



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ



Σχολή  
Μηχανικών  
Παραγωγής &  
Διοίκησης



---

Σχεδιασμός και προσομοίωση ενός  
αποκεντρωμένου συστήματος ελέγχου  
για Μονάδα Ηλεκτρόλυσης τύπου PEM

Δαπόντης Σταύρος

AM:2018010003

Επιβλέπων καθηγητής

Δημήτρης Ιψάκης

Χανιά, Ιούλιος 2024

Στους γονείς μου....

## Περίληψη

Διανύουμε μια εποχή διαρκούς αναζήτησης καθαρής ενέργειας, δηλαδή ενέργειας που να είναι όσον τον δυνατόν φιλική προς το περιβάλλον. Στόχος η αειφόρος ανάπτυξη, δημιουργώντας μία ανθρακικά ουδέτερη κοινωνία και στα πλαίσια αυτά εισάγουμε ως φορέα ενέργειας το υδρογόνο.

Το υδρογόνο αντιπροσωπεύει έναν καθαρό και ευέλικτο φορέα ενέργειας και για τον λόγο αυτό βρίσκεται στο επίκεντρο της επιστημονικής-ερευνητικής κοινότητας αλλά και της πολιτικής. Το υδρογόνο ως ενεργειακός φορέας που είναι, έχει την ικανότητα της αποθήκευσης πλεονάζουσας ισχύος από ΑΠΕ κάνοντας μετατροπή αυτού σε υδρογόνο. Ο ποιο διαδεδομένος τρόπος παραγωγής του υδρογόνου είναι η ηλεκτρόλυση του νερού μέσω μίας μονάδας ηλεκτρόλυσης αυτού. Έτσι η παρούσα διπλωματική περιστρέφεται γύρω από την διαδικασία μοντελοποίησης και σχεδιασμού ενός συστήματος ελέγχου μιας μονάδας ηλεκτρόλυσης τύπου PEM.

Αρχικά μελετάται το θεωρητικό και εννοιολογικό πλαίσιο γύρω από τους τύπους των μονάδων ηλεκτρόλυσής που υπάρχουν δίνοντας μεγαλύτερη βάση στην μονάδα ηλεκτρόλυσης τύπου PEM. Αφού αναλυθούν τα μέρη που απαρτίζουν την μονάδα τύπου PEM, ξεκινάει η διαδικασία μαθηματικής μοντελοποίησης και σχεδιασμού του συστήματος ελέγχου. Η διαδικασία του συστήματος αυτού, περιγράφεται σε ένα μη γραμμικό μοντέλο και στην συνέχεια με την βοήθεια του αναπτύγματος Taylor πραγματοποιείται γραμμικοποίηση αυτού. Σκοπός της συγκεκριμένης μοντελοποίησης είναι η δημιουργία ενός μοντέλου χώρου κατάστασης (state-space model) μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς εξόδου-εισόδου. Το μοντέλο χώρου κατάστασης χρησιμοποιείται για τον σχεδιασμό ελεγκτών ανάδρασης με σκοπό τη ρύθμιση της παραγωγής υδρογόνου μέσω του χειρισμού του ηλεκτρικού ρεύματος.

Τελικά, ελεγκτές αξιολογούνται και συγκρίνονται μεταξύ τους για την εύρεση του βέλτιστου. Μερικά σημαντικά κριτήρια της αξιολόγησης είναι: σημαντική μείωση διαταραχών γρήγορη ανταπόκριση και ελαχιστοποίηση πιθανών σφαλμάτων καθώς γίνεται αλλαγή της τιμής του ηλεκτρικού ρεύματος ή και μη. Κριτήρια αποδοτικότητας όπως ISE, IAE, ITAE και ITSE βοήθησαν προς την κατεύθυνση μιας καλύτερης επιλογής ελεγκτή. Βασικό σημείο για την εύρεση του βέλτιστου ελεγκτή είναι η προσπάθεια να κρατηθεί η χρήση του ρεύματος χαμηλή (επομένως και χαμηλής ισχύος) με ταυτόχρονη υψηλή απόδοση (παραγωγή  $H_2$  ανά ισχύ).

## ABSTRACT

We are living in an era of constant search for clean energy, i.e. energy that is as environmentally friendly as possible. The aim is sustainable development, creating a carbon-neutral society, and in this context, we are introducing hydrogen as an energy carrier.

Hydrogen represents a clean and, at the same time, flexible energy carrier and for this reason it is at the centre of the scientific-research community and of politics. Hydrogen, as the energy carrier that it is, has the ability to store surplus power from renewable energy sources by converting it into hydrogen. The most widespread way of producing hydrogen is the electrolysis of water through an electrolysis plant. Thus, this thesis revolves around the process of modeling and designing a control system of a PEM type electrolysis plant.

First, the theoretical and conceptual framework around the types of electrolysis units that exist is studied, with a greater emphasis on the PEM type electrolysis unit. Once the parts that make up the PEM type unit have been analysed, the process of mathematical modelling and design of the control system is started. The process of this system is described in a nonlinear model and then with the help of Taylor expansion, linearization of this is carried out. The purpose of this modelling is to create a state-space model together with the corresponding output-input transfer functions. The state-space model is used to design feedback controllers for the purpose of regulating hydrogen production by manipulating the electric current.

Finally, controllers are evaluated and compared with each other to find the optimal one. Some important evaluation criteria are: significant reduction of disturbances fast response and minimization of potential errors as the value of the electric current is changed or not. Efficiency criteria such as ISE, IAE, ITAE and ITSE helped towards a better controller selection. A key point in finding the optimal controller is to try to keep the current usage low (hence low power) while maintaining high efficiency ( $H_2$  generation per power).

## **Ευχαριστίες**

Στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών, της σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης και ακαδημαϊκού έτους 2023-2024, πραγματοποιήθηκε η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Έτσι με την εκπόνηση αυτής, κλείνει ο κύκλος των προπτυχιακών σπουδών μου και για αυτό με την σειρά μου επιθυμώ να ευχαριστήσω:

Τον επίκουρο καθηγητή και επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, κ. Ιψάκη Δημήτριο, δίνοντάς μου πολύτιμες πληροφορίες και όντας πάντα πρόθυμος να με συμβουλέψει και να με βοηθήσει σε τυχόν απορίες μου κατά την διάρκεια της συγγραφή αυτής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, που ήταν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια των προπτυχιακών σπουδών μου , όπως και τους φίλους μου για την υποστήριξη τους.

# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	2
ABSTRACT .....	3
Κεφάλαιο 1 <sup>ο</sup> : Εισαγωγή στην λειτουργία της ηλεκτρόλυσης .....	7
1.1 Ιστορία της μονάδας ηλεκτρόλυσης και ο ρόλος της στην παραγωγή H <sub>2</sub> .....	7
1.1.1 Ιστορικά γεγονότα .....	7
1.1.2 Σημασία της παραγωγής υδρογόνου και το μέλλον .....	9
1.2 Τύποι μονάδων ηλεκτρόλυσης .....	10
1.2.1 Συσκευή ηλεκτρόλυσης και τρόπος λειτουργίας .....	10
1.2.2 Αλκαλικού τύπου ( <i>alkaline electrolyzers</i> ).....	10
1.2.3 Κυψέλη καυσίμου τύπου PEM (Proton exchange membrane water electrolysis) ..	11
1.2.4 Σύγκριση των δύο τεχνολογιών.....	12
Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> : Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου για το σύστημα της ηλεκτρόλυσης .....	13
2.1 Εισαγωγή κεφαλαίου .....	13
2.1.1 Αναλυτική περιγραφή του μοντέλου .....	13
2.2 Μαθηματικό μοντέλο στο πεδίο του χρόνου (διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης) .....	15
2.2.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	15
2.2.1.1 Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο .....	16
2.2.1.2 Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο.....	17
2.2.1.3 Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο .....	19
2.2.1.4 Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην Κάθοδο .....	20
2.3 Γραμμικοποίηση δυναμικών συστημάτων .....	21
2.3.1 Γραμμικοποίηση μοντέλου ηλεκτρόλυσης .....	22
2.4 Μετατροπή του συστήματος ηλεκτρόλυσης στο πεδίο του χώρου κατάστασης.....	24
Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> : Σύγκριση προσομοιώσεων για το μη-γραμμικό, γραμμικό και μοντέλου χώρου κατάστασης .....	30
3.1 Εισαγωγή κεφαλαίου .....	30
3.2 Προσομοίωση των μοντέλων με ένταση ρεύματος ίσο με 150 A.....	30
3.4 Προσομοίωση των μοντέλων με -50% της έντασης ρεύματος του βασικού σεναρίου. ....	37
3.5 Συμπεράσματα της σύγκρισης .....	40
Κεφάλαιο 4 <sup>ο</sup> : Ανάπτυξη ελεγκτών στο σύστημα ηλεκτρόλυσης νερού.....	42
4.1 Εισαγωγή κεφαλαίου .....	42
4.1.1 Συστήματα με ανατροφοδότηση. ....	42
4.1.2 Ο ελεγκτής P .....	43

4.1.3 Ο ελεγκτής PI .....	43
4.1.4 Ο ελεγκτής PID.....	44
4.2 Γεωμετρικός τόπος ριζών .....	45
4.3 Ανάπτυξη ελεγκτών με την μέθοδο Ziegler-Nichols .....	49
4.4 Ανάπτυξη ελεγκτών με την μέθοδο Tyreus-Luyben.....	50
4.5 Προσομοίωση συστήματος κλειστού βρόχου με την βοήθεια των ελεγκτών ανάδρασης .....	51
4.5.1 Εισαγωγικά στοιχεία .....	51
4.5.2 Προσομοίωση με την βοήθεια του P ελεγκτή Ziegler-Nichols.....	51
4.5.3 Προσομοίωση με την βοήθεια του PI ελεγκτή Ziegler-Nichols.....	54
4.5.4 Προσομοίωση με την βοήθεια του PID ελεγκτή Ziegler-Nichols .....	55
4.5.5 Σύγκριση ελεγκτών της μεθόδου Ziegler Nichols.....	56
4.5.6 Προσομοίωση με την βοήθεια του PI ελεγκτή της μεθόδου Tyreus-Luyben .....	59
4.5.7 Προσομοίωση με την βοήθεια του PID ελεγκτή της μεθόδου Tyreus-Luyben.....	61
4.5.8 Σύγκριση ελεγκτών της μεθόδου Tyreus Luyben .....	62
4.6 Σενάριο εναλλαγής έντασης ρεύματος.....	64
Κεφάλαιο 5° :Συμπεράσματα και επόμενα βήματα. ....	69
Βιβλιογραφία .....	71
Παράρτημα Α.....	73

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : Εισαγωγή στην λειτουργία της ηλεκτρόλυσης

### 1.1 Ιστορία της μονάδας ηλεκτρόλυσης και ο ρόλος της στην παραγωγή $H_2$

Στην συγκεκριμένη ενότητα αναγράφεται η εξέλιξη της ηλεκτρόλυσης του νερού από την εποχή της ανακάλυψης της μέχρι σήμερα. Επίσης αναφέρονται διάφορα παραδείγματα χρήσης του παραγόμενου υδρογόνου και λόγοι σημαντικότητας του στο μέλλον, ως φορέα ενέργειας και καύσιμο.

Παρακάτω παρατίθενται κάποια σημαντικά ιστορικά γεγονότα εξέλιξης της ηλεκτρόλυσης του νερού (και γενικά της ανακάλυψης του υδρογόνου) με χρονολογική σειρά:

#### 1.1.1 Ιστορικά γεγονότα

Η Αρχή έγινε με την ανακάλυψη του υδρογόνου από τον Άγγλο φυσικό Henry Cavendish το μακρινό 1766. Ο Cavendish πειραματιζόταν με υδράργυρο και με διάφορα οξέα, τα οποία ένωσε μεταξύ τους. Η χημική αντίδραση που προέκυψε, είχε ως συνέπεια την εμφάνιση μικρών φυσαλίδων αερίου και στην περίπτωση μας φυσαλίδες υδρογόνου. Ο Cavendish κατάφερε να περιγράψει εξαιρετικά τις ιδιότητες του υδρογόνου, αλλά η υπόθεσή του, ότι το υδρογόνο είναι συστατικό του υδραργύρου ήταν λανθασμένη.



**Εικόνα 1.1.** Henry Cavendish

Πηγή: [https://en.wikipedia.org/wiki/Henry\\_Cavendish](https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish)



Στην συνέχεια, το 1787 ο Γάλλος χημικός Antoine Lavoisier πραγματοποίησε μια λεπτομερέστερη ανάλυση του υδρογόνου στην προσπάθειά του να δείξει ότι σε κάθε χημική αντίδραση ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας (δεν παράγεται ούτε χάνεται μάζα). Για να το αποδείξει, θέρμανε νερό σε ένα κλειστό δοχείο κι άφησε τον ατμό να υγροποιηθεί αλλού. Έτσι διαπίστωσε ότι η μάζα του υγροποιημένου ατμού ήταν λίγο μικρότερη από την αρχική και η εκλιπούσα μάζα αντιστοιχούσε στο αέριο που δημιουργήθηκε. Με αυτόν τον τρόπο απέδειξε την θεωρία της αρχής διατήρησής της μάζας και παράλληλα ανακάλυψε ένα νέο αέριο. Έπειτα, εξέτασε περαιτέρω το συγκεκριμένο αέριο καίγοντάς το. Αρχικά το ονόμασε «εύφλεκτο αέρα», επειδή ήταν εύφλεκτο. Σε επόμενα πειράματα, κατάφερε να παράγει νερό με την βοήθεια του συγκεκριμένου αερίου και του έδωσε ένα δεύτερο όνομα που έχει μείνει μέχρι και σήμερα: hydro-gene (υδρογόνο).



**Εικόνα 1.2.** Antoine Lavoisier

Την χρονιά 1800, ο Alessandro Volta δημιούργησε το βολταϊκό σωρό η αλλιώς μπαταρία του βόλτα. Η μπαταρία του Volta θεωρείται ως το πρώτο ηλεκτροχημικό κελί. Αποτελείται από ένα ηλεκτρόδιο, κράμα ψευδαργύρου και ένα ηλεκτρόδιο χαλκού. Την ίδια χρονιά οι Nicholson & Carlisle χρησιμοποίησαν την εφεύρεση του Volta και ανακάλυψαν την ηλεκτρολυτική διάσπαση του νερού, διασπώντας το σε υδρογόνο και οξυγόνο.(Kreuter & Hofmann, 1998).



