - ◆ για κάθε $q \in S_p$
 - $n_q = n_q - 1$
 - αν $n_q = 0$ τότε, δηλαδή η οντότητα q θα ανήκει στο επόμενο επίπεδο κυριαρχίας
 - ❖ Βαθμολογία $q = i + 1$
 - ❖ $Q = Q \cup \{q\}$
 - $i = i + 1$
 - $F_i = Q$

Πιο πάνω εξετάσαμε την πρώτη βασική ιδιότητα που πρέπει να διαθέτει ένας εξελικτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης, δηλαδή την σύγκλιση προς το πραγματικό Pareto βέλτιστο όριο (convergence). Θα δούμε στην συνέχεια πως ο NSGA-II προσεγγίζει την δεύτερη ιδιότητα των εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης, δηλαδή την διαφορετικότητα (diversity).

7.5 Εκτίμηση πυκνότητας (density estimation) και τελεστής σύγκρισης συνωστισμού (Crowded Comparison Operator)

Ο NSGA-II εγκαταλείπει την προσέγγιση του σ_{shared} (sharing function approach) και εισάγει την έννοια της προσέγγισης της “σύγκρισης συμφόρησης” (crowding comparison approach) γεγονός το οποίο απαλλάσσει τον επιλύοντα το πρόβλημα βελτιστοποίησης από τον καθορισμό της παραμέτρου σ_{shared} .

Στο σημείο αυτό καθίσταται επιτακτική η ανάγκη ανάλυσης της “εκτίμησης πυκνότητας” (density estimation).

Για να υπολογίσουμε την πυκνότητα των λύσεων σε μια περιοχή γύρω από μια δεδομένη οντότητα στον πληθυσμό, υπολογίζουμε τη μέση απόσταση δύο σημείων (i_{distance}), από κάθε πλευρά αυτού του σημείου, κατά μήκος κάθε αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό το μέγεθος χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της περιμέτρου του κυβοειδούς που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τους πλησιέστερους γείτονες ή τις πλησιέστερες οντότητες ως κορυφές και την ονομάζουμε ως “απόσταση συνωστισμού”, όπως διακρίνουμε στην Εικόνα 7. Ο υπολογισμός της απόστασης συνωστισμού (crowding distance) απαιτεί την κατάταξη των οντοτήτων για κάθε αντικειμενική συνάρτηση σε αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια, για κάθε αντικειμενική συνάρτηση, οι ακραίες λύσεις (δηλαδή οι λύσεις με τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές) λαμβάνουν άπειρη τιμή απόστασης. Όλες οι άλλες ενδιάμεσες λύσεις λαμβάνουν τιμή απόστασης ίση με την απόλυτη κανονικοποιημένη διαφορά στις τιμές της συνάρτησης δύο γειτονικών λύσεων. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις. Η συνολική τιμή της απόστασης συνωστισμού υπολογίζεται ως το άθροισμα των μεμονωμένων τιμών απόστασης της κάθε αντικειμενικής συνάρτησης. Κάθε αντικειμενική συνάρτηση κανονικοποιείται πριν από τον υπολογισμό της απόστασης συνωστισμού. Ο αλγόριθμος που παραθέτουμε στο τέλος της σελίδας μας δίνει την διαδικασία υπολογισμού της απόστασης συνωστισμού για όλες τις λύσεις σε ένα μη-κυριαρχούμενο σύνολο I . Εδώ, το $I_{[j].m}$ αναφέρεται στην τιμή της m -οστής αντικειμενικής συνάρτησης της i -οστής λύσης στο σύνολο I , και οι παράμετροι f_{\min} και f_{\max} είναι οι ελάχιστες και μέγιστες τιμές της m -οστής αντικειμενικής συνάρτησης. Αφού σε όλες τις οντότητες αποδοθεί μια τιμή απόστασης συνωστισμού (crowding distance), μπορούμε να συγκρίνουμε δύο λύσεις ως προς το πόσο κοντά βρίσκονται σε άλλες λύσεις. Μια λύση με μικρότερη τιμή είναι πιο συνωστισμένη από άλλες λύσεις. Αυτό ακριβώς συγκρίνουμε στον προτεινόμενο τελεστή σύγκρισης συνωστισμού των λύσεων (crowded comparison operator), όπως περιγράφεται παρακάτω.

Ο τελεστής σύγκρισης συνωστισμού (crowded comparison operator) οδηγεί τη διαδικασία επιλογής στα διάφορα στάδια του αλγορίθμου προς ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο Pareto-βέλτιστο μέτωπο (front). Ας υποθέσουμε ότι κάθε οντότητα στον πληθυσμό έχει δύο χαρακτηριστικά:

- τον βαθμό μη κυριαρχίας (i_{rank}),
- την απόσταση συνωστισμού (i_{distance})

Στη συνέχεια θα καθορίσουμε μια μερική διάταξη ως εξής:

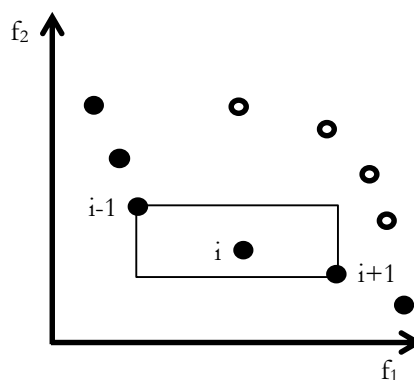
- $i \prec_n j$, αν $(i_{\text{rank}} < j_{\text{rank}})$
- ή $(i_{\text{rank}} = j_{\text{rank}})$
- και $(i_{\text{distance}} > j_{\text{distance}})$.

Η παραπάνω συνθήκη ορίζει την προτεραιότητα προτίμησης των οντοτήτων, δηλαδή μεταξύ δύο λύσεων με διαφορετικές κατατάξεις μη κυριαρχίας (που ανήκουν σε διαφορετικά Pareto fronts) προτιμάται η λύση με τη χαμηλότερη (καλύτερη) κατάταξη, ενώ εάν και οι δύο λύσεις ανήκουν στο ίδιο μέτωπο, τότε προτιμούμε τη λύση που βρίσκεται σε μια λιγότερο συνωστισμένη περιοχή.

Πιο κάτω θα παραθέσουμε τον αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει την απόσταση συνωστισμού Deb et al (2002).

- 1) $l = |I|$, δηλαδή ο αριθμός των λύσεων στο I
- 2) για κάθε i , θέσε $I[i]_{\text{distance}} = 0$, αρχικοποίηση της απόστασης
- 3) για κάθε αντικειμενική συνάρτηση m
 - i) $I = \text{sort}(I, m)$, ταξινόμηση με βάση την κάθε αντικειμενική τιμή
 - ii) $I[1] = I[l]_{\text{distance}} = \infty$, ώστε οι ακραίες τιμές να επιλέγονται πάντα
 - iii) για $i = 2$ έως $(l-1)$, για τα υπόλοιπα σημεία
 - $I[i]_{\text{distance}} = I[i]_{\text{distance}} + (I[i+1].m - I[i-1].m) / (f_m^{\text{max}} - f_m^{\text{min}})$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι Deb et al (2002) εισήγαγαν τρεις νέες καινοτομίες με την ανάπτυξη του NSGA-II (την ταχεία μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση, την εκτίμηση της απόστασης συνωστισμού και τον τελεστή σύγκρισης συνωστισμού).



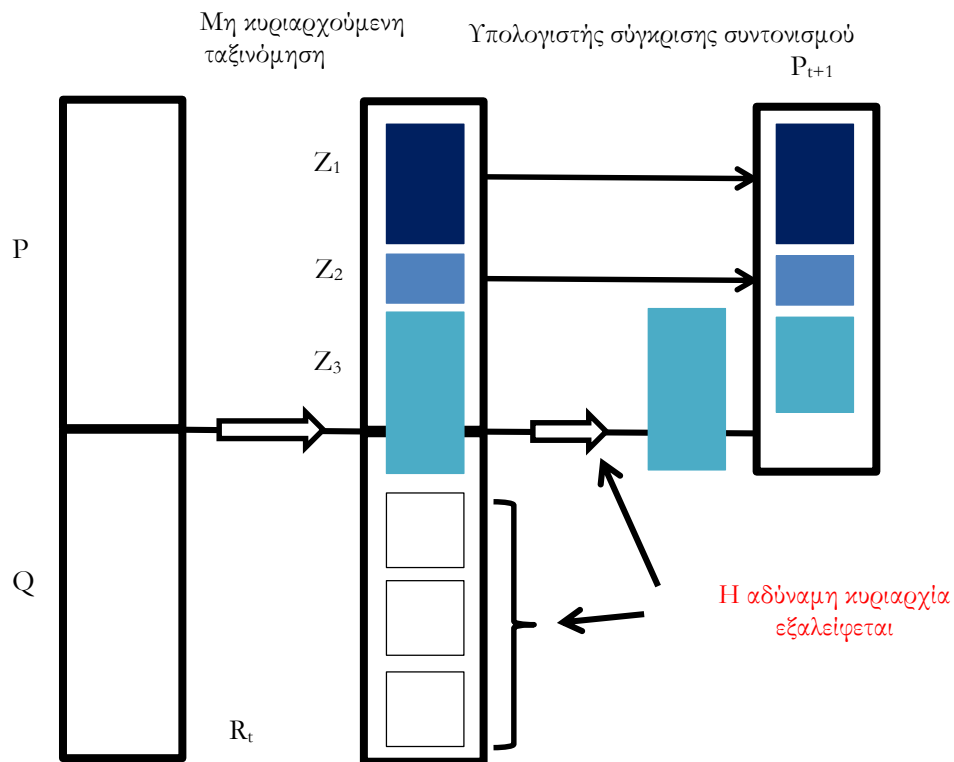
Εικόνα 7. Η απόσταση συνωστισμού για την i -οστή λύση. Η μέση απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε κάθε πλευρά από το σημείο i υπολογίζεται με βάση την κάθε αντικειμενική συνάρτηση, με τις κορυφές του παραλληλογράμμου να καθορίζονται από του κοντινότερους γείτονες (εδώ $i-1$ και $i+1$), και το μήκος του να είναι ίσο με την απόσταση συμφόρησης. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [5].

