

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ



Γεωστατιστική ανάλυση στάθμης υπογείων  
υδάτων σε υδροφορείς πορώδους τύπου στο  
υδατικό διαμέρισμα της Κρήτης

Μαρία Χρυσάνθη

Τριμελής Επιτροπή

Επίκουρος. Καθ. Εμμ. Βαρουχάκης (επιβλέπων)

Καθηγητής Εμμ. Στειακάκης

Καθ. Γ. Καρατζάς (ΧΗΜΗΠΕΡ)

Χανιά, Αύγουστος 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>10</b>
1.1	Στόχος εργασίας . . . . .	11
1.2	Δομή εργασίας . . . . .	11
1.3	Περιγραφή περιοχής μελέτης . . . . .	13
1.4	Στρωματογραφία . . . . .	13
1.4.1	Στρωματογραφία Μεσσαράς . . . . .	14
1.5	Υδρολιθολογικά στοιχεία . . . . .	16
1.6	Υδρογεωλογικά στοιχεία . . . . .	18
1.6.1	Επιφανειακά ύδατα . . . . .	18
1.6.2	Υπόγεια ύδατα . . . . .	18
1.7	Λεκάνη Μοιρών . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Γεωστατιστική</b>	<b>21</b>
2.1	Τυχαίο Πεδίο . . . . .	21
2.2	Χαρακτηριστικά Τυχαίου Πεδίου . . . . .	22
2.2.1	Μέση Τιμή . . . . .	22
2.2.2	Διακύμανση . . . . .	23
2.2.3	Διασπορά . . . . .	23
2.2.4	Συνάρτηση Συνδιασποράς . . . . .	24
2.2.5	Στατιστική Ομοιογένεια . . . . .	25

2.2.6	Στατιστική Ισοτροπία . . . . .	25
2.2.7	Στατιστική Ανισοτροπία . . . . .	26
2.3	Έλεγχοι . . . . .	26
2.3.1	Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης . . . . .	26
2.3.2	Στάθμη σημαντικότητας $\alpha$ . . . . .	27
2.3.3	Έλεγχος $p$ τιμής . . . . .	27
2.3.4	Έλεγχος κανονικότητας . . . . .	27
2.3.5	Έλεγχος στασιμότητας . . . . .	28
2.4	Χωρική Εξάρτηση . . . . .	29
2.4.1	Βαριόγραμμα . . . . .	29
2.4.2	Ισοτροπικά μοντέλα βαριογράμματος . . . . .	32
2.5	Προσδιορισμός ανισοτροπίας . . . . .	33
2.5.1	Δισδιάστατο κατευθυντικό βαριόγραμμα . . . . .	34
2.6	Διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	36
2.7	Αποστάσεις . . . . .	38
2.7.1	Απόσταση Manhattan . . . . .	38
2.7.2	Ευκλείδεια απόσταση . . . . .	39
2.8	Εκτίμηση Τυχαίων Πεδίων . . . . .	40
2.8.1	Εκτίμηση με πολύγωνα Voronoi . . . . .	40
2.8.2	Τάση . . . . .	41
2.8.3	Μέθοδοι Kriging . . . . .	42
2.8.4	Μέτρα Επιβεβαίωσης Χωρικού Μοντέλου . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Γεωστατιστική ανάλυση στη λεκάνη των Μοιρών</b>	<b>49</b>
3.1	Προκαταρκτική ανάλυση δεδομένων . . . . .	50
3.2	Ανάλυση με τη μέθοδο Voronoi . . . . .	51
3.3	Προσδιορισμός τάσης . . . . .	53
3.3.1	Στασιμότητα . . . . .	54

3.4	Ανάλυση με τη μέθοδο Kriging . . . . .	56
3.4.1	Βαριογραφία χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	56
3.4.2	Kriging χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	58
3.4.3	Επαλήθευση μεθοδολογίας . . . . .	59
3.5	Kriging με διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	61
3.5.1	Βαριογραφία με διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	65
3.5.2	Kriging με διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	66
3.5.3	Επαλήθευση εκτίμησης ισοτροπικού πεδίου . . . . .	66
3.6	Kriging με απόσταση Manhattan . . . . .	68
3.6.1	Βαριογραφία με απόσταση Manhattan . . . . .	70
3.6.2	Kriging με απόσταση Manhattan . . . . .	72
3.6.3	Επαλήθευση εκτίμησης με απόσταση Manhattan . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>75</b>
4.1	Εκτίμηση με τη μέθοδο Kriging . . . . .	76
4.2	Kriging και διόρθωση ανισοτροπίας . . . . .	77
4.3	Kriging και απόσταση Manhattan . . . . .	77
4.4	Σύγκριση Kriging με πολύγωνα Voronoi . . . . .	78
4.5	Χάρτες Kriging και ανθρώπινες πιέσεις . . . . .	78
4.6	Σύγκριση με προηγούμενες έρευνες . . . . .	79
4.7	Μελλοντική έρευνα . . . . .	80

# Κατάλογος Εικόνων

1.1	Απλοποιημένος γεωλογικός χάρτης Κρήτης [14]. . . . .	14
1.2	Η λεκάνη των Μοιρών [37]. . . . .	20
2.1	Μετασχηματισμός ελλειψοειδούς ισοϋψούς καμπύλης σταθερού βαριογράμματος σε κύκλο με στροφή και διόρθωση κλίμακας του συστήματος συντεταγμένων [2]. . . . .	34
2.2	Δισδιάστατη απεικόνιση ισοτροπικού πεδίου με εμφανή την κατεύθυνση $\hat{\beta}$ . Η γωνία $\hat{\beta}$ δίνεται με κάποια γωνιακή ανοχή $\hat{\phi}$ . . . . .	35
2.3	Επιλογή σημείων για την κατασκευή κατευθυντικού βαριογράμ- ματος. Μπλε (x) είναι τα σημεία εντός της γωνιακής ανοχής και μαύρα (o) τα σημεία εκτός. . . . .	36
2.4	Δεξιά: Απόσταση Manhattan. Αριστερά: Ευκλείδεια απόσταση. Κινούμενοι στο επίπεδο η ευκλείδεια απόσταση του κελιού (2,2) από την αρχή (κελί (1,1)) είναι $\sqrt{2}$ . Για την ίδια θέση η τιμή με απόσταση Manhattan είναι 2. . . . .	39
3.1	Θέσεις γεωτρήσεων στο χώρο. . . . .	51
3.2	Κυψελίδες Voronoi. . . . .	52
3.3	Διάγραμμα απόκλισης του πεδίου διακύμανσης από την κανονική κατανομή. . . . .	54

3.4	Έλεγχος ομοιογένειας στο πεδίο των διακυμάνσεων. . . . .	55
3.5	Προσαρμογή θεωρητικού σφαιρικού μοντέλου στο πειραματικό. .	57
3.6	Εκτίμηση του ύψους νερού με τη μέθοδο Ordinary Kriging. . .	59
3.7	Ακρίβεια εκτίμησης στα σημεία πρόβλεψης. . . . .	60
3.8	Κατανομή σφαλμάτων διεσταυρωμένης επαλήθευσης. . . . .	62
3.9	Μήκη συσχέτισης για κατευθύνσεις από 0° έως 180° με βήμα 4°. Η εσωτερική κλίμακα που φαίνεται στο διάγραμμα περιγράφει τα μήκη συσχέτισης με μονάδες μηκών τόξου. . . . .	64
3.10	Σύγκριση βαριογραμμάτων. α) πανκατευθυντικό, χωρίς διόρ- θωση ανισοτροπίας. β) Βαριόγραμμα μετά την διόρθωση της ανισοτροπίας. . . . .	67
3.11	Σύγκριση κανονικού Kriging χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας και με διόρθωση ανισοτροπίας. . . . .	68
3.12	Σύγκριση σφαλμάτων για το πεδίο πριν και μετά τη διόρθωση ανισοτροπίας. . . . .	69
3.13	Σύγκριση βαριογραμμάτων. α) Βαριόγραμμα με ευκλείδεια απόσ- ταση β) Βαριόγραμμα με απόσταση Manhattan. . . . .	71
3.14	Σύγκριση κανονικού Kriging με Ευκλείδεια απόσταση και απόσ- ταση Manhattan. . . . .	72
3.15	Εκτίμηση τυπικής απόκλισης με απόσταση Manhattan. . . . .	73

## Κατάλογος Πινάκων

3.1	Στατιστικά μεγέθη του συνόλου δεδομένων . . . . .	51
3.2	Συντελεστές προτύπου τάσης . . . . .	53
3.3	Στατιστικά μεγέθη του πεδίου διακυμάνσεων . . . . .	55
3.4	Οι κεντρικές ροπές των τριών πληθυσμών εντός του δείγματος που ελέγχθηκαν για την υπόθεση της στασιμότητας του πεδίου. .	55
3.5	Τετραγωνικό σφάλμα μοντέλου-πειραματικού ημιβαριογράμματος.	56
3.6	Εκτιμηθείσες παράμετροι σφαιρικού μοντέλου. . . . .	57
3.7	Μέτρα επαλήθευσης της μεθοδολογίας κανονικού Kriging . . .	61
3.8	Γεωμετρικές παράμετροι της έλλειψης ανισοτροπίας. . . . .	63
3.9	Αναλογία μεταβολής γεωγραφικού μήκους $\lambda_1$ και αναλογία μεταβολής γεωγραφικού πλάτους $\lambda_2$ . . . . .	65
3.10	Τετραγωνικό σφάλμα μοντέλου-πειραματικού ημιβαριογράμματος.	65
3.11	Εκτιμηθείσες παράμετροι σφαιρικού μοντέλου. . . . .	66
3.12	Σύγκριση μέτρων επαλήθευσης των δύο προσεγγίσεων. . . . .	70
3.13	Σύγκριση παραμέτρων σφαιρικού μοντέλου. . . . .	70
3.14	Σύγκριση μέτρων επαλήθευσης των δύο προσεγγίσεων. . . . .	74

# Ευχαριστίες

Η παρούσα μελέτη ολοκληρώθηκε στο Εργαστήριο Γεωστατιστικής του Πολυτεχνείου Κρήτης υπό την παρακολούθηση του καθηγητή μου κ. Εμμ. Βαρουχάκη, στον οποίον εκφράζω τις ευχαριστίες μου για την καθοδήγησή του. Ιδιαίτερες ευχαριστίες αποδίδω στον Δρ. Παυλίδη Ανδρέα για την υποστήριξή του στην εκπόνηση της διπλωματικής, την Ιουλία Κοροπτσένκο για τις χρήσιμες παρατηρήσεις της και τα λοιπά μέλη του εργαστηρίου για τη συνεισφορά τους. Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές κ. Στειακάκη και κ. Καρατζά για τη συμμετοχή στην τριμελή επιτροπή της εργασίας μου.



# Περίληψη

Η γεωστατιστική ανάλυση παρέχει πληροφορία για τη χωρική κατανομή φυσικών μεγεθών. Τα τελευταία αντιπροσωπεύονται από τη μαθηματική έννοια του τυχαίου πεδίου. Για τη διερεύνηση των πεδίων αναπτύχθηκαν μέθοδοι χωρικής παρεμβολής με περισσότερο διαδεδομένες τις μεθόδους Kriging. Στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε εφαρμογή της μεθοδολογίας κανονικού Kriging για δεδομένα μέσης στάθμης από 70 υδροσημεία της λεκάνης των Μοιρών. Για την προετοιμασία των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν έλεγχοι στασιμότητας, κανονικότητας και ανισοτροπίας. Σκοπός της εργασίας ήταν η δημιουργία χαρτών εκτίμησης της αναμενόμενης στάθμης. Ερευνήθηκαν δύο καταστάσεις των δεδομένων. Η πρώτη εκτίμηση διεξήχθη από τα δεδομένα χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας και η δεύτερη μετά από διόρθωση. Τα αποτελέσματα της έρευνας παράγουν τους δύο χάρτες χωρικής εξάρτησης και υπολογίζουν ότι η γεωμετρική ανισοτροπία των δεδομένων περιγράφεται από ανισοτροπικό λόγο  $R=1.58$ . Τα μέτρα επιβεβαίωσης υπολογίστηκαν με μικρή απόκλιση για τις δύο περιπτώσεις και δείχνουν πως ανισοτροπία αυτής της τάξης μεγέθους μπορεί να αγνοηθεί. Τέλος, πραγματοποιήθηκε σύγκριση της εκτίμησης με χρήση ευκλείδειας και με χρήση μη ευκλείδειας απόστασης(απόσταση Manhattan). Οι παραγόμενοι χάρτες από κάθε προσέγγιση ελέγχθηκαν για την εγκυρότητά τους μέσω της έκφρασης του Kriging για τη διασπορά των τιμών και με στατιστικά μέτρα επιβεβαίωσης.

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τα υπόγεια ύδατα αποτελούν έναν κρίσιμο φυσικό πόρο, ζωτικής σημασίας τη διατήρηση κάθε επίγειου οικοσυστήματος. Κατανέμεται και αξιοποιείται από διάφορους τομείς, συμβάλλοντας στην κάλυψη της παγκόσμιας ζήτησης για νερό. Στη γεωργία, τα υπόγεια ύδατα χρησιμοποιούνται εκτενώς για άρδευση καλλιεργειών [23]. Στη βιομηχανία, το νερό είναι απαραίτητο σε διάφορα στάδια της γραμμής παραγωγής [24]. Στην εξορυκτική βιομηχανία, καταναλώνονται για την επεξεργασία της πρώτης ύλης [11]. Στην ενεργειακή βιομηχανία, αξιοποιούνται από τις μονάδες παραγωγής ενέργειας [22]. Στις αστικές περιοχές, τροφοδοτούν τους κατοίκους υποστηρίζοντας τις οικιακές υποδομές [18]. Εξαιτίας της ευρείας κατανάλωσης δημιουργήθηκαν φορείς (Ειδική Διεύθυνση Υδάτων), οι οποίοι συστηματικά παρακολουθούν την εξελικτική πορεία της ποσοτικής και ποιοτικής κατάστασης των υδροφορέων. Καθώς η ζήτηση για νερό συνεχίζει να αυξάνεται και οι επιπτώσεις της κλιματικής αλλαγής γίνονται όλο και πιο αισθητές, η ανάγκη παρακολούθησης των υπόγειων υδατικών συστημάτων και η κατάστρωση σχεδίων διαχείρισης είναι επείγουσα, προκειμένου να αποφευχθεί η υπεράντληση και να εντοπιστεί πιθανή μόλυνση.

Στο πλαίσιο της συστηματικής παρακολούθησης, συλλέγονται γεωχωρικά

δεδομένα από υδρολογικές παραμέτρους, όπως η στάθμη του υδροφόρου. Με τη χρήση της γεωστατιστικής είναι δυνατή η δημιουργία προβλεπτικών μοντέλων των τιμών σε περιοχές ενδιαφέροντος χωρίς διαθέσιμη δειγματοληψία. Η ακριβής εκτίμηση των πόρων και η ταυτοποίηση περιοχών που διατρέχουν κίνδυνο, διασφαλίζει ότι τα υπόγεια ύδατα χρησιμοποιούνται με βιώσιμο τρόπο και ότι θα ληφθούν έγκαιρα μέτρα για τη διαφύλαξή τους.

## 1.1 Στόχος εργασίας

Η παρούσα μελέτη έχει ως κύριο στόχο την εκτίμηση της ποσοτικής κατάστασης του υδροφόρου ορίζοντα των Μοιρών εκτελώντας μια διεξοδική γεωστατιστική ανάλυση. Για το πεδίο έγινε προσδιορισμός της χωρικής εξάρτησης εξετάζοντας ενδεχόμενη ανισοτροπική συμπεριφορά στα δεδομένα. Ακόμη, χρησιμοποιήθηκε η απόσταση Manhattan, η οποία ενδείκνυται για την περιγραφή σύνθετων χωρικών μοτίβων και συχνά επιτυγχάνει εκτίμηση με μεγαλύτερη ακρίβεια.

## 1.2 Δομή εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο δόθηκαν οι βασικές πληροφορίες για το γεωγραφικό και γεωλογικό προσδιορισμό της Κρήτης και της Μεσσαράς, ευρύτερες περιοχές στις οποίες εντάσσεται γεωλογικά η προς εξέταση λεκάνη των Μοιρών. Συμπληρωματικό αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η υδρογεωλογία της περιοχής μελέτης. Επιπλέον, αναφέρονται οι χρήσεις των υδατικών συστημάτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται το κύριο θεωρητικό μέρος της εργασίας. Αναφέρεται σε βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης και γεωστατιστικής έρευνας. Επιπλέον, περιγράφονται βασικοί στατιστικοί έλεγχοι, στους οποίους

δύναται να υποβληθεί ένα στατιστικό δείγμα. Καταληγεί στη μέθοδο χωρικής παρεμβολής Kriging, όπου περιγράφεται αναλυτικά η προς εφαρμογή μέθοδος, κανονικού Kriging.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των δεδομένων. Το δείγμα συλλέχθηκε από το Εθνικό Δίκτυο Παρακολούθησης της κατάστασης εγχώριων υδάτων. Εδώ παρουσιάζεται η προκαταρκτική στατιστική περιγραφή των δεδομένων, η προετοιμασία τους για την εφαρμογή της μεθόδου Kriging και τελικώς η εφαρμογή της μεθόδου. Ξεχωριστά από τη συμβατική μεθοδολογία γίνεται επεξεργασία των δεδομένων με διόρθωση ανισοτροπίας. Στη συνέχεια, γίνεται σύγκριση μεταξύ των δύο μεθοδολογιών. Αφού αποδείχθηκε ότι η ανισοτροπία του πεδίου μπορεί να αγνοηθεί, έγινε εκτίμηση της στάθμης με χρήση μη ευκλίδειας απόσταση. Η εργασία ολοκληρώνεται με εκτεταμένη αναφορά στα συμπεράσματα που προκύπτουν από κάθε βήμα της επεξεργασίας.

## 1.3 Περιγραφή περιοχής μελέτης

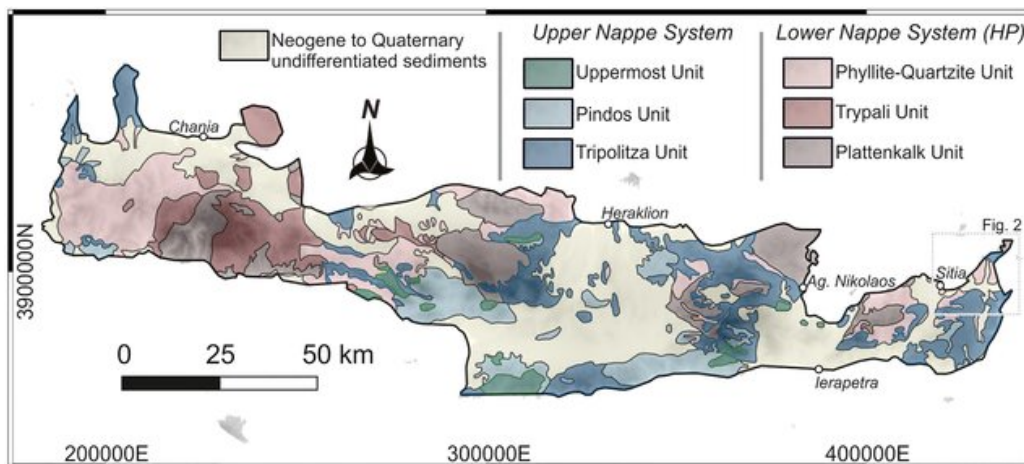
Η περιφέρεια της Κρήτης είναι το νοτιότερο άκρο της Ελλάδας (συντεταγμένες GPS N 35°14'24.421" E 24°48'33.369"). Η νήσος έχει μεγαλύτερο μήκος (260 km) στην κατεύθυνση Ανατολή-Δύση και μικρότερο μήκος (από 60 έως και 12 km) στην κατεύθυνση Βορράς-Νότος, καλύπτοντας χερσαία έκταση ίση με 8344,54  $km^2$  [1, 37]. Η Κρήτη βρέχεται βόρεια από το Αιγαίο πέλαγος και νότια από το Λιβυκό.

Η λεκάνη της Μεσαράς (συντεταγμένες GPS N 35°2'17.588" E 24°50'45.953") βρίσκεται νοτιοδυτικά του νομού Ηρακλείου. Στην κατεύθυνση Ανατολή-Δύση έχει μήκος 25 km και 5 km στην κατεύθυνση Βορράς-Νότος, καλύπτοντας έκταση ίση με 398  $km^2$ . Η πεδινή έκταση καλύπτει 112  $km^2$  και δυτικά βρέχεται από τον κόλπο της Μεσαράς. Η λεκάνη οριοθετείται στο Βορρά από τις οροσειρές Ίδη και Δίκτη και στο Νότο από τα Αστερούσια Όρη.

## 1.4 Στρωματογραφία

Στη γεωλογική δομή της Κρήτης (εικόνα 1.1) εμφανίζονται καλύμματα από ενόττητες των Ελληνίδων οροσειρών [35, 38]. Οι εντοπισμένες γεωτεκτονικές ζώνες μπορούν να διακριθούν σε κατώτερους και ανώτερους αλπικούς σχηματισμούς, στα ιζήματα της Νεογενούς και της Τεταρτογενούς υποπεριόδου [35, 20]. Σε εγκάρσια τομή, παρατηρείται λεπιοειδής διαδοχή ή αλλιώς κατά κύματα προέλαση των τεκτονικών καλυμμάτων. Τα καλύμματα συσσωρεύονται διαδοχικά μέσα σε τεκτονικά βυθίσματα και έχουν μικρό πάχος [31].

Η κατώτερη, αλπική ενότητα αποτελείται από ένα παραυτόχθονο σύστημα πετρωμάτων. Στην παραυτόχθονη σειρά εντοπίζεται η ενότητα των πλακωδών ασβεστολίθων με υποκείμενους ασβεστιτικούς και πυριτικούς σχιστόλι-



Εικόνα 1.1: Απλοποιημένος γεωλογικός χάρτης Κρήτης [14].