**Εικόνα 1.3.** Nicholson & Carlisle, Πηγή: science photo library

Στα τέλη του 19ου αιώνα και συγκεκριμένα το 1890, ο Charles Renard κατασκεύασε μια μηχανή ηλεκτρόλυσης νερού με σκοπό την παραγωγή υδρογόνου για τα γαλλικά στρατιωτικά αερόπλοια.

Η περαιτέρω ανάπτυξη της συγκεκριμένης μηχανής έγινε τον 20ο αιώνα. Τότε δημιουργήθηκαν διάφοροι εμπορικοί τύποι ηλεκτρολυτών αλκαλικού νερού για την παραγωγή του υδρογόνου, το οποίο ήταν απαραίτητο για τη δημιουργία λιπασμάτων αμμωνίας με τη χρήση υδροηλεκτρικής ενέργειας χαμηλού κόστους.

Στα τέλη του 20ού αιώνα, η ηλεκτρόλυση νερού χρησιμοποιήθηκε κυρίως σε εξειδικευμένες εφαρμογές, καθώς η αναμόρφωση μεθανίου με ατμό την αντικατέστησε σταδιακά λόγω της οικονομικότερης μεθόδου παραγωγής υδρογόνου.

Στο δεύτερο μισό της δεκαετίας του 1960, η General Electric, ανέπτυξε ηλεκτρόλυση με μεμβράνη ανταλλαγής πρωτονίων χρησιμοποιώντας ένα όξινο φθοριούχο ιονομερές ως στερεό ηλεκτρολύτη. Ωστόσο, η τεχνολογία χρησιμοποιήθηκε ευρέως μόνο στους στρατιωτικούς, διαστημικούς και εργαστηριακούς τομείς τις επόμενες δεκαετίες, λόγω ακριβού κόστους υλικών. Περίπου την ίδια εποχή, το Εθνικό Εργαστήριο Brookhaven και η General Electric άρχισαν να αναπτύσσουν την ηλεκτρόλυση υψηλής θερμοκρασίας με χρήση κυψελών στερεού οξειδίου. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1980, Στη Γερμανία η Dornier χρησιμοποιούσε αυτή την τεχνολογία στο πλαίσιο του προγράμματος HOT ELLY. Ωστόσο, παρ' όλες τις τεχνικές εξελίξεις, οι μέθοδοι αυτοί δεν κατάφεραν να εμπορευματοποιηθούν εκείνη την εποχή.

Τελικά μετά την παραγωγή και την αποθήκευση του υδρογόνου ποιες είναι οι χρήσεις του στην καθημερινότητα, στην επιστημονική κοινότητα και γενικά στην εξέλιξη της ανθρωπότητας;

### **1.1.2 Σημασία της παραγωγής υδρογόνου και το μέλλον**

Πλέον, στον 21<sup>ο</sup> αιώνα, το υδρογόνο θεωρείται πράσινος φορέας ενέργειας για ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, όπως η αιολική και η ηλιακή ενέργεια, και για την τροφοδοσία κυψελών καυσίμου και μόλις τα τελευταία χρόνια αυξήθηκε σημαντικά το παγκόσμιο ενδιαφέρον για την ηλεκτρόλυση του νερού και υιοθετήθηκαν επιθετικά εθνικά προγράμματα με βάση αυτό (από την δεκαετία του 1990 κι έπειτα).

Για παράδειγμα στις Ηνωμένες Πολιτείες υδρογόνο, καταναλώνεται σε μεγαλύτερο βαθμό στην βιομηχανία διύλισης πετρελαίου με σκοπό την μείωση της περιεκτικότητας των καυσίμων σε θείο αλλά και της διάσπασης υδρογονανθράκων (hydrocracking). Επίσης χρήση του υδρογόνου γίνεται και από τους παραγωγούς βιοκαυσίμων για την παραγωγή υδρογονοκατεργασμένου φυτικού ελαίου (HVO) για χρήση ως ανανεώσιμου diesel.

Ενδιαφέρον έχει και ο τρόπος που μπορεί να παράγει ηλεκτρική ενέργεια με την βοήθεια του οξυγόνου. Το υδρογόνο αντιδρά με το οξυγόνο σε μια ηλεκτροχημική κυψέλη και παράγει ηλεκτρική ενέργεια, νερό και μικρές ποσότητες θερμότητας. Έτσι, κυψέλες υδρογόνου χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη της ενέργειας σε διαστημόπλοια και στην γη. Στην γη όπως, υποστήριξη σε ηλεκτρικό σταθμό (υποστήριξη ηλεκτρικών γεννητριών), σε μέσα μεταφοράς όπως αυτοκίνητα ακόμα και

να δημιουργηθούν αποθήκες ενέργειας με βάση το υδρογόνο, χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές που είναι υπό ανάπτυξη.

Λόγω του θετικού αντίκτυπου που έχει το υδρογόνο στον πλανήτη σε σχέση με άλλα ρυπογόνα καύσιμα όπως το πετρέλαιο, αναμένεται πως θα είναι το μέλλον στον τρόπο παραγωγής ενέργειας και πως η ηλεκτρόλυση νερού προβλέπεται να μειώσει σημαντικά τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου (GHG) και να τις μηδενίσει σχεδόν μέχρι το 2050.

## 1.2 Τύποι μονάδων ηλεκτρόλυσης

Στην ενότητα 1.2 αναλύονται οι τύποι ηλεκτρόλυσης του νερού και ο τρόπος λειτουργίας του κάθε τύπου. Επίσης εξηγούνται τα θετικά και τα αρνητικά της κάθε μονάδας ηλεκτρόλυσης σε σχέση με την ποσότητα παραγωγής του υδρογόνου, τον χρόνο παραγωγής, το κόστος κατασκευής του κάθε μοντέλου αλλά και το κόστος εργασίας κλπ.

### 1.2.1 Συσκευή ηλεκτρόλυσης και τρόπος λειτουργίας

Όπως έχει προαναφερθεί, η ηλεκτρόλυση του νερού είναι η διάσπασή του σε υδρογόνο και οξυγόνο με την βοήθεια/παροχή ηλεκτρικής ενέργειας.

Η συσκευή περιέχει ηλεκτροχημικά κελία τα οποία αποτελούνται από ηλεκτρόδια της ανόδου και της καθόδου και από έναν ηλεκτρολύτη που βοηθά στην μεταφορά των ιόντων. Τα ηλεκτρόδια των κελιών έχουν αντίσταση στην διάβρωση, καλή ηλεκτρική αγωγιμότητα και υψηλές καταλυτικές ιδιότητες με στόχο την όσον τον δυνατόν καλύτερη και ομαλότερη διεργασία της ηλεκτρόλυσης.

Τώρα η λειτουργία της συσκευής γίνεται ως εξής: Στην κάθοδο παρατηρείται αναγωγή των πρωτονίων σε υδρογόνο, ενώ στην άνοδο παράλληλα με την οξείδωση του νερού προς οξυγόνο και πρωτόνια παρατηρείται ελευθέρωση δύο ηλεκτρονίων.

Εξηγώντας και σε χημικό επίπεδο, η συνολική αντίδραση της ηλεκτρόλυσης είναι:



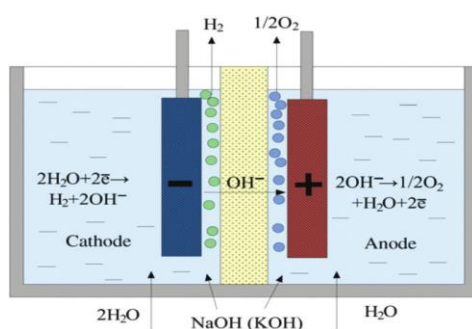
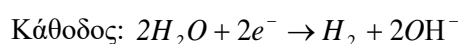
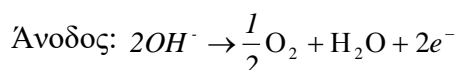
Οι τύποι ηλεκτρόλυσης κατηγοριοποιούνται βάση του τύπου του ηλεκτρολύτη τους και αυτοί που είναι εμπορικά διαθέσιμοι είναι δύο ειδών.

- i) Αλκαλικού τύπου
- ii) Τύπου πολυμερικής μεμβράνης ανταλλαγής ιόντων

### 1.2.2 Αλκαλικού τύπου (*alkaline electrolyzers*)

Η ηλεκτρόλυση αλκαλικού νερού είναι η παλαιότερη, η βιομηχανικά πιο προηγμένη και η φθηνότερη τεχνολογία ηλεκτρόλυσης νερού. Σε αυτήν την τεχνολογία χρησιμοποιούνται υλικά όπως κοβάλτιο, νικέλιο και σίδηρος για το ηλεκτρόδιο της ανόδου και για το ηλεκτρόδιο της καθόδου, νικέλιο, πλατίνα, πλατίνα-γραφίτης. Από την άλλη η ηλεκτρολύτης αλκαλικού νερού χαρακτηρίζονται από ελαφρώς υψηλότερη κατανάλωση ενέργειας.

Γενικά η χημική αντίδραση της διαδικασίας γίνεται ως εξής: Αρχικά δύο μόρια νερού ανάγονται σε ένα μόριο υδρογόνου και δύο ιόντα υδροξυλίου στην κάθοδο. Στην συνέχεια Το υδρογόνο διαφεύγει από την επιφάνεια της καθόδου σε αέρια μορφή και τα ιόντα υδροξυλίου μεταφέρονται υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ καθόδου και ανόδου, όπου διαχωρίζονται σε  $\frac{1}{2}$  μόριο οξυγόνου και ένα μόριο νερού. Στου αλκαλικού τύπου το διάλυμα είναι συνήθως καυστικού καλίου(KOH) και χρησιμοποιείται για την μεταφορά των σχηματιζόμενων υδροξυλίων. Η χημική αντίδραση (με ηλεκτρολύτη διαλύματος KOH) φαίνεται παρακάτω στην εικόνα και στην εξίσωση:



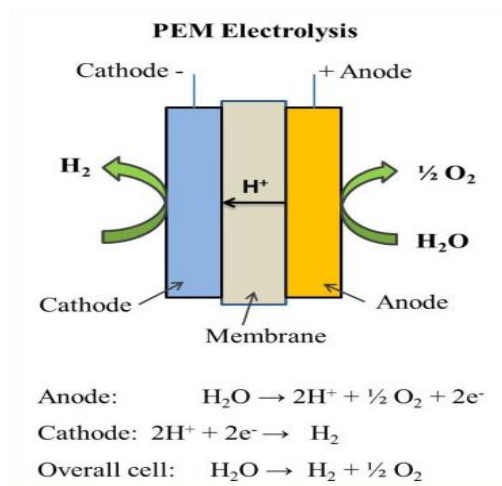
**Εικόνα 1.4.** Ηλεκτρόλυση αλκαλικού τύπου με διάλυμα KOH

Πηγή: research gate

### 1.2.3 Κυψέλη καυσίμου τύπου PEM (Proton exchange membrane water electrolysis)

Η πρώτη ηλεκτρόλυση νερού PEM δημιουργήθηκε από τον Grubb στις αρχές της δεκαετίας του πενήντα. Η συγκεκριμένη τεχνολογία αναπτύχθηκε για να ξεπεράσει τα μειονεκτήματα της ηλεκτρόλυσης νερού αλκαλικού τύπου.

Στην ηλεκτρόλυση νερού PEM, και συγκεκριμένα για την κατασκευή της ανόδου χρησιμοποιούνται υλικά όπως ιρίδιο, ρουθίνιο, πλατίνα και γραφίτης, σε διάφορους συνδυασμούς ενώ για της καθόδου πλατίνα και πλατίνα-γραφίτης. Η τεχνολογία αυτή λειτουργεί με τον εξής τρόπο: το νερό διασπάται ηλεκτροχημικά σε υδρογόνο και οξυγόνο στα αντίστοιχα ηλεκτρόδια, το υδρογόνο στην κάθοδο και οξυγόνο στην άνοδο. Η ηλεκτρόλυση νερού PEM πραγματοποιείται με την άντληση νερού στην άνοδο, όπου διαχωρίζεται σε πρωτόνια, ηλεκτρόνια και οξυγόνο. Στην συνέχεια γίνεται μεταφορά των πρωτονίων μέσω της μεμβράνης η οποία τα οδηγεί στην πλευρά της καθόδου. Ταυτόχρονα, τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από την άνοδο μέσω του εξωτερικού κυκλώματος τροφοδοσίας, το οποίο παρέχει την (τάση κυψέλης) για την αντίδραση. Τέλος στην πλευρά της καθόδου γίνεται επανασύνδεση των πρωτονίων και των ηλεκτρονίων με αποτέλεσμα την παραγωγή υδρογόνου. Ο μηχανισμός αυτής της διαδικασίας φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, μαζί και με τις αντίστοιχες χημικές εξισώσεις.



**Εικόνα 1.5.** PEM ηλεκτρόλυση

Πηγή: Hydrogen production by PEM water electrolysis-review S.Shiva Kumar, V.Himabindu

#### 1.2.4 Σύγκριση των δύο τεχνολογιών

Η συσκευή ηλεκτρόλυσης τύπου PEM χαρακτηρίζεται από σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με του αλκαλικού τύπου και προτείνεται περισσότερο για εκτεταμένη χρήση. Λόγο της χρήσης πολυμερικής μεμβράνης ιονομερών φθοροανθράκων τύπου Nafion, επιτρέπει την μεταφορά πρωτονίων. Επίσης ενώ έχουν ίδιες περίπου αποδόσεις της τάξεως 60-90%, η PEM διακρίνεται για τις υψηλότερες πυκνότητες ρεύματος. Ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της PEM σε σχέση με του αλκαλικού τύπου είναι η αποφυγή χρήσης υγρού ηλεκτρολύτη, ο οποίος απαιτεί συνεχή επανακυκλοφορία.

Τέλος η Αλκαλικού τύπου υπερισχύει της PEM στο κόστος, δηλαδή λόγω της ευχέρειας παραγωγής υδρογόνου σε υψηλότερες πιέσεις, έχει ως αποτέλεσμα την δυνατότητα παραγωγής υδρογόνου σε λιγότερο κόστος.