7.6. Περιγραφή της λειτουργίας του *NSGA-II*

Αφού αναλύσαμε τα βασικά χαρακτηριστικά καθώς και τις βασικές λειτουργίες των καινοτομιών που εισήχθησαν με τον *NSGA-II* θα δούμε τώρα πως υλοποιείται η λειτουργία του.

Αρχικά δημιουργείται τυχαία ένας αρχικός πληθυσμός γονέων P_0 , οι οντότητες του οποίου ταξινομούνται με βάση τις σχέσεις μη κυριαρχίας, όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 7.4. Στην συνέχεια και ενώ βρισκόμαστε ακόμα στο αρχικό στάδιο του αλγορίθμου, χρησιμοποιούμε την διαδικασία της δυαδικής σύγκρισης (binary tournament) και μέσω διαδικασιών ανασυνδυασμού και μετάλλαξης, δημιουργείται ο πληθυσμός των απογόνων μεγέθους N . Όπως αναφέραμε, ο *NSGA-II* είναι ελιτίστικος αλγόριθμος, γεγονός που συνεπάγεται ότι επιλέγονται οι πλέον κατάλληλες λύσεις από τον πληθυσμό των γονέων των απογόνων. Αυτό βέβαια σημαίνει πως υπάρχει διαφοροποίηση στην διαδικασία εξέλιξης του αλγόριθμου μετά την πρώτη γενιά. Θα αναλύσουμε την διαδικασία για την t -ιοστή επανάληψη του αλγορίθμου.

Ένας πληθυσμός $R_t = P_t \cup Q_t$ σχηματίζεται με το μέγεθός του να είναι $2N$. Στη συνέχεια ο πληθυσμός R_t ταξινομείται με βάση την μη κυριαρχία. Εφόσον όλες οι οντότητες του πληθυσμού γονέων και απογόνων περιλαμβάνονται στον R_t διασφαλίζεται ο ελιτισμός. Οι οντότητες οι οποίες ανήκουν στο F_1 Pareto front είναι οι πλέον καλές και πρέπει οπωσδήποτε να περάσουν στην επόμενη γενιά κατά προτεραιότητα των οντοτήτων που ανήκουν στα F_2, F_3, \dots, F_M μέτωπα Pareto. Αν το μέγεθος του F_1 Pareto front είναι μικρότερο από N τότε εντάσσουμε στον νέο πληθυσμό P_{t+1} όλες τις λύσεις του μετώπου αυτού καθώς και τις πλέον κατάλληλες από τα επόμενα μέτωπα κυριαρχίας F_2, F_3, \dots, F_M . Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να έχουμε τις οντότητες που χρειαζόμαστε (πλήθους N). Η Εικόνα 8 επεξηγεί τον τρόπο λειτουργίας του *NSGA-II*, ενώ μας παρουσιάζει τον μηχανισμό διατήρησης των οντοτήτων από γενιά σε γενιά. Πλέον, ο πληθυσμός P_{t+1} (ο οποίος είναι μεγέθους N) χρησιμοποιείται για επιλογή, διασταύρωση και μετάλλαξη των οντοτήτων, ώστε να σχηματιστεί ο νέος πληθυσμός απογόνων Q_{t+1} .



Εικόνα 8. Η εφαρμογή των βημάτων του NSGA-II ελιτίστικης στρατηγικής (elite strategy). Ο νέος πληθυσμός κατατάσσεται με βάση τις σχέσεις μη κυριαρχίας, ενώ στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο πληθυσμός έχει διαχωριστεί σε έξι ομάδες Pareto, με τους πληθυσμούς με βαθμό Pareto 1 και 2 να τοποθετούνται στο νέο πληθυσμό γονέων με την συμφόρηση τους να έχει καθοριστεί πριν την κατάταξη του πληθυσμού με βαθμό Pareto 3 με τον ταυτόχρονο αποκλεισμό των πληθυσμών με βαθμό από 4 έως 6. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [5].

Ας σημειωθεί ότι ενώ ο NSGA-II χρησιμοποιεί την διαδικασία του binary tournament για την δημιουργία του αρχικού πληθυσμού των απογόνων, στην συνέχεια η επιλογή των οντοτήτων γίνεται με την χρήση του τελεστή σύγκρισης συμφόρησης (crowded comparison operator), αφού ο τελεστής αυτός λαμβάνει υπόψη του τόσο τον βαθμό μη κυριαρχίας όσο και την απόσταση συνωστισμού κάθε οντότητας.

8. Ο εξελικτικός αλγόριθμος ισχυρής κυριαρχίας Pareto 2 (Strong Pareto Evolutionary Algorithm 2 ή SPEA2)

Όπως ήδη αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, οι αλγόριθμοι NSGA-II και SPEA2 θεωρούνται από τους κορυφαίους εξελικτικούς αλγόριθμους (Patrausanu et al. 2024). Αποτελεί βελτίωση του εξελικτικού αλγόριθμου ισχυρής κυριαρχίας Pareto, ο οποίος παρουσιάστηκε από τους Zitzler και Thiele το 1999.

8.1 Μια εισαγωγή στον SPEA2

Ο αλγόριθμος SPEA2 προτάθηκε από τους Zitzler et al. (2001) ως ένας τρόπος αντιμετώπισης των αδύνατων σημείων του SPEA. Οι κύριες διαφορές των δύο προαναφερθέντων αλγορίθμων εντοπίζονται στα παρακάτω σημεία:

- Χρήση ενός βελτιωμένου συστήματος ανάθεσης καταλληλότητας, το οποίο λαμβάνει υπόψη για κάθε οντότητα πόσες άλλες οντότητες κυριαρχεί και από πόσες κυριαρχείται.
- Η διαδικασία αναζήτησης οντοτήτων (λύσεων) λαμβάνει χώρα μέσα από μια τεχνική αναζήτησης πυκνότητας πλησιέστερου γείτονα (k-nearest neighbor ή k-nn), η οποία επιτρέπει μια πιο ακριβή διαδικασία αναζήτησης οντοτήτων.
- Μια νέα μέθοδος περικοπής αρχείου (archive truncation method) εγγυάται τη διατήρηση των λύσεων στα όρια των μετώπων Pareto.

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος κάνει χρήση των σχέσεων κυριαρχίας, δηλαδή προτιμώνται οντότητες οι οποίες κυριαρχούν στις άλλες. Ακόμα μέσω της εξέτασης της πυκνότητας των λύσεων εξασφαλίζεται η διατήρηση των πιο απομονωμένων από αυτές με σκοπό την διατήρηση υψηλού βαθμού ποικιλομορφίας. Ο αλγόριθμος αυτός διατηρεί τις πλέον επιθυμητές λύσεις σε ένα εξωτερικό αρχείο.

8.2 Ψευδοκώδικας του SPEA2

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο για λόγους πληρότητας της ανάλυσης του SPEA2, να παραθέσουμε τον ψευδοκώδικα της εκτέλεσής του, σύμφωνα με τους Zitzler et al. (2001):

Είσοδος του αλγορίθμου:

- N (το μέγεθος του πληθυσμού)
- \bar{N} (το μέγεθος του εξωτερικού αρχείου)
- T (ο μέγιστος αριθμός γενεών)

Έξοδος του αλγορίθμου:

- A (το μη κυριαρχούμενο σύνολο)

Βήματα εκτέλεσης του αλγορίθμου:

- 1) Αρχικοποίηση: Δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού P_0 και δημιουργία του κενού αρχείου (εξωτερικό σύνολο) $\bar{P}_0 = \emptyset$. Θέτουμε $t = 0$.
- 2) Ανάθεση καταλληλότητας: Υπολογισμός των καταλληλότητων των οντοτήτων οι οποίες περιέχονται στο σύνολο P_t και \bar{P}_t .
- 3) Περιβαλλοντική επιλογή (Environmental selection): Αντιγραφή όλων των οντοτήτων του P_t στο \bar{P}_{t+1} . Αν το μέγεθος του \bar{P}_{t+1} είναι μεγαλύτερο από το μέγεθος του \bar{N} τότε περικόπτουμε το μέγεθος του \bar{P}_{t+1} σύμφωνα με τον τελεστή περικοπής (truncation operator). Σε διαφορετική περίπτωση (εάν δηλαδή το μέγεθος του \bar{P}_{t+1} είναι μικρότερο από αυτό του \bar{N}), τότε τοποθετούμε στο σύνολο \bar{P}_{t+1} και κυριαρχούμενες οντότητες από το σύνολο P_t και \bar{P}_t .
- 4) Τερματισμός: Εάν $t \geq T$, ή ένα διαφορετικό κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται τότε θέτουμε το σύνολο A ως το σύνολο των διανυσμάτων απόφασης που αντιπροσωπεύονται από τις μη κυριαρχούμενες οντότητες στο σύνολο \bar{P}_{t+1} . Εδώ τερματίζεται ο αλγόριθμος.
- 5) Επιλογή ζευγαρώματος: Με την διαδικασία του διπλού τουρνουά (binary tournament) επιλέγουμε τις κατάλληλες οντότητες προς συνδυασμό στο σύνολο \bar{P}_{t+1} , ώστε να πληρωθεί το σύνολο ζευγαρώματος.
- 6) Παραλλαγή: Εφαρμογή τελεστών ανασυνδυασμού και μετάλλαξης στη δεξαμενή ζευγαρώματος και ενσωμάτωση του P_{t+1} στον προκύπτοντα πληθυσμό. Αύξηση του μετρητή γενεών ($t=t+1$) και επιστροφή στο Βήμα 2.