θους, ανακρυσταλλωμένους ασβεστόλιθους και δολομίτες έως μάρμαρα. Τα καλύμματα των αλλόχθονων σειρών βρίσκονται επωθημένα στις παραυτόχθονες ενότητες. Σε στρωματογραφικό βάθος και διατεταγμένα από το κατώτερο στο ανώτερο, τα αλλόχθονα καλύμματα είναι το κάλυμμα Ομαλού-Τρυπαλίου, το κάλυμμα των Φυλλιτών-Χαλαζιτών, η Ζώνη Τρίπολης, η Ζώνη Πίνδου και η Πελαγονική ζώνη. Η Πελαγονική ενότητα ανήκει στις εσωτερικές ζώνες των Ελληνίδων και λιθολογικά περιλαμβάνει το οφιολιθικό κάλυμμα, το κάλυμμα Αστερουσίων, Άρβης, Βάτου, Μιάμου και τη σειρά Λέντα. Λόγω τεκτονισμού, οι αποθέσεις του Νεογενούς απαντώνται και επωθημένες στην παραυτόχθονη ενότητα. Υπερκείμενες όλων βρίσκονται οι αποθέσεις του Τεταρτογενούς σε αλπικό και νεογενές υπόβαθρο [35].

#### 1.4.1 Στρωματογραφία Μεσσαράς

Η τεκτονική τάφρος της Μεσσαράς στη Δύση οριοθετείται από τις ρηξιγενείς ζώνες Μαλεβυζίου - Καμαρών - Γέργερης, στην Ανατολή από τα ρήγματα Καστελίου - Χερσονήσου - Ξενιάκου και στο Νότο από τα Αστερούσια όρη. Στην περιοχή εντοπίζονται δύο τεκτονικές ενότητες. Οι περιβάλλοντες ορεινοί

όγκοι έχουν προνεογενές γεωλογικό υπόβαθρο, ενώ η τάφος δομείται από σχηματισμούς του νεογενούς και του τεταρτογενούς.

Οι προνεογενείς σχηματισμοί του Ψειλορίτη αποτελούνται από πετρώματα της ενότητας της Τρίπολης, πετρώματα της ενότητας Φυλλιτών – χαλαζιτών και πετρώματα του αυτόχθονου συστήματος, πλακώδεις ασβεστόλιθους και ασβεστιτικούς σχιστόλιθους. Επιπλέον, τα προνεογενή του καλλύματος των Αστερουσίων έχουν κυρίαρχους σχηματισμούς το φλύσχη, τα ανθρακικά της Ζώνης της Τρίπολης και επιφανειακές εμφανίσεις ασβεστολίθων της ζώνης Πίνδου. Σε μεγαλύτερα υψόμετρα υπάρχουν πετρώματα της Πελαγονικής ενότητας.

Οι σχηματισμοί της τάφρου ταξινομημένοι από το τεταρτογενές προς το νεογενές είναι οι εξής [35]:

- Ολόκαινο: Αποσαθρωμένα αλλουβιακά πετρώματα σε περιβάλλοντα αποθέσεων (λεκάνες, ρέματα) και πλευρικά κορήματα στα χαμηλότερα υψόμετρα των Αστερουσίων (Χάρακας, Ροτάσι, Μεσοχωριό και Γέργερης).
- Πλειστόκαινο-Ολόκαινο:Κροκάλες, άμμοι, υλιόλιθοι και αργιλικά στρώματα αποτελούμενα από φερτά υλικά (κεντρικό πεδινό τμήμα της Μεσαράς).
- Ανώτερο Πλειόκαινο- Πλειστόκαινο:Ενότητα Αγίας Γαλήνης (Ασημίου-Καγκάλες- Αγ. Δέκα, Μοίρες - Καλυβιανή). Αποτελούνται από ποτάμια και λιμναία ερυθρά κροκαλοπαγή, ερυθρές και κίτρινες άμμους, αργίλους και μαργαϊκούς ασβεστολίθους.
- Κατώτερο πλειόκαινο:Ενότητα Φοινικιάς (περιοχή Ασημίου - Καγκαλών, ΒΑ των Μοιρών, ΒΑ της Φανερωμένης και ΝΑ των Βασιλικών Ανωγείων). Αποτελούνται από λευκές μάργες με παρεμβολές αργίλων και άμμων, μαργαϊκών ασβεστολίθων και κροκαλοπαγών. Στις ενότητες αυτές, τοπικά παρεμβάλλονται στρώματα γύψων μεγάλου πάχους.

- Ανώτερο Τορτόνιο – Μεσσήνιο:Ενότητα Αγίας Βαρβάρας (περιοχές εμφάνισης: Γαλιά- Μορόνι- Άνω Μούλια, Φαιστός, Καστέλι και Άνω Άκρια). Αποτελούνται από βιοκλαστικούς, κροκαλοπαγείς ή λατυποπαγείς ασβεστόλιθους, μαργαϊκούς ασβεστόλιθους και εναλλαγές μαργών ή μαργαϊκών ασβεστολίθων με γύψο.
- Τορτόνιο:Ενότητα Αμπελούζου (Ζαρός- Πανασός, Κάτω Μούλια- Καστέλι- Λιγόρτυνος). Η ενότητα Αμπελούζου αποτελείται από θαλάσσια υφάλμυρα και ποτάμια κροκαλοπαγή, ψαμμίτες, ιλυόλιθους, μάργες, αργίλους και λιγνίτες.
- Ανώτερο Σερβάλιο: Ενότητα Σχοινιά (Βοριά). Αποτελείται από σκουρόχρωμες τεφρές, πρασινοκύανες θαλάσσιες αργίλους και ιλυώδεις αργίλους με παρεμβολές ψαμμιτών.
- Μέσο Μειόκαινο:Ενότητα Βιάννου (Μεταξοχώρι). Αποτελείται από ποταμολιμναίες αργίλους και ιλυώδεις αργίλους με λιγνίτη, ασβεστόλιθους, κροκαλοπαγή και ψαμμίτες.

## 1.5 Υδρολιθολογικά στοιχεία

Για την περιγραφή και κατανόηση των υδρολιθολογικών συνθηκών της Κρήτης, αξιολογήθηκε η αλληλεπίδραση των γεωλογικών σχηματισμών με το νερό. Τα υδάτινα, ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα διαχέονται από το έδαφος στα βαθύτερα γεωλογικά στρώματα και αναπληρώνουν τη φυσική υγρασία ή συγκεντρώνονται εντός σχηματισμών. Η ικανότητα των γεωλογικών σχηματισμών να αποθηκεύουν νερό, να επιτρέπουν την κυκλοφορία του νερού στον όγκο τους ή να εμποδίζουν την είσοδο του νερού, φέρνει μια σειρά διακρίσεων για τη μελέτη τους.



Η πρώτη διάκριση γίνεται -βάσει του τύπου πορώδους- σε μικροπερατούς (ή πορώδεις) και μακροπερατούς (ή ρωγμώδεις) σχηματισμούς. Στους μικροπερατούς σχηματισμούς, η κυκλοφορία του νερού πραγματοποιείται στη διάσταση του πόρου. Στους μακροπερατούς σχηματισμούς, η κίνηση εντοπίζεται εντός ενός δικτύου ρωγμών και αποσαθρωμένων εγκοίλων. Η δεύτερη διάκριση γίνεται -βάσει του βαθμού υδροπερατότητας- σε υδροπεράτα, ημιπεράτα και αδιαπέρατα. Υδροπερατοί σχηματισμοί είναι όλοι οι κοκκώδεις (χάλικες, κροκάλες, λατυποπαγή, κροκαλοπαγή, ψαμμίτες) και οι μακροπερατοί (καρστ, ασβεστόλιθοι, μάρμαρα). Αδιαπέρατοι σχηματισμοί είναι οι αργιλικοί (πηλώδεις), οι μάργες, ο φλύσχης και οι σχιστόλιθοι [32]. Η στεγανή συμπεριφορά μπορεί πρακτικά να μεταβληθεί εξαιτίας στρωματογραφικά εμβόλιμων πετρωμάτων μεγαλύτερης περατότητας [35].

Υδρολιθολογικά, οι γεωλογικοί σχηματισμοί της Κρήτης ταξινομούνται στα καρστικά συστήματα, στους πορώδεις και στους αδιαπέρατους σχηματισμούς. Οι ανθρακικοί σχηματισμοί των καρστικών έχουν υψηλό δυναμικό υπόγειας υδροφορίας και εκφορτίζονται μέσω καρστικών πηγών. Εάν οι πορώδεις σχηματισμοί είναι προσχωματικοί, εμφανίζουν μέτρια υδροπερατότητα και αναπτύσσουν φρεάτιες υδροφορίες. Κοντά στη θάλασσα οι υδροφορίες των πορώδων σχηματισμών, συχνά, υποβαθμίζονται ποιοτικά εξαιτίας της υφαλμύρισης. Εάν είναι μη προσχωματικοί, έχουν μικρή ικανότητα περατότητας. Τέλος, οι αδιαπέρατοι σχηματισμοί εμφανίζουν τοπικού εύρους και μικρού δυναμικού υδροφορίες. Ειδική κατηγορία περατών σχηματισμών αποτελούν οι γύψοι με τη δημιουργία ψευδοκάρστ υψηλής περιεκτικότητας σε θειικά ιόντα [35].

## 1.6 Υδρογεωλογικά στοιχεία

Το υδατικό διαμέρισμα της Κρήτης περιλαμβάνει τρεις λεκάνες απορροής ποταμών (ΛΑΠ), τη λεκάνη απορροής βορείου τμήματος Χανίων – Ρεθύμνου - Ηρακλείου (EL1339), τη λεκάνη απορροής νοτίου τμήματος Χανίων-Ρεθύμνου-Ηρακλείου (EL1340) και τη λεκάνη της Ανατολικής Κρήτης (EL1341). Συνολικά, διαθέτει 153 επιφανειακά υδατικά συστήματα και 91 υπόγεια συστήματα [37].

### 1.6.1 Επιφανειακά ύδατα

Η ευρύτερη λεκάνη απορροής του Νοτίου Τμήματος Χανίων - Ρεθύμνου - Ηρακλείου έχει έκταση  $2.798,03 \text{ km}^2$ , αποτελείται από 42 ποτάμια υδατικά συστήματα μήκους 257,8 km και διαθέτει δύο ταμιευτήρες νερού, της Πλακιώτισσας και της Φανερωμένης με αθροισμένη έκταση  $2,38 \text{ km}^2$ . Επιπλέον, έχουν εντοπιστεί 6 παράκτια υδατικά συστήματα έκτασης  $499,5 \text{ km}^2$ . Αρχικά, στο νομό Χανίων βρίσκονται δύο ποταμοί ο Κακοδικιανός και ο Πελεκανιώτης και δύο μικρές, φυσικές λίμνες της Κρήτης. Έπειτα, στο νομό Ρεθύμνης, πηγάζει ο ποταμός Πλατύς και εκβάλλει στην Αγία Γαλήνη. Ο δεύτερος ποταμός του Ρεθύμνου είναι ο Κουρταλιώτης. Τέλος, στο νομό Ηρακλείου υπάρχουν δύο από τις μεγαλύτερες υδρολογικές λεκάνες του νησιού, του Γεροπόταμου και του Αναποδάρη [37].

### 1.6.2 Υπόγεια ύδατα

Στο υδατικό διαμέρισμα της Κρήτης έχουν καταγραφθεί 91 υπόγεια υδατικά συστήματα, τα οποία αξιοποιούνται για την κάλυψη των αναγκών του πρωτογενούς και δευτερογενούς τομέα παραγωγής, με τη μεγαλύτερη κατανάλωση να καταγράφεται στις γεωργικές δραστηριότητες. Η ύδρευση αντιπροσωπεύει

το 16,5% των συνολικών απολήψεων, ενώ η άρδευση καλύπτει το 83% των απολήψεων. Στον τομέα της τριτογενούς παραγωγής αποδίδονται πολύ μικρό ποσοστό της τάξεως του 0.09% [37].

## 1.7 Λεκάνη Μοιρών

Η έρευνα επικεντρώνεται στην υπολεκάνη των Μοιρών (χάρτης 1.2) λόγω των εκτεταμένων προβλημάτων που προκύπτουν από τη αρδευτική κατανάλωση της πρωτοβάθμιας παραγωγής και της λειψυδρίας που πλήττει την περιοχή ως επίπτωση της κλιματικής αλλαγής.

Η λεκάνη γεωγραφικά έχει μήκος 12 km στη διεύθυνση ανατολή-δύση και πλάτος που κυμαίνεται από 600m έως 4km, καταλαμβάνοντας έκταση 50.3 km<sup>2</sup>. Στη λεκάνη εντοπίζονται ρήγματα τα οποία φαίνεται να επηρεάζουν την υδρογεωλογία της. Ο υδροφόρος σχηματισμός των Μοιρών είναι ελεύθερος, προσχωματικός με ομοιογενή κατανομή αλλουβιακών ιζημάτων. Σχηματισμοί με παρόμοια διάταξη εμφανίζουν ευαισθησία σε ρυπαντικές ενέργειες [19]. Ιδιαίτερως για τη νιτρορύπανση, μελέτες [4, 3, 16] σε υδροφόρους με αυτή τη λιθολογία αποδεικνύουν ότι η εκτεταμένη γεωργική δραστηριότητα είναι συνδεδεμένη με την υψηλή περιεκτικότητα νιτρικών αλάτων στο νερό.

Στην περιοχή υπάρχουν τρεις τύποι υδροφορέων ο αλλουβιακός και οι μικρότεροι, πλειστοκαινικός και νεογενής. Ο αλλουβιακός υδροφορέας των Μοιρών καλύπτει όλη τη λεκάνη και εμφανίζει κυμαινόμενο πάχος, με το μεγαλύτερο να βρίσκεται κατά μήκος του Γεροποτάμου και του παραπόταμού του, Λιθαίου. Η υδρολιθολογική σύσταση του υδροφορέα είναι χονδρόκοκκη (χαλίκια και άμμος), ενώ παρεμβάλλονται ενστρώσεις αργιλικών με μικρό πάχος. Ο πλειστοκαινικός υδροφορέας υπόκειται του αλλουβιακού, έχει μικρή έκταση και πάχος. Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του υδροφορέα είναι η μικρή υδροπερατότητά του και



Εικόνα 1.2: Η λεκάνη των Μοιρών [37].

η μεγάλη ικανότητα αποθήκευσης νερού. Τέλος, ο νεογενής υδροφορέας της λεκάνης απαντάται τελευταίος στρωματογραφικά. Υδρογεωλογικά ταξινομείται ως μη υδροφόρος, αφού αποτελείται από αργιλικές μάργες.

Το υδατικό σύστημα αξιοποιείται για γεωργικής φύσεως δραστηριότητες και έχει χαρακτηριστεί ευπρόσβλητο από τη Γενική Διεύθυνση Υδάτων. Αναλυτικότερα, η εν λόγω μελέτη της αναφερθείσας αρχής [37] επισημαίνει για το υδατικό σύστημα νιτρορύπανση και κακή ποσοτική κατάσταση [37]. Οι ανθρώπινες πιέσεις στην περιοχή έχουν υποβαθμίσει τοπικά την ποσότητα του νερού. Διαχρονικές μελέτες [26] επιβεβαιώνουν το παρόν. Είναι μείζονος σημασίας λοιπόν για την ποιοτική και ποσοτική συντήρηση του υδροφόρου, η συστηματική εποπτεία της περιοχής μελέτης. Η παρούσα εργασία παράγει χάρτη της ποσοτικής κατάστασης του υδροφόρου, προσθέτοντας πληροφορία σε σημεία χωρίς μέτρηση του βάθους νερού.

## Κεφάλαιο 2

### Γεωστατιστική

Η εφαρμοσμένη Γεωστατιστική βοηθά στην ερμηνεία και κατά τόπους εκτίμηση ενός φυσικού μεγέθους με τη συμβολή της μαθηματικής έννοιας του τυχαίου πεδίου, δομώντας το υπό των περιορισμών του. Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθεί η θεωρία έως την επιλογή της τεχνικής για τη μοντελοποίηση και εξέταση υδρογεωλογικών δεδομένων [39].

#### 2.1 Τυχαίο Πεδίο

Το τυχαίο πεδίο ενός φυσικού μεγέθους είναι ένα σύνολο καταστάσεων της ίδιας ιδιότητας, εξαρτημένων χωρικά λόγω εγγύτητας. Μια κατάσταση του πεδίου είναι ένα δείγμα του πεδίου αυτού με προσδιορίσιμη πιθανότητα πραγματοποίησης. Το πεδίο λαμβάνει την εγγενή μεταβλητότητά του μετρήσιμου μεγέθους και τα χαρακτηριστικά του. Για υδρογεωλογικό πεδίο τέτοια θα είναι η εποχική διακύμανση, οι μεταβολές του υδρολογικού κύκλου και της θερμοκρασίας, οι χρονικοί παράμετροι επαναπλήρωσης του υδροφορέα, το ιδιαίτερο ανάγλυφο της περιοχής μελέτης. Οι μεταβολές εκφράζονται ως αβεβαιότητα στην εκτίμηση της ιδιότητας και επιβάλλουν στο πεδίο το χαρακτηριστικό της τυχειότητας. Περισσότερη αβεβαιότητα προστίθεται στην ακρίβεια της εκ-

τίμησης με τη λήψη πειραματικών δεδομένων προς ποσοτική έκφραση της ιδιότητάς.

Το τυχαίο πεδίο μιας φυσικής ιδιότητας λαμβάνει συνεχείς τιμές και μεταβάλλεται είτε σε διακριτό, είτε σε συνεχή χώρο. Για τυχαίο πεδίο  $X(\mathbf{s})$  υπάρχει πραγματοποιήσιμη κατάσταση  $x(\mathbf{s})$  για κάθε τιμή του διανύσματος θέσης  $\mathbf{s}$ . Η πιθανότητα πραγματοποίησης μιας κατάστασης ενός συνεχούς πεδίου δίνεται από τη **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**  $f_X(x)$ , η οποία δέχεται ως όρισμα τις καταστάσεις του πεδίου για κάθε θέση  $\mathbf{s}$ . Ο δείκτης της συνάρτησης αντιστοιχίζεται με το συμβολισμό του πεδίου [15, 7].

## 2.2 Χαρακτηριστικά Τυχαίου Πεδίου

Στη γεωστατιστική έρευνα οι ιδιότητες του πεδίου προσεγγίζονται με απλουστεύσεις και προσδιορίζονται με συναρτήσεις. Οι απλουστεύσεις γίνονται χαρακτηριστικά των συναρτήσεων. Οι περισσότερες διαδεδομένες συναρτήσεις για την έκφραση των ιδιοτήτων είναι οι στατιστικές ροπές. Συνήθως, χρησιμοποιούνται οι ροπές χαμηλών τάξεων, όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση συνδιασποράς και το ημιβαριόγραμμα [7]. Με  $k$  θα συμβολίζεται η τάξη της εκάστοτε ροπής.

### 2.2.1 Μέση Τιμή

Η μέση τιμή του πεδίου  $X(\mathbf{s})$  συμβολίζεται ως  $m_X(\mathbf{s})$ . Είναι ροπή πρώτης τάξεως ( $k = 1$ ) και δίνεται από την σχέση

$$m_X(\mathbf{s}) = E[X(\mathbf{s})] \quad (2.1)$$

$$E[X(\mathbf{s})] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(\mathbf{s})dx \quad (2.2)$$

όπου  $E[X(\mathbf{s})]$  είναι διαφορετική έκφραση της μέσης τιμής. Ονομάζεται αναμενόμενη και χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι η μέση τιμή υπολογίστηκε ως προς το σύνολο των καταστάσεων  $\mathbf{x}$ . Ο παραπάνω ορισμός της μέσης τιμής υποθέτει εκ των προτέρων γνώση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Διαφορετικά, ο υπολογισμός της μέσης τιμής δίνεται από τον αριθμητικό μέσο όρο των τιμών του πεδίου [15].

### 2.2.2 Διακύμανση

Η διακύμανση ενός πεδίου είναι ροπή πρώτης τάξεως ( $k = 1$ ). Αναλυτικότερα, δίνεται από τη σχέση

$$X' = X(\mathbf{s}) - m(\mathbf{s}) \quad (2.3)$$

Η διακύμανση ορίζει ένα νέο τυχαίο πεδίο, το οποίο περιγράφει την απόκλιση μιας τιμής από την αναμενόμενη τιμή. Το παραπάνω την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη ροπή στην ανάλυση των τυχαίων πεδίων.

### 2.2.3 Διασπορά

Η διασπορά είναι ροπή δεύτερης τάξεως ( $k = 2$ ) και δίνεται από τη σχέση

$$\sigma^2[X(\mathbf{s})] = E[\{X(\mathbf{s}) - m_X(\mathbf{s})\}^2] \quad (2.4)$$

Η διασπορά περιγράφει με παρόμοιο τρόπο με τη διακύμανση τα δεδομένα. Όταν περιγράφει διακριτό πεδίο κανονικοποιείται από το πλήθος των δεδομένων. Δεδομένου ότι βρίσκεται στο τετράγωνο διευρύνει τις αποκλίσεις από μια σταθερή στάθμη (μέση τιμή). Συνεπώς, η συνάρτηση διασποράς μπορεί να χρησιμοποιη-

ηθεί για την έκφραση των σφαλμάτων.

#### 2.2.4 Συνάρτηση Συνδιασποράς

Η **κεντρική συνάρτηση συνδιασποράς** είναι ροπή δεύτερης τάξεως ( $k = 2$ ) και δίνει τη συμμεταβολή δύο σημείων  $X$  και  $Y$  του πεδίου. Ορίζεται με χρήση της διακύμανσης ως:

$$c(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow c(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (2.6)$$

Η πειραματική έκφραση της δειγματικής συνδιασποράς ( $c^\delta$ ) δίνεται από τη σχέση [2]:

$$c_X^\delta(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{l=1}^{N(\mathbf{h})} [x(\mathbf{s}_l)x(\mathbf{s}_l + \mathbf{h}) - m^\delta(\mathbf{s}_l - \mathbf{h})m^\delta(\mathbf{s}_l + \mathbf{h})] \quad (2.7)$$

όπου,  $N(\mathbf{h})$  είναι ο αριθμός των ζευγών των δειγματικών σημείων τα οποία απέχουν απόσταση  $\mathbf{h}$  και αθροίζονται για τον υπολογισμό της συνδιασποράς. Η δειγματική μέση τιμή  $m^\delta$  δεν είναι απαραίτητο να είναι σταθερή για τις θέσεις  $\mathbf{s}_l - \mathbf{h}$  και  $\mathbf{s}_l + \mathbf{h}$ .