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>: Ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου για το σύστημα της ηλεκτρόλυσης

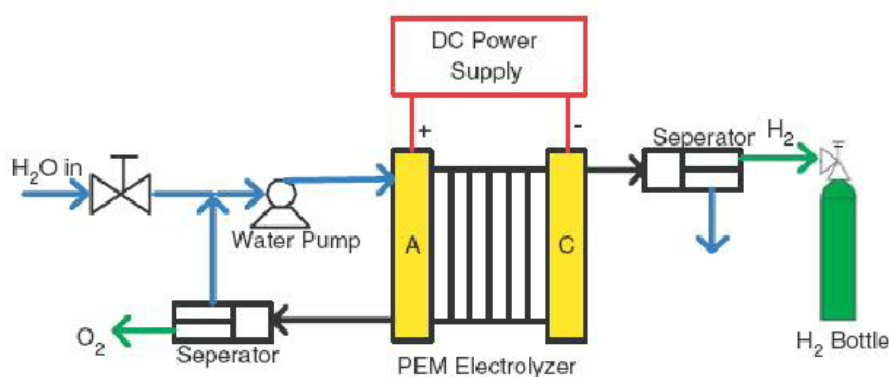
### 2.1 Εισαγωγή κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό λαμβάνει χώρα η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου, διαφορικές εξισώσεις σε μη γραμμική σε γραμμικοποιημένη αλλά και σε μορφή χώρου κατάστασης. Σκοπός η προσομοίωση στο περιβάλλον του matlab.

#### 2.1.1 Αναλυτική περιγραφή του μοντέλου

Οι μονάδες ηλεκτρόλυσης (electrolyzers) είναι συσκευές για την παραγωγή καθαρού υδρογόνου και οξυγόνου. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κάλυψη των απαιτήσεων υδρογόνου και οξυγόνου διαφόρων εφαρμογών όπως πρατήρια καυσίμων και βιομηχανικές εφαρμογές, αλλά και συστήματα ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Αν και παράγουν και τα δύο  $H_2$  και  $O_2$  με διάσπαση του νερού, λίγες εφαρμογές χρησιμοποιούν και τα δύο προϊόντα.

Ένας electrolyzer πρέπει να διαθέτει, στοιβάδες κυψελών, αντλία νερού, τροφοδοσία συνεχούς ρεύματος και διαχωριστές νερού-αερίου(εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.1 PEM Electrolyzer

Πηγή: H. Görgün / International Journal of Hydrogen Energy  
31 (2006) 29 – 38

Το μοντέλο που θα ασχοληθούμε είναι ο PEM Electrolyzer. Για να αναλυθεί περαιτέρω, είναι καλό να αναφερθούν τα 4 βασικά στοιχεία στα οποία χωρίζεται.

Αυτά είναι: Η άνοδος, η Κάθοδος, η μεμβράνη του μοντέλου και η βοηθητική τάση.

Επίσης έχουμε και την βοηθητική αποθήκευση η οποία δείχνει την δυναμική αποθήκευση της παραγόμενης ποσότητας υδρογόνου και οξυγόνου σε φιάλες, έχοντας υπόψη την αρχική στάθμη του υδρογόνου σε αυτή και την πίεση του. Η αναλυτική μαθηματική περιγραφή των στοιχείων αυτών για την δημιουργία των απαραίτητων εξισώσεων θα αναλυθεί στην ενότητα 2.2. Η μονάδα μας, δέχεται σαν είσοδο το ρεύμα και το νερό και σαν έξοδο το παραγόμενο υδρογόνο και οξυγόνο. Επίσης στην παρών εργασία θεωρούμε ότι οι διαταραχές είναι αμελητέες, δηλαδή δεν υπάρχουν (π.χ. η θερμοκρασία). Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο φαίνονται στον πίνακα 2.1 (θα εξηγηθούν αναλυτικά στην ενότητα 2.2). Στον επόμενο πίνακα(πίνακας 2.2) φαίνονται τα δεδομένα εισόδου (σταθερές τιμές) που θα χρησιμοποιηθούν καθ' όλη την διάρκεια της μελέτης.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η αρχική μελέτη θα γίνει με σταθερή ένταση ρεύματος στα 150 A. Ενώ στην συνέχεια θα αλλάζει η ένταση για λόγους καλύτερης κατανόησης και σύγκρισης της διαδικασίας.

**Πίνακας 2.1:** Παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο:

Παράμετροι	Έννοιες Παραμέτρων και μεταβλητών
A	Εμβαδόν κελιού $m^2$
$\alpha_{H_2O}$	Ενεργότητα νερού μεταξύ ανόδου και ηλεκτρολύτη
$C_{w,a}$	Συγκέντρωση νερού στην ανοδική επιφάνεια της μεμβράνης, $mol/m^3$
$C_{w,c}$	Συγκέντρωση νερού στην καθοδική επιφάνεια της μεμβράνης, $mol/m^3$
$D_w$	Συντελεστής διάχυσης νερού μέσω της μεμβράνης
E	Συνολικό εφαρμοζόμενο δυναμικό κυψέλης, V
$E_0$	Δυναμικό Nernst, V
F	Σταθερά Faraday, 96,485 C/mol
I	Ένταση ρεύματος, A
I	Πυκνότητα ρεύματος, $A/m^2$
$i_0$	Πυκνότητα ρεύματος ανταλλαγής, $A/m^2$
$M_{H_2O}$	Μοριακό βάρος του νερού, g
N	Αριθμός κελιών
$n_d$	Συντελεστής ηλεκτροωσμωτικής αντίστασης
$p_{H_2O}$	Μερική πίεση του νερού στην άνοδο, Pa
$p_{H_2}$	Μερική πίεση υδρογόνου, Pa
$p_{O_2}$	Μερική πίεση οξυγόνου, Pa
R	Παγκόσμια σταθερά αερίου, 8,314 J/mol K
$R_{ohm}$	Ωμική αντίσταση, $\Omega$
$T_{el}$	Θερμοκρασία κελιού, $^{\circ}C$
$t_m$	Πάχος μεμβράνης, m
$V_{act}$	Πόλωση ενεργοποίησης, V
$V_{ohm}$	Ωμική πόλωση, V
z	Συντελεστής συμπίεστότητας του υδρογόνου
a	Καθαρή ροή νερού ανά πρωτόνιο (Net water flux per proton)

## 2.2 Μαθηματικό μοντέλο στο πεδίο του χρόνου (διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης)

### 2.2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Στην ενότητα 2.2 θα συνεχίσει η ανάλυση του μοντέλου σε μαθηματικό επίπεδο. Όλα τα παραπάνω θα μας βοηθήσουν στην υλοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης και ταυτόχρονα στην ανάπτυξη τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες περιγράφουν ακριβώς το μοντέλο που αναλύουμε και με αυτές θα πορευτούμε στην συνέχεια. Τελικά θα καταλήξουμε σε τέσσερις μη γραμμικές εξισώσεις :

1. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο
2. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο
3. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο
4. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο

Έπειτα, θα γίνει η πρώτη προσομοίωση του συστήματος με σκοπό να δούμε τις μεταβολές των παραγόμενων αερίων συνάρτηση του χρόνου σε συγκεκριμένη ένταση ρεύματος. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι το παρόν κεφάλαιο αφορά την ανάλυση ενός συστήματος ανοιχτού βρόχου, δηλαδή ενός συστήματος στο οποίο δεν υπάρχει ελεγκτής.

**Πίνακας 2.2:** Δεδομένα εισόδου

Σύμβολο	Τιμή
R	$8.314 \frac{\text{m}^3\text{Pa}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
$p_{a0}$	101.3e3 Pa
$T_{el}$	300 K
$V_a$	1e0 m <sup>3</sup>
$F_{H_2O_{ai}}$	50 mol/s
N	20 cells
I	150 A
F	96485 C/mol
$n_f$	0.99 faraday efficiency
$i_{area}$	I/A A/m <sup>2</sup>
$M_{H_2O}$	18 gr/mol
A	50e-4 m <sup>2</sup>



### 2.2.1.1 Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο

Στο ηλεκτρόδιο της ανόδου λαμβάνει χώρα η οξείδωση. Ουσιαστικά το σύστημα της ανόδου υπολογίζει τις δυναμικές ροές του οξυγόνου και του νερού της ανόδου και παράλληλα υπολογίζει τις μερικές πιέσεις αυτών.

Η αρχή θα γίνει με την ανάλυση των δυναμικών ροών του μοντέλου της ανόδου, οι οποίες εξηγούνται μαθηματικά παρακάτω:

$$\dot{N}_{O_2} = \frac{dN_{O_2}}{dt} = F_{O_{2ai}} - F_{O_{2ao}} + O_{2g} \quad (2.1)$$

$$\dot{N}_{H_2Oa} = \frac{dN_{H_2Oa}}{dt} = F_{H_2Oai} - F_{H_2Oao} - \frac{n_F \cdot n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_a} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d} \quad (2.2)$$

Όπου,  $F_{O_{2ai}}$ ,  $F_{H_2O_{ai}}$ ,  $F_{O_{2ao}}$ ,  $F_{H_2O_{ao}}$  (mol/s) είναι η μοριακές ροές οξυγόνου και νερού εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι το  $F_{O_{2ai}}$  είναι μηδέν λόγω του νερού που είναι η μοναδική συγκέντρωση στην είσοδο, δηλαδή δεν υπάρχει συγκέντρωση οξυγόνου στην είσοδο του συστήματος. Αυτός ο όρος γράφεται για να δείξει τη γενική δυναμική του πλήρους ισοζυγίου. Επίσης τα  $F_{H_2O_{eod}}$ ,  $F_{H_2O_d}$  είναι οι ηλεκτρο-ωσμικές ροές αντίστασης και διάχυσης οι οποίες είναι οι κύριες ροές νερού που διασχίζουν την μεμβράνη (από την άνοδο προς την κάθοδο).

Ισχύει ότι :

$$F_{O_{2ai}} = C_{O_{2ai}} \cdot Q_{total} \quad (2.3)$$

$$F_{O_{2ao}} = C_{O_{2ao}} \cdot Q_{total} \quad (2.4)$$

$$Q_{total} = \frac{(N_{O_2} + N_{H_2Oa} + N_{H_2} + N_{H_2Oa}) \cdot R \cdot T_{el}}{P_{a0}} \quad (2.5)$$

Όπου  $C_{O_{2ao}}$  και  $C_{O_{2ai}}$  είναι οι συγκεντρώσεις του οξυγόνου στην άνοδο και  $Q_{total}$  και είναι η ογκομετρική ροή στην άνοδο και την κάθοδο. Θεωρείται παραδοχή ότι, η ογκομετρική ροή είναι ίδια στην άνοδο και την κάθοδο. Η αρχική πίεση λειτουργίας του συστήματος  $P_{a0}$  είναι 101300 Pa.

Οι μερικές πιέσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$p_{O_2} = \frac{N_{O_2} \cdot R \cdot T_{el}}{V_a}$$

$$p_{H_2Oa} = \frac{N_{H_2Oa} \cdot R \cdot T_{el}}{V_a}$$

Έτσι η συνολική πίεση στην άνοδο είναι :

$$P_a = \frac{N_{O_2} \cdot R \cdot T_{el}}{V_a} + \frac{N_{H_2Oa} \cdot R \cdot T_{el}}{V_a} = p_{O_2} + p_{H_2Oa} \quad (2.6)$$

Ο ρυθμός παραγωγής οξυγόνου στην άνοδο υπολογίζεται από την εξής εξίσωση:

$$O_{2g} = \frac{n \cdot I}{4 \cdot F} \cdot n_F \quad (2.7)$$

Όπου  $n_F$  ονομάζεται απόδοση Faraday.

Η απόδοση Faraday είναι συνέπεια ενός εσωτερικού ρεύματος (internal current) το οποίο δημιουργείται από την διαδρομή του οξυγόνου από την άνοδο στην κάθοδο είτε του υδρογόνου από την κάθοδο στην άνοδο. Γενικά όλη αυτή η απόδοση θεωρείται ότι είναι της τάξεως του 90 και άνω.

$$n_F = \frac{i - i_{Loss}}{i} \quad (2.8)$$

Όπου  $i_{Loss}$  είναι το ρεύμα και η απώλεια του υδρογόνου που θα μπορούσε να δημιουργήθηκε από την μεταφορά του οξυγόνου από την άνοδο στην κάθοδο ή από την μεταφορά του υδρογόνου από την κάθοδο στην άνοδο. Κατά κανόνα τιμή του είναι μικρότερη του 1% από το συνολικό εσωτερικό ρεύμα.

Συνοψίζοντας αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1)-(2.8) στην (2.1) και με όγκο ανόδου  $V_a = 1 \text{ m}^3$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{O_2}}{dt} &= V_a \cdot \frac{dC_{O_2}}{dt} = F_{O_{2ai}} - F_{O_{2ao}} + O_{2g} = \\ &= C_{O_{2ai}} \cdot Q_{total} - C_{O_{2ao}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{4 \cdot F} \cdot n_F \\ &= -C_{O_{2ao}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{4 \cdot F} \cdot n_F \leftrightarrow \\ \frac{dC_{O_2}}{dt} &= \frac{1}{V_a} \cdot (-C_{O_{2ao}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{4 \cdot F} \cdot n_F) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Όπου  $\frac{dC_{O_2}}{dt}$  ο ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο.

### 2.2.1.2 Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο.

Στην συνέχεια θα βρεθεί ο τύπος του ρυθμού συγκέντρωσης νερού στην άνοδο.

$$\dot{N}_{H_2Oa} = \frac{dN_{H_2Oa}}{dt} = F_{H_2O_{ai}} - F_{H_2O_{ao}} - \frac{n_F \cdot n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_a} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d}$$

Από την (2.2) έχουμε 5 μεταβλητές: Αρχικά θεωρούμε τον ρυθμό του νερού στην άνοδο ( $F_{H_2O_{ai}}$ ) σταθερό και ίσο με 50 mol/s.

Ο Ρυθμός παραγωγής του υδρογόνου που βρίσκεται στην κάθοδο είναι :  $-\frac{n_F \cdot n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_a}$

Τώρα η μοριακή ροή του νερού υπολογίζεται:

$$F_{H_2O_{ao}} = C_{H_2O_{ao}} \cdot Q_{total} \quad (2.10)$$

Όπου  $C_{H_2O_{ao}}$  είναι οι συγκεντρώσεις των μοριακών ροών του νερού και

Οι ηλεκτρο-ωσμικές ροές αντίστασης και διάχυσης υπολογίζονται από τους τους εξής τύπους:

$$F_{H_2O_{eod}} = n_d \cdot \frac{i}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n \quad (2.11)$$

$$\text{με } i = \frac{I}{A} \quad \eta \quad (2.11) \text{ γίνεται :}$$

$$F_{H_2O_{eod}} = n_d \cdot \frac{A}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n \Leftrightarrow F_{H_2O_{eod}} = n_d \cdot \frac{I}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot n$$

Όπου  $M_{H_2O}$  είναι το μοριακό βάρος του νερού,  $A$  είναι η επιφάνεια του του κελιού και  $n_d$  είναι ο συντελεστής ηλεκτροωσμωτικής αντίστασης που δίνεται ως :

$$n_d = 0.0029 \cdot \lambda_m^2 + 0.05 \cdot \lambda_m - 3.4 \times 10^{-19} \quad (2.12)$$

Όπου,

$m$  είναι η μέση τιμή-αριθμητικός μέσος των δύο  $\lambda$  για την άνοδο

και την καθόδου που υπολογίζονται από την δραστηριότητα του νερού τους ως ακολούθως:

$$\lambda = 0.43 + 17.81 \cdot \alpha_\alpha - 39.85 \cdot \alpha_\alpha^2 + 36 \cdot \alpha_\alpha^3, \quad 0 < \alpha_\alpha \leq 1,$$

$$\lambda = 14 + 1.4 \cdot (\alpha_\alpha - 1), \quad 1 < \alpha_\alpha \leq 3.$$

Και

$$F_{H_2O_d} = D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n \quad (2.13)$$

όπου  $t_m$  είναι το πάχος της μεμβράνης και  $C_{wc}$  και  $C_{wa}$

είναι η συγκέντρωση νερού για την επιφάνεια της καθόδου και της ανόδου.