8.3 Ανάθεση καταλληλότητας (Fitness Assignment) και επιλογή περιβάλλοντος (Environmental Selection).

Οι Zitzler et al (2002) αναφέρουν σχετικά με την διαδικασία ανάθεσης καταλληλότητας (Fitness Assignment) και επιλογής περιβάλλοντος (Environmental Selection), πως για να αποφευχθεί η κατάσταση όπου οντότητες οι οποίες ενώ κυριαρχούνται από τα ίδια μέλη του εξωτερικού αρχείου έχουν ίδιες τιμές καταλληλότητας, στον SPEA2 λαμβάνονται υπόψη τόσο οι οντότητες που κυριαρχούν όσο και αυτές που κυριαρχούνται από κάθε άλλη οντότητα. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε οντότητα i στο αρχείο \bar{P}_t και στον πληθυσμό P_t ανατίθεται μια τιμή ισχύος $S(i)$, η οποία αναπαριστά τον αριθμό των οντοτήτων πάνω στις οποίες κυριαρχεί.

$$S(i) = |\{j | j \in P_t + \bar{P}_t \wedge i \succ j\}| \quad (5)$$

όπου το $|\cdot|$ υποδηλώνει το μέγεθος ενός συνόλου, το $+$ αντιπροσωπεύει την ένωση πολυσυνόλων και το σύμβολο \succ αντιστοιχεί στη σχέση κυριαρχίας Pareto. Βάσει των τιμών της S , η ακατέργαστη καταλληλότητα (raw fitness) $R(i)$ μιας οντότητας i υπολογίζεται ως εξής:

$$R(i) = \sum_{j \in P_t + \bar{P}_t, j > i} S(j) \quad (6)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι η ακατέργαστη καταλληλότητα καθορίζεται τόσο από την ισχύ των οντοτήτων που κυριαρχούν πάνω του και εντός του συνόλου του αρχείου, όσο και από τον πληθυσμό, σε αντίθεση με τον SPEA, όπου μόνο τα μέλη του αρχείου λαμβάνονται υπόψη σε αυτό το πλαίσιο. Ας σημειωθεί ότι η καταλληλότητα είναι αναγκαίο να ελαχιστοποιηθεί εδώ, δηλαδή η $R(i) = 0$ να αντιστοιχεί σε μια μη κυριαρχούμενη οντότητα, ενώ μια υψηλή τιμή $R(i)$ σημαίνει ότι η οντότητα i κυριαρχείται από πολλές άλλες.

Αν και η ανάθεση της ακατέργαστης καταλληλότητας παρέχει έναν μηχανισμό δημιουργίας τμημάτων (niching mechanism), με βάση την έννοια της κυριαρχίας Pareto, μπορεί να αποτύχει όταν οι περισσότερες λύσεις δεν κυριαρχούν η μια την άλλη. Επομένως είναι αναγκαίες επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την πυκνότητα των λύσεων ώστε να γίνει διάκριση μεταξύ λύσεων με ίδιες τιμές ακατέργαστης καταλληλότητας. Στον αλγόριθμο SPEA2, η χρησιμοποιούμενη τεχνική εκτίμησης της πυκνότητας των οντοτήτων, είναι μια προσαρμογή της μεθόδου του k -πλησιέστερου γείτονα (k nearest neighbour ή k -nn) του Silverman (1986), όπου η πυκνότητα σε οποιοδήποτε σημείο είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της απόστασης από το προκαθορισμένο σημείο.

Εδώ, απλώς λαμβάνουμε το αντίστροφο της απόστασης από τον k -πλησιέστερο γείτονα ως εκτίμηση της πυκνότητας. Πιο αναλυτικά, για κάθε οντότητα i υπολογίζονται οι αποστάσεις (στον αντικειμενικό χώρο) από όλα τα άτομα j στο εξωτερικό αρχείο και τον πληθυσμό και αποθηκεύονται σε μια λίστα. Αφού ταξινομηθεί η λίστα σε αύξουσα σειρά, το k -οστό στοιχείο δίνει την επιθυμητή απόσταση, η οποία συμβολίζεται ως σ_i^k . Ως ένα κοινό σύνολο για το k είναι η τετραγωνική ρίζα του μεγέθους του δείγματος σύμφωνα με τον Silverman (1986), δηλαδή $k = \sqrt{N + \bar{N}}$.

Στη συνέχεια, η πυκνότητα $D(i)$ που αντιστοιχεί στο i ορίζεται ως:

$$D(i) = \frac{1}{\sigma_i^k + 2} \quad (7)$$

Στον παρονομαστή προστίθεται ο αριθμός 2 ώστε να εξασφαλιστεί ότι η τιμή είναι μεγαλύτερη από το μηδέν και ότι $D(i) < 1$.

Τέλος, προσθέτοντας την $D(i)$ στην ακατέργαστη τιμή καταλληλότητας $R(i)$ μιας οντότητας i , προκύπτει η συνολική καταλληλότητα $F(i)$:

$$F(i) = R(i) + D(i) \quad (8)$$

Ο χρόνος εκτέλεσης της διαδικασίας ανάθεσης καταλληλότητας κυριαρχείται από τον εκτιμητή πυκνότητας ($O(M^2 \log M)$), ενώ ο υπολογισμός των τιμών S και R έχει πολυπλοκότητα $O(M^2)$, όπου $M = N + \bar{N}$.

Ως προς την επιλογή περιβάλλοντος (*Environmental Selection*), οι Zitzler et al (2002) αναφέρουν σχετικά ότι η λειτουργία ενημέρωσης του αρχείου (archive update operation) δηλαδή το βήμα 3 στον αλγόριθμο που παρατέθηκε στο κεφάλαιο 8.2, διαφέρει από αυτήν η οποία εφαρμόζεται στον αλγόριθμο SPEA σε δύο σημεία:

- 1) ο αριθμός των ατόμων που περιέχονται στο αρχείο παραμένει σταθερός με την πάροδο του χρόνου,
- 2) η μέθοδος περικοπής αποτρέπει την αφαίρεση λύσεων που βρίσκονται στα όρια.

Κατά την διαδικασία της περιβαλλοντικής επιλογής, αρχικά, η διαδικασία ξεκινά με την αντιγραφή όλων των μη κυριαρχούμενων οντοτήτων, (αυτών που έχουν καταλληλότητα μικρότερη από ένα), από το αρχείο και τον πληθυσμό στο αρχείο της επόμενης γενιάς, ως ακολούθως:

$$\bar{P}_{t+1} = \{i | i \in P_t + \bar{P}_t \wedge F(i) < 1\} \quad (9)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το μη κυριαρχούμενο σύνολο χωράει ακριβώς στο αρχείο ($|\bar{P}_{t+1}| = \bar{N}$) τότε το βήμα της περιβαλλοντικής επιλογής ολοκληρώνεται. Διαφορετικά διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

- Είτε το αρχείο να είναι πολύ μικρό ($|\bar{P}_{t+1}| < \bar{N}$)
- Είτε το αρχείο να είναι πολύ μεγάλο ($|\bar{P}_{t+1}| > \bar{N}$)

Στην πρώτη περίπτωση οι καλύτερες $\bar{N} - |\bar{P}_{t+1}|$ κυριαρχούμενες οντότητες που ανήκουν στο προηγούμενο αρχείο και πληθυσμό αντιγράφονται στο νέο αρχείο. Το παραπάνω μπορεί να υλοποιηθεί με την ταξινόμηση του πολυ-σύνολου $P_t + \bar{P}_t$ σύμφωνα με τις τιμές της καταλληλότητας και αντιγράφοντας τις πρώτες $\bar{N} - |\bar{P}_{t+1}|$ οντότητες i με $F(i) \geq 1$ από τη προκύπτουσα ταξινόμηση του συνόλου \bar{P}_{t+1} .