Ένα θεωρητικό πρότυπο κατανομής, για να είναι απόδεκτό μοντέλο συνδιασποράς, πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος Bochner [39]. Για αποδεκτή συνάρτηση  $c_X(\mathbf{r})$  ισχύει ότι:

1. Υπάρχει η φασματική πυκνότητα ισχύος  $\tilde{c}_X(\mathbf{k})$  της συνάρτησης (μετασχηματισμός Fourier). Θα δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{c}_X(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_X(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.8)$$



με  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα απόστασης δύο σημείων,  $\int d\mathbf{r} = \int dx dy$  και  $\mathbf{k}$  το διάνυσμα χωρικής συχνότητας (κυματάνυσμα).

2. Η συνάρτηση  $\tilde{c}_X(\mathbf{k})$  είναι μη αρνητική για κάθε τιμή του κυματάνυσματος σε όλο το πεδίο συχνοτήτων.
3. Το ολοκλήρωμα της φασματικής πυκνότητας πρέπει να είναι ορισμένο σε φραγμένο διάστημα, δηλαδή να υπάρχει διασπορά στο πεδίο.

### 2.2.5 Στατιστική Ομοιογένεια

Η υπόθεση της στατιστικής ομοιογένειας εκφράζει ότι δεν υπάρχουν τάσεις μεγάλης εμβέλειας, οι οποίες διέπουν το πεδίο[21]. Η στατιστική ομοιογένεια έχει δύο εκφράσεις, καθεμιά από τις οποίες επιλέγεται βάσει των εγγενών χαρακτηριστικών του πεδίου. Κατά την ασθενή έννοια ένα τυχαίο πεδίο  $X(\mathbf{s})$  είναι στατιστικώς ομοιογενές, όταν η μέση τιμή και η διασπορά του μένουν σταθερές. Επιπλέον, πρέπει να ορίζεται η συνδιασπορά του πεδίου για δύο σημεία του πεδίου και να είναι συνάρτηση της απόστασης  $c_X(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = c_X(\mathbf{r})$  [33, 15].

### 2.2.6 Στατιστική Ισοτροπία

Η στατιστική ισοτροπία προϋποθέτει τη στατιστική ομοιογένεια. Ένα πεδίο είναι ισοτροπικό, όταν παρουσιάζει ομοιογένεια και ταυτόχρονα οι τιμές του εξαρτώνται μόνο από το μέτρο της απόστασης  $|\mathbf{r}|$ . Η κατεύθυνση του διανύσματος της απόστασης  $\mathbf{r}$  δεν λαμβάνεται υπόψη. Μια ισότροπη συνάρτηση είναι ομοιογενής. Το αντίστροφο δεν ισχύει εξαιτίας των εναλλακτικών που προσθέτει η εξάρτηση από την κατεύθυνση. Ισότροπο θα χαρακτηρίζεται ένα ομοιογενές πεδίο με συνδιασπορά εξαρτώμενη από το μέτρο της θέσης [33, 15].

### 2.2.7 Στατιστική Ανισοτροπία

Αν ισοτροπία είναι η πανκατευθυντική ομοιογένεια μιας παραμέτρου εξελισσόμενης στο χώρο, η ανισοτροπία είναι η αντίθετη έκφραση. Θα υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον μια κατεύθυνση στην οποία θα παρατηρείται διαφορετική χωρική εξέλιξη για την παράμετρο. Εκτενής αναφορά για τον προσδιορισμό της ανισοτροπίας γίνεται στην παράγραφο 2.5.

## 2.3 Έλεγχοι

Οι στατιστικές υποθέσεις θέτονται στο πλαίσιο στατιστικού ελέγχου, για να ληφθούν αποφάσεις που θα χαρακτηρίζουν τον εξεταζόμενο πληθυσμό. Η υπόθεση μπορεί να προσδιορίζει μια παράμετρο της κατανομής του πληθυσμού ή ολοκληρή την κατανομή[15].

### 2.3.1 Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης

Σε έναν έλεγχο υπόθεσης απορρίπτεται ή δεν απορρίπτεται μια υπόθεση. Η περιοχή πραγματοποίησης της πρότασης δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την περιοχή μη απόρριψης. Για υπόθεση  $H$ , μηδενική ονομάζεται η πρόταση:

$$H_0 : H \text{ υπόθεση } H \text{ δεν απορρίπτεται.} \quad (2.9)$$

Εναλλακτική ονομάζεται η πρόταση:

$$H_1 : H \text{ υπόθεση } H \text{ απορρίπτεται.} \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Στάθμη σημαντικότητας $\alpha$

Η μηδενική υπόθεση ελέγχεται για μια παράμετρο του δείγματος σε μια στάθμη σημαντικότητας [10]. Η στάθμη σημαντικότητας είναι η πιθανότητα για την οποία η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και ισχύει η εναλλακτική υπόθεση. Όσο μικραίνει το  $\alpha$  τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να μην απορριφθεί η μηδενική υπόθεση.

### 2.3.3 Έλεγχος $p$ τιμής

Η στάθμη πιθανότητας  $p$  ( $p$ -value) ενός ελέγχου μιας μηδενικής υπόθεσης  $H_0$  είναι η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου, δεδομένου ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση. Για παράδειγμα, αν  $p < \alpha$ , η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε στάθμη  $\alpha$ , ενώ αν  $p > \alpha$ , τότε γίνεται αποδεκτή σε στάθμη  $\alpha$ .

### Σφάλματα ελέγχου μηδενικής υπόθεσης

Κατά τον έλεγχο μιας υπόθεσης μπορούν να συμβούν δύο τύποι σφαλμάτων. Τα σφάλματα τύπου I, τα οποία προκύπτουν όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής και λανθασμένα έχει κριθεί ως μη αληθής. Η δεύτερη κατηγορία σφαλμάτων είναι τα σφάλματα τύπου II. Στη συγκεκριμένη κατηγορία εντάσσονται οι αντίθετες προτάσεις. Να κριθεί δηλαδή η μηδενική υπόθεση ως ψευδής, ενώ είναι αληθής.

### 2.3.4 Έλεγχος κανονικότητας

Για να ελεγχθεί η υπόθεση της κανονικότητας για τα δεδομένα χρησιμοποιήθηκε το Kolmogorov-Smirnov test (KS-test). Το KS-test ελέγχει αν δύο δείγματα

προέρχονται από την ίδια κατανομή πιθανότητας, όντας μη παραμετρικό.<sup>1</sup> Στο KS-test μηδενική είναι η υπόθεση: Τα δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή. Εναλλακτική είναι η υπόθεση: Τα δύο δείγματα δεν προέρχονται από την ίδια κατανομή [12]. Για κάθε δείγμα βρίσκεται η αθροιστική κατανομή πιθανότητας. Το τεστ υπολογίζει τη μέγιστη, απόλυτη διαφορά των κατανομών για κάθε ζεύγος τιμών. Αν οι δύο κατανομές έχουν στατιστικά ασήμαντη απόσταση (divergence), τότε δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Για τον έλεγχο κανονικότητας τα δύο δείγματα που συγκρίνονται είναι η δειγματική κατάσταση του πεδίου με τυχαία κατασκευασμένη κανονική κατανομή, η οποία θα έχει ίδια μέση τιμή και διασπορά. Αν το KS-test δεν απορρίψει τη μηδενική πρόταση και βρει ότι οι δύο δειγματικές καταστάσεις μπορούν να προέλθουν από την ίδια κατανομή, τότε προκύπτει ότι η δειγματική κατανομή που ελέγχεται πληροί την υπόθεση κανονικότητας.

### 2.3.5 Έλεγχος στασιμότητας

Ο έλεγχος ομοιογένειας πραγματοποιείται για να εξεταστεί αν ένα πεδίο είναι στάσιμο. Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες στη βιβλιογραφία [5, 15]. Ο τρόπος που επιλεχθηκε σε αυτήν την εργασία βασίζεται στην παραδοχή πως αν όλοι οι διαφορετικοί πληθυσμοί του δείγματος έχουν ίδιες στατιστικές ροπές και συνδιασπορά, το δείγμα μπορεί να θεωρηθεί στατιστικά ομοιογενές. Επειδή αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, το δείγμα μπορεί να χωριστεί σε έναν αριθμό πληθυσμών, και να εξεταστούν οι στατιστικές ροπές ανα πληθυσμό. Τα δείγματα κάθε πληθυσμού, κατα προτίμηση πρέπει να έχουν μικρές αποστάσεις μεταξύ τους, σε σχέση με τις μέγιστες αποστάσεις στο πεδίο.

---

<sup>1</sup>Ένα μη παραμετρικό τεστ αγνοεί την πληροφορία οι παρατηρήσεις του δείγματος να προέρχονται από κάποια κατανομή.

## 2.4 Χωρική Εξάρτηση

Για τη μελέτη ενός πεδίου και της συμπεριφοράς του πρέπει να προσδιορισθεί η συσχέτιση των τιμών του στο χώρο. Ένας τρόπος έκφρασης της εξάρτησης είναι με τη χρήση της συνάρτησης του **βαριογράμματος** [7, 15].

### 2.4.1 Βαριόγραμμα

Το **βαριόγραμμα** υπολογίζει την ικανότητα συμμεταβολής των τιμών των δεδομένων, αν αυξηθεί η μεταξύ τους απόσταση. Δίνεται από τη σχέση:

$$2\gamma_X(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = E[(X(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{s}))^2] \quad (2.11)$$

όπου  $\mathbf{h}$  είναι το διάνυσμα της απόστασης από το σημείο  $\mathbf{s}$  ως ένα άλλο σημείο. Στην εκτίμηση του βαριογράμματος ο όρος αυτός αναφέρεται ως βήμα απόστασης από το σημείο  $\mathbf{s}$ . Η ποσότητα  $X(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - X(\mathbf{s})$  είναι τυχαίο πεδίο και ονομάζεται πεδίο διαφορών. Οι τιμές του βαριογράμματος θα είναι εξ ορισμού μη αρνητικές.

Για ομοιογενές πεδίο με σταθερή μέση τιμή  $E[X(\mathbf{s})] = m$  και διασπορά  $\sigma^2[X(\mathbf{s})]$ , η σχέση 2.11 απλοποιείται ως:

$$\begin{aligned} 2\gamma_X(\mathbf{h}) &= E[((X(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - m) - (X(\mathbf{s}) - m))^2] \\ &= \sigma^2[X(\mathbf{s})] + \sigma^2[X(\mathbf{s} + \mathbf{h})] - 2E[(X(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - m)(X(\mathbf{s}) - m)]. \end{aligned}$$

Λόγω ομοιογένειας, θα υπάρχει σταθερή διασπορά για κάθε απόσταση  $\mathbf{r}$ .  $\sigma^2[X(\mathbf{s})] = \sigma^2[X(\mathbf{s} + \mathbf{r})]$ .

Αυτό οδηγεί στην παρακάτω ισότητα για τα ομοιογενή πεδία, που συνδέει τη συνδιασπορά με το βαριόγραμμα:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \sigma^2[X(\mathbf{s})] - c[\mathbf{r}]. \quad (2.12)$$

Από τη σχέση 2.12 προκύπτει αφενός ότι το βαριόγραμμα σε πολύ μεγάλες αποστάσεις τείνει ασυμπτωτικά στη διασπορά του πεδίου και αφετέρου ότι υπάρχει μέγιστη τιμή της απόστασης, για την οποία λαμβάνεται αυτή η κρίσιμη τιμή. Επιπλέον, παρατηρείται αντισυσχέτιση μεταξύ βαριογράμματος και συνδιασποράς. Το παραπάνω ερμηνεύεται μέσω της εξάρτησης των δύο συναρτήσεων από την απόσταση. Το βαριόγραμμα περιγράφει τη διαφορά των διακυμάνσεων του πεδίου με την αύξηση της απόστασης, ενώ η συνδιασπορά την ομοιότητα με την αύξηση της απόστασης. Η υπόθεση της ομοιόγενειας για το πεδίο, μεταβιβάζεται και στις διαφορές  $X(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - X(\mathbf{s})$ . Αυτή η ιδιότητα είναι σημαντική για την κατασκευή του δειγματικού βαριογράμματος.

### Πειραματικό βαριόγραμμα

Το πειραματικό βαριόγραμμα κατασκευάζεται με τη χρήση δείγματος, το οποίο αποτελεί μια από τις πιθανές εκφάνσεις του πεδίου. Για τον υπολογισμό του χρησιμοποιείται η μέθοδος των ροπών κατά την οποία για  $\forall (s_i - s_j) \in B(\mathbf{r}_k), \quad k = 1, \dots, N$  υπολογίζεται τιμή του βαριόγραμματος μέσω της σχέσης

$$2\hat{\gamma}_X(\mathbf{r}_k) = \frac{\sum_{i,j=1}^n [X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_j)]^2}{n_r(\mathbf{r}_k)} \quad (2.13)$$

όπου  $B(\mathbf{r}_k)$  είναι η τάξη του βήματος απόστασης (lag), δηλαδή μια κλειστή περιοχή, η οποία περιλαμβάνει τα σημεία  $\mathbf{s}_{i,j}$  τα οποία απέχουν έως απόσταση  $r_k$  μεταξύ τους και χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του βαριογράμματος. Το πλήθος  $N$  των τάξεων  $B(\mathbf{r}_k)$  και το πλήθος  $n_r$  των ζευγών σημείων  $\mathbf{s}_{i,j}$  καθορίζεται από τη διαθέσιμη πληροφορία για το πεδίο [21, 15].

## Θεωρητικό βαριόγραμμα

Ο υπολογισμός του βαριογράμματος για κάθε σημείο του πεδίου γίνεται μέσω θεωρητικών μοντέλων. Οι εξισώσεις των θεωρητικών μοντέλων έχουν τις εξής παραμέτρους:

- **Φαινόμενο Κόκκου ή Φαινόμενο Πυρήνα  $C_0$ (Nugget):** Αντιπροσωπεύει την ανυπαρξία χωρικής συσχέτισης στα δεδομένα. Μπορεί να οφείλεται σε σφάλματα μέτρησης ή σε διακυμάνσεις εντός αποστάσεων μικρότερων της ελάχιστης ακτίνας συσχέτισης. Πρακτικά, το φαινόμενο κόκκου χρειάζεται να είναι μικρό, γιατί επηρεάζει την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Για να επιτευχθεί αυτό, η διάταξη των δεδομένων στις περιοχές με έντονες διακυμάνσεις πρέπει να γίνει πυκνότερη.
- **Διασπορά  $\sigma^2[X(s)]$ (Partial Sill) :** Αντιπροσωπεύει το ανώφλι της χωρικής εξάρτησης χωρίς να λαμβάνει υπόψιν τις διακυμάνσεις του φαινομένου κόκκου.
- **Άνω Φράγμα(Sill):** Εκφράζει για τη μέγιστη τιμή του βαριογράμματος πόσο συνεισφέρει η χωρικά συσχετισμένη πληροφορία και πόσο το φαινόμενο κόκκου, αν υπάρχει.
- **Ακτίνα Συσχέτισης  $h$ (Range):** Εκφράζει πόσο γρήγορα το βαριόγραμμα πλησιάζει το άνω φράγμα. Είναι η απόσταση εντός της οποίας οι τιμές των δεδομένων διατηρούν συσχέτιση.
- **Μήκος Συσχέτισης ή Χαρακτηριστικό μήκος  $\xi$ (Correlation length):** Το μήκος συσχέτισης είναι κανονικοποιητικός παράγοντας της απόστασης. Εξαρτάται άμεσα από την ακτίνα συσχέτισης και μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με αυτήν ανάλογα με το μοντέλο βαριογράμματος που χρησιμοποιείται στην εκάστοτε εφαρμογή.

Οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων επιλέγονται με τη μέθοδο ελαχιστοποίησης του τετραγωνικού σφάλματος (μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων) [6]. Πρακτικά, υπολογίζεται το τετράγωνο της διαφοράς μεταξύ του θεωρητικού  $\gamma_X$  και του δειγματικού  $\hat{\gamma}_X$  βαριογράμματος στα σημεία του πεδίου για τα οποία υπάρχει το δεύτερο και επιλέγεται η ελάχιστη τιμή.

## 2.4.2 Ισοτροπικά μοντέλα βαριογράμματος

Παρακάτω δίνονται τα πιο διαδεδομένα μοντέλα βαριογράμματος [15].

### 1. Εκθετικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 [1 - \exp(-\|\mathbf{r}\|/\xi)] \quad (2.14)$$

### 2. Γκαουσσικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \sigma_X^2 [1 - \exp(-\|\mathbf{r}\|^2/\xi^2)] \quad (2.15)$$

### 3. Σφαιρικό Μοντέλο:

$$\gamma_X(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sigma_X^2 \left[ 1.5 \left( \frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right) - 0.5 \left( \frac{\|\mathbf{r}\|}{\xi} \right)^3 \right], & \|\mathbf{r}\| < \xi \\ \sigma_X^2, & \|\mathbf{r}\| \geq \xi \end{cases} \quad (2.16)$$

### 4. Δυναμονομικό (αλγεβρικό):

$$\gamma_X(\|\mathbf{r}\|) = \alpha \|\mathbf{r}\|^{2H}, 0 < H < 1, \alpha > 0 \quad (2.17)$$



5. **Φαινόμενο Πυρήνα (nugget effect):**

$$\gamma_X(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ c_0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

## 2.5 Προσδιορισμός ανισοτροπίας

Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι ανισοτροπίας, η γεωμετρική ανισοτροπία και η ανισοτροπία ζώνης. Οι δύο ανισοτροπίες σε αυτή την εργασία εκφράζονται με τη βοήθεια των παραμέτρων του βαριογράμματος.

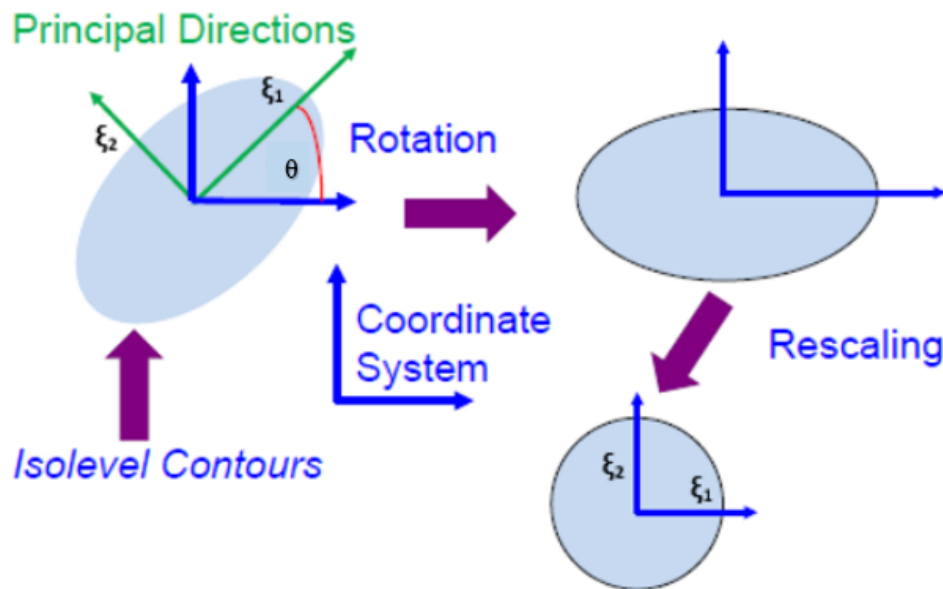
**Γεωμετρική** είναι η ανισοτροπία κατά την οποία η ταχύτητα προσέγγισης  $\xi$  του άνω φράγματος  $\sigma_X^2$  εξαρτάται από την κατεύθυνση του διανύσματος της απόστασης  $\mathbf{r}$ . Το βαριόγραμμα στην περίπτωση αυτή εκφράζεται με περισσότερα του ενός μήκη συσχέτισης (ένα για κάθε διάσταση). Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος συσχέτισης, τόσο γρηγορότερη είναι η προσέγγιση του άνω φράγματος στην εν λόγω κατεύθυνση.

**Ανισοτροπία ζώνης** είναι η ανισοτροπία κατά την οποία το άνω φράγμα  $\sigma_X^2$  εξαρτάται από την κατεύθυνση του διανύσματος της απόστασης  $\mathbf{r}$ .

**Ισοϋψής ή καμπύλη σταθερής στάθμης** ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία η τιμή του βαριογράμματος είναι σταθερή. Στην περίπτωση ανισοτροπίας, η ισοϋψής σχηματίζει έλλειψη (βλέπε σχήμα 2.1), ενώ η ισοτροπία είναι ειδική περίπτωση ανισοτροπίας για την οποία προκύπτει κύκλος. Για τον πλήρη προσδιορισμό της ανισοτροπίας στις 2 διαστάσεις χρειάζεται να υπολογισθεί ο ανισοτροπικός λόγος των μηκών συσχέτισης, τα οποία γεωμετρικά αντιστοιχούν στο μικρό και μεγάλο άξονα της έλλειψης. Η προβολή της έλλειψης σε πολικό σύστημα συντεταγμένων απλοποιεί την εξίσωση προσδιορισμού της σε:

$$r_\theta = \frac{\xi_1 \xi_2}{\sqrt{(\xi_2 \cos \theta)^2 + (\xi_1 \sin \theta)^2}} \quad (2.19)$$

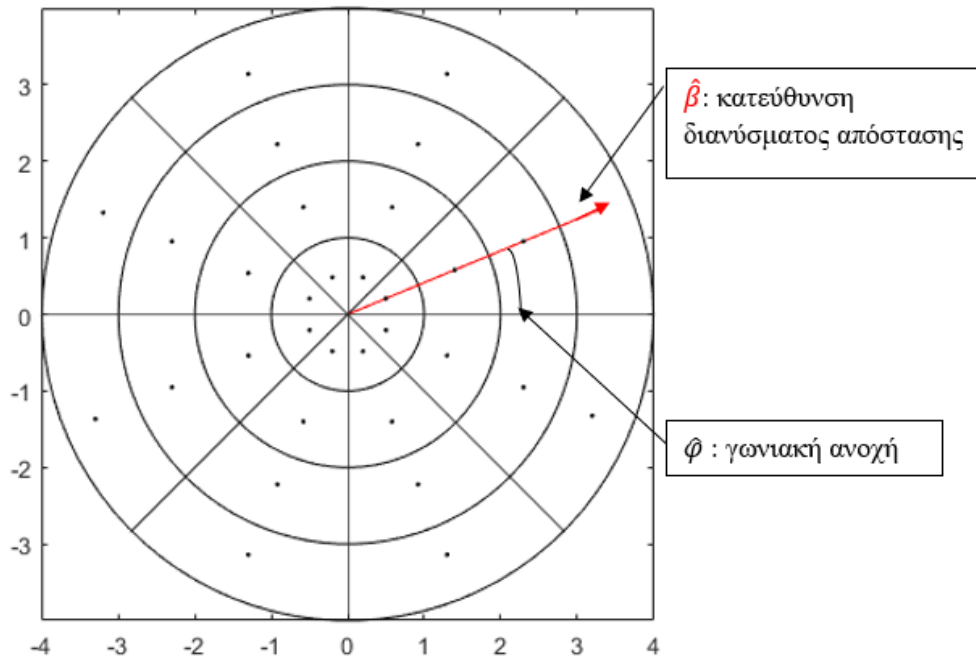
όπου  $\xi_1, \xi_2$  οι άξονες της έλλειψης με  $\xi_1 > \xi_2$ ,  $r_\theta$  η απόσταση ενός σημείου πάνω στην έλλειψη από το κέντρο της έλλειψης και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με το σύστημα πολικών συντεταγμένων μετρημένο δεξιόστροφα, δηλαδή το αζιμούθιο.