της μεμβράνης, αντίστοιχα, και εκφράζονται ως εξής:

$$C_{wa} = \frac{\rho_{m,dry}}{M_{m,dry}} \cdot \lambda_a \quad (2.14)$$

$$C_{wc} = \frac{\rho_{m,dry}}{M_{m,dry}} \cdot \lambda_c \quad (2.15)$$

όπου  $D_w$  ονομάζεται συντελεστής διάχυσης και υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D_w = D_\lambda \cdot \exp \left( 2416 \left( \frac{1}{303} - \frac{1}{T_{elec}} \right) \right) \quad (2.16)$$

Και

$$D_\lambda = 10^{-10}, \lambda < 2$$

$$D_\lambda = 10^{-10} \cdot (1 + 2 \cdot (\lambda_m - 2)) \quad 2 \leq \lambda_m \leq 3$$

$$D_{\lambda} = 10^{-10} \cdot (3 - 1.67 \cdot (\lambda_m - 3)) \quad 3 \leq \lambda_m \leq 4.5$$

$$D_{\lambda} = 1.25 \cdot 10^{-10}, \lambda_m \geq 4.5$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.10-2.16) στην (2.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{H_2Oa}}{dt} &= V_a \cdot \frac{dC_{H_2Oa}}{dt} = F_{H_2O_{ai}} - F_{H_2O_{ao}} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d} = \\ &= \frac{1}{V_a} \cdot [(50 - C_{H_2O_{ao}}) \cdot Q_{total} - \frac{n_F \cdot n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_a} - (n_d \cdot \frac{I}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot n) - \\ &(D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.2.1.3 Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο

Το συγκεκριμένο σύστημα, υπολογίζει τις δυναμικές ροές του υδρογόνου και του νερού της καθόδου και τις μερικές πιέσεις αυτών.

Η αρχή θα γίνει με την ανάλυση των δυναμικών ροών του μοντέλου της ανόδου και στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί η διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, για την εύρεση των διαφορικών εξισώσεων. Οι τύποι των δυναμικών ροών εξηγούνται μαθηματικά παρακάτω:

$$\dot{N}_{H_2} = \frac{dN_{H_2}}{dt} = F_{H_{2ci}} - F_{H_{2co}} + H_{2g} \quad (2.18)$$

$$\dot{N}_{H_2O_c} = \frac{dN_{H_2O_c}}{dt} = F_{H_2O_{ci}} - F_{H_2O_{co}} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d} \quad (2.19)$$

όπου  $F_{H_{2ci}}$ ,  $F_{H_2O_{ci}}$ ,  $F_{H_{2co}}$ ,  $F_{H_2O_{co}}$  (mol/s) είναι η μοριακές ροές υδρογόνου και νερού στην είσοδο και έξοδο αντίστοιχα. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι τα  $F_{H_{2ci}}$ ,  $F_{H_2O_{ci}}$  είναι μηδέν διότι δεν υπάρχουν εισροές. ενώ αυτός ο όρος γράφεται για να δείξει τη γενική δυναμική του πλήρους ισοζυγίου. Επίσης τα  $F_{H_2O_{eod}}$ ,  $F_{H_2O_d}$  είναι ηλεκτρο-ωσμικές ροές αντίστασης και διάχυσης από το ηλεκτρόδιο της ανόδου μέσω της μεμβράνης.

Ισχύει ότι :

$$F_{H_{2ci}} = C_{H_{2ci}} \cdot Q_{total} \quad (2.20)$$

$$F_{H_{2co}} = C_{H_{2co}} \cdot Q_{total} \quad (2.21)$$

Όπου  $C_{H_{2ci}}$  και  $C_{H_{2co}}$  είναι οι συγκεντρώσεις των μοριακών ροών και η κάθοδος εισόδου. Όπως και προηγουμένως, θεωρείται η παραδοχή ότι η ογκομετρική ροή είναι ίδια στην άνοδο και την κάθοδο.

Οι μερικές πιέσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$p_{H_2} = \frac{N_{H_2} \cdot R \cdot T_{el}}{V_c}$$

$$p_{H_2O_c} = \frac{N_{H_2O_c} \cdot R \cdot T_{el}}{V_c}$$

Έτσι η συνολική πίεση στην κάθοδο είναι :

$$P_\alpha = p_{H_2} + p_{H_2O_c} \quad (2.22)$$

Ο ρυθμός παραγωγής υδρογόνου στην κάθοδο υπολογίζεται από την εξής εξίσωση:

$$H_{2g} = \frac{n \cdot I}{2 \cdot F} \cdot n_F \quad (2.23)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις στην (2.18) και με όγκο καθόδου  $V_c = 1 \text{ m}^3$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{H_2}}{dt} &= V_c \cdot \frac{dC_{H_2}}{dt} = F_{H_{2ci}} - F_{H_{2co}} + O_{2g} = \\ &= C_{H_{2ci}} \cdot Q_{total} - C_{H_{2co}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{2 \cdot F} \cdot n_F \\ &= -C_{H_{2co}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{2 \cdot F} \cdot n_F \leftrightarrow \\ \frac{dC_{H_2}}{dt} &= \frac{1}{V_c} \cdot (-C_{H_{2co}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{2 \cdot F} \cdot n_F) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Όπου  $\frac{dC_{H_2}}{dt}$  ο ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο.

#### 2.2.1.4 Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην Κάθοδο

Στην συνέχεια θα βρεθεί ο τύπος του ρυθμού συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο.

$$\dot{N}_{H_2O_c} = \frac{dN_{H_2O_c}}{dt} = F_{H_2O_{ci}} - F_{H_2O_{co}} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d}$$

Από την (2.19) έχουμε 4 μεταβλητές: Θεωρούμε τον ρυθμό του νερού στην κάθοδο ( $F_{H_2O_{ci}}$ ) ίσο με 0 mol/s, διότι δεν υπάρχει συγκέντρωση νερού για είσοδο στο σύστημα.

Τώρα η μοριακή ροή του νερού υπολογίζεται:

$$F_{H_2O_{co}} = C_{H_2O_{co}} \cdot Q_{total} \quad (2.25)$$

Όπου  $C_{H_2O_{co}}$  είναι οι συγκεντρώσεις των μοριακών ροών του νερού.

Οι ηλεκτρο-ωσμικές ροές αντίστασης και διάχυσης υπολογίζονται από τους τους εξής τύπους:

$$F_{H_2O_{eod}} = n_d \cdot \frac{i}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n$$

Και

$$F_{H_2O_d} = D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις στην (2.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{H_2O_c}}{dt} &= V_c \cdot \frac{dC_{H_2O_c}}{dt} = F_{H_2O_{ci}} - F_{H_2O_{co}} - F_{H_2O_{eod}} - F_{H_2O_d} = \\ \frac{dC_{H_2O_c}}{dt} &= \frac{1}{V_c} (-(C_{H_2O_{ao}} \cdot Q_{total}) - (n_d \cdot \frac{i}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot n) - \\ &(D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.3 Γραμμικοποίηση δυναμικών συστημάτων

Στην παρόν ενότητα θα γίνει η γραμμικοποίηση του μαθηματικού μοντέλου της ενότητας 2.2.

Μη γραμμικά συστήματα μπορούν να γραμμικοποιηθούν γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας. Επίσης μπορεί να γραμμικοποιηθεί το μοντέλο γύρω από διάφορα σημεία ισορροπίας, δημιουργώντας έναν κατάλογο από γραμμικοποιημένα συστήματα, καλύπτοντας όλο το εύρος λειτουργίας του μη γραμμικού προβλήματος.

Η γενική περίπτωση είναι:

$$\frac{dy(t)}{dt^n} \triangleq y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t))$$

Όσο μεγαλύτερης τάξης είναι η διαφορική εξίσωση τόσο πιο περίπλοκη είναι η γραμμικοποίηση της και απλουστεύεται περισσότερο αν την μετατρέψουμε σε περιγραφή χώρου κατάστασης, κάτι που θα γίνει στην τελευταία ενότητα του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

Οι διαφορικές που έχουμε είναι διαφορικές 1<sup>ης</sup> τάξης, αλλά πριν ξεκινήσουμε πρέπει να αναφερθεί η μεθοδολογία της γραμμικοποίησης σε περίπτωση πρώτης τάξεως.

Έστω η μη γραμμική διαφορική 1<sup>ης</sup> τάξεως:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), u(t))$$

Όπου  $y(t), u(t)$  είναι μεταβλητές και συγκεκριμένα οι έξοδοι και οι εισόδοι του συστήματος αντίστοιχα.

Θεωρούμε την σταθεροποίηση της εισόδου σε ένα σημείο/ορισμένο επίπεδο  $u_0$  όπου

$u(t)=u_o = \text{σταθερό}$

τα  $y_o$  που είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$\frac{dy(t)}{dt} = 0$ , δηλαδή  $f(y_s, u_s) = 0$  καλούνται σημεία ισορροπίας και είναι τα σημεία στην μόνιμη κατάσταση.

Με την προϋπόθεση ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν θεωρώ, μετατοπίσεις (μικρού μεγέθους) από αυτές,

$$u(t)=u_s + \delta u(t)$$

$$y(t)=y_s + \delta y(t)$$

Εφόσον βρέθηκαν τα σημεία ισορροπίας, υπολογίζω την ανάπτυξη Taylor της συνάρτησης  $f(y(t), u(t))$ , γύρω από τα σημεία αυτά, χρησιμοποιώντας την πολυμεταβλητή εκδοχή της Taylor:

$$f(y(t), u(t)) = f(y_s, u_s) + \left. \frac{\partial f(y(t), u(t))}{\partial y(t)} \right|_{y_s, u_s} (y(t) - y_s) + \left. \frac{\partial f(y(t), u(t))}{\partial u(t)} \right|_{y_s, u_s} \cdot (u(t) - u_s) + (\text{όροι υψηλότερων τάξεων}) \quad (2.27)$$

Όπου  $(y(t) - y_s)$  και  $(u(t) - u_s)$  μεταβλητές απόκλισης που για λόγους ευκολίας συμβολίζονται  $\dot{Y}, \dot{U}$  αντίστοιχα.

Εφόσον δεν υπάρχουν όροι μεγαλύτερου βαθμού και  $f(y_s, u_s)=0$  η (2.27) γράφεται:

$$f(y(t), u(t)) = -\alpha_o \cdot \delta y(t) + \beta_o \cdot \delta u(t) \quad (2.28)$$

### 2.3.1 Γραμμικοποίηση μοντέλου ηλεκτρόλυσης

Στην ενότητα 2.2 βρέθηκαν 4 διαφορικές εξισώσεις μη γραμμικής μορφής:

1. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο

$$\begin{aligned} \frac{dC_{O_2}}{dt} &= \frac{1}{V_a} \cdot (-C_{O_{2ao}} \cdot Q_{total} + \frac{n \cdot I}{4 \cdot F} \cdot n_F) = \\ &= (-C_{O_{2ao}} \cdot \frac{(N_{O_2} + N_{H_2Oa} + N_{H_2} + N_{H_2Oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_a} + \frac{n \cdot I}{4 \cdot F \cdot V_a} \cdot n_F) \end{aligned}$$

2. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο

$$\begin{aligned} \frac{dC_{H_2Oa}}{dt} &= \frac{[50 - C_{H_2Oa0}] \cdot (N_{O_2} + N_{H_2Oa} + N_{H_2} + N_{H_2Oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_a} - \frac{n_F \cdot n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_a} - \frac{(n_d \cdot \frac{I}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot n)}{V_a} - \\ &\frac{(D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m}) \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n}{V_a} \end{aligned}$$

3. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο

$$\frac{dC_{H_2}}{dt} = (-C_{H_2co} \cdot \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_c} + \frac{n \cdot I}{2 \cdot F \cdot V_c} \cdot n_F)$$

4. Ο Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο

$$\frac{dC_{H_2O_c}}{dt} = (-C_{H_2O_{a0}} \cdot \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_c} - \frac{(n_d \cdot \frac{I}{F} \cdot M_{H_2O} \cdot n)}{V_c} - \frac{(D_w \cdot \frac{(C_{wc} - C_{wa})}{t_m} \cdot M_{H_2O} \cdot A \cdot n)}{V_c})$$

Από την δομή του προβλήματος είναι εμφανές ότι οι μεταβλητές εισόδου  $u(t)$  είναι η ένταση του ρεύματος  $I$  και η μεταβλητές εξόδου  $y(t)$  είναι οι ροές των ( υδρογόνου , οξυγόνου) και του νερού στην κάθοδο και άνοδο  $N_{O_2}, N_{h_2oa}, N_{H_2}, N_{h_2oc}$ . Ισχύει ότι :

$$N_{O_2} = C_{O_2} \cdot V_a,$$

$$N_{h_2oa} = C_{h_2oa} \cdot V_a$$

$$N_{H_2} = C_{H_2} \cdot V_c,$$

$$N_{h_2oc} = C_{h_2oc} \cdot V_c$$

Οπότε σύμφωνα με τις (2.27,2.28) για την 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{O_2}}{dt} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{O_2} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{h_2oa} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{H_2} - \\ &\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{h_2oc} - \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \cdot C_{O_2} \right) + \frac{n_F \cdot n}{4 \cdot F \cdot V_a} \cdot \dot{I} \\ &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} (\dot{N}_{O_2} + \dot{N}_{h_2oa} + \dot{N}_{H_2} + \dot{N}_{h_2oc}) - \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \cdot C_{O_2} \right) + \frac{n_F \cdot n}{4 \cdot F \cdot V_a} \cdot \dot{I} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Με τον ίδιο τρόπο η 2 γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{h_2oa}}{dt} &= \left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{O_2} + \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{h_2oa} + \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{H_2} \\ &+ \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot \dot{N}_{h_2oc} \\ &- \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \right) \cdot [C_{h_2oa}] + \left( -\frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_a} - \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_a} \right) \cdot \dot{I} \\ &= \left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} \cdot (\dot{N}_{O_2} + \dot{N}_{h_2oa} + \dot{N}_{H_2} + \dot{N}_{h_2oc}) \\ &- \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \right) \cdot [C_{h_2oa}] + \left( -\frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_a} - \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_a} \right) \cdot \dot{I} \end{aligned} \quad (2.30)$$



Στην συνέχεια η 3 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{H_2}}{dt} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{O_2} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{h_2oa} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{H_2} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{h_2oc} \\
 N_{h_2oc} &- \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \cdot C_{H_2} \right) + \frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_c} \cdot \dot{I} \\
 &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0} \cdot V_c)} (N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \\
 &- \left( C_{H_2} \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \right) + \frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_c} \cdot \dot{I} \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Για την 4 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{h_2oc}}{dt} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{O_2} - \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{h_2oa} \\
 &- \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{H_2} \\
 &- \frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0} \cdot V_c)} \cdot N_{h_2oc} - \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \cdot C_{h_2oc} \right) + \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_c} \cdot \dot{I} \\
 &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0} \cdot V_c)} (N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) - \\
 &\left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} \cdot C_{h_2oc} \right) + \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_c} \cdot \dot{I} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

## 2.4 Μετατροπή του συστήματος ηλεκτρόλυσης στο πεδίο του χώρου κατάστασης

Σε αυτήν την ενότητα θα πραγματοποιηθεί μετασχηματισμός του μοντέλου της ηλεκτρόλυσης σε μοντέλο του χώρου κατάστασης.