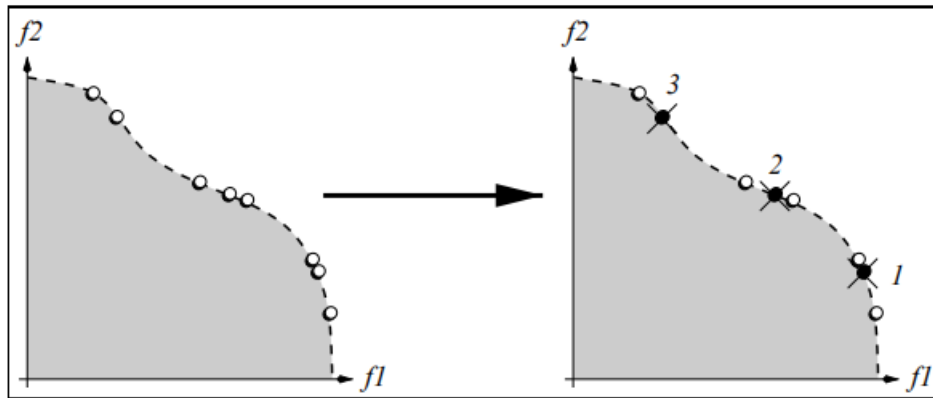
Στην δεύτερη περίπτωση, όταν το μέγεθος του τρέχοντος μη κυριαρχούμενου πολυσυνόλου υπερβαίνει το \bar{N} εφαρμόζεται μια διαδικασία περικοπής του αρχείου (archive truncation procedure), η οποία επαναληπτικά αφαιρεί οντότητες από το σύνολο \bar{P}_{t+1} , έως ότου $|\bar{P}_{t+1}| = \bar{N}$. Ας σημειωθεί ότι θα επιλεγθεί για αφαίρεση η οντότητα i για την οποία ισχύει $i \leq_d j$ για όλα τα $j \in \bar{P}_{t+1}$, με

$$i \leq_d j : \Leftrightarrow \forall 0 < k < \bar{P}_{t+1} : \sigma_i^k = \sigma_j^k \quad \vee$$

$$\exists 0 < k < \bar{P}_{t+1} : [(\forall 0 < l < k : \sigma_i^l = \sigma_j^l) \wedge \sigma_i^k < \sigma_j^k]$$

Όπου το σ_i^k δείχνει την απόσταση του i από τον k -οστό “γείτονά” του στο σύνολο \bar{P}_{t+1} .

Βλέπουμε λοιπόν ότι, σε κάθε στάδιο επιλέγεται η οντότητα η οποία έχει την ελάχιστη απόσταση από κάποια άλλη οντότητα. Αν υπάρχουν πολλές οντότητες με την ίδια ελάχιστη απόσταση, τότε λαμβάνουμε υπόψη τη δεύτερη μικρότερη απόσταση, και ούτω καθεξής. Η λειτουργία της τεχνικής περικοπής απεικονίζεται σχηματικά στην Εικόνα 9.



Εικόνα 9. Σχηματική απεικόνιση της μεθόδου περικοπής αρχείου που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο SPEA2. Δεξιά εμφανίζεται ένα σύνολο μη κυριαρχούμενων λύσεων. Αριστερά απεικονίζεται ποιες λύσεις αφαιρούνται και με ποια σειρά από τον τελεστή περικοπής (υποθέτοντας ότι $\bar{N}=5$). Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [22].

9. Πολυ-κριτηριακοί εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης βασισμένοι σε δείκτες αξιολόγησης (Evaluation Index-Based MOEA Algorithms)

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης βασισμένους σε δείκτες αξιολόγησης (Evaluation Index-Based MOEA Algorithms), καθώς και μερικές από τις μετρικές οι οποίες ποσοτικοποιούν διάφορες λειτουργίες των πολυ-κριτηρίων εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης. Οι Wang et al. (2023) αναφέρουν σχετικά πως οι δείκτες αξιολόγησης είναι ποσοτικά εργαλεία για την εκτίμηση της απόδοσης διάφορων πολυκριτηριακών εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης, οι οποίοι δείκτες μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες: σύγκλισης, κατανομής και πληρότητας. Προτείνουν την ενσωμάτωση μετρικών στους MOEA ώστε να καθοδηγείται πιο αποτελεσματικά η διαδικασία της αναζήτησης των εξελικτικών αλγορίθμων.

Από την βιβλιογραφία σχετικά με τους MOEA προκύπτει ότι είναι δυνατό να ενσωματωθούν μετρικές στους αλγόριθμους αυτούς, όπως η S μετρική (S metric), η μετρική της απόστασης μεταξύ των γενιών (generational distance ή GD), και η μετρική της αντίστροφης γενεαλογικής απόστασης (inverted generational distance ή IGD) κ.α, όμως αρκετές φορές είναι δυνατό οι μετρικές αυτές να οδηγήσουν σε αυξημένη πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μετά από την ενσωμάτωσή τους σε αυτούς. Σε αρκετές περιπτώσεις όμως θα λέγαμε ότι πρόκειται για μια αναγκαία προσθήκη προκειμένου να έχουμε “απτές” αποδείξεις της ορθής λειτουργίας και αποτελεσματικότητας των αλγορίθμων.

9.1 Μετρικές των MOEA

Πιο κάτω, θα παραθέσουμε συνοπτικά μερικές από τις μετρικές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την μέτρηση της απόδοσης των διαφόρων λειτουργιών των MOEA, ώστε να είναι πιο εύκολα αντιληπτή η λειτουργία τους καθώς και η “ποιότητα” των αποτελεσμάτων τους.

- Η S μετρική (S Metric)

Σύμφωνα με τους Knowles et al. (2002), η S μετρική υπολογίζει τον υπερ-όγκο μιας πολυ-διάστατης περιοχής η οποία περιλαμβάνεται μεταξύ ενός συνόλου Λ και ενός σημείου αναφοράς. Στην ουσία η μετρική αυτή μετρά τον όγκο του χώρου που καλύπτεται από τις λύσεις σε ένα συγκεκριμένο σύνολο. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο όγκος (hypervolume), τόσο καλύτερη θεωρείται η λύση, καθώς αυτό σημαίνει ότι καλύπτονται περισσότερες περιοχές στο χώρο των λύσεων.

- Απόσταση μεταξύ των γενιών (Generational Distance ή GD)

Η μετρική αυτή σύμφωνα με τους Knowles et al. (2002) μετρά την προσέγγιση μιας οντότητας ή ενός συνόλου προς την πραγματικά βέλτιστη λύση ή ομάδα λύσεων (συνήθως μετρά την προσέγγιση μιας οντότητας προς το πραγματικό Pareto front).

- Αντίστροφη γενεαλογική απόσταση (Inverted Generational Distance ή IGD)

Η IGD (Inverted Generational Distance) σύμφωνα με τους Ho-Huu et al. (2018), είναι μια μετρική η οποία χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της ποιότητας ενός συνόλου λύσεων σε προβλήματα πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης (MOEAs). Αποτελεί μια παραλλαγή της μετρικής GD (Generational Distance), αλλά αντί να μετράει την απόσταση των οντοτήτων από το Pareto front, μετράει την απόσταση από το Pareto front προς το προσεγγιστικό σύνολο οντοτήτων.

- Συνολικό μη κυριαρχούμενο διάνυσμα γενιών (Overall Non-dominated Vector Generation ή ONVG)

Για την μετρική Overall Nondominated Vector Generation (ONVG), οι Knowles et al. (2002) αναφέρουν ότι χρησιμοποιείται προκειμένου να αποδώσει το πλήθος των συνολικών μη κυριαρχούμενων λύσεων που παράγει ένας εξελικτικός αλγόριθμος κατά τη διάρκεια της εκτέλεσής του. Αξιολογεί την ικανότητα ενός πολυ-κριτηριακού αλγορίθμου να δημιουργήσει λύσεις που δεν κυριαρχούνται από άλλες λύσεις, υποδεικνύοντας την ποιότητα των λύσεων που βρίσκονται στο μέτωπο Pareto.

9.2 Ο αλγόριθμος πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης βασισμένος στην επιλογή μέσω της S Μετρικής (S-Metric Selection-based Evaluative Multi-Objective Optimization Algorithm ή SMS-EMOA)

Οι Zitzler και Thiele (1999) εισήγαγαν πρώτοι την μετρική του HV, συχνά αναφερόμενοι σε αυτήν και ως S-μετρική (S-metric). Όπως ήδη αναφέραμε στο κεφάλαιο 9.1, κατά την παράθεση ορισμένων ενδεικτών αξιολόγησης των MOEA, η μετρική αυτή υποδηλώνει το μέγεθος του χώρου κάλυψης του κυριαρχούμενου χώρου (dominated space). Για τον υπολογισμό του πόσο κοντά διάφορες οντότητες που έχουμε προβλέψει είναι στον πραγματικό χώρο Pareto χρειαζόμαστε ποσοτικές μετρικές. Ο δείκτης HV, ο οποίος εκτιμά τον υπερ-όγκο μεταξύ του χώρου Pareto (P) και του σημείου αναφοράς (R) αποτελεί μια τέτοια μέτρηση.