Εικόνα 2.1: Μετασχηματισμός ελλειψοειδούς ισοϋψούς καμπύλης σταθερού βαριογράμματος σε κύκλο με στροφή και διόρθωση κλίμακας του συστήματος συντεταγμένων [2].

### 2.5.1 Δισδιάστατο κατευθυντικό βαριόγραμμα

Το πανκατευθυντικό ή ιστροπικό πειραματικό βαριόγραμμα δημιουργείται λαμβάνοντας υπόψιν μόνο το μέτρο της απόστασης για τη δημιουργία της τάξης βήματος (εικόνα 2.2).



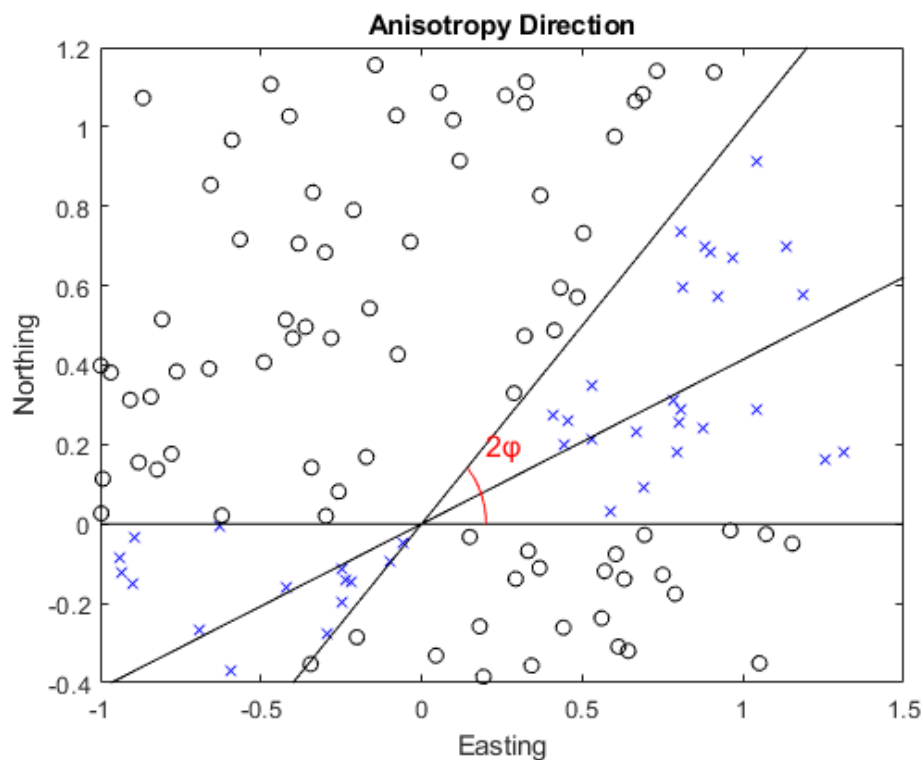
Εικόνα 2.2: Δισδιάστατη απεικόνιση ισοτροπικού πεδίου με εμφανή την κατεύθυνση  $\hat{\beta}$ . Η γωνία  $\hat{\beta}$  δίνεται με κάποια γωνιακή ανοχή  $\hat{\phi}$ .

Για την περιγραφή του κατευθυντικού βαριόγραμματος θα οριστεί κατεύθυνση  $\hat{\beta}$  την οποία θα ακολουθεί η διεύθυνση της απόστασης της εκάστοτε τάξης βήματος. Η παράμετρος γωνιακή ανοχή  $\hat{\phi}$  δίνεται για να προσδιορίσει το εύρος της τάξης βήματος. Η γωνιακή ανοχή γεωμετρικά γίνεται αντιληπτή ως ζεύγος κατακορυφών γωνιών, το οποίο θα καθορίζει το υποσύνολο του πεδίου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του εμπειρικού βαριόγραμματος (εικόνα 2.3). Σε πανκατευθυντικό βαριόγραμμα, η χωρική συμπεριφορά του δείγματος είναι ανεξάρτητη της  $\hat{\beta}$ .

Συνεπώς, προκύπτει:

- Το κατευθυντικό βαριόγραμμα δεν περιλαμβάνει σε μια τάξη βήματος την ίδια ποσότητα δείγματος.

- Το κατευθυντικό βαριόγραμμα χρειάζεται μεγαλύτερο αριθμό δειγματικών καταστάσεων σε σύγκριση με το ισοτροπικό βαριόγραμμα.
- Το ισοτροπικό βαριόγραμμα είναι υποπερίπτωση ανισοτροπικού με γωνιακή ανοχή  $180^\circ$ .



Εικόνα 2.3: Επιλογή σημείων για την κατασκευή κατευθυντικού βαριογράμματος. Μπλε (x) είναι τα σημεία εντός της γωνιακής ανοχής και μαύρα (o) τα σημεία εκτός.

## 2.6 Διόρθωση ανισοτροπίας

Κάθε ανισοτροπικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από ένα αντίστοιχο ισοτροπικό πεδίο μετά από γεωμετρική προσαρμογή. Για τη διόρθωση της

ανισοτροπίας και την αναγωγή σε ισοτροπικές συντεταγμένες χρησιμοποιήθηκε ο αφινικός μετασχηματισμός [15, 36].

Ο αφινικός μετασχηματισμός επιτρέπει την στροφή και την αναπροσαρμογή της κλίμακας. Η μεταφορά από τις ανισοτροπικές στις ισοτροπικές συντεταγμένες στη μέθοδο αυτή γίνεται μέσω του αφινικού μετασχηματισμού. Ο εν λόγω μετασχηματισμός δεν διατηρεί τις γραμμικές αναλογίες του πεδίου, επιτρέποντας την επιμήκυνση ή τη συρρίκνωση στην κατεύθυνση που ορίζουν οι κύριοι άξονες της έλλειψης. Διατηρείται στον αφινικό μετασχηματισμό η συγγραμμική σχέση μεταξύ των σημείων του πλέγματος του πεδίου και η παράλληλη σχέση μεταξύ των νοητών γραμμών που υπάρχουν στο πλέγμα [36].

Το παραγόμενο ισοτροπικό σύστημα θα είναι διορθωμένο:

- Κατά γωνία εκτροπής  $\hat{\theta}$  (γωνία ανισοτροπίας) ίσης με το αξιμούθιο της έλλειψης σταθερής στάθμης (βλέπε 2.5).
- Ως προς την κλίμακα των συντεταγμένων έτσι ώστε να δημιουργηθεί αναλογία στα μήκη συσχέτισης 1:1 και η ισοϋψής σταθερού βαριογράμματος από έλλειψη να εκπίπτει σε κύκλο (βλέπε 2.5).

Παρακάτω δίνονται οι εξισώσεις μετατροπής των συντεταγμένων [30]:

Ευθεία έκφραση αφινικού μετασχηματισμού

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Αντίστροφη έκφραση αφινικού μετασχηματισμού

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

όπου  $[x', y']$  οι συντεταγμένες στο τελικό ιστροπικό σύστημα συντεταγμένων,  $[x, y]$  οι αρχικές ανισοτροπικές συντεταγμένες,  $\theta$  η γωνία εκτροπής του ανισοτροπικού συστήματος και  $R$  η αναλογία  $\xi_1/\xi_2$  των κύριων αξόνων της έλλειψης.

## 2.7 Αποστάσεις

Για τον προσδιορισμό ενός μαθηματικού χώρου σε μια ή ανώτερες διαστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες εκφράσεις μέτρησης απόστασης από ένα σημείο αναφοράς. Παρακάτω θα οριστούν η Ευκλείδεια απόσταση και η απόσταση Manhattan 2.4. Η τελευταία επιλέχθηκε έναντι άλλων, καθώς χρήζει ευρείας εφαρμογής σε υδρογεωλογικά πεδία και ιδιαίτερας εφαρμογών σαν της συγκεκριμένης εργασίας [25, 27].

### 2.7.1 Απόσταση Manhattan

Η απόσταση Manhattan, γνωστή κι ως taxicab ή cityblock, ορίζεται [17]:

$$d_{\text{Manhattan}}(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|, \quad (2.23)$$

όπου  $n$  οι διαστάσεις του μαθηματικού χώρου. Ο τύπος για ανώτερες διαστάσεις εκφράζεται ως η επιμέρους υπέρθεση.

### 2.7.2 Ευκλείδεια απόσταση

Η ευκλείδεια απόσταση ορίζεται ως [17]:

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}, \quad (2.24)$$

όπου  $n$  οι διαστάσεις του μαθηματικού χώρου. Ο τύπος για ανώτερες διαστάσεις εκφράζεται ως η επιμέρους υπέρθεση.

2	3	4
1	2	3
0	1	2

2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
0	1	2

Εικόνα 2.4: Δεξιά: Απόσταση Manhattan. Αριστερά: Ευκλείδεια απόσταση. Κινούμενοι στο επίπεδο η ευκλείδεια απόσταση του κελιού (2,2) από την αρχή (κελί (1,1)) είναι  $\sqrt{2}$ . Για την ίδια θέση η τιμή με απόσταση Manhattan είναι 2.

Το θεώρημα Bochner (βλέπε ενότητα 2.2.4) εξασφαλίζει ότι η ευκλείδεια απόσταση δίνει αντιστρέψιμους πίνακες. Το πρόβλημα που αναδύεται με τη χρήση μη ευκλείδειων αποστάσεων είναι η συμβατότητά τους με τα θεωρητικά μοντέλα βαριογράμματος. Συγκεκριμένα, δεν είναι σίγουρο πως θα αντιστρέφεται ο πίνακας συνδιασποράς του συστήματος του Kriging (βλέπε εξίσωση 2.36) ακόμα κι αν το μοντέλο ικανοποιεί το θεώρημα Bochner. Η ύπαρξη του αντίστροφου του πίνακα συνδιασποράς δίνεται από το αν υπάρχουν οι ιδιοτιμές

του και είναι μη μηδενικές. Αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές, τότε ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος, μπορεί να αντιστραφεί επιτυχώς και καθιστά το σύστημα επιλύσιμο [8, 9].

## 2.8 Εκτίμηση Τυχαίων Πεδίων

Η διαδικασία εκτίμησης της τιμής σε σημεία του πεδίου χωρίς μετρήσεις ονομάζεται χωρική παρεμβολή. Η βέλτιστη τιμή επιλέγεται υπό κριτήρια επιβεβαίωσης του χωρικού μοντέλου. Η διαδικασία της εκτίμησης μπορεί να γίνει με αιτιοκρατικές και στοχαστικές μεθόδους. Οι αιτιοκρατικές είναι απλούστερες υπολογιστικά. Οι στοχαστικές, αν και πιο σύνθετες, παρέχουν μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόβλεψη των καταστάσεων του πεδίου και δίνουν εκτίμηση του σφάλματος.

### 2.8.1 Εκτίμηση με πολύγωνα Voronoi

Συνηθισμένη αιτιοκρατική μέθοδος εκτίμησης είναι τα πολύγωνα Voronoi. Για την εκτίμηση του πεδίου, χρησιμοποιούνται οι θέσεις των πειραματικών μετρήσεων ως κέντρα και κατασκευάζονται περίξ πολύγωνα. Η περιοχή  $A$  του κάθε πολυγώνου είναι ο γεωμετρικός τόπος από τον οποίο δύο κέντρα απέχουν ίση απόσταση. Η συνεισφορά του κάθε σημείου  $w_i$  στον υπολογισμό κάποιου στατιστικού μεγέθους δίνεται ως ζυγισμένος μέσος όρος από την σχέση [21]:

$$w_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^M A_i} \quad (2.25)$$

Για παράδειγμα η ζυγισμένη μέση τιμή  $M_{\text{voron}}$  δίνεται από τη σχέση:

$$M_{\text{voron}} = \sum_{i=1}^M w_i S_i \quad (2.26)$$



### 2.8.2 Τάση

Η τάση αντιπροσωπεύει τις αργές μεταβολές στον χώρο ενός τυχαίου πεδίου  $X(\mathbf{s})$  και συμβολίζεται με  $m_x(\mathbf{s})$ . Η **διακύμανση** είναι στοχαστική συνιστώσα, περιγράφει τη διακύμανση των τιμών του σε σημεία του χώρου. Συνήθως προσεγγίζεται με χρήση πολυωνύμων χαμηλής τάξης. Η χωρική τάση  $m_x(\mathbf{s})$  μπορεί να εξαχθεί μέσω διάφορων μοντέλων γενικής και τοπικής εξάρτησης, περιλαμβανομένων μεθόδων όπως η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, τα φίλτρα κινούμενου μέσου, και η μέθοδος της τοπικά ζυγισμένης παλινδρόμησης.

$$m_x(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s}) - X'(\mathbf{s}) \quad (2.27)$$

#### Πρότυπες συναρτήσεις τάσης

Οι μεταβολές των τιμών ενός ομοιογενούς πεδίου κυμαίνονται γύρω από μια σταθερή μέση τιμή. Όταν το πεδίο εμφανίζει χωρική μεταβολή, η μέση τιμή αντιπροσωπεύει τις τάσεις μεγάλης κλίμακας που διέπουν τις τιμές. Τότε η **τάση** λαμβάνει τη διάσταση συνιστώσας στο μοντέλο του πεδίου, αντιπροσωπεύοντας τις αργές μεταβολές των τιμών στο χώρο. Η τάση προσδιορίζεται από πρότυπες συναρτήσεις.

Η **γραμμική τάση** υποδηλώνει ότι η κλίση της μαθηματικής συνάρτησης παραμένει σταθερή στον χώρο και μπορεί να περιγραφεί με μια γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Για δύο διαστάσεις, αυτή η σχέση λαμβάνει την μορφή:

$$M_x(\mathbf{s}) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (2.28)$$

όταν  $\mathbf{s} = (x, y)$ .

### 2.8.3 Μέθοδοι Kriging

Οι γραμμικές μέθοδοι εκτίμησης χρησιμοποιούν γραμμικούς συνδυασμούς των γειτονικών τιμών ενός τυχαίου πεδίου για να εκτιμήσουν τις τιμές σε σημεία όπου δεν υπάρχουν μετρήσεις. Η βάση αυτών των μεθόδων είναι ότι τα τυχαία πεδία εκδηλώνουν χωρική εξάρτηση, δηλαδή οι τιμές τους σε ένα σημείο επηρεάζονται από τις τιμές σε γειτονικά σημεία. Για να εφαρμοστεί η εκτίμηση ενός τυχαίου πεδίου, πρέπει πρώτα να οριστεί ένα μοντέλο χωρικής εξάρτησης. Αυτό το μοντέλο περιγράφει πώς οι τιμές του πεδίου συσχετίζονται χωρικά, δηλαδή πώς μια τιμή επηρεάζεται από τις γειτονικές τιμές του. Ένα απλό παράδειγμα είναι τα μοντέλα βαριογράμματος που περιγράφηκαν προηγουμένως. Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι για την εκτίμηση των τιμών σε σημεία που δεν έχουν μετρήσεις βασίζονται στη γραμμική παρεμβολή και στην ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος. Μια από τις πιο γνωστές τέτοιες μεθόδους είναι το Kriging. Στο Kriging, χρησιμοποιούνται γραμμικοί συνδυασμοί των γειτονικών τιμών, με τα βάρη των συνδυασμών να προκύπτουν με βάση τα μοντέλα βαριογράμματος.

Για την εφαρμογή των μεθόδων Kriging, καθορίζεται μια περιοχή που ονομάζεται γειτονιά συσχέτισης  $\omega(\mathbf{u})$  γύρω από ένα σημείο εκτίμησης  $\mathbf{u}$ . Το μέγεθος αυτής της περιοχής εξαρτάται από το μήκος συσχέτισης <sup>2</sup>. Η εκτιμηθείσα τιμή του πεδίου παρατίθεται μέσω της εξίσωσης:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = m_X(\mathbf{u}) + \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} [X(\mathbf{s}_{\alpha}) - m_X(\mathbf{s}_{\alpha})] \quad (2.29)$$

Το σφάλμα εκτίμησης  $\varepsilon(\mathbf{u})$  αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης τιμής του τυχαίου πεδίου σε ένα συγκεκριμένο σημείο  $\hat{X}(\mathbf{u})$  και της

---

<sup>2</sup>Τα μήκη στην περίπτωση γεωμετρικής ανισοτροπίας

πραγματικής τιμής αυτού του πεδίου στο ίδιο σημείο  $X(\mathbf{u})$ .

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = X(\mathbf{u}) - \hat{X}(\mathbf{u}). \quad (2.30)$$

Στη μέθοδο Kriging, τα βάρη χρησιμοποιούνται για να ελαχιστοποιηθεί η διασπορά του σφάλματος της εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι υπολογίζεται μια βέλτιστη τιμή, η οποία συμβολίζεται συνήθως ως  $\hat{X}(\mathbf{u})$ , και αποτελεί μια εκτίμηση της τιμής του τυχαίου πεδίου στο σημείο  $\mathbf{u}$ .

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου Kriging εξαρτάται από την ακριβή περιγραφή της πραγματικής διακύμανσης και τάσης  $m_X(\mathbf{s})$  του πεδίου, καθώς και από τους περιορισμούς των διαθέσιμων δεδομένων.

Βάσει της μέσης τιμής και της χρήσης της τάσης  $m_X(\mathbf{s})$  καθώς και της διακύμανσης στην ανάλυση του πεδίου, μπορούν να εφαρμοστούν διάφορα είδη Kriging:

- **To Απλό Kriging (Simple Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η τάση  $m_X(\mathbf{s})$  είναι γνωστή και σταθερή στο χώρο.
- **To Κανονικό Kriging (Ordinary Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η μέση τιμή του πεδίου είναι σταθερή μόνο στην γειτονιά συσχέτισης  $\omega(\mathbf{u})$  του σημείου εκτίμησης, ενώ μπορεί να αλλάζει από μια περιοχή στην άλλη.
- **To Καθολικό Kriging (Universal Kriging):** Χρησιμοποιείται όταν η μέση τιμή αλλάζει μέσα στη γειτονιά του σημείου εκτίμησης και στο μοντέλο έχει προσαρτηθεί η τάση  $m_X(\mathbf{s})$ .
- **Kriging με παλινδρόμηση (Regression Kriging):** Αυτή η μέθοδος συνδυάζει παλινδρόμηση της εξαρτημένης μεταβλητής με την προσάρτηση

στο μοντέλο Kriging βοηθητικών μεταβλητών. Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί η σχέση μεταξύ των μεταβλητών και να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει αυτήν τη σχέση.

### Κανονικό Kriging

Το Κανονικό Kriging (Ordinary Kriging) είναι μια συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδο γεωστατιστικής. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματά του είναι ότι δεν απαιτεί την εκ των προτέρων εκτίμηση της μέσης τιμής του τυχαίου πεδίου, πράγμα που καθιστά τη μέθοδο ευέλικτη και εφαρμόσιμη σε πολλά είδη χωρικών δεδομένων. Η βασική εξίσωση του κανονικού Kriging είναι η εξής:

$$\hat{X}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} X(\mathbf{s}_{\alpha}) \quad (2.31)$$

Η εξίσωση που εκφράζει τη συνθήκη αμεροληψίας είναι:

$$\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.32)$$

Για τον υπολογισμό των βέλτιστων γραμμικών βαρών στο κανονικό Kriging, πρέπει να πραγματοποιηθεί ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος υπό τον περιορισμό της συνθήκης αμεροληψίας.

Η εξίσωση για τον υπολογισμό των βέλτιστων βαρών είναι:

$$\sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{s}_{\beta}) + \mu = c_X(\mathbf{s}_{\alpha} - \mathbf{u}), \alpha = 1, \dots, n(\mathbf{u}) \quad (2.33)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} = 1 \quad (2.34)$$

Το γραμμικό σύστημα που χρησιμοποιείται παραπάνω για τον υπολογισμό των βέλτιστων γραμμικών βαρών στον κανονικό Kriging, μπορεί να παρουσιαστεί και σε μορφή γραμμικού πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2 & c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \dots & c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \sigma_X^2 & \dots & c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \dots & \sigma_X^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(\mathbf{s}_1 - \mathbf{u}) \\ c_X(\mathbf{s}_2 - \mathbf{u}) \\ \vdots \\ c_X(\mathbf{s}_n - \mathbf{u}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ισοδύναμη έκφραση με μορφή πινάκων είναι η παρακάτω:

$$C_X L = C_u \Rightarrow L = C_u C^{-1} \quad (2.36)$$

Εναλλακτικά, το σύστημα μπορεί να γραφθεί και με μορφή εξισώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} c(s_1, s_1)\lambda_1 + c(s_1, s_2)\lambda_2 + \dots + c(s_1, s_n)\lambda_n + \mu &= c(s_1, s_u) \\ c(s_2, s_1)\lambda_1 + c(s_2, s_2)\lambda_2 + \dots + c(s_2, s_n)\lambda_n + \mu &= c(s_2, s_u) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= 1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Τέλος, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για το κανονικό Kriging υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_{E,OK}^2(\mathbf{u}) = \sigma_X^2 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} c_X(\mathbf{u}) - \mu \quad (2.38)$$

Η αρνητική τιμή του συντελεστή Lagrange  $\mu$  διορθώνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα προσαρμόζοντάς το, ώστε να αντισταθμίσει την ανεπιθύμητη μεροληπτικότητα που προκύπτει όταν οι τιμές του δείγματος είναι συσχετισμένες. Στο κανονικό Kriging, η αβεβαιότητα είναι πάντα μικρότερη σε σύγκριση με το απλό

Kriging, αφού αφαιρείται από τη σχέση ο συντελεστής Lagrange.