Το σύστημα περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις 1<sup>ης</sup> τάξης που υπολογίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, και αυτές περιγράφουν, τις μεταβλητές κατάστασης. Οι μεταβλητές κατάστασης δεν μπορούν πάντα να μετρηθούν, αλλά είναι αυτές όπου επηρεάζουν την συμπεριφορά του συστήματος, ενώ «αποθηκεύουν» και την προηγούμενη συμπεριφορά του. Μέσω του μοντέλου χώρου κατάστασης θα παρθούν και κάποιες πληροφορίες για τις ιδιότητες του συστήματος, όπως είναι η ελεξιμότητα του ή παρατηρησιμότητα του και η ευστάθεια του.

Πριν δημιουργήσουμε το μοντέλο χώρου κατάστασης, είναι απαραίτητο να δοθούν κάποιοι ορισμοί:

Η περιγραφή ενός φυσικού συστήματος με μεταβλητές κατάστασης γίνεται μέσω ενός συστήματος  $n$  γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που λέγονται εξισώσεις του φυσικού συστήματος. Η γενική τους μορφή είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \dots + a_{1n} \cdot x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \dots + a_{2n} \cdot x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \dots + a_{nn} \cdot x_n(t) + b_n \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου  $x_i(t)$   $i = 1, 2 \dots n$  είναι μεταβλητές κατάστασης και  $u(t)$  η είσοδος του συστήματος.

Μεταβλητές κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος ονομάζουμε τις μεταβλητές που προσδιορίζουν πλήρως την συμπεριφορά του συστήματος (π.χ. θερμοκρασία, ταχύτητα).

Ένα γενικευμένο μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος περιγράφεται από το παρακάτω σετ εξισώσεων (γραμμικών ή μη-γραμμικών):

$$\dot{x}(t) = f_d(x, u), \quad x(t = t_0 = 0) = x_0$$

$$0 = f_a(x, u)$$

$$y(t) = g(x, u)$$

Όπου

- $x$ : μεταβλητές κατάστασης,  $y$ : μεταβλητές εξόδου,  $u$ : μεταβλητές εισόδου
- $f_d$ : σύνολο των διαφορικών εξισώσεων που αφορούν τις μεταβλητές κατάστασης.
- $f_a$ : σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων
- $g$ : το σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων που αφορούν τις μεταβλητές εξόδου.

Όταν το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορεί να μετατραπεί σε γραμμικό τότε εκφράζετε ως μοντέλο χώρου κατάστασης και περιγράφετε από τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + E \cdot d(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

$$x(t = t_0 = 0) = x_0$$

Όπου,

- $x(t)$ : το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης ( $n \times 1$ )
- $u(t)$ : το διάνυσμα των εισόδου του συστήματος ( $z \times 1$ )
- $d(t)$ : το διάνυσμα των διαταραχών του συστήματος ( $d \times 1$ )
- $y(t)$ : το διάνυσμα των εξόδων του συστήματος ( $m \times 1$ )
- Ο τετραγωνικός πίνακας  $A$  ( $n \times n$ ), καλείται πίνακας του συστήματος και είναι γνωστός ως πίνακας του φυσικού συστήματος.
- Το διάνυσμα  $B(n \times z)$  αναφαίρετε ως διάνυσμα εισόδου. Το διάνυσμα αυτό, περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η είσοδος  $u(t)$  επηρεάζει το φυσικό σύστημα.
- Ο πίνακας  $E$  είναι γνωστός ως πίνακας διαταραχών ( $n \times d$ )
- Ο πίνακας  $C$  είναι γνωστός ως πίνακας εξόδου ( $m \times n$ )
- Ο πίνακας  $D$  είναι γνωστός ως απευθείας πίνακας ( $m \times z$ )

Σε περίπτωση που το μοντέλο είναι σε μη γραμμική μορφή, τότε πρώτα θα γραμμικοποιηθεί με τον τρόπο που αναλύθηκε στην ενότητα 2.3 και έπειτα καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις χώρου κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + E \cdot d(t)$$

$$\dot{y}(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

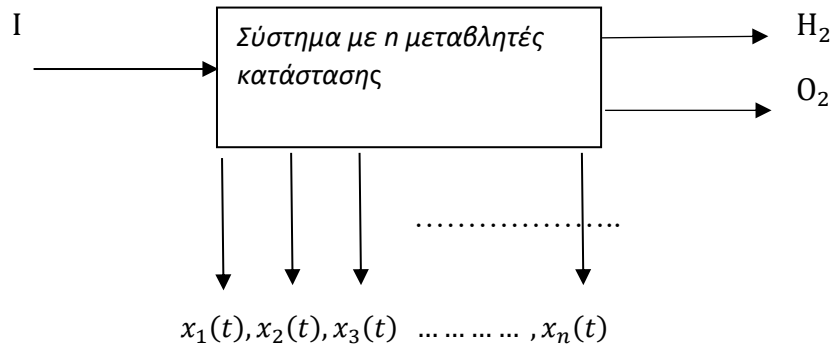
$$\dot{x}(t = t_0 = 0) = \dot{x}_0 = x_0 - x_s = 0 \quad (2.34)$$

Σχετικά με το σύστημα ανοιχτού βρόχου του μοντέλου:

Η είσοδος του συστήματος είναι η ένταση ρεύματος  $I$  που προσδίδεται στο σύστημα και η έξοδος του συστήματος είναι η παραγόμενες ποσότητες οξυγόνου και υδρογόνου κατά την διάρκεια της ηλεκτρόλυσης του νερού, αλλά και οι ρυθμοί συγκέντρωσης του νερού σε άνοδο και κάθοδο.

Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι στην συγκεκριμένη εργασία προσομοιώνεται η διαδικασία της ηλεκτρόλυσης χωρίς την εμφάνιση διαταραχών, οπότε το διάνυσμα  $d(t)$  δεν υπάρχει (ισούται με 0).

Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγράψει με το παρακάτω διάγραμμα βαθμίδων:



**Σχήμα 2.1:** Διάγραμμα βαθμίδων, ανοιχτού βρόχου, μοντέλου χώρου κατάστασης της συστήματος ηλεκτρόλυσης για n μεταβλητές κατάστασης

Εφόσον το μοντέλο γραμμικοποιήθηκε, οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται(2.33):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{(n \times n)} \cdot \hat{x}(t)_{(n \times 1)} + B_{(n \times 1)} \cdot \dot{I}(t)_{(1 \times 1)} + E_{(n \times 1)} \cdot \dot{d}(t)_{(1 \times 1)}$$

$$\dot{y}(t) = C_{(n \times n)} \cdot \hat{x}(t)_{(n \times 1)} + D_{(n \times n)} \cdot \dot{I}(t)_{(n \times 1)}$$

$$\hat{x}(t = t_0 = 0) = \dot{x}_0 = x_0 - x_s = 0$$

Με n=4

Με βάση τα αποτελέσματα της ενότητας 2.3 και τις εξισώσεις (2.33-2.34), θα παρουσιαστεί η μετατροπή του μοντέλου της PEM ηλεκτρόλυσης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο του χώρου. Αυτή η μετατροπή θα επιτευχθεί με τον ορισμό τεσσάρων (n=4) μεταβλητών κατάστασης ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ).

Οι μεταβλητές κατάστασης είναι:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \dot{C}_{O_2} \\ x_2 &= \dot{C}_{h_2oa} \\ x_3 &= \dot{C}_{H_2} \\ x_4 &= \dot{C}_{h_2oc} \end{aligned} \right\} \text{Ρυθμοί συγκέντρωσης } O_2, H_2, \text{ και } H_2O \text{ σε άνοδο και κάθοδο.}$$

Η εξαγωγή των πινάκων A,B,D,C έγινε από το σετ εξισώσεων που βρέθηκε στην προηγούμενη ενότητα (σχέσεις 2.29-2.32):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} [I] + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} d(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} [I]$$

Όπου :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0})} - \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_a} & a_{2,1} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0} \cdot V_a)} \\ a_{1,2} &= \left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0})} & a_{2,2} &= \frac{\left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot (R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} + \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_a} \right) \\ a_{1,3} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0})} & a_{2,3} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0})} \\ a_{1,4} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0})} & a_{2,4} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0})} \\ a_{3,1} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0})} & a_{4,1} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{O_2})}{(p_{a0})} \\ a_{3,2} &= \left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot \frac{(R \cdot Tel)}{(p_{a0} \cdot V_a)} & a_{4,2} &= \frac{\left[ \frac{F_{2oai}}{V_a} - C_{h_2oa} \right] \cdot (R \cdot Tel)}{(p_{a0})} + \left( \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} V_c} \right) \\ a_{3,3} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0})} - \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0}} & a_{4,3} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{H_2})}{(p_{a0})} \\ a_{3,4} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0})} & a_{4,4} &= -\frac{(R \cdot Tel \cdot C_{h_2oc})}{(p_{a0})} - \frac{(N_{O_2} + N_{h_2oa} + N_{H_2} + N_{h_2oc}) \cdot R \cdot Tel}{p_{a0} \cdot V_c} \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{n_F \cdot n}{4 \cdot F \cdot V_a}$$

$$b_2 = \left( -\frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_a} - \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_a} \right)$$

$$b_3 = \frac{n_F \cdot n}{2 \cdot F \cdot V_c}$$

$$b_4 = \frac{n_d \cdot M_{H_2O} \cdot n}{F \cdot V_c}$$

Επίσης λόγω της αμεροληψίας του συστήματος σε διαταραχές ο πίνακας E είναι μηδενικός.

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η έκφραση της εξόδου τελικά είναι

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)_{(n \times 1)}$$

Οπότε οι πίνακες C,D γίνονται:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>: Σύγκριση προσομοιώσεων για το μη-γραμμικό, γραμμικό και μοντέλου χώρου κατάστασης

### 3.1 Εισαγωγή κεφαλαίου

Στόχος της συγκεκριμένης ενότητας είναι να αποδειχθεί η ισοδυναμία των τριών μαθηματικών μοντέλων που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2 (μη γραμμικοποιημένο, γραμμικοποιημένο και μοντέλο στο πεδίο χώρου κατάστασης). Αυτό θα γίνει συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις αυτών, οι οποίες περιγράφουν τις συγκεντρώσεις του νερού (άνοδος και κάθοδος), οξυγόνου, υδρογόνου σε συνάρτηση με τον χρόνο, δηλαδή:

$$C_{O_2}(t), C_{H_2O_2}(t), C_{H_2}(t), C_{H_2O}(t)$$

Καταρχάς θα γίνει σύγκριση των γραφικών παραστάσεων με το βασικό σενάριο αυτό κατά το οποίο το ρεύμα  $I=150\text{ A}$ . Στην συνέχεια οι επόμενες συγκρίσεις που θα γίνουν περιλαμβάνουν, ρεύμα ίσο με  $I=225\text{ A}$  και  $I=75\text{ A}$ , δηλαδή αύξηση της έντασης ρεύματος κατά 50% από την βασική και μείωση της κατά 50% αντίστοιχα.

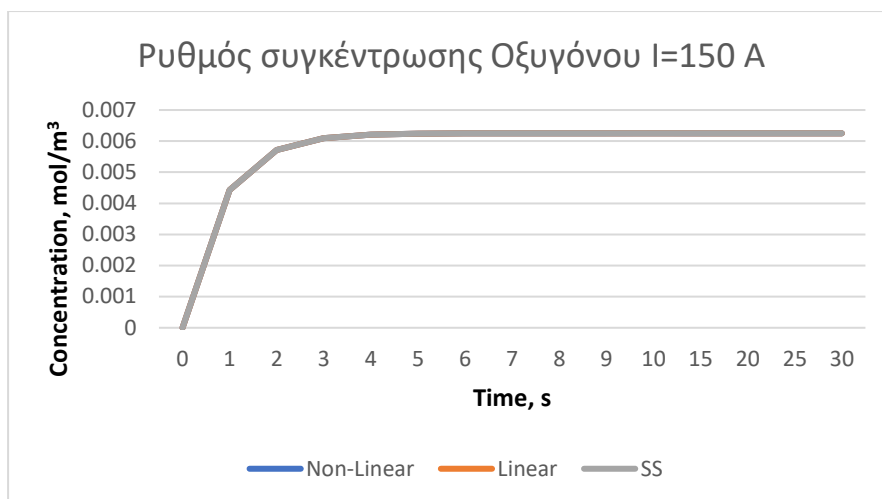
Αποδεικνύοντας τον παραπάνω ισχυρισμό (την ισοδυναμία των τριών μαθηματικών μοντέλων), θα επιτευχθούν σημαντικά συμπεράσματα και εξαγωγή αναγκαίων χαρακτηριστικών για το σύστημα της ηλεκτρόλυσης και την προσομοίωση αυτής στο περιβάλλον του matlab.