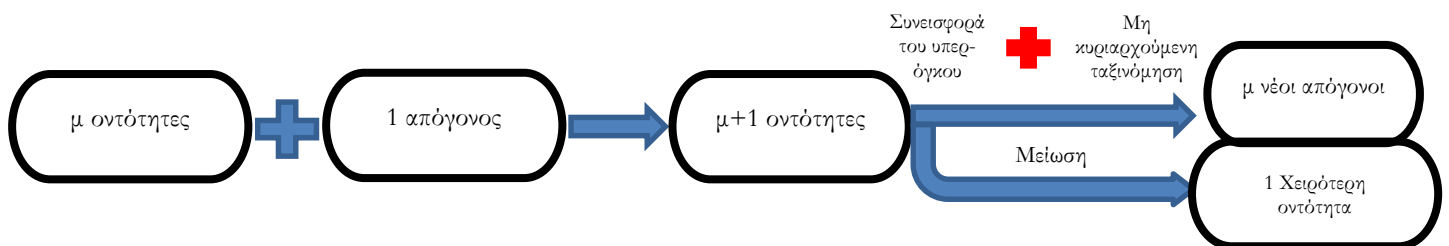
Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 10, ένα κύριο χαρακτηριστικό του SMS-EMOA, σύμφωνα με τους Wang et al. (2023), είναι ότι ανανεώνεται χρησιμοποιώντας μια σταθερή στρατηγική κατά την οποία ένας απόγονος γεννάται σε κάθε επανάληψη και αμέσως αξιολογείται προτού εμπλακεί στην διαδικασία δημιουργίας της επόμενης γενιάς. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε γενιά θα δημιουργεί μόνο μια νέα οντότητα.

Πιο κάτω παρατίθεται ο αλγόριθμος εκτέλεσης του SMS-EMOA σύμφωνα με τους Beume et al. (2006):

Αλγόριθμος εκτέλεσης του SMS-EMOA

- 1: Τυχαία αρχικοποίηση ενός πληθυσμού μ οντοτήτων
- 2: Αριθμός των επαναλήψεων (evolutionary iterations) $t=0$
- 3: Ένας απόγονος q_{t+1} δημιουργείται από διαδικασίες μετάλλαξης
- 4: Αφαίρεση μιας οντότητας από τον πληθυσμό ($P_t \cup \{q_{t+1}\}$)
- 5: $t=t+1$
- 6: Τέλος εφόσον ικανοποιηθούν οι συνθήκες τερματισμού

Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους για να διατηρήσουμε ένα σύνολο μη κυριαρχούμενων οντοτήτων, ο SMS-EMOA διατηρεί σταθερό το μέγεθος πληθυσμού τόσο για τις κυριαρχούμενες όσο και για της μη κυριαρχούμενες οντότητες. Για την επιλογή των οντοτήτων οι οποίες θα αφαιρεθούν κατά την διαδικασία επιλογής, χρειάζεται απαραίτητα η παράμετρος της επιλογής στην κυρίαρχη λύση.



Εικόνα 10. Ο μηχανισμός λειτουργίας του SMS-EMOA. Ένας απόγονος παράγεται σε κάθε επανάληψη και αξιολογείται απευθείας πριν ενσωματωθεί στην επόμενη γενιά, με τους “αδύναμους” απογόνους να εξαλείφονται ως ένας υπο-πληθυσμός. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

Ο πιο κάτω αλγόριθμος σύμφωνα με τους Beume et al. (2006), περιγράφει μια διαδικασία εξάλειψης οντοτήτων. Για την επιλογή των οντοτήτων ώστε να σχηματιστεί ο πληθυσμός, ο SMS-EMOA χρησιμοποιεί ένα σύστημα αξιολόγησης βασισμένο στην προσέγγιση Pareto.

Αλγόριθμος για την μείωση του πληθυσμού Q)

- 1: $\{R_1 \dots R_v\} \leftarrow$ ταχεία μη κυριαρχούμενη κατάταξη (Q), v είναι ο αριθμός των επιπέδων

- 2: Εντοπισμός μιας οντότητας r με τον χαμηλότερο $HV(\Delta s)$ από το R_v
- 3: $Q' = Q \setminus \{r\}$
- 4: Επιστροφή του Q'

Οι Wang et al. (2023) αναφέρουν ότι ο ταχύς αλγόριθμος μη κυρίαρχης κατάταξης εφαρμόζεται για να υπολογιστεί το Pareto μέτωπο (Pareto front) του μη κυρίαρχου επιπέδου έως ότου η οντότητα R_i να μην μπορεί να συμπεριληφθεί στον πληθυσμό G (ο πληθυσμός γονέων (N οντότητες) και ο πληθυσμός των απογόνων (N οντότητες) συνδυάζονται και λαμβάνουμε τις πρώτες N καλύτερες οντότητες. Στην συνέχεια μια οντότητα αφαιρείται από τον πληθυσμό λόγω χαμηλής κατάταξής της. Αν το μέτωπο R_i περιέχει $|R_i| > 1$ (η κυριαρχία μιας οντότητας είναι μεγαλύτερη (ισχυρότερη) από αυτήν μιας άλλης οντότητας, τότε για $s \in R_i$, το μέτωπο που περιλαμβάνεται στο συγκεκριμένο επίπεδο Pareto θα εξαλειφθεί, ελαχιστοποιώντας το. Το $\Delta S(s, R_i)$ αναπαριστά τον HV μιας οντότητας s . Όσο πιο μικρός ο υπερ-όγκος, τόσο μικρότερη η σημαντικότητα των οντοτήτων οι οποίες πρόκειται να αφαιρεθούν. Το σημείο με την χειρότερη μη κυρίαρχη πρόσθια θέση (leading edge) επιλέγεται σε κάθε μια από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις και τις αξιολογεί με βάση την αρχική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης f_1 . Τότε λαμβάνουμε μια δεύτερη ακολουθία η οποία κατατάσσεται με βάση την f_2 . Το $\Delta S(s, R_i)$ υπολογίζεται όπως στην Εξίσωση 10. Αν $R_i: R_i = \{s_1 \dots s_{|R_i|}\}$

$$\Delta S(s_i, R_i) = (f_1(s_{i+1}) - f_1(s_i)) * (f_2(s_{i+1}) - f_2(s_i)) \quad (10)$$

Ο SMS-EMOA είναι ένας πολλά υποσχόμενος αλγόριθμος βελτιστοποίησης Pareto. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμος όταν απαιτούνται λίγες λύσεις καθώς και μια ισορροπημένη επίλυση είναι αναγκαία. Ωστόσο, έχει υψηλές απαιτήσεις από άποψη χρόνου επιλογής και συνήθως εφαρμόζεται όταν υπάρχει μόνο ένα μη κυρίαρχο επίπεδο.

9.3 Εξελικτικός αλγόριθμος βασισμένος σε ενδείκτες (Indicator-Based Evolution Algorithm ή IBEA)

Ο IBEA (Indicator-Based Evolutionary Algorithm) (Zitzler και Künzli, 2004), είναι ένας πολυ-κριτηριακός εξελικτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος κάνει χρήση δεικτών απόδοσης (indicators) για την καθοδήγηση της διαδικασίας επιλογής. Η βασική του διαφορά σε σχέση με άλλους πολυ-κριτηριακούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης που βασίζονται στην κυριαρχία Pareto, εντοπίζεται κυρίως στο γεγονός ότι επιτρέπει την προσαρμογή των δεικτών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του χρήστη και τον στόχο της βελτιστοποίησης.

Οι Zitzler και Künzli, (2004), πρότειναν ένα γενικευμένο εξελικτικό μοντέλο μέσω της ενσωμάτωσης του IBEA με τους ενδείκτες αξιολόγησης ως μια προσαρμογή στους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης.

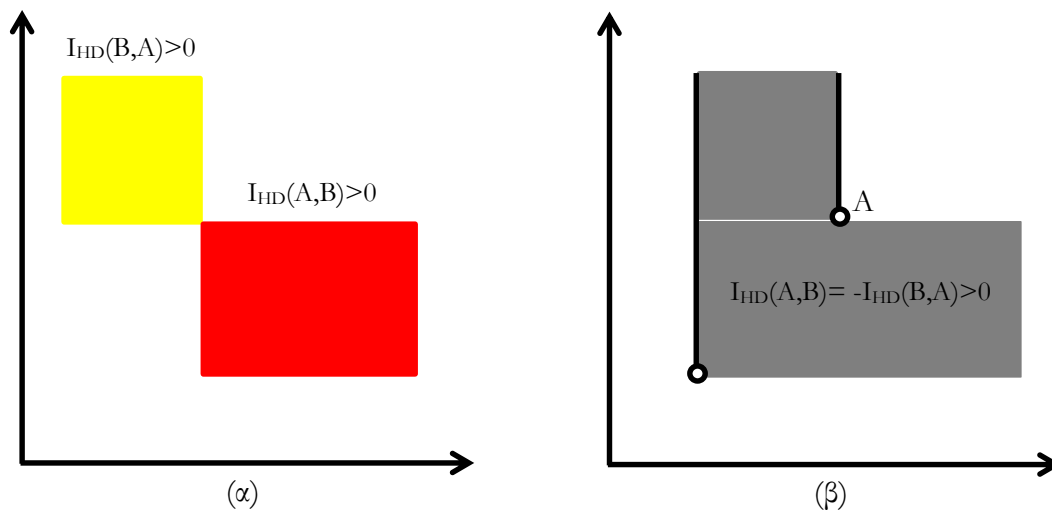
Η ανάθεση της προσαρμοστικότητας στον IBEA, γίνεται μέσω της πιο κάτω σχέσης:

$$F(x^1) = \sum_{x^2 \in P \setminus \{x^1\}} -e^{-I(\{x^2\}, \{x^1\})/k} \quad (11)$$