#### 2.8.4 Μέτρα Επιβεβαίωσης Χωρικού Μοντέλου

Η μέθοδος διαστευρωμένης επαλήθευσης Leave-One-Out Cross-Validation- (LOOCV) είναι μια συνηθισμένη τεχνική που χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση των εκτιμήσεων ενός γεωστατιστικού μοντέλου, όσον αφορά τις παραμέτρους του ημιβαριογράμματος και της ακτίνας της γειτονιάς. Στη μέθοδο αυτή, κάθε σημείο του δείγματος αφαιρείται σειριακά από τα δεδομένα και χρησιμοποιείται ως σημείο ελέγχου, ενώ τα υπόλοιπα δεδομένα χρησιμοποιούνται για να πραγματοποιηθεί μια εκτίμηση στο αφαιρεθέν σημείο, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των γειτονικών σημείων. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε σημείο. Η απόδοση του γεωστατιστικού μοντέλου αξιολογείται συγκρίνοντας τις εκτιμήσεις με τις πραγματικές τιμές στα σημεία ελέγχου. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα κύρια μέτρα:

##### Μέσο Σφάλμα

Το μέσο σφάλμα υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{x}(s_i) - x(s_i)] \quad (2.39)$$

Το μέσο σφάλμα υπολογίζει τη μεροληψία της εκτίμησης, δηλαδή αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης (ή προβλεπόμενης) τιμής και της πραγματικής τιμής που μετρήθηκε. Στα δειγματικά σημεία η εκτίμηση ταυτίζεται με την εκτιμηθείσα τιμή.

### Μέσο Απόλυτο Σφάλμα

Η παρακάτω εξίσωση υπολογίζει το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα (Mean Absolute Error - MAE) μιας εκτίμησης:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{x}(s_i) - x(s_i)| \quad (2.40)$$

Το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα υπολογίζεται ως η απόλυτη διαφορά μεταξύ της εκτιμηθείσας τιμής και της πραγματικής τιμής για κάθε δειγματικό σημείο. Όσο χαμηλότερο είναι το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα, τόσο καλύτερη είναι η ακρίβεια του μοντέλου.

### Ρίζα Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Root Mean Squared Error) αξιολογεί την ακρίβεια του μοντέλου. Υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\hat{x}(s_i) - x(s_i)]^2} \quad (2.41)$$

Η επιλογή μεταξύ της ρίζας του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος και του Μέσου Απόλυτου Σφάλματος εξαρτάται συχνά από το πλαίσιο της εφαρμογής και τους στόχους αξιολόγησης. Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στα μεγάλα σφάλματα, κάνοντας τα πιο ορατά στην αξιολόγηση του μοντέλου. Από την άλλη πλευρά, το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα είναι πιο ανθεκτικό στις ακραίες τιμές. Η ρίζα του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος είναι πιο ευαίσθητη σε μεγάλα σφάλματα. Αντίθετα, το Μέσο Απόλυτο Σφάλμα δίνει ίση σημασία σε όλα τα σφάλματα, ανεξαρτήτως του μεγέθους τους. Αυτό το καθιστά πιο ανθεκτικό σε ακραίες

τιμές.

### Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης Pearson

Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson, χρησιμοποιείται για να μετρήσει τη γραμμική εξάρτηση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Ορίζεται ως εξής:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (2.42)$$

Η δειγματική συνδιασπορά μαζί με το συντελεστή συσχέτισης είναι αμερόληπτοι εκτιμητές της συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. Οι δύο μεταβλητές θα μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση όντας είτε αρνητικά είτε θετικά συσχετισμένες.

Ο συντελεστής εξ ορισμού λαμβάνει τιμές από 1 έως -1. Όταν η απόλυτη τιμή του  $\rho$  είναι μικρή υπάρχει ασθενής γραμμική συσχέτιση, ενώ όταν είναι μεγάλη υπάρχει ισχυρή συσχέτιση [34].



## Κεφάλαιο 3

# Γεωστατιστική ανάλυση στη λεκάνη των Μοιρών

Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζουμε την εφαρμογή των μεθόδων που αναφέρθηκαν προηγουμένως εστιάζοντας στην λεκάνη των Μοιρών, μια περιοχή με αυξημένη ευαισθησία και σημαντικές υδρολογικές προκλήσεις.

Για την εφαρμογή των γεωστατιστικών μεθόδων αναλύθηκαν 70 γεωτρήσεις. Το μετρούμενο μέγεθος είναι στάθμη νερού μετρημένη από την επιφάνεια της θάλασσας (ASL) για γεωτρήσεις στο πορώδες υδροφόρο σύστημα των Μοιρών. Η περιοχή αυτή έπεται από ανάλυση της Γενικής Διεύθυνσης Υδάτων χαρακτηρίστηκε ως ευπρόσβλητη ζώνη με κακή ποσοτική κατάσταση. Στην παρούσα εργασία κατασκευάζεται χάρτης της στάθμης νερού της ευπαθούς περιοχής.

Η οικογένεια μεθόδων Kriging παρέχει διάφορες προσεγγίσεις για την ανάλυση ενός στοχαστικού πεδίου. Η μέθοδος Simple Kriging θεωρεί την τάση γνωστή και σταθερή σε ολόκληρο το πεδίο, υπόθεση που συνήθως δεν ανταποκρίνεται σε πραγματικά δεδομένα. Μια εναλλακτική μέθοδος ευρείας χρήσης είναι το Universal Kriging, το οποίο επιτρέπει την εκτίμηση της τάσης ενσωματώνοντάς

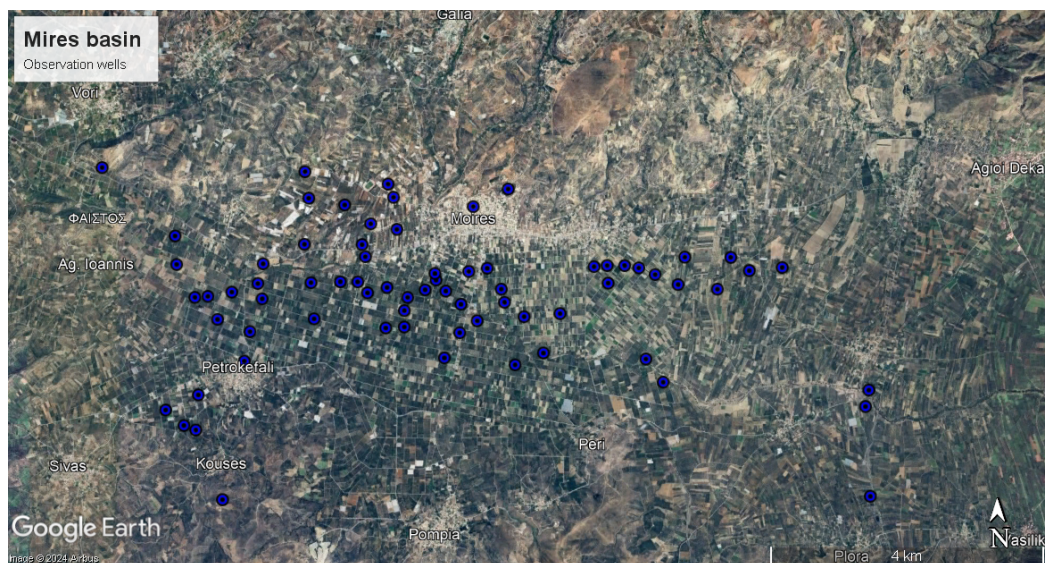
την στο στοχαστικό μοντέλο. Αυτό παρέχει το πλεονέκτημα της ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας που προκύπτει από την άγνωστη τάση. Ωστόσο, η μη γνώση της τάσης καθιστά δυσκολότερο τον διαχωρισμό του πεδίου σε στοχαστική και αιτιοκρατική συνιστώσα, καθιστώντας έτσι προβληματικό τον υπολογισμό των παραμέτρων του βαριογράμματος [13]. Τελικά, για τη διεξαγωγή της ανάλυσης επιλέχθηκε το Ordinary Kriging με αφαίρεση τάσης μεγάλης εμβέλειας. Η μέθοδος αυτή στην δική μας περίπτωση, υπερέχει έναντι των άλλων επειδή θεωρεί τη μέση τιμή άγνωστη αλλά σταθερή στη γειτονιά και εκτιμά τις διακυμάνσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του εμπειρικού βαριογράμματος.

Το σύνολο των διαγραμμάτων που θα παρουσιαστούν αναπτύχθηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της MATLAB 2024a με κώδικα που αναπτύχθηκε εντός του εργαστηρίου Γεωστατιστικής.

### 3.1 Προκαταρτική ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε δείγμα 70 γεωτρήσεων με ακανόνιστο πλέγμα δειγματοληψίας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.1. Το γεωδαιτικό σύστημα του χάρτη θέσεων είναι το WGS84. Ο συμβολισμός  $x^*(s_i)$  θα αντιπροσωπεύει το δείγμα.

Στο πλαίσιο της προκαταρτικής ανάλυσης υπολογίστηκαν τα βασικά στατιστικά μεγέθη του δείγματος (Πίνακας 3.1). Παρατηρείται διάμεσος που είναι λίγο μεγαλύτερος από τη μέση τιμή, κατάσταση που δηλώνει θετική ασυμμετρία. Το στατιστικό ασυμμετρίας επιβεβαιώνει το παραπάνω. Το στατιστικό κύρτωσης είναι σχεδόν τρία και αντιπροσωπεύει κανονική κατανομή. Τέλος, το εύρος του πεδίου τιμών είναι 52.6 m, δείχνοντας μεγάλη τοπική διακύμανση. Επιπλέον, βρέθηκε ότι σε ακτίνα 2.9km το πιο απομαχρυσμένο σημείο (ευκλείδεια απόσ-



Εικόνα 3.1: Θέσεις γεωτρήσεων στο χώρο.

ταση σημείου) της δειγματοληψίας θα έχει 3 γείτονες. Πληροφορία που μας εξασφαλίζει αργότερα στη διαδικασία εκτίμησης του πεδίου ότι θα υπάρχουν αρκετοί γείτονες στη γειτονιά εκτίμησης του Ordinary Kriging.

Πίνακας 3.1: Στατιστικά μεγέθη του συνόλου δεδομένων

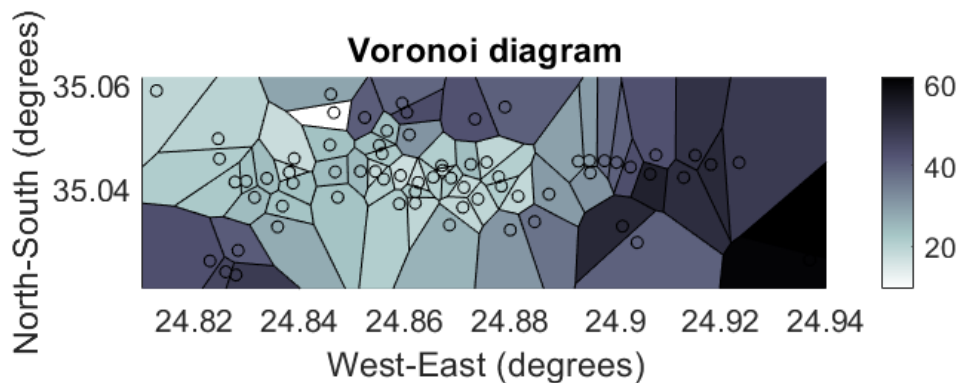
Στατιστικό μέγεθος	Τιμή
Μέση τιμή (m)	30.05
Διάμεσος (m)	24.25
Τυπική απόκλιση (m)	12.40
Εύρος (m)	52.60
Ελάχιστο (m)	9.40
Μέγιστο (m)	62.00
Ασυμμετρία	0.81
Κύρτωση	2.58

### 3.2 Ανάλυση με τη μέθοδο Voronoi

Η αιτιοκρατική ανάλυση πραγματοποιήθηκε με σκοπό να εκφραστεί ποσοτικά με εύκολη υπολογιστική τεχνική το φυσικό μέγεθος. Τα πολύγωνα στα όρια

του διαγράμματος κλείνουν με τη χρήση ψευδοσημείων τοποθετημένα σε μεγάλη απόσταση από τις γεωτρήσεις <sup>1</sup>. Τα ψευδοσημεία δεν εμπεριέχονται στην εκτίμηση του πεδίου και απλά χρησιμοποιούνται ώστε να κλείνουν τα πολύγωνα. Θα μπορούσαν να είναι τοποθετημένα σε κατάλληλες θέσεις ώστε τα πολύγωνα να κλείνουν στα όρια της μάσκας αλλά αυτή η περιοχή έχει πολύπλοκη γεωμετρία περιπλέκοντας αυτήν την εφαρμογή ψευδοσημείων [21]. Δεδομένου πως τα Voronoi σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιούνται για να έχουμε μια οπτική ένδειξη των τιμών του πεδίου στο χώρο, δεν κρίθηκε σκόπιμο να γίνει η επίλυση των γεωμετρικών εξισώσεων ώστε να κλείνουν τα πολύγωνα στα όρια της μάσκας και απλά χρησιμοποιήθηκαν ψευδοσημεία σε μεγάλη απόσταση.

Η μέθοδος Voronoi δίνει για το εύρος των τιμών του δείγματος, χαμηλή στάθμη του υδροφόρου ορίζοντα στο ανατολικό και στο νοτιοδυτικό τμήμα με τις χαμηλότερες τιμές να βρίσκονται νοτιοανατολικά Όπως φαίνεται στην 3.2.



Εικόνα 3.2: Κυβελίδες Voronoi.

<sup>1</sup>τάξη μεγέθους 10 φορές μεγαλύτερη της μεγαλύτερης απόστασης.

### 3.3 Προσδιορισμός τάσης

Αίτιο απόκλισης από την ομοιογένεια είναι η ύπαρξη τάσεων μεγάλης εμβέλειας και προτείνεται η αφαίρεσή τους [21, 33, 39]. Η τάση του πεδίου προσεγγίστηκε με το γραμμικό πρότυπο

$$m_X = a_0 + a_1x + a_2y \quad (3.1)$$

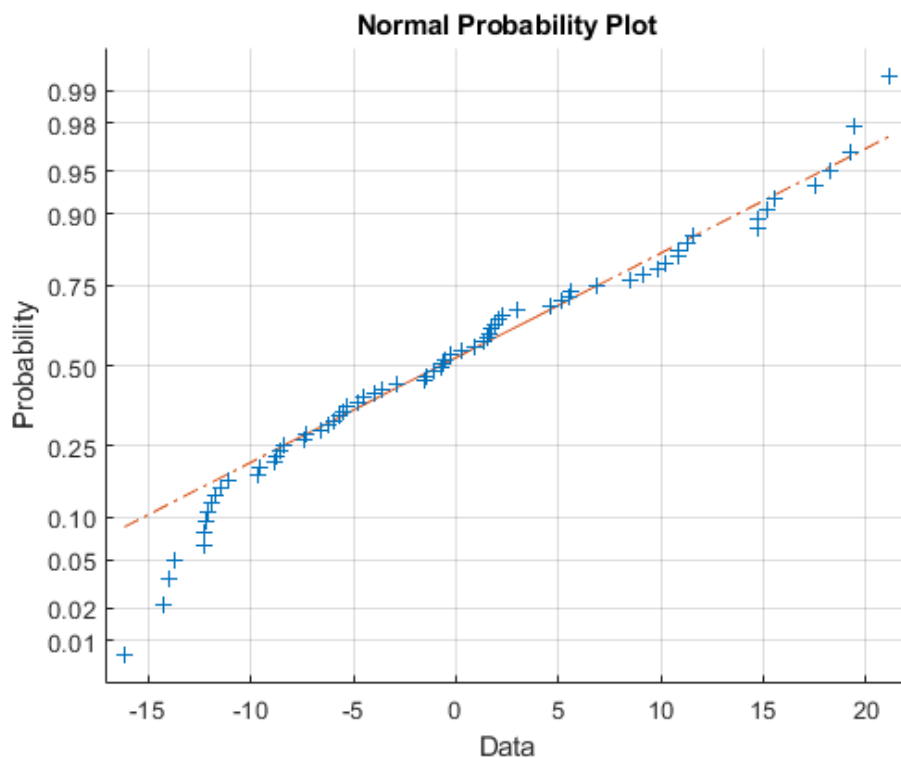
Οι συντελεστές του πολυωνύμου υπολογίστηκαν με τη μέθοδο γραμμικής παλινδρόμησης και φαίνονται στον πίνακα 3.2. Ο συντελεστής συσχέτισης του δείγματος με το πολυώνυμο βρέθηκε 61%. Το ποσοστό δηλώνει ισχυρή συσχέτιση του πολυωνύμου με τις τιμές της διαχύμανσης. Οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$  είναι κοντά κατά απόλυτη τιμή με μεγαλύτερο τον συντελεστή του  $y$ . Ο μεγαλύτερος συντελεστής στην κατεύθυνση Βορράς-Νότος επιβεβαιώνει την ταχύτερη εναλλαγή στάθμης που παρατηρείται στο χάρτη των Voronoi σε αυτήν κατεύθυνση σε σύγκριση με την πιο αργή εναλλαγή της κατεύθυνσης Δύση-Ανατολή (εικόνα 3.2).

Πίνακας 3.2: Συντελεστές προτύπου τάσης

Συντελεστής	Τιμή ( $10^3$ )
$a_0$	5.43
$a_1$	0.236
$a_2$	-0.322

Μετά την αφαίρεση του πολυωνύμου από τις τιμές του δείγματος, το πεδίο των διαχυμάνσεων πλησιάζει την κανονική κατανομή με την υπόθεση να υποστηρίζεται από το Kolmogorov-Smirnov test για στάθμη σημαντικότητας  $\alpha = 0.05$  και τιμή  $p = 0.1594$  [12]. Το διάγραμμα 3.3, το οποίο παρουσιάζει γραφικά την απόκλιση από την κανονική κατανομή εμφανίζει έκτοπες τιμές στα άκρα της κατανομής, αλλά η πλειοψηφία των δεδομένων τείνει να ακολουθήσει την

κανονική.



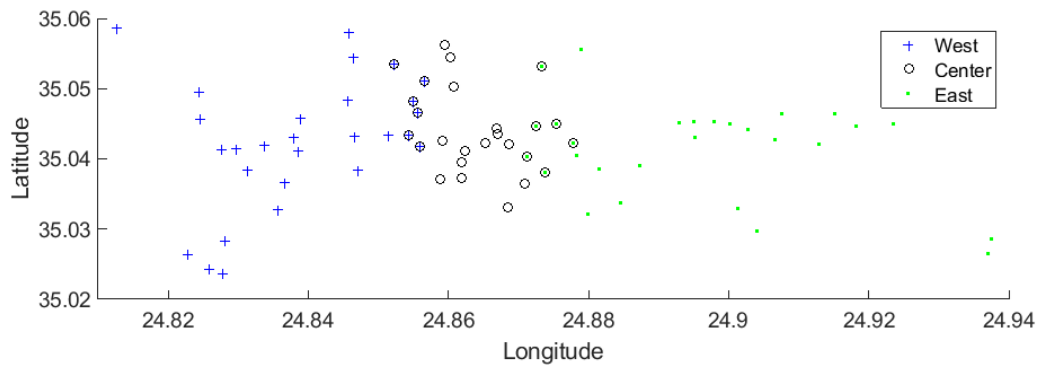
Εικόνα 3.3: Διάγραμμα απόκλισης του πεδίου διακύμανσης από την κανονική κατανομή.

### 3.3.1 Στασιμότητα

Για το πεδίο διακυμάνσεων υπολογίστηκαν οι πρώτες κεντρικές ροπές και τα βασικά στατιστικά μεγέθη. Το νέο πεδίο, το οποίο απεδείχθη κανονικό (βλέπε γράφημα 3.3), εμφανίζει μέση τιμή που πλησιάζει το μηδέν (βλέπε πίνακα 3.3), διασπορά  $96.59 \text{ m}^2$  και μικρότερο εύρος στις τιμές από το αρχικό πεδίο. Η τρίτη και η τέταρτη ροπή πλησιάζουν την κανονική κατανομή.

Κατόπιν, πραγματοποιήθηκε έλεγχος στασιμότητας στο πεδίο των διακυμάνσεων. Το πεδίο χωρίστηκε σε τρεις περιοχές (δύση, κέντρο, ανατολή) με μικρή αλληλεπικάλυψη και 26 έως 28 παρατηρήσεις σε κάθε περιοχή 3.4. Υπολογίστηκαν

οι κεντρικές ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης και βρέθηκαν σχεδόν ίσες. Οι τιμές του πίνακα 3.4 συμφωνούν με την τιμές του πίνακα 3.3 (ίδια τάξη μεγέθους).



Εικόνα 3.4: Έλεγχος ομοιογένειας στο πεδίο των διακυμάνσεων.

Πίνακας 3.3: Στατιστικά μεγέθη του πεδίου διακυμάνσεων

Στατιστικό μέγεθος	Τιμή
Μέση τιμή (m)	$8.20 \cdot 10^{-13}$
Διάμεσος (m)	-0.63
Διασπορά ( $m^2$ )	96.59
Εύρος (m)	37.53
Ελάχιστο (m)	-16.18
Μέγιστο (m)	21.17
Ασυμμετρία	0.41
Κύρτωση	2.19

Πίνακας 3.4: Οι κεντρικές ροπές των τριών πληθυσμών εντός του δείγματος που ελέγχθηκαν για την υπόθεση της στασιμότητας του πεδίου.