Επιβάλλεται να σημειωθεί ότι γίνεται προσομοίωση χωρίς την παρουσία ηλεκτρή, δηλαδή έχουμε σύστημα ανοιχτού βρόχου. Τέλος η χρονική διάρκεια που επιλέχθηκε είναι της τάξεως των 30 δευτερολέπτων με βήμα ενός δευτερολέπτου. Στόχος, η καλύτερη ανάλυση των γραφικών παραστάσεων στα πρώτα στάδια της προσομοίωσης. Για την επίτευξη μίας όσον τον δυνατό αξιόπιστης σύγκρισης, με την βοήθεια του excel, δημιουργήθηκαν διαγράμματα που βρίσκουν τις γραφικές παραστάσεις των τριών μαθηματικών μοντέλων στο ίδιο διάγραμμα.

### 3.2 Προσομοίωση των μοντέλων με ένταση ρεύματος ίσο με 150 A

Η πρώτη προσομοίωση θα γίνει με την βασική ποσότητα ρεύματος, των  $I=150\text{ A}$ . Για να αποδειχθεί η γραμμικοποίηση επιτυχής όπως και η ανάπτυξη του μοντέλου χώρου κατάστασης πρέπει οι γραφικές παραστάσεις των τεσσάρων βασικών μεταβλητών που χαρακτηρίζουν το σύστημα να συμφωνούν και να έχουν υψηλή ακρίβεια μεταξύ τους.

Έτσι ακολουθεί το σχήμα 1 που περιλαμβάνει τις γραφικές παραστάσεις του μη γραμμικού, γραμμικού και μοντέλου στο πεδίο χώρου κατάστασης, οι οποίες περιγράφουν την συγέντρωση του οξυγόνου στην άνοδο ως συνάρτηση του χρόνου. Οι καμπύλες με μπλέ χρώμα αντιπροσωπεύουν το μη-γραμμικό μοντέλο, οι πορτοκαλί το γραμμικό και εκείνες με το γκρι το μοντέλο χώρου-κατάστασης.

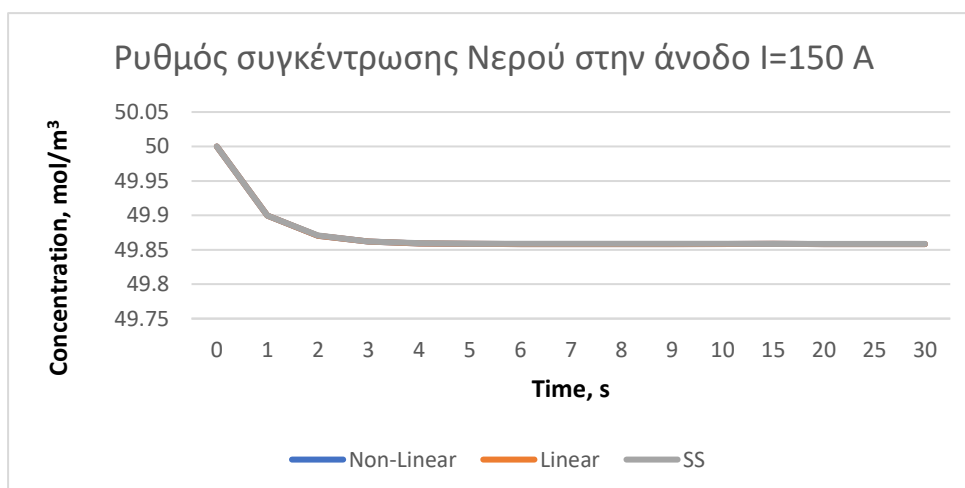


**Σχήμα 3.1 :** Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στα I=150 A

Γίνεται εύκολα αντιληπτή η ομοιότητα, των τριών αυτών γραφημάτων, ως προς την απόκριση αλλά και την μορφή που εμφανίζουν. Η ομοιότητα παρατηρείται σε τέτοιον βαθμό που σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους. Αυτό αποδεικνύει πως η γραμμικοποίηση είναι απόλυτα σωστή.

Ξεκινώντας με μηδενική συγκέντρωση οξυγόνου, παρατηρούμε μία απότομη παραγωγή/συγκέντρωση οξυγόνου μέχρι τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα και μετά ξεκινάει η σταδιακή πορεία, ειδικά από τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα και μετά. Μετά τα 5 δευτερόλεπτα η συγκέντρωση σταθεροποιείται στα  $0.00625 \text{ mol/m}^3$  περίπου. Δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφορά που ίσως να χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση.

Στην συνέχεια θα γίνει η παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων της συγκέντρωσης νερού στην άνοδο στο σχήμα 3.2. Με την ίδια λογική παρατηρήθηκε η ομοιότητα των καμπυλών ως προς την μορφή τους και τις αποκρίσεις που εμφανίζουν.



**Σχήμα 3.2:** Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο στα I=150 A

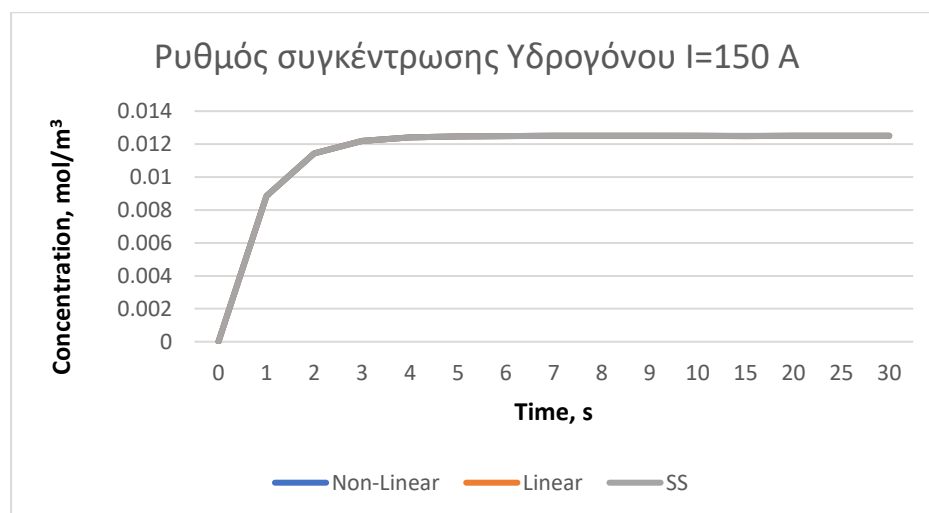
Η αρχική ποσότητα του νερού στην άνοδο ανέρχεται στα  $50 \text{ mol/m}^3$  και καθώς προχωράει η διαδικασία και γίνονται οι απαιτούμενες χημικές αντιδράσεις (δηλαδή η διάσπαση του νερού σε υδρογόνο και οξυγόνο), η συγκέντρωση του νερού στην άνοδο



ξεκινάει να μειώνεται(καταναλώνεται) απότομα για τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα. Όπως και προηγουμένως διαπιστώνεται ότι, μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα η συγκέντρωση σταθεροποιείται στα 49.859 mol περίπου.

Δεν παρατηρήθηκε κάποια σημαντική διαφορά που ίσως να χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση. Το μοντέλο χώρου κατάστασης και σε αυτό το γράφημα φαίνεται λείο μετά τα 4 δευτερόλεπτα, ενώ το μη γραμμικό και το γραμμικό έχει κάποιες μικρές αστάθειες μέχρι τέλους, χωρίς να επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Οι συγκρίσεις συνεχίζονται και με τις μεταβλητές για την κάθοδο. Στο σχήμα 3.3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις για την περίπτωση της συγκέντρωσης του υδρογόνου.

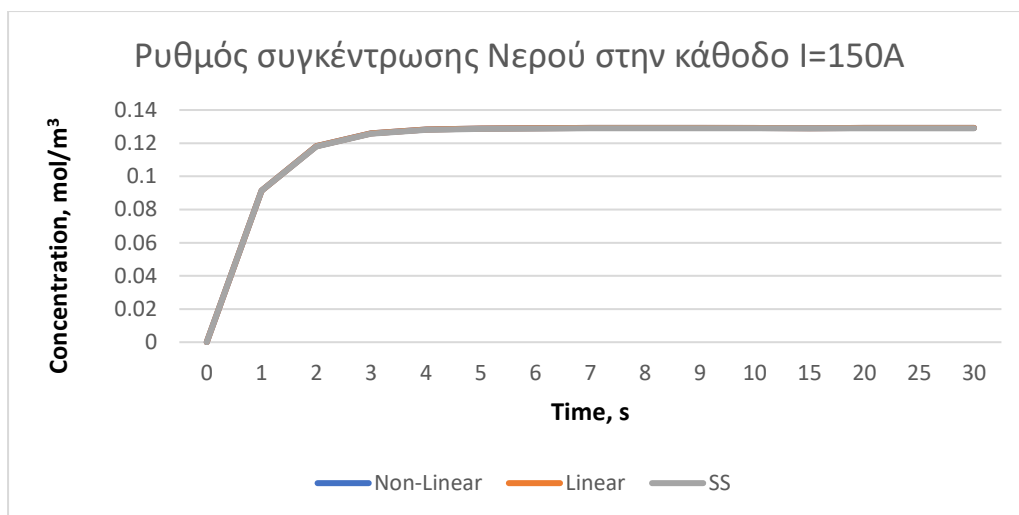


**Σχήμα 3.3:** Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στα I=150 A

Η ομοιότητα και των τριών γραφημάτων ως προς την απόκριση αλλά και την μορφή είναι αισθητά εμφανείς και παρατηρείται σε τέτοιον βαθμό που σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους.

Ξεκινώντας πάλι με μηδενική συγκέντρωση υδρογόνου, παρατηρούμαι μία απότομη παραγωγή/συγκέντρωση υδρογόνου μέχρι τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα και μετά ξεκινάει η ομαλότητα και ο κορεσμός του, ειδικά μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα όπου η συγκέντρωση σταθεροποιείται στα 0.0125 περίπου. Ακόμα κι εδώ δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφορά είτε αστάθεια που ίσως να χρειάζεται ανάλυση.

Τελευταία σημαντική μεταβλητή που θα ελεγχθεί είναι η συγκέντρωση του νερού στην κάθοδο (που παρασύρεται από την άνοδο προς την κάθοδο).



**Σχήμα 3.4:** Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο στα  $I=150\text{ A}$

Η αρχή έγινε με μηδενική συγκέντρωση νερού στην κάθοδο και στα πρώτα 3 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης παρατηρείται απότομη αύξηση και μετά από αυτά ξεκινάει σταθεροποίηση του μέχρι και τα 0.129 περίπου. Διαπιστώθηκαν αστάθειες των μοντέλων κυρίως στα 3 με 6 δευτερόλεπτα, αφού φαίνεται πως δεν ταυτίζονται ακριβώς μεταξύ τους. Παρόλο που υπάρχουν κάποιου είδους αστάθειες στην προσπάθειά των μοντέλων να σταθεροποιηθούν, είναι πολύ μικρής κλίμακας και δεν επηρεάζουν την μορφή της καμπύλης.

Για περαιτέρω κατανόηση των αποτελεσμάτων και επαλήθευση αυτών, δίνεται ο πίνακας 3.1 ο οποίος δείχνει τις τιμές που σταθεροποιούνται για τα τρία μοντέλα.

**Πίνακας 3.1** Μετρήσεις στο τελικό σημείο (μόνιμης κατάστασης) για το Βασικό ( $1^\circ$ ) σενάριο

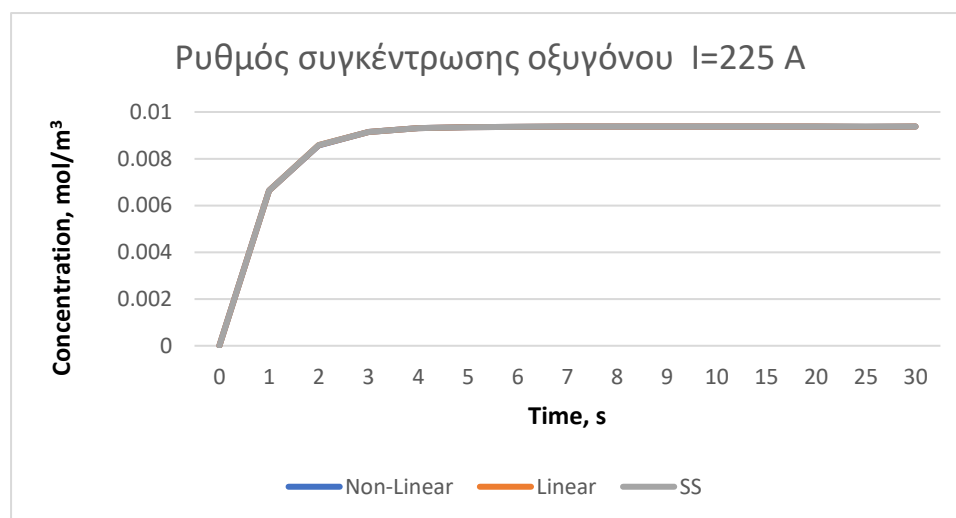
Μεταβλητές ( $\text{mol/m}^3$ )	Μη – Γραμμικό μοντέλο	Γραμμικό μοντέλο	Μοντέλο χώρου κατάστασης
$C_{O_2}$	0.00625	0.00625	0.006251
$C_{H_2Oa}$	49.858354	49.85834	49.858518
$C_{H_2}$	0.0125	0.0125	0.012501
$C_{H_2Oc}$	0.129147	0.129147	0.128981

Είναι δυνατό να παρατηρηθεί η ομοιότητα των τιμών μεταξύ των μοντέλων. Οι τιμές είναι σχεδόν ίδιες και στις τέσσερις μεταβλητές με διαφορά που φτάνει στο πέμπτο και έκτο δεκαδικό ψηφίο. Έτσι και σε συνάρτηση με τις γραφικές παραστάσεις, επαληθεύεται η ισοδυναμία των μοντέλων που αναλύθηκαν αλλά και η μέχρι τώρα επιτυχία της ανάλυσης (γραμμικό, μη-γραμμικό και μοντέλο χώρου κατάστασης).

### 3.3 Προσομοίωση των μοντέλων με +50% της έντασης ρεύματος του βασικού σεναρίου.

Στην συνέχεια θα πραγματοποιηθεί, έλεγχος ορθότητας των μαθηματικών μοντέλων για διαφορετική ένταση ρεύματος. Η αρχή θα γίνει με αύξηση του βασικού ρεύματος ίσο με +50% του βασικού δηλαδή η διαδικασία θα τρέξει με  $I=225\text{ A}$ .

Στο παρακάτω διάγραμμα και συγκεκριμένα σχήμα 3.5 φαίνεται η συγκέντρωση του οξυγόνου στην άνοδο.