όπου k είναι ένας κλιμακούμενος παράγοντας μεγαλύτερος του 0 και I είναι ένας πραγματικός αριθμός ο οποίος αντιστοιχίζει την προσεγγιστική ομάδα των λύσεων Pareto στον αντικειμενικό χώρο, με μια ομάδα πραγματικών αριθμών της Εξίσωσης 11. Οι Wang et al. (2023), ορίζουν τον ενδείκτη διαφοράς υπερ-όγκου (Indicator Hyper-volume Difference), ως εξής:

$$I_{HD}(A, B) = \begin{cases} HV(B) - HV(A), & \text{αν } \forall x^2 \in B \exists x^1 \in A: x^1 > x^2 \\ HV(A+B) - HV(A), & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (12)$$

Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 11, το A και B είναι δύο ομάδες λύσεων οι οποίες περιέχουν μόνο μια οντότητα αντίστοιχα. Στο (α) όταν οι οντότητες της ομάδας A και οι οντότητες της ομάδας B δεν κυριαρχούνται η μια από την άλλη, το κίτρινο μέρος δείχνει τον χώρο της ανεξάρτητα κυριαρχούμενης περιοχής της ομάδας A , και τότε $I_{HD}(B, A) = HV(A+B) - HV(B) > 0$. Το κόκκινο μέρος δείχνει τον χώρο της ανεξάρτητα κυριαρχούμενης περιοχής της ομάδας B και ισχύει $I_{HD}(A, B) = HV(A+B) - HV(A) > 0$. Στο (β), το γκρι μέρος δείχνει τον χώρο της ανεξάρτητα κυριαρχούμενης περιοχής της ομάδας B και ισχύει $I_{HD}(A, B) = HV(A+B) - HV(A) > 0$, $I_{HD}(B, A) = HV(A) - HV(B) < 0$, και $I_{HD}(A, B) = -I_{HD}(B, A)$.



Εικόνα 11. Οπτικές αναπαραστάσεις ενός ενδείκτη I_{HD} (Indicator Hypervolume Difference). Στο (α), όταν οι οντότητες της ομάδας A και οι οντότητες της ομάδας B δεν κυριαρχούνται μεταξύ τους, το κίτρινο κομμάτι δείχνει τους χώρους την ανεξάρτητα κυριαρχούμενων περιοχών των A και B αντίστοιχα. Στο (β), όταν η A κυριαρχείται από την B , το γκρι δείχνει τον χώρο της ανεξάρτητα κυριαρχούμενης περιοχής του B . Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [21].

Εξαιλείφοντας μέσω των επαναλήψεων τις πιο αδύναμες οντότητες του πληθυσμού και ρυθμίζοντας την προσαρμοστικότητα των οντοτήτων που απομένουν, ο αλγόριθμος που

ακολουθεί, σύμφωνα με τους Zitzler και Künzli, (2004) μας δείχνει την διαδικασία αναπαραγωγής και επιλογής:

Αλγόριθμος IBEA

- 1: Αρχικοποίηση του πληθυσμού P με τον αριθμό επαναλήψεων $t=0$, την συνθήκη τερματισμού T , και την παράμετρο αρχικοποίησης k .
 - 2: Υπολογισμός του βαθμού προσαρμογής των οντοτήτων στον πληθυσμό P
 - 3: Όσο $|P| > N$
 - 4: Επιλογή των λιγότερο προσαρμοσμένων οντοτήτων στον πληθυσμό P και διαγραφή τους
 - 5: Υπολογισμός εκ νέου των τιμών προσαρμογής των οντοτήτων του P
 - 6: Αν $t > T$, τότε οι συνθήκες τερματισμού εκπληρώνονται
 - 7: Επιλογή των οντοτήτων από τον P , μέσα στο σύνολο αναπαραγωγής Q με την χρήση της δομής επιλογής δυαδικού τουρνουά (binary tournament selection), στην συνέχεια λαμβάνουν χώρα διαδικασίες αντικατάστασης στο σύνολο Q ώστε να παραχθεί ένας νέος πληθυσμός Q' .
 - 8: Διαδικασίες ανασυνδυασμού και μετάλλαξης στο σύνολο Q' .
 - 9: $t = t + 1$, επιστροφή στο βήμα 2
-

9.4 MOEA υψηλών διαστάσεων (High-Dimensioned MOEA)

Για τους πολυ-κριτηριακούς εξελικτικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης οι Wang et al. (2023) αναφέρουν πως η δυσκολία της βελτιστοποίησης αυξάνεται εκθετικά όσο αυξάνεται ο αριθμός των διαστάσεων των κριτηρίων. Συνήθως τα προβλήματα βελτιστοποίησης με τέσσερα και περισσότερα κριτήρια καλούνται “υψηλών διαστάσεων προβλήματα βελτιστοποίησης”. Τα τελευταία χρόνια αυτά τα προβλήματα έχουν εξελιχθεί σε ένα εξαιρετικά δημοφιλές πεδίο μελέτης στον τομέα της εξελικτικής πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης. Οι συνήθειες MOEA, όπως ο NSGA-II και ο SPEA2, εμφανίζουν καλά αποτελέσματα κατά την επίλυση προβλημάτων δύο και τριών διαστάσεων, όμως όταν ο αριθμός των διαστάσεων των κριτηρίων αυξάνεται, οι παραπάνω αλγόριθμοι οι οποίοι βασίζονται σε σχέσεις κυριαρχίας Pareto, συνήθως αντιμετωπίζουν δυσκολίες όπως:

1. Υποβάθμιση της ικανότητας αναζήτησης. Όσο ο αριθμός των αντικειμενικών συναρτήσεων αυξάνεται (δηλαδή των διαστάσεων), ο αριθμός των μη κυριαρχούμενων

οντοτήτων στον πληθυσμό αυξάνεται εκθετικά, με αποτέλεσμα την μείωση της ικανότητας επιλογής κατά την εξελικτική διαδικασία.

2. Ο αριθμός των μη κυριαρχούμενων λύσεων, ο οποίος καλύπτει ολόκληρο το σύνολο Pareto αυξάνεται επίσης εκθετικά.
3. Εγείρονται δυσκολίες στην οπτικοποίηση (ή κατανόηση) της βέλτιστης ομάδας λύσεων.
4. Οι πρόσθετοι υπολογιστικοί πόροι οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την αξιολόγηση της ομάδας των λύσεων αυξάνονται.
5. Η αποτελεσματικότητα της διαδικασίας ανασυνδυασμού (recombination operation) μειώνεται. Σε ένα υψηλότερων διαστάσεων χώρο, οι οντότητες που προκύπτουν από δυο μεμακρυσμένους γονείς ενδέχεται να μην διατηρούν τα χαρακτηριστικά των γονέων, κάνοντας έτσι την διαδικασία εύρεσης τοπικού μέγιστου αδύναμη. Έτσι, ο σχεδιασμός και εφαρμογή αλγορίθμων οι οποίοι να μπορούν να επιλύουν αποτελεσματικά πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης υψηλών διαστάσεων αποτελεί τόσο μια από τις τρέχουσες όσο και μελλοντική πρόκληση στον τομέα της εξελικτικής πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.

Τα τελευταία έτη, οι ακαδημαϊκοί έχουν προτείνει μερικές αποτελεσματικές μεθόδους για την επίλυση πολυκριτηριακών προβλημάτων βελτιστοποίησης υψηλών διαστάσεων. Ένας τύπος τέτοιου αλγόριθμου βασίζεται στις σχέσεις κυριαρχίας Pareto, για την μείωση των μη κυριαρχούμενων οντοτήτων με την επέκταση της περιοχής της κυριαρχίας Pareto, όπως είναι ο ε-MOEA, και των περιοχών λύσεων ελέγχου και κυριαρχίας (Control and Dominance Area of Solution ή CDAS). Μια αθροιστική συνάρτηση (aggregation function) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ώστε να συνενώσει (aggregate) πολλαπλά κριτήρια σε ένα μονό, όπως οι MOEA/D, NSGA-III και ο MSOPS-II.

Τελικά, υπάρχουν αλγόριθμοι βασιζόμενοι στις μετρικές οι οποίοι χρησιμοποιούν μετρικές αξιολόγησης της απόδοσης για την σύγκριση δύο πληθυσμών ή δύο οντοτήτων, όπως οι IBEA, SMS-EMOA και ο Hyp. Ο Li (2013) πρότεινε μια προσέγγιση εκτίμησης της πυκνότητας κατανομής δεδομένων χρησιμοποιώντας μετατοπίσεις δεδομένων (shift-based density estimation method ή SDE) από την άποψη της διατήρησης της ποικιλομορφίας των λύσεων και αναβάθμισε τον SPEA2 σε SPEA2 + SDE, με αποτέλεσμα την βελτίωση των αποτελεσμάτων του.

10. Αξιολόγηση της απόδοσης των MOEA

Η αξιολόγηση σε πρακτικό επίπεδο αποτελεί κρίσιμο στοιχείο το οποίο χαρακτηρίζει την επιτυχή ή μη εφαρμογή ενός εξελικτικού πολυ-κριτηριακού αλγόριθμου βελτιστοποίησης. Στην διεθνή βιβλιογραφία προτείνονται αρκετά εργαλεία (τεστ) ελέγχου της αποδοτικότητας των MOEA. Για την αξιολόγηση των ικανοτήτων των MOEA, οι ερευνητές χρησιμοποιούν συνήθως τυπικά εργαλεία ελέγχου. Ορισμένοι ενδείκτες αξιολόγησης, οι οποίοι παρατέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας, όπως ο HV και ο IGD χρησιμοποιούνται για την μέτρηση της σύγκλισης (convergence), της ομοιομορφίας (uniformity) και της διαφορετικότητας (diversity) των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή ενός πολυ-κριτηριακού εξελικτικού αλγόριθμου. Αυτοί οι δείκτες παρέχουν μια κλίμακα αξιολόγησης η οποία αντανακλά τόσο την σύγκλιση όσο και την κατανομή των λύσεων. Ο αριθμός και η ποικιλία των λύσεων Pareto οι οποίες προκύπτουν από τον αλγόριθμο είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας που πρέπει να εξετάζεται.