Περιοχή	Μέση τιμή	Τιμή (m)	Διασπορά	Τιμή ( $m^2$ )
Δύση	$m_1$	2.45	$\sigma_1(m^2)$	74.98
Κέντρο	$m_2$	-4.71	$\sigma_2(m^2)$	106.88
Ανατολή	$m_3$	0.17	$\sigma_3(m^2)$	97.27

### 3.4 Ανάλυση με τη μέθοδο Kriging

Για την εφαρμογή της μεθόδου Ordinary Kriging προσεγγίστηκε τυχαίο πεδίο  $X(s_i)$  που έχει τα στατιστικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στον Πίνακα 3.1. Ο χώρος παρεμβολής κατασκευάστηκε ως πλεγματοειδές πεδίο 9982 κόμβων ανά 100 m. Στη συνέχεια δημιουργήθηκε μάσκα, η οποία περιλαμβάνει όλα δειγματικά σημεία. Μετά την εφαρμογή μάσκας στο πεδίο παραμένουν 5382 κόμβοι (βλέπε εικόνα 3.6).

#### 3.4.1 Βαριογραφία χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας

Εξετάστηκε η περίπτωση πανκατευθυντικής εξάρτησης χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας για τον υπολογισμό του εμπειρικού βαριογράμματος. Το  $\hat{\gamma}_X(\mathbf{r})$  είναι καλός εκτιμητής, όταν εκπληρώνεται η εργοδική υπόθεση, δηλαδή όταν το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πεδίου διαφορών. Ορίστηκαν επαρκείς τάξεις (15 τάξεις) με ικανό αριθμό ζευγών (τουλάχιστον 100), ώστε να καλύβονται όλες οι μεταβολές του βαριογράμματος συναρτήσει της απόστασης. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε η ευσταθής εκτιμήτρια  $\hat{\gamma}_X(\mathbf{r}) = \frac{\text{Med}[X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_j)]^2}{0.457} \cdot 2$  [21].

Πίνακας 3.5: Τετραγωνικό σφάλμα μοντέλου-πειραματικού ημιβαριογράμματος.

Μοντέλα	Τετραγωνικό σφάλμα ( $10^3 m^2$ )
σφαιρικό	7.49
εκθετικό	10.05

Δοκιμάστηκαν δύο μοντέλα βαριογράμματος σε γραμμικό συνδυασμό με φαινόμενο κόκκου, το σφαιρικό και το εκθετικό. Με κριτήριο το ελάχιστο

---

<sup>2</sup>Ο συντελεστής διόρθωσης 0.457 δηλώνει αμερόληπτη εκτίμηση.

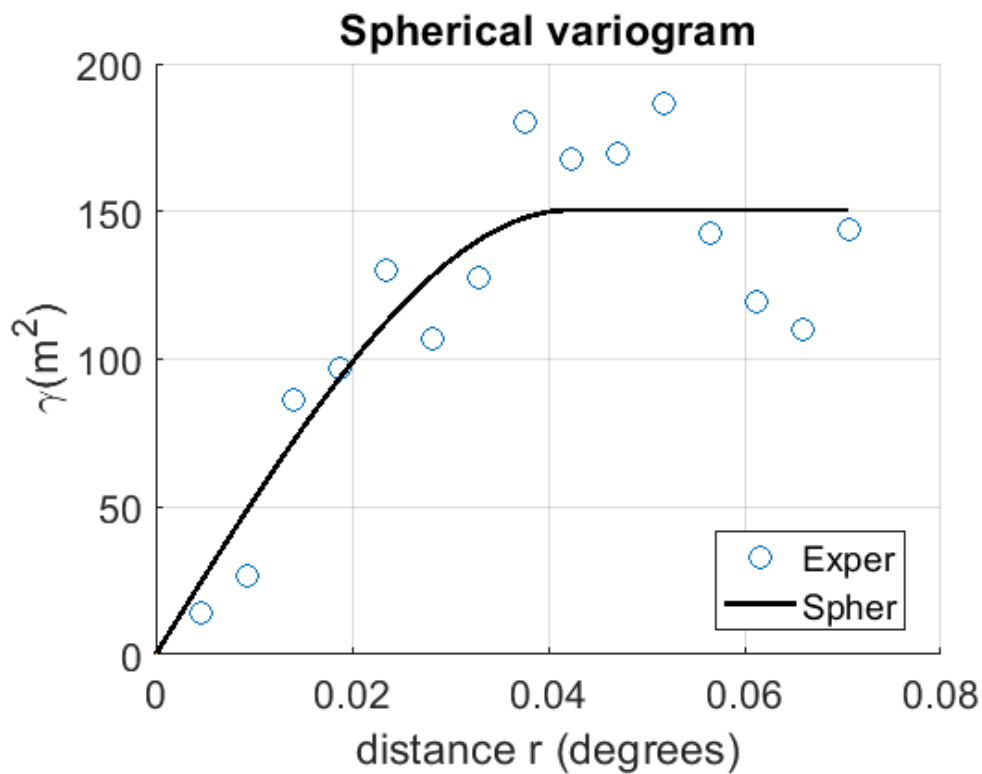


αθροισμένο τετραγωνικό σφάλμα επιλέχθηκε το σφαιρικό μοντέλο. Ακολουθεί η προσαρμογή θεωρητικού μοντέλου στο εμπειρικό βαριόγραμμα (εικόνα 3.5).

Το μοντέλο με φαινόμενο πυρήνα  $c_0$  συγκλίνει στην τιμή διασποράς  $\sigma^2$  με μήκος συσχέτισης  $\xi$ . Οι βέλτιστες παράμετροι εκτιμήθηκαν με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και παρουσιάζονται στον πίνακα 3.6 [21, 39].

Πίνακας 3.6: Εκτιμηθείσες παράμετροι σφαιρικού μοντέλου.

Παράμετροι	Τιμή
$c_0 (m^2)$	$6.62 \cdot 10^{-4}$
$\xi (km)$	4.69
$\sigma^2(m^2)$	150.45



Εικόνα 3.5: Προσαρμογή θεωρητικού σφαιρικού μοντέλου στο πειραματικό.

Το σφαιρικό μοντέλο για μεγαλύτερες του μήκους συσχέτισης απόστάσεις φτάνει στην τιμή της διασποράς. Έως εκείνη την απόσταση υπάρχει συσχέτιση

μεταξύ των τιμών του πεδίου. Μετά από σχεδόν 0.04 μοίρες (απόσταση που αντιστοιχεί σε 4.69 χιλιόμετρα) (πίνακας 3.6), το ημιβαριόγραμμα φθάνει στη μέγιστη τιμή ίση με  $150.45 m^2$ . Για το σφαιρικό μοντέλο θα υπάρχει συσχέτιση σε απόσταση  $r < \xi = 4.69 km$ . Δεδομένου ότι ακόμα και το πιο απομακρυσμένο σημείο της δειγματοληψίας σε απόσταση 2.9 km έχει 3 γείτονες μετρημένους με ευκλείδεια απόσταση, είναι αποδεχτό να θεωρηθεί πυκνή η δειγματοληψία.

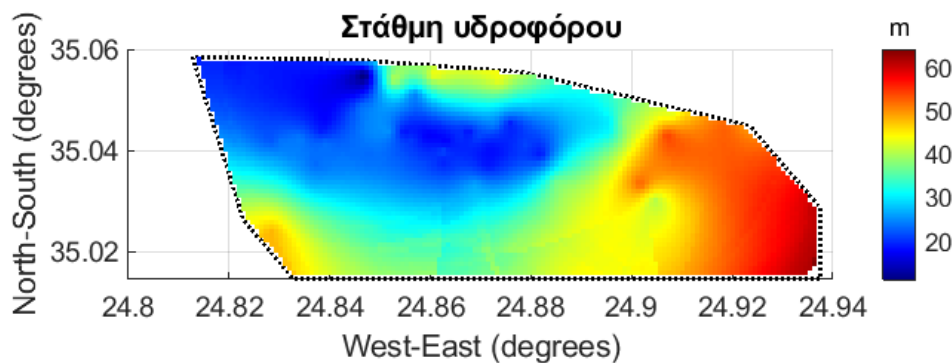
### 3.4.2 Kriging χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας

Για την εφαρμογή της μεθόδου, το πεδίο αναλύεται σε τάση-διακύμανση. Αφού έχει αφαιρεθεί η τάση, η εκτίμηση θα γίνει για το πεδίο των διακυμάνσεων. Για την εκτίμηση του ύψους νερού στις θέσεις του πλεγματοειδούς πεδίου πραγματοποιήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

- Επιλογή ισοτροπικού σφαιρικού μοντέλου ημιβαριογράμματος με τις παραπάνω βέλτιστες παραμέτρους (πίνακας 3.6) για τη δημιουργία του πίνακα βαριογραμμάτων  $\gamma_X$ .
- Επιλογή γειτονιάς εκτίμησης ορισμένη έως και 80 % του μήκους συσχέτισης.
- Επιλογή συνεισφοράς τουλάχιστον 3 σημείων για κάθε εκτίμηση.
- Επίλυση γραμμικής εξίσωσης  $\gamma_X \Lambda = \gamma_u$ , όπου  $\Lambda$  οι γραμμικοί συντελεστές που ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και  $C_u$  το διάνυσμα βαριογραμμάτων μεταξύ του δείγματος και του προς εκτίμηση σημείου.
- Τα σημεία του δείγματος εκτιμώνται ακριβώς όσο είναι μετρημένα στο πεδίο.

- Γίνεται προσθήκη της τάσης στην εκτίμηση των διακυμάνσεων [39].

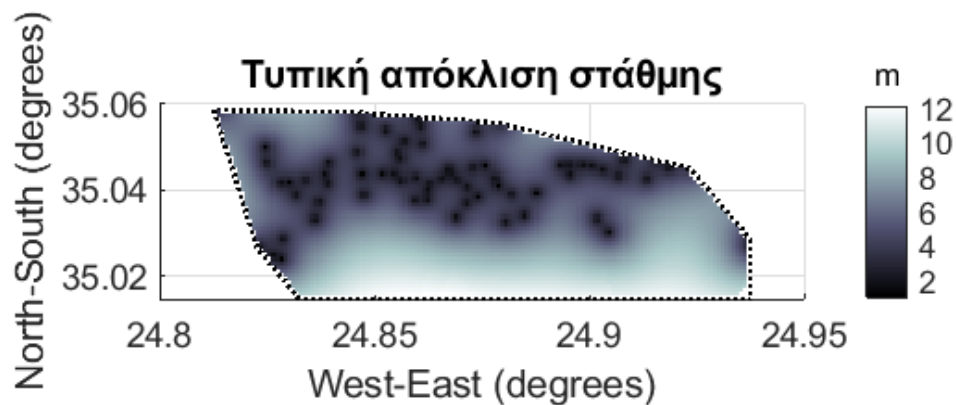
Ο χάρτης, ο οποίος προκύπτει (εικόνα 3.6), δείχνει την εκτίμηση του ύψους νερού για τη λεκάνη των Μοιρών. Έχει θεωρηθεί ότι κάθε κελί αντιπροσωπεύει μια τιμή ύψους. Η κάθε τιμή είναι το άθροισμα δύο συνιστωσών, της εκτίμησης και της τάσης που είχε αφαιρεθεί σε προηγούμενο βήμα και τώρα επαναπροστέθηκε. Τα μη συμπληρωμένα κελιά στις άκρες δεν είχαν περισσότερους από 3 γείτονες, οπότε δεν υπάρχει εκτίμηση για εκείνα. Στα νοτιοανατολικά της περιοχής μελέτης εμφανίζονται τα μεγαλύτερα ύψη, ενώ βορειοδυτικά και κεντρικά της λεκάνης τα μικρότερα [21].



Εικόνα 3.6: Εκτίμηση του ύψους νερού με τη μέθοδο *Ordinary Kriging*.

### 3.4.3 Επαλήθευση μεθοδολογίας

Η μέθοδος περιλαμβάνει εκτίμηση της ακρίβειας με τον υπολογισμό του αναμενόμενου τετραγωνικού σφάλματος. Ο χάρτης 3.7 δείχνει μεγαλύτερη αβεβαιότητα στις περιοχές χωρίς δείγμα και μικρότερη αβεβαιότητα στις περιοχές με δειγματικό σημείο. Οι περιοχές με μεγάλη αβεβαιότητα είναι περιορισμένες. Επιπλέον,



Εικόνα 3.7: Ακρίβεια εκτίμησης στα σημεία πρόβλεψης.

σημαντικό είναι ότι το εύρος των τιμών είναι σχεδόν μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο από το εύρος των σφαλμάτων. Στις θέσεις με μέτρηση η αβεβαιότητα είναι σχεδόν μηδενική, ενώ στις θέσεις χωρίς μέτρηση και με λίγους γείτονες ξεπαιρνάει τα 8 μέτρα. Η κατανομή των σφαλμάτων ακολουθεί κανονική κατανομή με σχεδόν μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση 5.4m σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% (εικόνα 3.8).

Για την επιβεβαίωση εγκυρότητας της μεθόδου υπολογίστηκαν τα μέτρα επαλήθευσης του πίνακα 3.7. Το RMSE βρέθηκε 5.37 μέτρα (below surface), το οποίο είναι σχετικά μικρό συγκριτικά με το εύρος των τιμών του πεδίου (3.1). Το ίδιο ισχύει και για το μέσο απόλυτο σφάλμα, το οποίο υπολογίστηκε 3.57 μέτρα, αν και αναμένεται μικρότερο από το τετραγωνικό εξορισμού. Μικρές τιμές απολύτων σφαλμάτων δείχνουν ότι η μέθοδος πρόεκυψε

με αποδεκτά αποτελέσματα. Το μέγιστο απόλυτο σφάλμα τάξεως των 20.01 μέτρων είναι επίσης αποδεκτό, μιας και εκφράζει διαφορές.

Πίνακας 3.7: Μέτρα επαλήθευσης της μεθοδολογίας κανονικού Kriging

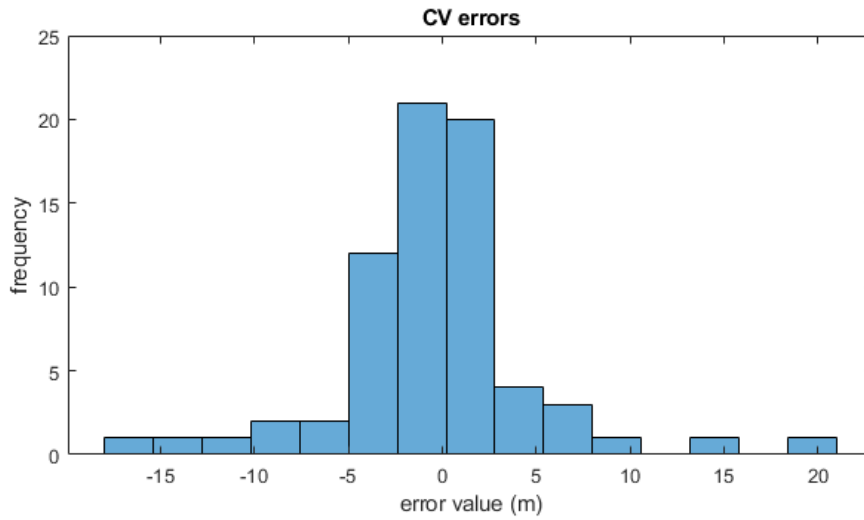
Μέτρο επαλήθευσης	Τιμή
$\rho$	0.90
RMSE( $m$ )	5.37
MAE ( $m$ )	3.57
MaxAE ( $m$ )	20.01

Ο συντελεστής συσχέτισης βρέθηκε στο 90% , δηλαδή οι εκτιμήσεις με τις πραγματικές τιμές έχουν ισχυρή συσχέτιση και επιτρέπουν τη διεξαγωγή συμπερασμάτων. Εναλλακτικά διατυπωμένο, το πεδίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με τα συμπεράσματά του για την περιγραφή της παραμέτρου του ύψους νερού στην περιοχή των Μοιρών. Αυτό συνεπάγεται ότι το μικρό ύψος υδροφόρου στο βορειοδυτικό μέρος του πεδίου, μπορεί να δείχνει υπεράντληση του υδροφόρου. Για την περιοχή υπήρχαν δύο διαθέσιμες μετρήσεις, όπως δείχνει η εικόνα 3.1. Ενδεχομένως, περισσότερες μετρήσεις στην περιοχή θα έλεγχαν την εγκυρότητα του συμπεράσματος, λαμβάνοντας υπόψιν τα όρια του υδροφόρου.

### 3.5 Kriging με διόρθωση ανισοτροπίας

Συγκριτικά με την εφαρμογή κανονικού Kriging στο πεδίο των διακυμάνσεων, θα αναπτυχθεί η ίδια μεθοδολογία για το πεδίο μετά από διόρθωση ανισοτροπίας. Εν τέλει, θα αποδειχθεί αν η ανισοτροπική συμπεριφορά του πεδίου επηρέασε την εκτιμητική ικανότητα της μεθόδου και με ποιόν τρόπο. Τα μέτρα επιβεβαίωσης των δύο προσεγγίσεων θα αντιπαρατεθούν για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων.

Η διόρθωση ανισοτροπίας μετασχηματίζει το σύστημα συντεταγμένων του πεδίου σε ισοδύναμο ισοτροπικό. Αρχικά, πρέπει να διαπιστωθεί ότι υπάρχει



Εικόνα 3.8: Κατανομή σφαλμάτων διεσταυρωμένης επαλήθευσης.

ανισοτροπία. Η ανισοτροπία ελέγχθηκε ως εξής:

- Υπολογίστηκαν τα κατευθυντικά βαριογράμματα με βήμα  $4^\circ$  από για κατεύθυνση  $\hat{\beta}$  από  $0^\circ$  έως  $180^\circ$ , έτσι ώστε να καλύπτεται όλο το πεδίο, με σκοπό να προσδιοριστεί η γωνία εκτροπής  $\hat{\theta}$ .
- Η γωνιακή ανοχή  $\hat{\varphi}$  δόθηκε εντός εύρους  $45^\circ$ . Δεν θα μπορούσε να κυμαίνεται σε μικρότερο εύρος λόγω μικρού δείγματος ( $N=70$  δειγματικά σημεία), ώστε να εξασφαλίζεται ο απαιτούμενος αριθμός σημείων ανά κλάση.
- Χρησιμοποιήθηκε το σφαιρικό μοντέλο για την εξαγωγή των παραμέτρων του βαριογράμματος για κάθε κατεύθυνση. Για κάθε κατευθυντικό βαριόγραμμα  $\gamma_\beta(\|\mathbf{r}\|)$  με κατεύθυνση  $\hat{\beta}$  και της γωνιακή ανοχή  $2\hat{\varphi}$  υπολογίστηκαν οι παράμετροι  $\sigma_\beta^2$  και  $\xi_\beta$ .
- Προβλήθηκαν σε πολικές συντεταγμένες τα μήκη συσχέτισης για κάθε γωνία ανοχής (Σταυροί στο 3.9).

- Εξετάζονται τα σημεία που προβλήθηκαν στις πολικές συντεταγμένες για την ύπαρξη έλλειψης που θα επιβεβαιώσει την ύπαρξη γεωμετρικής ανισοτροπίας.
- Εκτιμάται βέλτιστη έλλειψη (με χρήση ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος για τις παραμέτρους της έλλειψης) από την οποία εκτιμούνται οι άξονες  $\xi_1, \xi_2$  και η γωνία εκτροπής  $\hat{\theta}$ .

Σε πολικές συντεταγμένες, η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τη σχέση 2.19. Σε αυτή τη σχέση εύκολα γίνεται κατανοητό ότι προς προσδιορισμό είναι η γωνία εκτροπής  $\hat{\theta}$  και τα μήκη συσχέτισης των κύριων αξόνων της έλλειψης,  $\xi_1, \xi_2$ .

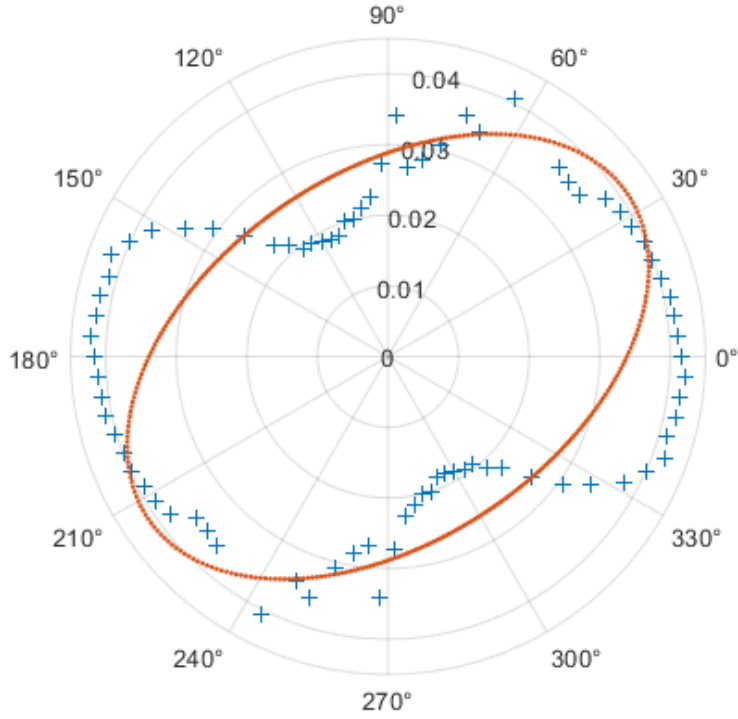
*Πίνακας 3.8: Γεωμετρικές παράμετροι της έλλειψης ανισοτροπίας.*

Παράμετρος	Τιμή
$\hat{\theta}$ (°)	34.06
$\xi_1$ (km)	4.56
$\xi_2$ (km)	2.89

Οι τιμές υπολογίστηκαν όπως φαίνεται στον πίνακα 3.8. Οι δύο άξονες έχουν λόγο ανισοτροπίας  $\xi_1/\xi_2 = 1.58$ . Το παραπάνω σημαίνει πως σε διεύθυνση συγγραμμική του μεγάλου άξονα, το πεδίο αλλάζει με ταχύτητα 1.6 φορές μεγαλύτερη από τη διεύθυνση που ορίζει ο μικρός άξονας.