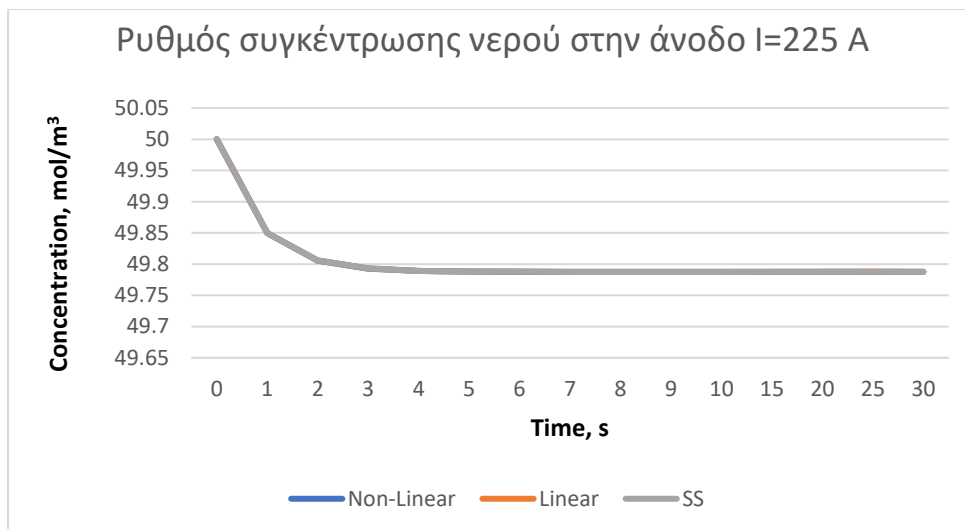
Σχήμα 3.5: Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στα  $I=225\text{ A}$

Λόγω της διαφορετικής έντασης ρεύματος παρατηρείται αλλαγή στην ποσότητα της συγκέντρωσης του οξυγόνου και συγκεκριμένα αύξηση αυτής. Αυξάνοντας δηλαδή την τιμή της εισόδου αυξάνεται και η παραγωγή οξυγόνου.

Όπως φαίνεται, ξεκινώντας, με μηδενική συγκέντρωση οξυγόνου, καθώς προχωράει η προσομοίωση και μετά την απότομη αύξηση του, παρατηρείται μία σταθερότητα στα  $0.0093\text{ mol}$  περίπου μετά το πέρας των 5 δευτερολέπτων που αντιστοιχεί σε +50% αύξηση σε σχέση με το βασικό σενάριο

Παρόλο την αύξηση της έντασης, δεν παρατηρείται καμία αστάθεια των γραφικών που να είναι άξια περεταίρω ανάλυσης. Οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους με τις καμπύλες του μη γραμμικού και γραμμικού να έχουν μικρές αστάθειες στα 4 με 5 δευτερόλεπτα, που όμως δεν επηρεάζουν την μορφή και το αποτέλεσμα.

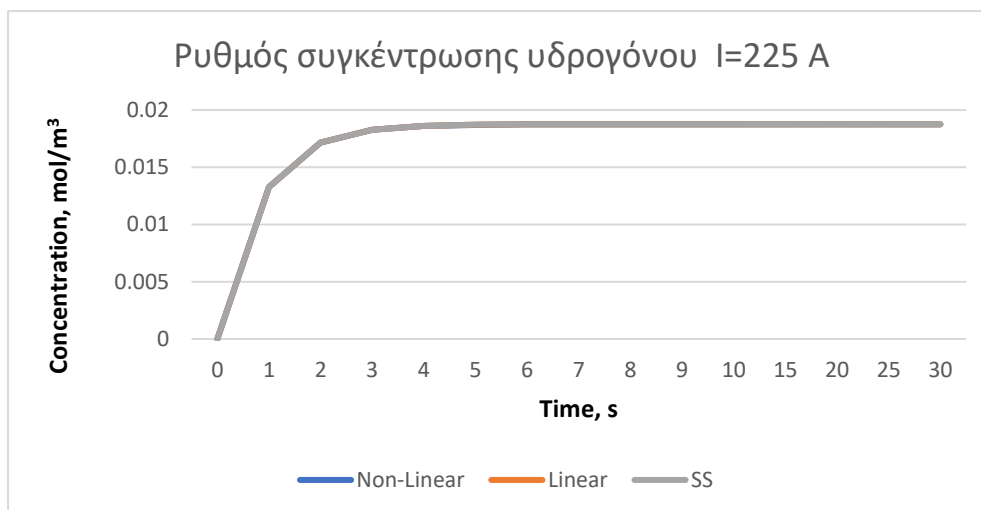
Στην συνέχεια θα γίνει η παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων της συγκέντρωσης νερού στην άνοδο στο σχήμα 3.6. Με την ίδια λογική παρατηρήθηκε η ομοιότητα των καμπυλών του σχήματος 3.6 ως προς την μορφή τους και τις αποκρίσεις που εμφανίζουν.



Σχήμα 3.6: Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο στα I=225 A

Η αρχική ποσότητα του νερού στην άνοδο ανέρχεται στα 50 mol και καθώς προχωράει η διαδικασία και γίνονται οι απαιτούμενες χημικές αντιδράσεις η συγκέντρωση του νερού στην άνοδο ξεκινάει να μειώνεται απότομα για τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα. Όπως και προηγουμένως πάλι μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα η συγκέντρωση σταθεροποιείται και μειώνεται μέχρι τα 49.78 mol περίπου.

Προχωρώντας στα σχήματα 3.7 και 3.8 φαίνονται τα αποτελέσματα στην περιοχή του ηλεκτρολύτη της καθόδου. Στο σχήμα 3.7 είναι οι γραφικές παραστάσεις για την περίπτωση της συγκέντρωσης του υδρογόνου που δημιουργείται στην κάθοδο.



Σχήμα 3.7: Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου στα I=225 A

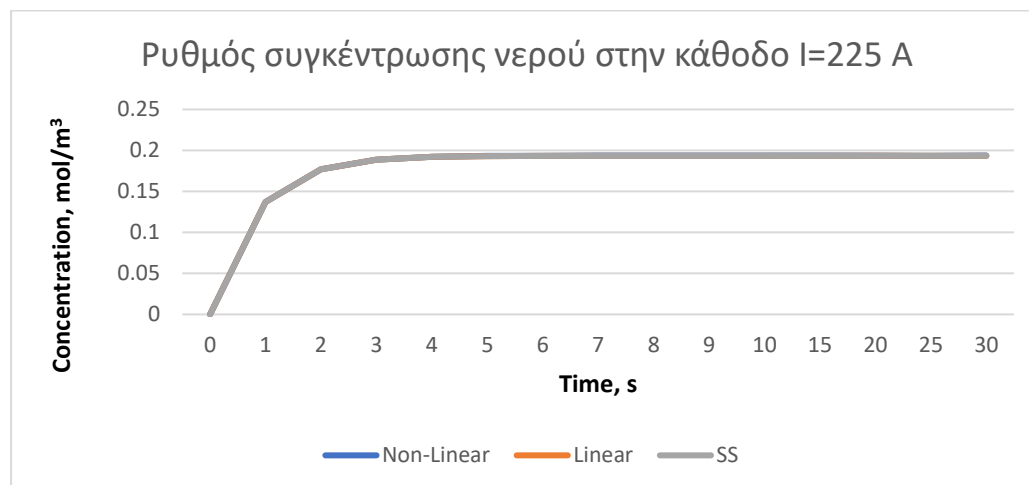
Παρόλο την διαφορετική ένταση ρεύματος που δόθηκε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο ως προς την μορφή των γραφικών.

Η ομοιότητα και των τριών γραφημάτων ως προς την απόκριση αλλά και την μορφή είναι αισθητά εμφανείς και παρατηρείται σε τέτοιον βαθμό που σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους.

Ξεκινώντας πάλι με μηδενική συγκέντρωση υδρογόνου, παρατηρούμαι μία απότομη παραγωγή/συγκέντρωση υδρογόνου μέχρι τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα και μετά ξεκινάει η ομαλότητα και ο κορεσμός του, ειδικά μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα όπου η συγκέντρωση σταθεροποιείται στα 0.01875 mol περίπου.

Παρόλο που στο μη γραμμικό και γραμμικό μοντέλο παρατηρούνται κάποιου είδους αστάθειες στην προσπάθειά του να σταθεροποιηθεί, φαίνεται να μην επηρεάζει την μορφή της καμπύλης.

Τελευταία σημαντική μεταβλητή που θα ελεγχθεί είναι η συγκέντρωση του νερού στην κάθοδο.



**Σχήμα 3.8:** Συγκέντρωση νερού στην κάθοδο στα I=225 A

Η αρχή έγινε με μηδενική συγκέντρωση νερού στην κάθοδο και στα πρώτα 3 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης παρατηρείται απότομη αύξηση και μετά από αυτά ξεκινάει σταθεροποίηση του μέχρι και τα 0.129 mol περίπου.

Πάλι δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφορά είτε αστάθεια που ίσως να χρειάζεται περεταίρω ανάλυση.

Για περαιτέρω κατανόηση των αποτελεσμάτων και επαλήθευση αυτών, δίνεται ο πίνακας 3.2 ο οποίος δείχνει τις τιμές που σταθεροποιούν, τα τρία μοντέλα. Συγκεκριμένα δείχνει τον μέσο όρο των τιμών μετά τα 5 δευτερόλεπτα που ξεκινάει η σταθεροποίηση.

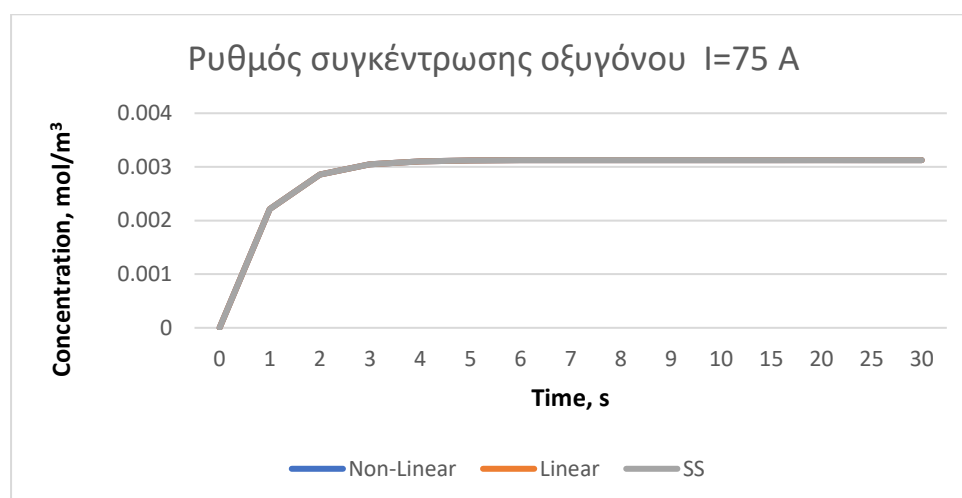
**Πίνακας 3.2** Μετρήσεις σταθεροποίησης 2<sup>ου</sup> σεναρίου I=225 A

Μεταβλητές (mol/m <sup>3</sup> )	Μη – Γραμμικό μοντέλο	Γραμμικό μοντέλο	Μοντέλο χώρου κατάστασης
C <sub>O<sub>2</sub></sub>	0.009375	0.009376	0.009376
C <sub>H<sub>2</sub>Oa</sub>	49.787631	49.787774	49.787777
C <sub>H<sub>2</sub></sub>	0.018749	0.018752	0.018752
C <sub>H<sub>2</sub>Oc</sub>	0.19362	0.193473	0.193471

Είναι δυνατόν να παρατηρηθεί η ομοιότητα των τιμών μεταξύ των μοντέλων. Παρόλο της αύξησης της έντασης, οι τιμές είναι σχεδόν ίδιες και στις τέσσερις μεταβλητές με διαφορά που φτάνει στο πέμπτο και έκτο δεκαδικό ψηφίο. Έτσι επαληθεύεται η επιτυχία της ανάλυσης.

### 3.4 Προσομοίωση των μοντέλων με -50% της έντασης ρεύματος του βασικού σεναρίου.

Στην συνέχεια θα γίνει ο έλεγχος ορθότητας των μαθηματικών μοντέλων για μικρότερη ένταση ρεύματος από την βασική και συγκεκριμένα -50% λιγότερη από 150 A. Εφόσον έχουμε ρεύμα ίσο με -50% του βασικού τότε η διαδικασία θα τρέξει για I=75 A. Η αρχή θα γίνει με την σύγκρισή της συγκέντρωσης του οξυγόνου στην άνοδό (σχήμα 3.9).

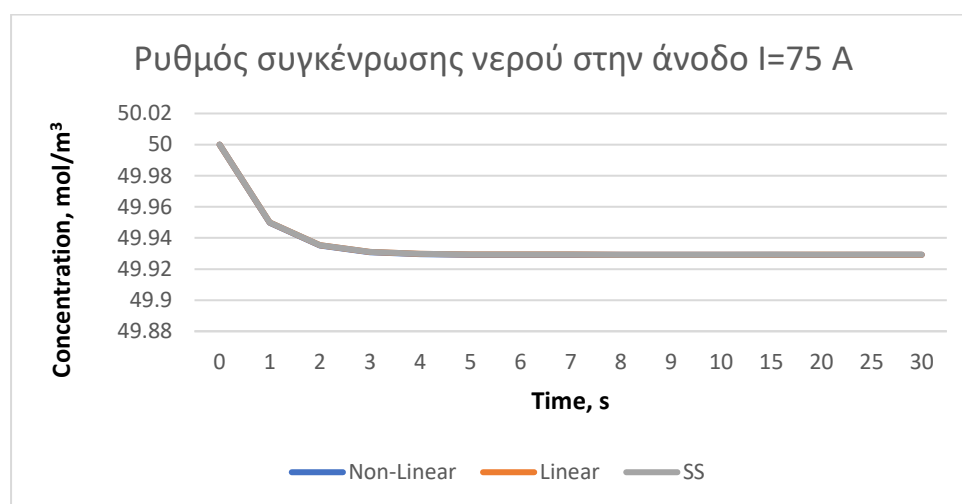


**Σχήμα 3.9 :** Ρυθμός συγκέντρωσης οξυγόνου στα I=75 A

Κατευθείαν φαίνεται πώς η ποσότητα της συγκέντρωσης του οξυγόνου άλλαξε κι αυτό είναι λογικό εφόσον άλλαξε η τιμή της εισόδου ( λιγότερη ένταση ρεύματος).