10.1 Πολυκριτηριακά προβλήματα βελτιστοποίησης αναφοράς (Multi-Objective Optimization Benchmark Problems)

Για τον έλεγχο της ικανότητας των πολυ-κριτηρίων εξελικτικών αλγόριθμων να βελτιώνονται, είναι απαραίτητη η ύπαρξη συναρτήσεων ελέγχου (test functions). Οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να έχουν την ικανότητα να πληρούν τα βασικά χαρακτηριστικά των πολυ-κριτηριακών αντικειμενικών συναρτήσεων, όπως να είναι συνεχείς ή όχι, παραγωγίσιμες ή όχι, κυρτές ή κοίλες, μιας κορυφής ή πολλαπλών.

Οι Zitzler et al. (2000) εισήγαγαν έξι ευρέως χρησιμοποιούμενες πολυ-κριτήριες συναρτήσεις αναφοράς, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της αποδοτικότητας των MOEA, μερικές από τις οποίες διακρίνονται στην Εικόνα 12. Έχει καθιερωθεί να αναφερόμαστε σε αυτές τις συναρτήσεις ελέγχου ως συναρτήσεις ZDT (Wang et al. 2023), από τα αρχικά των εμπνευστών τους (Zitzler, Deb, και Thiele).

Συνάρτηση	Διαστάσεις	Ορισμός Συνάρτησης	Εύρος Αναζήτησης
ZDT1	30	$f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}]$ $g(x) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^{30} x_i}{n-1}$	$x_i \in [0, 1]$
ZDT2	30	$f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - (\frac{x_1}{g(x)})^2]$ $g(x) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^{30} x_i}{n-1}$	$x_i \in [0, 1]$
ZDT3	30	$f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}} - \frac{x_1}{g(x)} \sin(10\pi x_1)]$ $g(x) = 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^{30} x_i}{n-1}$	$x_i \in [0, 1]$
ZDT4	10	$f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}]$ $g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n [x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)]$	$x_1 \in [0, 1]$, $x_i \in [-5, 5]$, $i = 2, 3, \dots, 10a$
ZDT6	10	$f_1(x) = 1 - \exp(-4\pi x_1) \sin^6(6\pi x_1)$ $f_2(x) = g(x)[1 - (\frac{x_1}{g(x)})^2]$ $g(x) = 1 + 9[\frac{\sum_{i=2}^{10} x_i}{n-1}]^{0.25}$	$x_i \in [0, 1]$

Εικόνα 12. Οι χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις ελέγχου ZDT (ZDT test functions), όπως προτάθηκαν από τους Zitzler, Deb, και Thiele το 2000. Η εικόνα υιοθετήθηκε από την πηγή [16].

Τα κύρια σημεία των συναρτήσεων ελέγχου ZDT, σύμφωνα με τους Wang et al. (2023), έχουν όπως πιο κάτω:

- 1) Όλες οι συναρτήσεις ελέγχου έχουν δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, $f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$. Επιπλέον, το διάγραμμα τους είναι εύκολο να κατανοηθεί διότι η μορφή και η θέση του συνόλου Pareto είναι γνωστές.
- 2) Ο αριθμός των μεταβλητών αποφάσεων είναι ευέλικτος και μπορεί να καθοριστεί όπως χρειάζεται.

10.2 Κρίσιμοι ενδείκτες αξιολόγησης των MOEA

Στο κεφάλαιο 9.1. αναφέραμε συνοπτικά μερικές από τις μετρικές των MOEA, οι οποίες χρησιμεύουν στην οπτικοποίηση της αποτελεσματικότητας των αλγορίθμων αυτών. Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο, να αναφερθούμε λίγο εκτενέστερα σε δύο από τις προαναφερόμενες μετρικές ή ενδείκτες, οι οποίοι σύμφωνα με τους Wang et al. (2023) προσφέρουν μια αρκετά καλή εικόνα της συνολικής απόδοσης των MOEA. Οι ενδείκτες αυτοί είναι ο ενδείκτης του υπερ-όγκου (Hyper-Volume Indicator) καθώς και ο ενδείκτης της αντίστροφης γενεαλογικής απόστασης (Inverted Generational Distance Indicator).

● Ενδείκτης υπερ-όγκου (Hyper-Volume Indicator)

Για τον ενδείκτη αυτό, οι Wang et al. (2023) αναφέρουν πως είναι αρκετά διαδεδομένος και σημαντικός στους εξελικτικούς πολυ-κριτηριακούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης λόγω της ισχυρής θεωρητικής θεμελίωσης του. Με τον υπολογισμό του HV της περιοχής δηλαδή η οποία δεσμεύεται από το σημείο αναφοράς και τις μη κυριαρχούμενες λύσεις, παρουσιάζεται μια συγκεντρωτική εκτίμηση της απόδοσης ενός MOEA. Ο HV, όπως φαίνεται και στην Εξίσωση 13, είναι μια μέτρηση της ποιότητας και είναι αυστηρά μονοτονικός σε σχέση με την κυριαρχία Pareto. Στην εξίσωση αυτή, ο όγκος μετράται με την χρήση της μέτρησης Lebesgue και αναπαρίσταται με δ . Το πλήθος των στοιχείων της μη κυριαρχούμενης ομάδας λύσεων αναπαρίσταται με το σύμβολο $|S|$, και ο υπερ-κύβος ο οποίος δημιουργείται από το σημείο αναφοράς z^* και την i -οστή λύση αναπαρίσταται με το v_i . Ένας υψηλός δείκτης HV δείχνει έναν αλγόριθμο με υψηλή κυριαρχία.

$$HV = \delta \left(\bigcup_{i=1}^{|U|} v_i \right) \quad (13)$$

Ωστόσο υπάρχουν δυο ατέλειες σχετικά με τον δείκτη HV. Αρχικά, ο δείκτης αυτός υπολογίζεται μετά από μια μεγάλη περίοδο λειτουργίας του αλγορίθμου. Δεύτερον, η επιλογή των σημείων αναφοράς επηρεάζει την ακρίβειά του.

● Αντίστροφος γενεαλογικός δείκτης απόστασης (Inverted Generational Distance Indicator)

Οι Wang et al. (2023) αναλύουν την γενεαλογική απόσταση ως την μέση απόσταση μεταξύ όλων των οντοτήτων στην ομάδα μη κυριαρχούμενων λύσεων του αλγορίθμου καθώς και στο σύνολο βέλτιστων λύσεων Pareto, ενώ η αντίστροφη γενεαλογική απόσταση είναι η αντίστροφη απεικόνιση της απόστασης των γενεών. Ο δείκτης IGD, όπως φαίνεται στην Εξίσωση 14, αποτελεί μια μέτρηση της συνολικής ικανότητας του αλγορίθμου. Αρχικά καθορίζει την μικρότερη απόσταση μεταξύ κάθε οντότητας στο σύνολο Pareto και της ομάδας λύσεων που παρήγαγε η εκτέλεση του αλγορίθμου. Χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της ικανότητας του αλγορίθμου σχετικά με την σύγκλιση και την κατανομή. Η συνολική απόδοση βελτιώνεται όσο η τιμή του δείκτη αυτού μειώνεται. Στην εξίσωση αυτή, η ομάδα των σημείων p είναι ομαλά (evenly) κατανεμημένη στο σύνολο Pareto. Η ποσότητα των σημείων που βρίσκονται διεσπαρμένα στο σύνολο Pareto συμβολίζεται με $|p|$. Η διαδικασία η οποία παρήγαγε την βέλτιστη ομάδα λύσεων συμβολίζεται με Q , και η ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση με $d(v, Q)$, μεταξύ της οντότητας v και του πληθυσμού Q .

$$IGD = \frac{\sum_{v \in p} d(v, Q)}{|p|} . \quad (14)$$

Ο δείκτης IGD όχι μόνο είναι σε θέση να εκτιμήσει την σύγκλιση των MOEA αλλά επίσης εκτιμά την κατανομή, την ομοιομορφία και την καθολικότητα.

11. Επίλογος - Το μέλλον της πολυ-κριτηριακής βελτιστοποίησης

Στο σημείο αυτό, και καθώς φτάνουμε στο τέλος της παρούσας εργασίας, γεννάται εύλογα η ερώτηση σχετικά με το μέλλον και την εξέλιξη της πολυ-κριτηριακής (εξελικτικής και μη) βελτιστοποίησης. Όπως ήδη αναφέραμε από την αρχή, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται άνθηση στον τομέα της μελέτης της πολυ-κριτηριακής ανάλυσης. Σύγχρονοι ερευνητές έχουν προτείνει αλγόριθμους ικανούς να ανταποκριθούν σε προβλήματα άνω των δύο ή τριών διαστάσεων (αντικειμενικών συναρτήσεων), όπως ο HypE των Bader και Zitzler (2011), ο οποίος βασίζεται στον ενδείκτη του υπερ-όγκου ξεφεύγοντας από την κλασσική αναζήτηση των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων, ο αλγόριθμος NSGA-III, των Deb και Jain (2013), ο οποίος αποτελεί την εξέλιξη του NSGA-II, αποτελούν ελάχιστα τέτοια παραδείγματα.