Αφού προσδιορίστηκε ο λόγος ανισοτροπίας και η γωνία εκτροπής της έλλειψης από κανονικό σύστημα συντεταγμένων (αναλογία κλίμακας 1.6:1 για γωνία εκτροπής  $\varphi$ ), θα γίνει διόρθωση της ανισοτροπίας.

Το νέο ισοτροπικό σύστημα προέκυψε με χρήση της αντίστροφης έκφρασης του αφινικού μετασχηματισμού. Η διαδικασία περιλαμβάνει στροφή του συστή-



Εικόνα 3.9: Μήκη συσχέτισης για κατευθύνσεις από  $0^\circ$  έως  $180^\circ$  με βήμα  $4^\circ$ . Η εσωτερική κλίμακα που φαίνεται στο διάγραμμα περιγράφει τα μήκη συσχέτισης με μονάδες μηκών τόξου.

ματος κατά γωνία  $\hat{\theta} = 34.06^\circ$  με χρήση του πίνακα στροφής (σχέση 2.22)

$$\begin{bmatrix} \cos(34.06^\circ) & \sin(34.06^\circ) \\ -\frac{\sin(34.06^\circ)\xi_2}{\xi_1} & \frac{\cos(34.06^\circ)\xi_2}{\xi_1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos(34.06^\circ) & \sin(34.06^\circ) \\ -\frac{\sin(34.06^\circ)}{1.58} & \frac{\cos(34.06^\circ)}{1.58} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Στον πίνακα στροφής είναι ενσωματωμένος ο λόγος ανισοτροπίας. Τώρα, η ισοϋψής καμπύλη θα έχει τη μορφή κύκλου. Για να ποσοτικοποιηθεί η μεταβολή της κλίμακας στο γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος, λήφθηκαν οι λόγοι  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , οι οποίοι εκφράζουν τη μεταβολή στον κάθε άξονα 3.9, αντίσ-



τοιχα:

$$\lambda_1 = \frac{\text{εύρος γεωγραφικού μήκους στο αρχικό σύστημα}}{\text{εύρος γεωγραφικού μήκους στο ισοτροπικό σύστημα}} \quad (3.4)$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{εύρος γεωγραφικού πλάτους στο αρχικό σύστημα}}{\text{εύρος γεωγραφικού πλάτους στο ισοτροπικό σύστημα}} \quad (3.5)$$

*Πίνακας 3.9: Αναλογία μεταβολής γεωγραφικού μήκους  $\lambda_1$  και αναλογία μεταβολής γεωγραφικού πλάτους  $\lambda_2$ .*

Αναλογία κλίμακας	Τιμή
$\lambda_1$	1.21
$\lambda_2$	0.34

Φαίνεται ότι στο νέο ισοτροπικό σύστημα, τα γεωγραφικά μήκη έχουν μικρύνει. Αντιθέτως, τα γεωγραφικά πλάτη έχουν διευρυνθεί. Στην παραπάνω έκφραση των αναλογιών μεταβολής της κλίμακας εμπεριέχεται και η στροφή του συστήματος κατά γωνία  $\hat{\theta}$  (βλέπε πίνακα 3.8 ).

### 3.5.1 Βαριογραφία με διόρθωση ανισοτροπίας

Για το ισοτροπικό πεδίο διακυμάνσεων θα εκτελεστεί εκ νέου η διαδικασία της βαριογραφίας. Δοκιμάστηκε το σφαιρικό και το εκθετικό ισοτροπικό βαριόγραμμα. Μεταξύ των δύο με κριτήριο το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα θα επιλεγεί το σφαιρικό βαριόγραμμα, όπως φαίνεται στον πίνακα 3.10. Τα νέα τετραγωνικά σφάλματα αυξήθηκαν κατά μια τάξη μεγέθους από την προηγούμενη εκτέλεση βαριογραφίας (πίνακας 3.5).

*Πίνακας 3.10: Τετραγωνικό σφάλμα μοντέλου-πειραματικού ημιβαριογράμματος.*

Μοντέλα	Τετραγωνικό σφάλμα ( $10^4 m^2$ )
σφαιρικό	1.23
εκθετικό	1.72

Το ισοτροπικό σφαιρικό μοντέλο 3.10 εμφανίζει παραμέτρους οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 3.11. Το φαινόμενο κόκκου μειώθηκε κατά δύο τάξεις μεγέθους. Η ταχύτητα προσέγγισης του άνω φράγματος αυξήθηκε ελαφρά καθώς οι άξονες αλλάξαν. Το άνω φράγμα είναι πρακτικά αμετάβλητο.

Πίνακας 3.11: Εκτιμηθείσες παράμετροι σφαιρικού μοντέλου.

Παράμετροι	Τιμή
$c_0' (m^2)$	$4.89 \cdot 10^{-6}$
$\xi' (km)$	5.29
$\sigma^{2'} (m^2)$	156.39

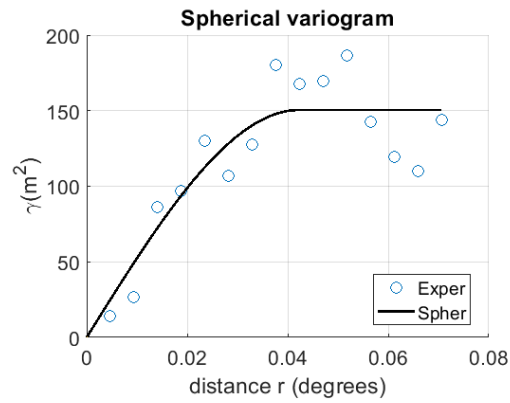
### 3.5.2 Kriging με διόρθωση ανισοτροπίας

Σκοπός της διόρθωσης ανισοτροπίας ήταν η εκτίμηση του πεδίου με τις διορθωμένες διακυμάνσεις. Έπειτα από την αντιπαράθεση των δύο χαρτών (εικόνα 3.11), φαίνεται να μην υπάρχουν διαφορές. Ωστόσο, οι περιοχές μέτριου ύψους νερού μεταξύ 30 και 40 μέτρων εμφανίζουν μεταβολή. Με μια πιο προσεχτική διερεύνηση, παρατηρείται ότι οι παραπάνω εκτιμήθηκαν μεγαλύτερες. Οι περιοχές μικρού και μεγάλου ύψους δυτικά και ανατολικά παραμένουν σταθερές.

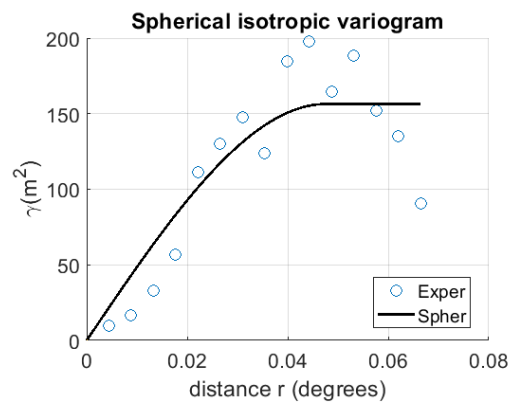
### 3.5.3 Επαλήθευση εκτίμησης ισοτροπικού πεδίου

Με στόχο την επαλήθευση της εκτίμησης του ισοτροπικού πεδίου υπολογίστηκε η τυπική απόκλιση των σημειακών εκτιμήσεων (χάρτης 3.12). Το εύρος της τυπικής απόκλισης του ισοτροπικού πεδίου αυξήθηκε με τις μεγαλύτερες τιμές να αποδίδονται στα σημεία χωρίς δειγματική κατάσταση.

Τα μέτρα επιβεβαίωσης για τη χωρική εκτίμηση με διόρθωση ανισοτροπίας φαίνονται στον πίνακα 3.12. Παρατηρείται ελαφριά βελτίωση των δεικτών και μείωση του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των εκτιμήσεων και των μετρήσεων. Γενικεύοντας μετά της διεξαγωγής των μέτρων των σφαλμάτων, η διόρθωση

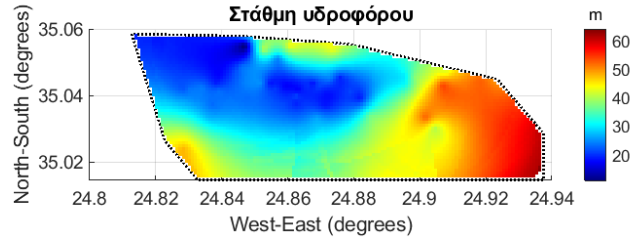


(a) Σφαιρικό μοντέλο για το αρχικό πεδίο διακυμάνσεων

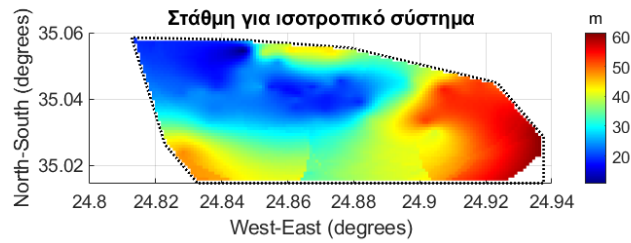


(b) Σφαιρικό μοντέλο για το ισοτροπικό πεδίο διακυμάνσεων

Εικόνα 3.10: Σύγκριση βαριογραμμάτων. α) πανκατευθυντικό, χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας. β) Βαριόγραμμα μετά την διόρθωση της ανισοτροπίας.



(a) Εκτίμηση ύψους στο αρχικό πεδίο.



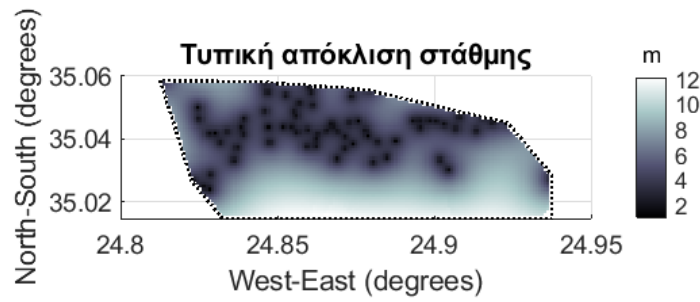
(b) Εκτίμηση ύψους στο ισοτροπικό πεδίο.

Εικόνα 3.11: Σύγκριση κανονικού *Kriging* χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας και με διόρθωση ανισοτροπίας.

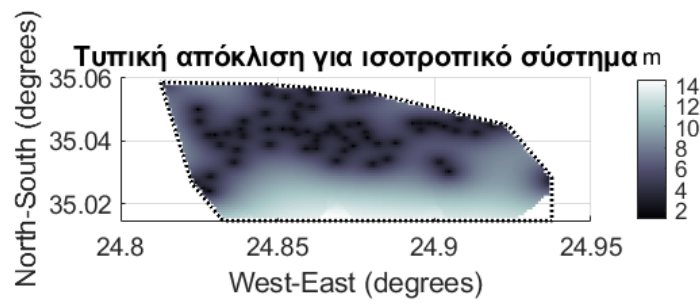
ανισοτροπίας βελτίωσε ελαφρώς (μικρότερο μέσο απόλυτο σφάλμα και τετραγωνική ρίζα μέσου σφάλματος) την ικανότητα της μεθόδου κανονικού *Kriging* να εκτιμήσει το δεδομένο πεδίο. Συμπερασματικά, υπό ρεαλιστικές συνθήκες εκτίμησης η ανισοτροπία που επιδεικνύει το δεδομένο πεδίο θα μπορούσε να αγνοηθεί, δηλαδή να παραχθεί εκτίμηση του πεδίου χωρίς διόρθωση ανισοτροπίας.

### 3.6 *Kriging* με απόσταση Manhattan

Όπως αναφέρθηκε στη θεωρία, η απόσταση Manhattan έχει ευρεία εφαρμογή στην εκτίμηση υδρογεωλογικών πεδίων. Συχνά συνεισφέρει επιτυχάνοντας καλύτερα μέτρα επαλήθευσης με μικρότερη αβεβαιότητα. Θα εξεταστεί αν



(a) Τυπική απόκλιση αρχικού πεδίου.



(b) Τυπική απόκλιση ισοτροπικού πεδίου.

Εικόνα 3.12: Σύγκριση σφαλμάτων για το πεδίο πριν και μετά τη διόρθωση ανισοτροπίας.

ισχύει το παραπάνω για το πεδίο της εργασίας αυτής.

Πίνακας 3.12: Σύγκριση μέτρων επαλήθευσης των δύο προσεγγίσεων.

Μέτρο επαλήθευσης	Τιμή	
	Αρχικά	Ισοτροπικά
MAE(m)	3.57	3.50
RMSE (m)	5.37	5.31
$\rho$	0.90	0.844
MaxAE (m)	20.01	21.82

### 3.6.1 Βαριογραφία με απόσταση Manhattan

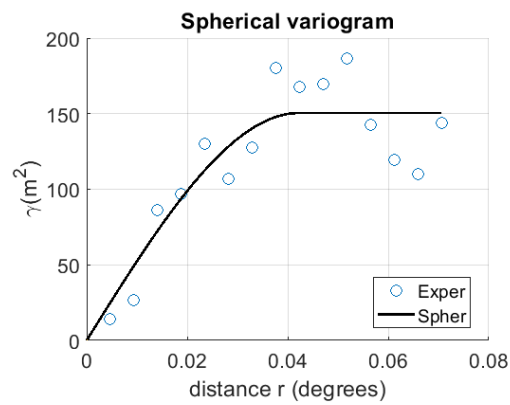
Για το πεδίο των διακυμάνσεων εκτελέστηκε η διαδικασία της βαριογραφίας με απόσταση Manhattan όπως φαίνεται στο σχήμα 3.13. Δοκιμάστηκε το σφαιρικό βαριόγραμμα το οποίο έχει βρεθεί ότι πετυχαίνει την καλύτερη εφαρμογή στο πεδίο για την Ευκλείδεια. Οι παράμετροι του βαριογράμματος φαίνονται στον πίνακα 3.13. Σε αντιπαράθεση με το βαριόγραμμα της ευκλείδειας απόστασης, το βαριόγραμμα της Manhattan εμφανίζει μικρότερο φαινόμενο κόκκου και προσεγγίζει το ανώφλι με ταχύτητα 5.56 km. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η μέγιστη απόσταση αποκοπής του βαριογράμματος με απόσταση Manhattan είναι μεγαλύτερη. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς ισχύει:

$$r_M(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \geq r_E(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$$

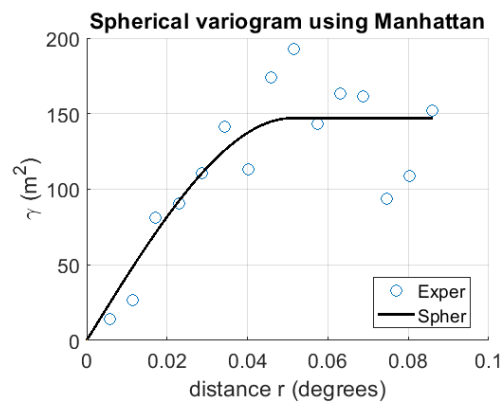
όπου  $r_M$  η απόσταση Manhattan και  $r_E$  η Ευκλείδεια.

Πίνακας 3.13: Σύγκριση παραμέτρων σφαιρικού μοντέλου.

Παράμετροι	Ευκλείδεια	Manhattan
$c_0 (m^2)$	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$1.40 \cdot 10^{-5}$
$\xi (km)$	4.69	5.56
$\sigma^2(m^2)$	150.45	147.07



(a) Σφαιρικό μοντέλο με ευκλείδεια απόσταση

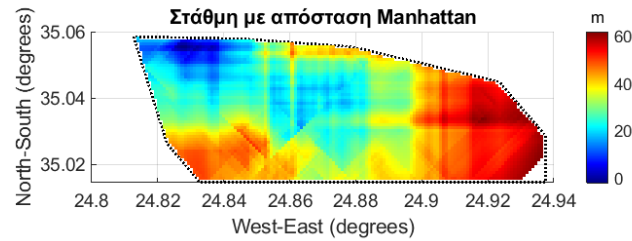


(b) Σφαιρικό μοντέλο με απόσταση Manhattan

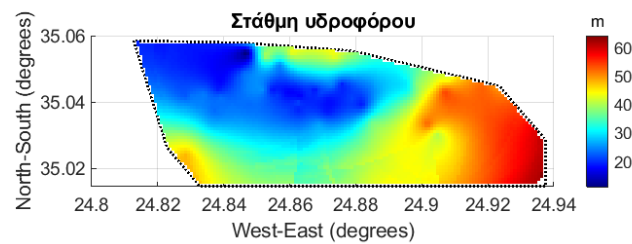
Εικόνα 3.13: Σύγκριση βαριόγραμμάτων. α) Βαριόγραμμα με ευκλείδεια απόσταση β) Βαριόγραμμα με απόσταση Manhattan.

### 3.6.2 Kriging με απόσταση Manhattan

Σκοπός της εκτίμησης με χρήση της απόστασης Manhattan ήταν η επίτευξη καλύτερης περιγραφής του υδρολογικού πεδίου. Η εκτίμηση ύψους του σχήματος 3.14 περιγράφει την περιοχή μελέτης με τη νέα απόσταση. Οι τιμές του ύψους διατηρούν το εύρος τους. Εμφανίζονται εντονότερες οι περιοχές μεγάλου ύψους και έχουν εμφανώς υποχωρήσει εκείνες με μικρό. Επιπλέον, στο σχήμα παρατηρείται σταυροειδές μοτίβο. Η μορφή αυτή είναι χαρακτηριστική της απόστασης Manhattan, η οποία δίνει λιγότερο βάρος στις διαγώνιες αποστάσεις έναντι της Ευκλείδειας.



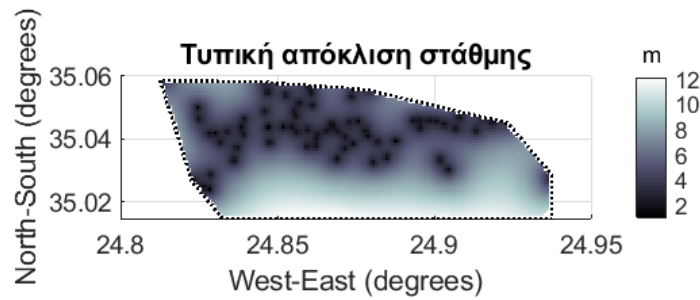
(a) Εκτίμηση ύψους με απόσταση Manhattan.



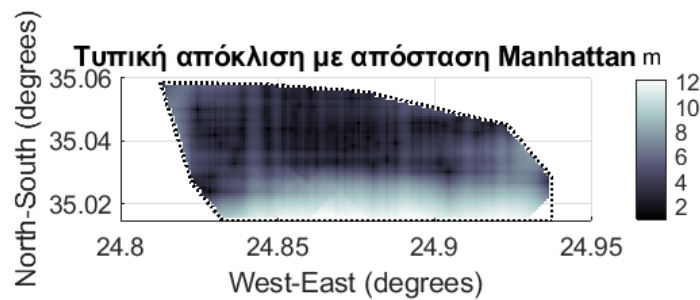
(b) Εκτίμηση ύψους με Ευκλείδεια απόσταση.

Εικόνα 3.14: Σύγκριση κανονικού Kriging με Ευκλείδεια απόσταση και απόσταση Manhattan.





(a) Εκτίμηση τυπικής απόκλισης με Ευκλείδεια απόσταση.



(b) Εκτίμηση τυπικής απόκλισης με απόσταση Manhattan.

Εικόνα 3.15: Εκτίμηση τυπικής απόκλισης με απόσταση Manhattan.

Ο χάρτης της αβεβαιότητας (εικόνα 3.15) που διεξήχθη διατηρεί το εύρος τιμών του ύψους σε σύγκριση με την ευκλείδεια απόσταση. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η αβεβαιότητα έχει περιοριστεί στην νότια περιοχή που παρεχτείνεται το πεδίο. Στην περιοχή αυτή δεν υπάρχουν μετρήσεις και είναι αναμενόμενη η

αύξησή της. Συνεπώς, με την απόσταση Manhattan μειώθηκε η αβεβαιότητα της εκτίμησης.

### 3.6.3 Επαλήθευση εκτίμησης με απόσταση Manhattan

Τα μέτρα επιβεβαίωσης των δύο προσεγγίσεων δίνονται στον πίνακα 3.14. Παρατηρείται ότι η μέθοδος Ordinary Kriging δεν ανταποκρίθηκε καλύτερα με χρήση της απόστασης Manhattan. Εξετάζοντας τα μέτρα επιβεβαίωσης παρατηρείται ότι το μέγιστο απόλυτο σφάλμα έχει σημαντική αύξηση στην περίπτωση της απόστασης Manhattan, το οποίο σε εύρος τιμών 52.8 m με μέγιστη τιμή τα 62 m δείχνει μεγάλη αβεβαιότητα. Συγκριτικά με τα αποτελέσματα από τη αρχική εκτίμηση με Kriging 3.7 και με την εκτίμηση με διόρθωση ανισοτροπίας 3.12, η εκτίμηση με χρήση Manhattan επιτυγχάνει καλύτερα συσχετισμένα δεδομένα από τη δεύτερη μέθοδο. Η αρχική εκτίμηση συνεχίζει να διατηρεί καλύτερη προσέγγιση

Πίνακας 3.14: Σύγκριση μέτρων επαλήθευσης των δύο προσεγγίσεων.