Σαφώς, η πολυ-κριτηριακή ανάλυση χαρακτηρίζεται από ορισμένες προκλήσεις, όπως την εξασφάλιση ότι οι πληθυσμοί των οντοτήτων που προκύπτουν μετά τις πρώτες επαναλήψεις των εξελικτικών αλγορίθμων τείνουν προς το πραγματικό κατά Pareto βέλτιστο. Πρόκληση αποτελεί και η επιλογή των κατάλληλων οντοτήτων οι οποίες θα εμπλακούν στην διαδικασία του σχηματισμού της νέας γενιάς λόγω διαφόρων δυσκολιών όπως η δυσκολία σύγκρισης κάποιων από αυτές (αφού πολλές φορές ανήκουν στο ίδιο Pareto front και παρουσιάζουν ίδια ποικιλομορφία (diversity)).

Σύμφωνα λοιπόν με τα όσα αναλύθηκαν, μπορούμε να πούμε ότι κατά την εξελικτική διαδικασία του πληθυσμού, ο γενετικός αλγόριθμος υιοθετεί μια τυχαιοποιημένη μέθοδο αναζήτησης. Παρόλο που αυτό το μοντέλο είναι χρήσιμο σε πρακτικές εφαρμογές, έχει ορισμένα προβλήματα χαμηλής απόδοσης, όπως πρόωρη ή αργή σύγκλιση.

Σε αρκετές πρακτικές εφαρμογές των πολυ-κριτήριων αλγόριθμων βελτιστοποίησης, ο χρόνος και η πολυπλοκότητά τους καθιστούν την χρήση τους μη συμφέρουσα. Η εξέλιξη και η “αναβάθμιση” των αλγορίθμων αυτών ήταν, είναι και θα παραμείνει άμεσα συνυφασμένη με την εξέλιξη των δυνατοτήτων των υπολογιστικών συστημάτων, τα οποία χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των αλγορίθμων. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι όσο το υλικό (hardware) αναβαθμίζεται, τόσο θα εμφανίζονται νέες δυνατότητες των πολυ-κριτήριων αλγόριθμων αλλά επίσης και νέοι πιο εξελιγμένοι αλγόριθμοι θα έρχονται στο προσκήνιο.

Ένας τομέας ακόμα ο οποίος εμφανίζεται πολλά υποσχόμενος είναι η διασύνδεση του χάους και της βελτιστοποίησης. Οι Javidi και Hosseinpourfard (2015) αναφέρουν για τους χαοτικούς γενετικούς αλγόριθμους ότι “η θεωρία του χάους και η δημιουργία χαοτικών ακολουθιών αντί τυχαίων ακολουθιών έχουν υιοθετηθεί, οδηγώντας σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα σε πολλές εφαρμογές όπως η βελτιστοποίηση προβλημάτων ροής ενέργειας, συστημάτων ελέγχου, τα νευρωνικά δίκτυα, η κρυπτογραφία, η επεξεργασία εικόνων κ.α.

Λόγω της εύκολης υλοποίησης και της ικανότητάς τους να αποφεύγεται η παγίδευση σε τοπικά βέλτιστα, το χάος έχει αναδειχθεί ως μια νέα τεχνική βελτιστοποίησης, και οι αλγόριθμοι αναζήτησης που βασίζονται στο χάος έχουν προκαλέσει έντονο ενδιαφέρον. Πειραματικές μελέτες επιβεβαιώνουν ότι τα οφέλη από τη χρήση χαοτικών σημάτων αντί για τυχαία σήματα είναι συχνά προφανή, αν και δεν έχει αποδειχθεί μαθηματικά ακόμα”.

Στην κατεύθυνση αυτή, οι Hundhausen et al. (2002) εισήγαγαν τους αλγόριθμους οπτικής αναζήτησης των εξελικτικών αλγόριθμων. Σύμφωνα με τους Wang et al. (2023), η οπτικοποίηση του αλγορίθμου εξάγει τον κώδικα, την λειτουργία και την σημασιολογία του προγράμματος και αναπαριστά τα παραπάνω δυναμικά. Λαμβάνοντας τον αλγόριθμο ταξινόμησης ως παράδειγμα, το σύστημα οπτικοποίησης του αλγορίθμου, θα συνδυάσει αρχικά και θα εισάγει τον κώδικα στο πρόγραμμα, θα αναδιαμορφώσει τις δηλώσεις ανάθεσης (assignment statements) και βρόχων (loops) σε λειτουργίες που περιλαμβάνουν την ανταλλαγή (exchange) και την εισαγωγή (insertion) στοιχείων, στον αλγόριθμο ταξινόμησης και όταν το πρόγραμμα εκτελέσει αυτές τις εντολές το σύστημα θα εμφανίσει μια οπτική αναπαράσταση των λειτουργιών του αλγορίθμου. Η οπτικοποίηση του αλγορίθμου δεν οπτικοποιεί την κάθε εντολή, ενώ επικεντρώνεται στην λογική και ο αλγόριθμος εκφράζεται με εντολές ως ένα ολοκληρωμένο τμήμα. Οι αλγόριθμοι περιλαμβάνουν έννοιες βασισμένες στην γνώση (knowledge-based concepts) όπως ιδέες και διαδικασίες.

Τελικά, μπορούμε να διατυπώσουμε με σιγουριά την άποψη ότι το μέλλον των πολυ-κριτήριων εξελικτικών αλγόριθμων βελτιστοποίησης διαφαίνεται πολλά υποσχόμενο, ενώ είναι σίγουρο πως η διαδικασία της πολυ-κριτηριακής ανάλυσης θα συνεχίσει να εξελίσσεται με γρήγορους ρυθμούς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bader, J., & Zitzler, E. (2011). HypE: An Algorithm for Fast Hypervolume-Based Many-Objective Optimization. *Evolutionary Computation*, 19(1), 45-76. https://doi.org/10.1162/EVCO_a_00009
2. Beume, N., Naujoks, B., & Emmerich, M. (2007). SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 181(3), 1653-1669. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.08.008>
3. Coello Coello, C. A., Lamont, G. B., & Van Veldhuizen, D. A. (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36797-2>
4. Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. Wiley, New York.
5. Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2002.996017>
6. Deb, K., & Jain, H. (2013). An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-point Based Non-dominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems with Box Constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2013.2281535>
7. Ho-Huu, V., Hartjes, S., Visser, H. G., & Curran, R. (2018). An improved MOEA/D algorithm for bi-objective optimization problems with complex Pareto fronts and its application to structural optimization. *Expert Systems with Applications*, 92, 430-446. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.09.051>
8. Horn, J., Nafpliotis, N., & Goldberg, D. E. (1994). A niched Pareto genetic algorithm for multi-objective optimization. *Proceedings of the First IEEE Conference on*

- Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, 1, 82-87. <https://doi.org/10.1109/ICEC.1994.350037>
9. Hundhausen, C. D., Douglas, S. A., & Stasko, J. T. (2002). A meta-study of algorithm visualization effectiveness. *Journal of Visual Languages and Computing*, 13(3), 259-290. [https://doi.org/10.1006/S1045-926X\(02\)00028-9](https://doi.org/10.1006/S1045-926X(02)00028-9)
 10. Javidi, M., & Hosseinpourfard, R. (2015). Chaos genetic algorithm instead of genetic algorithm. *The International Arab Journal of Information Technology*, 12(2), 163-168.
 11. Lai, L., Fiaschi, L., Cococcioni, M., & Deb, K. (2022). Pure and mixed lexicographic-paretian many-objective optimization: State of the art. *Natural Computing*, 22, 227–242. <https://doi.org/10.1007/s11047-022-09911-4>
 12. Li, M., Yang, S., & Liu, X. (2014). Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 18(3), 348-365. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2013.2262178>
 13. Pătrăușanu, A., Florea, A., Neghină, M., Dicoiu, A., & Chis, R. (2024). A systematic review of multi-objective evolutionary algorithms optimization frameworks. *Processes*, 12(869). <https://doi.org/10.3390/pr12050869>
 14. Schaffer, J. D. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, 93-100.
 15. Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall.
 16. Wang, Z., Pei, Y., & Li, J. (2023). A survey on search strategy of evolutionary multi-objective optimization algorithms. *Applied Sciences*, 13(4643). <https://doi.org/10.3390/app13074643>
 17. Zhang, Q., & Li, H. (2007). MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6), 712-731. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2007.892759>
 18. Zhang, Q., Liu, W., & Li, H. (2009, June). The performance of a new version of MOEA/D on CEC09 unconstrained MOP test instances. Paper presented at the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2009. <https://doi.org/10.1109/CEC.2009.4982949>

19. Zitzler, E. (1999). Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications [Doctoral dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zurich]. ETH Zurich.
20. Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 8(2), 173-195.
21. Zitzler, E.; Künzli, S. Indicator-based selection in multiobjective search. In *Proceedings of the International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*, Birmingham, UK, 18–22 September 2004; pp. 832–842.
22. Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2001). SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. TIK Report 103. Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-004284029>
23. Zitzler, E., & Thiele, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4), 257-271. <https://doi.org/10.1109/4235.797969>