Μέτρο επαλήθευσης	Τιμή	
	Ευκλείδεια απόσταση	Manhattan
MAE(m)	3.57	4.57
RMSE (m)	5.37	6.65
$\rho$	0.903	0.856
MaxAE (m)	20.01	27.73

## Κεφάλαιο 4

### Συμπεράσματα

Σκοπός της εργασίας ήταν η δημιουργία χαρτών ύψους νερού για την επιβαρυμένη αρδευτικά περιοχή των Μοιρών. Συμπληρωματικοί στόχοι ήταν οι έλεγχοι στασιμότητας και ανισοτροπίας στους οποίους υποβλήθηκε το πεδίο. Για τη γεωστατιστική ανάλυση του πεδίου εφαρμόστηκε η μέθοδος κανονικού Kriging. Η μέθοδος παράγει χάρτη του πεδίου και χάρτη της αβεβαιότητας για κάθε μέτρηση. Η μεθοδολογία εφαρμόστηκε με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Την πρώτη φορά αγνοήθηκε η ανισοτροπία του πεδίου. Στη δεύτερη προσέγγιση, ποσοτικοποιήθηκε η ανισοτροπία και έγινε η ανάλογη διόρθωση με χρήση του αφινικού μετασχηματισμού. Τέλος, έγινε εκτίμηση του ύψους με την απόσταση Manhattan, για να συγκριθούν τα αποτελέσματα με την εκτίμηση του πεδίου στο ευκλείδειο επίπεδο. Παρακάτω, δίνονται αναλυτικά τα αποτελέσματα όλων των προσεγγίσεων του πεδίου της εργασίας.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Kriging, το πεδίο ελέγχθηκε για τη στασιμότητά του και την απόκλισή του από την κανονική κατανομή. Η τάση προσεγγίστηκε με ένα γραμμικό πολυώνυμο και βρέθηκε ότι υπάρχει ισχυρή συσχέτισή της με τα δεδομένα. Οι συντελεστές του πολυωνύμου βρέθηκαν σχεδόν ίσοι, δηλαδή η συνεισφορά του γεωγραφικού πλάτους στο πολυώνυμο είναι ίση με τη συνε-

ισφορά στο γεωγραφικό μήκος. Μετά την αφαίρεση του πολυωνύμου, το πεδίο των διακυμάνσεων φαίνεται να ακολουθεί την κανονική κατανομή υποστηριζόμενο από το Kolmogorov-Smirnov test σε μια στάθμη σημαντικότητας 5%. Το πεδίο των διακυμάνσεων ελέγχθηκε για τη στασιμότητα του με σύγκριση των πρώτων ροπών. Οι περιοχές χωρίστηκαν σε δύση-κέντρο-ανατολή και περιλάμβαναν όλο το πεδίο με μικρή αλληλεπικάλυψη. Τελικά, το πεδίο των διακυμάνσεων προκύπτει στάσιμο.

## 4.1 Εκτίμηση με τη μέθοδο Kriging

Πληρώντας τις παραδοχές στασιμότητας και κανονικότητας (μετά από ανάλογους ελέγχους), για μια πλήρη μελέτη πρέπει να προσεγγιστεί η χωρική συσχέτιση του πεδίου διακυμάνσεων. Με κριτήριο το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα επιλέχθηκε το σφαιρικό μοντέλο (βλέπε πίνακα 3.5) με βέλτιστες παραμέτρους που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.6. Για το σφαιρικό μοντέλο υπάρχει συσχέτιση για απόσταση έως τις  $0.04^\circ$  δηλαδή τα 4.69 km. Με την προϋπόθεση ότι η χωρική συσχέτιση των τιμών του πεδίου μπορεί να περιγραφθεί από το ισοτροπικό σφαιρικό μοντέλο, μπορεί να γίνει εκτίμηση του πεδίου για κάθε απόσταση μικρότερης του χαρακτηριστικού μήκους με μικρή αβεβαιότητα.

Η αβεβαιότητα των μετρήσεων εκφράστηκε με τη μορφή χάρτη (διάγραμμα 3.7) και με τη μορφή στατιστικών (βλέπε 3.7). Στα σημεία των μετρήσεων του διαγράμματος 3.7 είναι εμφανής μικρή αβεβαιότητα στα σημεία με δείγμα και μεγαλύτερη αβεβαιότητα καθώς αυξάνει η απόσταση από αυτά. Επιπλέον, το RMSE υπολογίστηκε στα 5.37 m, στάθμη μικρή για μετρήσεις εύρους από 9.4m έως 62m. Τέλος, ο συντελεστής συσχέτισης των εκτιμήσεων με τις πραγματικές τιμές βρέθηκε στο 90.27%, υποδηλώνοντας ισχυρή συσχέτιση με τα δεδομένα και καθιστώντας έγκυρη τη σύγκριση του φυσικού πεδίου ύψους νερού από

την επιφάνεια του εδάφους με ένα μαθηματικό πεδίο με τα ανωτέρω στατιστικά χαρακτηριστικά.

## 4.2 Kriging και διόρθωση ανισοτροπίας

Το πεδίο των διακυμάνσεων εξετάστηκε για γεωμετρική ανισοτροπική συμπεριφορά. Μετά τον προσδιορισμό της ανισοτροπίας ακολουθεί η τροποποίηση του πεδίου των διακυμάνσεων με χρήση του αφινικού μετασχηματισμού. Στο στάσιμο και ισοτροπικό πεδίο που προκύπτει, θα εφαρμοστεί εκ νέου η μεθοδολογία κανονικού Kriging. Σκοπός της διόρθωσης ήταν η δημιουργία χάρτη της χωρικής συμμεταβολής με ισοτροπικά δεδομένα (βλέπε χάρτη 3.11 (b)).

Ο χάρτης φανερώνει ότι σημειώθηκαν μικρές μεταβολές στις ενδιάμεσες τιμές του εύρους του ύψους, αλλά διατηρήθηκαν οι περιοχές των ακραίων τιμών (περιοχές μικρού και μεγάλου ύψους). Ευνόητο συμπέρασμα είναι ότι για το δεδομένο πεδίο η ανισοτροπία θα μπορούσε να αγνοηθεί και ότι η διαδικασία διόρθωσης διεξάγεται ερευνητικά. Παρά τη ρεαλιστική ανεπάρκεια της διόρθωσης, τα μέτρα επαλήθευσης της εκτίμησης επιδεικνύουν μείωση στις τιμές τους, δηλαδή η αβεβαιότητα ελαττώθηκε για την εκτίμηση του ισοτροπικού πεδίου.

## 4.3 Kriging και απόσταση Manhattan

Συνηθισμένη τακτική για την εκτίμηση υδρογεωλογικού πεδίου είναι η χρήση της απόστασης Manhattan, λόγω της ικανότητάς της να παρακάμπτει τις μορφολογικές ετερογένειες του υδροφόρου ορίζοντα, υπολογίζοντας τις αποστάσεις των σημείων με πλεγματικό μοτίβο. Αποδείχθηκε για το πεδίο της εργασίας ότι η απόσταση Manhattan μείωσε την αβεβαιότητα στην εκτίμηση 3.15, αλλά δεν κατάφερε να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από την εκτίμηση

με ευκλείδεια απόσταση (πίνακας 3.14).

## 4.4 Σύγκριση Kriging με πολύγωνα Voronoi

Το πεδίο των υψών νερού από την επιφάνεια της θάλασσας προσεγγίστηκε και με την αιτιοκρατική μέθοδο πολυγώνων Voronoi. Τα πολύγωνα Voronoi υπολογίζουν γεωμετρικά το χώρο στο οποίο θα επικρατεί μια τιμή και έχουν τη δυνατότητα να της αποδώσουν ένα βάρος μεροληπτικά καταναμεημένο <sup>1</sup>. Συνεπώς, διακριτοποιούν το χώρο σε τεμάχια και δεν παράγουν πληροφορία για τη χωρική συσχέτιση των δεδομένων. Εν αντιθέσει, η μεθοδολογία Kriging μπορεί να διαχειριστεί αταξινόμητα χωρικά δεδομένα με αρκούντως πυκνό δείγμα <sup>2</sup> και να ποσοτικοποιήσει τη χωρική τους συσχέτιση. Επιπλέον, παρέχει αμερόληπτη εκτίμηση με τη τετραγωνική ρίζα του αντίστοιχου μέσου σφάλματος. Συνοψίζοντας, οι χάρτες Kriging είναι καταλληλότεροι για την ανάλυση πεδίων συνεχούς χώρου.

## 4.5 Χάρτες Kriging και ανθρώπινες πιέσεις

Όσον αφορά την ανθρώπινη δραστηριότητα στη λεκάνη των Μοιρών, οι υδατικοί πόροι διατίθενται προς αστική και αρδευτική κατανάλωση. Η επίσημη υπηρεσία διαχείρισης των υδάτων επισημαίνει την περιοχή ως καθ' υπερβολήν εκμεταλλεύσιμη. Με διαχρονική έρευνα θα μπορούσε να ερευνηθεί και ποσοτικοποιηθεί πόσο επηρεάζουν οι ανθρωπογενείς πιέσεις τη λεκάνη. Με τη χρήση χαρτών Kriging για τον εντοπισμό των κρίσιμων περιοχών, θα υπάρχει καλύτερη και

---

<sup>1</sup>Το βάρος για κάθε τιμή προκύπτει από το λόγο του εμβαδού του εν λόγω πολυγώνου κανονικοποιημένο ως προς το εμβαδό όλης της περιοχής μελέτης. Υπάρχει μεροληψία, γιατί το κάθε εμβαδό εξαρτάται από τον αριθμό των εγγύτερων του γειτόνων και από την πυκνότητα του δείγματος.

<sup>2</sup>Το δείγμα πρέπει να είναι αρκετά πυκνό, ώστε να ισχύουν οι στατιστικοί νόμοι

στοχευμένη τόσο ενημερότητα όσο και πρόληψη δυσμενών και μη αναστρέψιμων σεναρίων υποβάθμισης του υδροφόρου.

## 4.6 Σύγκριση με προηγούμενες έρευνες

Η περιοχή των Μοιρών λόγω των προαναφερθέντων χρήσεων γης είναι αντικείμενο πολλών μελετών. Σε μια δημοσιευμένη εργασία για την ίδια περιοχή από τους [29], χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Ordinary Kriging σε δεδομένα που είχαν μετασχηματιστεί με box cox, modified box cox και χωρίς μετατροπή (δεδομένα 2002-2003). Στην εργασία τους, εκτίμησαν το ύψος νερού για τις ίδιες γεωτρήσεις που χρησιμοποιούνται σε αυτή την διπλωματική. Τα μέτρα επιβεβαίωσης για τα δεδομένα χωρίς μετασχηματισμό στην δημοσίευση ήταν της ίδιας τάξης μεγέθους με τα αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας (πίνακας 3.7). Οι μικρές αποκλίσεις δικαιολογούνται λόγω της διαφορετικής προσέγγισης όπως και της διαφορετικής χρονικής περιόδου. Στην εργασία τους, οι [29] δείχνουν πως ο μετασχηματισμός modified box cox βελτιώνει τα αποτελέσματα. Στην δική μας περίπτωση τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή σύμφωνα με το test Kolmogorov-Smirnov.

Ο Βαρουχάκης, το 2019, εκτελεί χωροχρονική μελέτη στις Μοίρες [28], αλλά για 11 γεωτρήσεις (δεδομένα 2003-2006), χρησιμοποιώντας χωροχρονικό Regression Kriging με ευκλείδεια απόσταση και με απόσταση Manhattan. Τα αποτελέσματα του είναι στατιστικά κοντινά με αυτά της παρούσας έρευνας. Ωστόσο, υπάρχει ασυμφωνία με τη δημοσιευμένη έρευνα ως προς το ότι η απόσταση Manhattan επιτυγχάνει καλύτερα μέτρα επιβεβαίωσης, ενώ στην προκείμενη εργασία βρέθηκε καλύτερη για την περιγραφή του πεδίου η ευκλείδεια απόσταση, όπως δείχνει ο πίνακας 3.14. Η μικρή ασυμφωνία στα αποτελέσματα δικαιολογείται λόγω της διαφοράς της μεθοδολογίας, του αριθμού των

δεδομένων και της χρονικής περιόδου συλλογής τους.

## 4.7 Μελλοντική έρευνα

Τα σενάρια μελλοντικής έρευνας είναι αρκετά για τη μελέτη ενός στοχαστικού πεδίου. Πρακτικά, κάθε βήμα της εργασίας θα μπορούσε να εκτελεστεί με εναλλακτικό τρόπο, φυσικά για την εκπλήρωση συγκεκριμένου σκοπού. Με κέντρο την υδρολογική ανάλυση της λεκάνης των Μοιρών, προτείνονται για μελλοντική έρευνα έλεγχοι μακροσκοπικής και μικροσκοπικής κλίμακας. Επιπλέον, θα μπορούσε να διεξαχθεί χρονική προβολή των μεταβολών. Ως προς τη μεθοδολογία, μπορούν να εξεταστούν και άλλα μοντέλα χωρικής εξάρτησης όπως το σπαρτιάτικο μοντέλο ή το μοντέλο Matérn. Τελικά, θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί διεπιστημονική προσέγγιση παραδείγματος χάριν με τη χρήση γεωφυσικών δεδομένων, τα οποία θα προσέφεραν πληροφορία για τη στρωματογραφία της περιοχής. Κατ'επιλογήν, παρουσιάζονται οι προσεγγίσεις:

- Με τη χρονική επέκταση του πεδίου σε παλαιότερες καταστάσεις, θα επιτρεπόταν η συγκριτική ερμηνεία. Αν για παράδειγμα οι τιμές κυμαίνονται τα τελευταία 10 έτη σε αυτό το εύρος, οι τιμές του δυτικού πεδίου δεν είναι σε κρίσιμη κατάσταση. Αν υπάρχει διακύμανση σε άλλο εύρος, αυτομάτως δεν ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα.
- Διερεύνηση μεταφοράς νερού με γνώση των χαρακτηριστικών του υδροφόρου σχηματισμού. Παραδείγματος χάριν, γνώση του πορώδους και αναγνώριση των διαύλων επικοινωνίας σε επίπεδο μικροκλίμακας.
- Πρόσβαση σε μετρήσεις ύψους υδροφόρου για την κατασκευή χαρτών για όλη την περιοχή της Κρήτης. Ενδεχόμενη επέκταση σε άλλους νομούς θα υποστήριζε το έργο της Γενικής Γραμματείας Υδάτων ως προς την



εποπτεία των υδροφόρων.

- Αλληλεπίδραση υπόγειου υδατικού συστήματος Μοιρών με γειτονικές λεκάνες.
- Αλληλεπίδραση υπόγειου υδατικού συστήματος Μοιρών με επιφανειακά υδατικά σώματα.
- Διεξαγωγή έρευνας με υδρογεωλογικά δεδομένα τα οποία βρίσκονται πάνω σε γεωμετρικούς τόπους που προσομοιώνουν την περιοχή μελέτης.
- Προσομοίωση άλλων πιθανών καταστάσεων του πεδίου για καλύτερη προσέγγιση και μείωση της αβεβαιότητας στην εκτίμηση του πεδίου.

# Βιβλιογραφία

- [1] V. Agou, E. Varouchakis, and D. Hristopulos. Geostatistical analysis of precipitation in the island of crete (greece) based on a sparse monitoring network. *Environmental Monitoring and Assessment*, 191, 05 2019.
- [2] V. Androulakis. Implementation of geostatistical algorithms and applications in geological media simulation. <http://purl.tuc.gr/dl/dias/34931E0A-54FE-4A5E-9AED-5DE973CC683B>, 2017.
- [3] M. Arauzo, M. Valladolid, G. García, and D. Andries. N and p behaviour in alluvial aquifers and in the soil solution of their catchment areas: How land use and the physical environment contribute to diffuse pollution. *Science of The Total Environment*, 804:150056, 2022.
- [4] M. Arauzo, M. Valladolid, and J.J. Martínez-Bastida. Spatio-temporal dynamics of nitrogen in river-alluvial aquifer systems affected by diffuse pollution from agricultural sources: Implications for the implementation of the nitrates directive. *Journal of Hydrology*, 411(1):155–168, 2011.
- [5] S. Bandyopadhyay and S. S. Rao. A test for stationarity for irregularly spaced spatial data. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 79(1):95–123, 2017.

- [6] S. Chatterjee and J. Simonoff. *Multiple Linear Regression*, chapter 1, pages 1–21. John Wiley and Sons, Ltd, 2012.
- [7] J. P. Chilès and P. Delfiner. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. John Wiley and Sons Inc., 2012.
- [8] N. Cressie. *Statistics for Spatial Data*. Wiley, 1993.
- [9] F. Curriero. On the use of non-euclidean distance measures in geostatistics. *Mathematical Geology*, 38(8):907–926, November 2006.
- [10] A. P. Dempster and M. Schatzoff. Expected significance level as a sensitivity index for test statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310):420–436, 1965.
- [11] E. Diamantopoulou, A. Pavlides, E. Steiakakis, and E. A. Varouchakis. Geostatistical analysis of groundwater data in a mining area in greece. *Hydrology*, 11(7), 2024.
- [12] Y. Dodge. *The Concise Encyclopedia of Statistics*. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [13] P. Goovaerts. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Applied geostatistics series. Oxford University Press, 1997.
- [14] B. Grasemann, D. Schneider, and A. Rogowitz. Back to normal: Direct evidence of the cretan detachment as a north-directed normal fault during the miocene. *Tectonics*, 38:3052–3069, 08 2019.
- [15] D.T. Hristopulos. *Random Fields for Spatial Data Modeling: A Primer for Scientists and Engineers*. Advances in Geographic Information Science. Springer Netherlands, 2020.

- [16] I. Karlović, K. Posavec, Oz. Larva, and T. Marković. Numerical groundwater flow and nitrate transport assessment in alluvial aquifer of varaždin region, nw croatia. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 41:101084, 2022.
- [17] M. D. Malkauthekar. Analysis of euclidean distance and manhattan distance measure in face recognition. In *Third International Conference on Computational Intelligence and Information Technology (CIIT 2013)*, pages 503–507, 2013.
- [18] D. Mulyadi and A. Biantoro. Investigation of groundwater availability and geoelectric analysis to anticipate the scarcity of clean water in urban areas. 1321(1):012037, apr 2024.
- [19] Michael J. Neton, Joachim Dorsch, Christopher D. Olson, and Steven C. Young. Architecture and directional scales of heterogeneity in alluvial-fan aquifers. *Journal of Sedimentary Research*, 64(2b):245–257, 05 1994.
- [20] G. Panagopoulos, E. Giannakakos, E. Manoutsoglou, E. Steiakakis, P. Soupios, and A. Vafidis. Definition of inferred faults using 3d geological modeling techniques: A case study in tympaki basin in crete, greece. *Bulletin of the Geological Society of Greece*, 47(2):605, January 2017.
- [21] A. Pavlides. *Development of new geostatistical methods for spatial analysis and applications in reserves estimation and quality characteristics of coal deposits*. PhD thesis, Technical University of Crete, 2016.
- [22] R. Schmitt and L. Rosa. Dams for hydropower and irrigation: Trends, challenges, and alternatives. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 199:114439, 2024.

- [23] Franklin W Schwartz and Hubao Zhang. *Fundamentals of groundwater*. John Wiley & Sons, 2024.
- [24] M. Taucare, B. Vigui r, R Figueroa, and L. Daniele. The alarming state of central chile’s groundwater resources: A paradigmatic case of a lasting overexploitation. *Science of The Total Environment*, 906:167723, 2024.
- [25] P. Theodoridou, E. Varouchakis, and G. Karatzas. Geostatistical analysis of groundwater level using non-euclidean distance metrics. 06 2016.
- [26] E. Varouchakis. Spatiotemporal geostatistical modelling of groundwater level variations at basin scale: a case study at Crete’s Mires Basin. *Hydrology Research*, 49(4):1131–1142, 08 2017.
- [27] E. Varouchakis, C. Guardiola-Albert, and G. Karatzas. Spatiotemporal geostatistical analysis of groundwater level in aquifer systems of complex hydrogeology. *Water Resources Research*, 58(3), 2022.
- [28] E. Varouchakis, P. Theodoridou, and G. Karatzas. Spatiotemporal geostatistical modeling of groundwater levels under a bayesian framework using means of physical background. *Journal of Hydrology*, 575:487–498, 2019.
- [29] E.A. Varouchakis and D.T. Hristopulos. Improvement of groundwater level prediction in sparsely gauged basins using physical laws and local geographic features as auxiliary variables. *Advances in Water Resources*, 52:34–49, 2013.
- [30] H. Wackernagel. *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

- [31] Α. Αλεξόπουλος. Γεωλογικές και υδρογεωλογικές συνθήκες της περιοχής του τοπογραφικού φύλλου "Μόχος" (Κεντροανατολική Κρήτη). <https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/1633#page/1/mode/2up>, 1990.
- [32] Ε. Ανδρεαδάκης. Διαδικτυακές σημειώσεις Υδρογεωλογίας. [https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=http%3A%2F%2Fusers.uoa.gr%2F~eandreadk%2Findex\\_files%2FHydrogeology04.pps&wdOrigin=BROWSELINK](https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=http%3A%2F%2Fusers.uoa.gr%2F~eandreadk%2Findex_files%2FHydrogeology04.pps&wdOrigin=BROWSELINK).
- [33] Ε. Βαρουχάκης. Εφαρμογή της μεθόδου των Σπαρτιάτικων Τυχαίων Πεδίων στην γεωστατιστική ανάλυση της χωρικής κατανομής περιβαλλοντικών ρύπων. <https://doi.org/10.26233/heallink.tuc.14595>, 2005.
- [34] Κ. Ζαφειρόπουλος and Ν. Μυλωνάς. Στατιστική με *SPSS*: περιέχει θεωρία πιθανοτήτων. Τζιόλας, Θεσσαλονίκη, 2017.
- [35] Μ. Κριτσωτάκης. Διαχείριση υδατικών πόρων Μεσαράς Κρήτης. <https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/20075?lang=el#page/1/mode/2up>, 2009.
- [36] Α. Παυλίδης. Σύγκριση μεθόδων υπολογισμού αποθεμάτων λιγνίτη στο ορυχείο του Αμύνταιου και ανάπτυξη δείκτη εκμεταλλευσιμότητας. <https://doi.org/10.26233/heallink.tuc.13428>, 2008.
- [37] Ειδική Γραμματεία Υδάτων Υπουργείο περιβάλλοντος και ενέργειας. Αναλυτικό Κείμενο Τεκμηρίωσης 1ης Αναθεώρησης ΣΔΛΑΠ ΥΔ Κρήτης (el 13) (Παραδοτέο 1 Μελέτης M6): Καθορισμός και καταγραφή αρμόδιων αρχών και προσδιορισμός περιοχής άσκησης των αρμοδιοτήτων τους. <http://wfdver.ypeka.gr/el/management-plans-gr/>

1revision-approved-management-plans-gr/  
approved-1revision-el13-gr/, 2017.

- [38] Χ. Φασούλας. Κινηματική και παραμόρφωση καλλυμάτων της Κεντρικής Κρήτης. <https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/3728#page/1/mode/2up>, 1995.
- [39] Δ. Χριστόπουλος. *Εφαρμοσμένη Γεωστατιστική*. Τμήμα Μηχανικών Ορυκτών Πόρων, Πολυτεχνείο Κρήτης, 2014.