Από μηδέν mol οξυγόνου κατέληξαν στα 0.003 mol περίπου με μία απότομη αύξηση της συγκέντρωσης στα πρώτα 3 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης. Παρατηρήθηκε μία σταθερότητα στα 0.003 mol περίπου μετά το πέρας των 6 δευτερολέπτων από την ώρα έναρξης της διαδικασίας. Παρόλο την αύξηση της έντασης, δεν εντοπίστηκε καμία αστάθεια των γραφικών που να είναι άξια περεταίρω ανάλυσης. Αξίζει να αναφερθεί η μικρή διαφορά που φαίνεται στην γραφική του γραμμικού και του μοντέλου χώρου κατάστασης στα 4 με 6 δευτερόλεπτα περίπου, που και πάλι δεν επηρεάζει την μορφή της καμπύλης. Δεν την επηρεάζει διότι οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους.

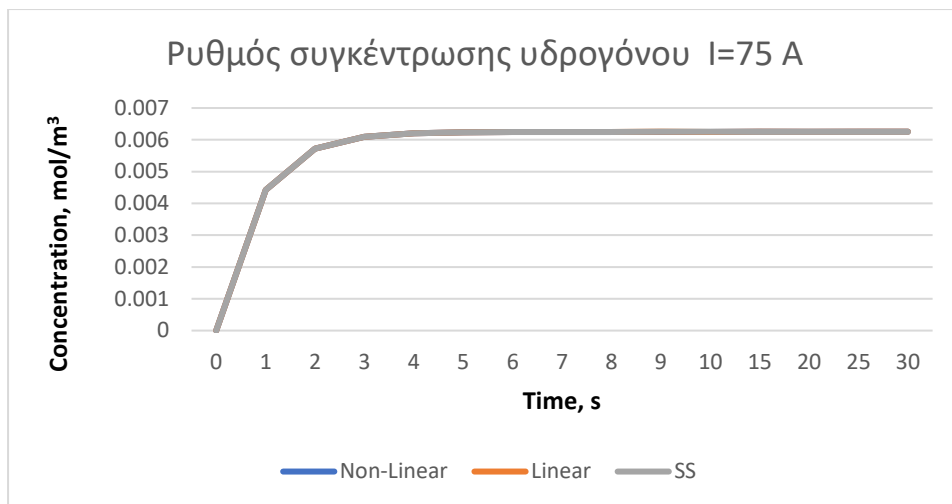
Στην συνέχεια θα γίνει η παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων της συγκέντρωσης νερού στην άνοδο στο σχήμα 10.



**Σχήμα 10:** Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην άνοδο στα  $I=75\text{ A}$

Με την ίδια λογική παρατηρήθηκε η ομοιότητα των καμπυλών ως προς την μορφή τους και τις αποκρίσεις που εμφανίζουν. Η αρχική ποσότητα του νερού στην άνοδο ανέρχεται στα 50 mol και καθώς προχωράει η διαδικασία και γίνονται οι απαιτούμενες χημικές αντιδράσεις. Η συγκέντρωση του νερού στην άνοδο ξεκινάει να μειώνεται απότομα για τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα. Όπως και προηγουμένως πάλι μετά τα πρώτα 5 δευτερόλεπτα η συγκέντρωση σταθεροποιείται και μειώνεται μέχρι τα 49.78 mol περίπου.

Προχωρώντας στα σχήματα 11 και 12 φαίνονται τα αποτελέσματα στην περιοχή της καθόδου. Στο σχήμα 11 είναι οι γραφικές παραστάσεις για την περίπτωση της συγκέντρωσης του υδρογόνου που δημιουργείται στην κάθοδο.



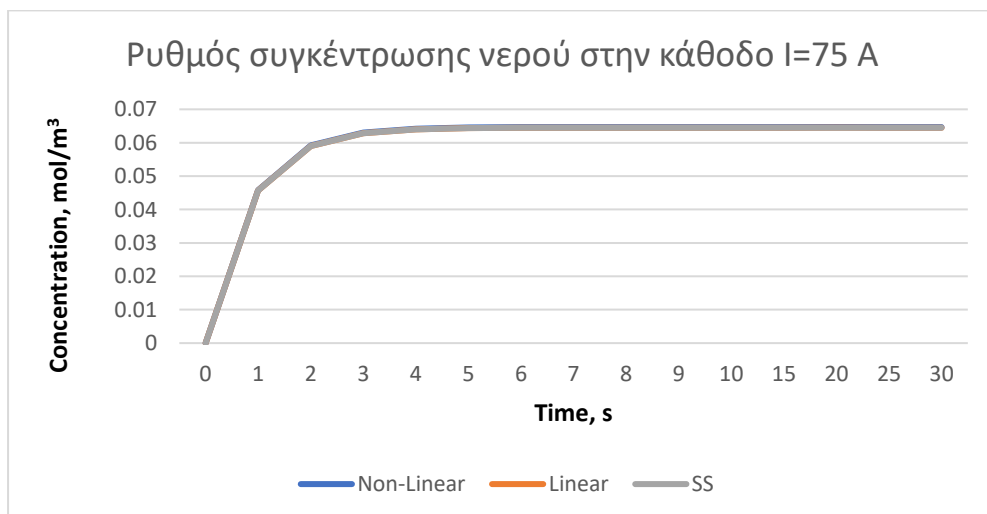
**Σχήμα 11:** Ρυθμός συγκέντρωσης υδρογόνου για I=75 A

Παρόλο την διαφορετική ένταση ρεύματος που δόθηκε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Η ομοιότητα και των τριών γραφημάτων ως προς την απόκριση αλλά και την μορφή είναι αισθητά εμφανείς και παρατηρείται σε τέτοιον βαθμό που σχεδόν ταυτίζονται μεταξύ τους.

Ξεκινώντας πάλι με μηδενική συγκέντρωση υδρογόνου, παρατηρούμαι μία απότομη παραγωγή/συγκέντρωση υδρογόνου μέχρι τα πρώτα 3 δευτερόλεπτα και μετά ξεκινάει η ομαλότητα και ο κορεσμός του, ειδικά μετά το πέρας των 5 δευτερολέπτων, όπου η συγκέντρωση σταθεροποιείται στα 0.00625 mol περίπου.

Τελευταία σημαντική μεταβλητή που θα ελεγχθεί είναι η συγκέντρωση του νερού στην κάθοδο.



**Σχήμα 12:** Ρυθμός συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο στα I=75 A

Η αρχή έγινε με μηδενική συγκέντρωση νερού στην κάθοδο και στα πρώτα 3 δευτερόλεπτα της προσομοίωσης παρατηρείται απότομη αύξηση και μετά από αυτά ξεκινάει σταθεροποίηση του μέχρι και τα 0.0645 mol περίπου.

Όπως και προηγούμενος δεν παρατηρείται κάποια σημαντική διαφορά είτε αστάθεια που ίσως να χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση.



Για περαιτέρω κατανόηση των αποτελεσμάτων και επαλήθευση αυτών, δίνεται ο πίνακας 3.3 ο οποίος δείχνει τις τιμές που σταθεροποιούνται και τα τρία μοντέλα. Συγκεκριμένα δείχνει τον μέσο όρο των τιμών μετά τα 5 δευτερόλεπτα που ξεκινάει η σταθεροποίηση. Κρατήθηκαν μέχρι 7 δεκαδικά ψηφία και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της στρογγυλοποίησης/ στρογγύλευση.

**Πίνακας 3.3** Μετρήσεις σταθεροποίησης 3<sup>ου</sup> σεναρίου I=75 A

Μεταβλητές (mol/m <sup>3</sup> )	Μη – Γραμμικό μοντέλο	Γραμμικό μοντέλο	Μοντέλο χώρου κατάστασης
C <sub>O<sub>2</sub></sub>	0.0031251	0.0031254	0.0031253
C <sub>H<sub>2</sub>Oa</sub>	49.929081	49.929258	49.929258
C <sub>H<sub>2</sub></sub>	0.0062504	0.0062508	0.0062507
C <sub>H<sub>2</sub>Oc</sub>	0.06467	0.06449	0.06449

Είναι δυνατόν να παρατηρηθεί η ομοιότητα των τιμών μεταξύ των μοντέλων. Παρόλο της αύξησης της έντασης, οι τιμές είναι σχεδόν ίδιες και στις τέσσερις μεταβλητές με διαφορά που φτάνει στο πέμπτο και έκτο δεκαδικό ψηφίο. Έτσι επαληθεύεται η επιτυχία της ανάλυσης.

### 3.5 Συμπεράσματα της σύγκρισης

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση, εξήχθησαν κάποια σημαντικά συμπεράσματα που αξίζει να αναφερθούν.

Τα γραφήματα των μεταβλητών, ανεξαρτήτως έντασης ρεύματος I, έχουν την ίδια μορφή καμπύλης και σε συνδυασμό με τις τιμές που είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους (φαίνονται από τους πίνακες), αποδείχθηκε η ισοδυναμία των τριών μοντέλων αλλά και καθίσταται επιτυχής η γραμμικοποίηση που έγινε. Αυτό φαίνεται κι από τις επαληθεύσεις που έγιναν στην συνέχεια.

Με βάση την χημικές αντιδράσεις που γίνονται κατά την διαδικασία της ηλεκτρόλυσης, πρέπει η παραγωγή οξυγόνου σε σχέση με του υδρογόνου να είναι 1 προς 2. Δηλαδή διπλάσια ποσότητα υδρογόνου σε σχέση με του οξυγόνου, κάτι που συμβαίνει αν παρατηρήσουμε τις τιμές των πινάκων 3.1-3.3.

Στην συνέχεια, παρατηρήθηκαν οι αλλαγές των τιμών στις ποσότητες παραγωγής του οξυγόνου και υδρογόνου καθώς η ένταση ρεύματος άλλαξε. Λαμβάνοντας υπόψιν τους μαθηματικούς τύπους της παραγωγής οξυγόνου και υδρογόνου (τύποι 2.7, 2.23) φαίνεται πώς ο ρυθμός παραγωγής οξυγόνου και υδρογόνου είναι ανάλογος της έντασης ρεύματος I. Έτσι πρέπει να θεωρείται

αναμενόμενο καθώς αυξάνεται η ένταση ρεύματος κατά 50% θα πρέπει να αυξηθούν και τιμές των μεταβλητών αυτών κατά 50%.

Παρατηρώντας τους πίνακες 3.1 και 3.2 η συγκέντρωση του οξυγόνου αυξήθηκε κατά 50% την ώρα που και η ένταση του ρεύματος αυξήθηκε κατά 50%. Βλέποντας τώρα τον πίνακα 3.3 , όταν η ένταση του ρεύματος μειώθηκε από τα 150 A στα 75 A δηλαδή κατά 50% μείωση θα έπρεπε να γίνει και το αντίστοιχο στις συγκεντρώσεις των μεταβλητών. Διαπιστώθηκε πώς όντως καθώς η ένταση μειώθηκε κατά 50% η συγκέντρωση του υδρογόνου και οξυγόνου μειώθηκε και αυτή κατά 50% από την αρχική. Έτσι επαληθεύονται οι μαθηματικοί τύποι (και ταυτόχρονα η αναπαράσταση αυτών σε διαγράμματα) που περιγράφουν τις συγκεντρώσεις των μεταβλητών.

## **Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>: Ανάπτυξη ελεγκτών στο σύστημα ηλεκτρόλυσης νερού**

### **4.1 Εισαγωγή κεφαλαίου**

Είναι καλό να αναφερθεί ότι το κυρίως σώμα της επιστήμης των συστημάτων αυτόματου ελέγχου είναι η σύνθεση. Ως σύνθεση εννοείται η εύρεση του κατάλληλου ελεγκτή για συγκεκριμένη διεργασία. Το ποιος είναι ο κατάλληλος ελεγκτής θα εξετασθεί και θα εξηγηθεί στην συνέχεια του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

Συγκεκριμένα, θα πραγματοποιηθεί η μετάβαση του ανοιχτού βρόχου του συστήματος, σε κλειστό βρόχο της μονάδας ηλεκτρόλυσης νερού. Για την δημιουργία του κλειστού βρόχου χρειάζεται ένας ελεγκτής, ο οποίος θα είναι υπεύθυνος για την ρύθμιση της ποσότητας υδρογόνου που παράγεται από την μονάδα ηλεκτρόλυσης. Δηλαδή θα μεταβάλλει την ένταση του ρεύματος στην μονάδα PEM. Η ένταση του ρεύματος εφαρμόζεται στα κελιά της PEM και μέσα από αυτήν, πετυχαίνετε η ρύθμιση παραγόμενου υδρογόνου. Η διαδικασία αυτή θα προσομοιωθεί στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab για δύο συγκεκριμένα σενάρια και τρεις βασικούς ελεγκτές ανατροφοδότησης. Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των ελεγκτών είναι δύο : Ρύθμιση Ziegler-Nichols και Ρύθμιση Tyreus Luyben.

#### **4.1.1 Συστήματα με ανατροφοδότηση.**

Ανάδραση ή ανατροφοδότηση είναι η πληροφορία που επιστρέφει από το περιβάλλον προς το σύστημα για να το ενημερώσει κατά πόσο η εντολή (πράξη) εκτελέστηκε σωστά ή λάθος. Η πληροφορία αυτή στα συστήματα αυτόματου ελέγχου έχει πάντοτε επιβεβαιωτικό και διορθωτικό ρόλο. Οι ελεγκτές ανατροφοδότησης που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο είναι οι: P, PI, PID.

Η ανατροφοδότηση περιλαμβάνει πολλά πλεονεκτήματα. Κάποια από αυτά και ίσως τα σημαντικότερα είναι:

- Μείωση της επιρροής εξωτερικών διαταραχών.
- Μείωση της ευαισθησίας του συστήματος σε μεταβολές.

### 4.1.2 Ο ελεγκτής P

Η απλούστερη μορφή ελεγκτή είναι ο αναλογικός ελεγκτής P, δηλαδή δράση του ελεγκτή στο σήμα εισόδου  $E(s)$  είναι αναλογική (Proportional). Ο ελεγκτής P αποτελείται από το αναλογικό κέρδος  $K_c$ .

Η συνάρτηση μεταφοράς  $G_c(s)$  του ελεγκτή είναι:

$$p(t) = p_s + K_c \cdot E(t)$$

όπου:

$p_s$  : Σήμα πόλωσης ή αλλιώς η τιμή της  $p(t)$  όταν  $E(t)=0$

$K_c$  : Σταθερά ενίσχυσης ελεγκτή (gain)

Το σήμα εξόδου του ελεγκτή,  $P(t)$ , είναι ανάλογο του σφάλματος εισόδου  $E(t)$  :

$$P(t) = p(t) - p_s = K_c \cdot E(t)$$

Μετασχηματίζοντας το παραπάνω σε μορφή Laplace έχουμε:

$$P(s) = K_c \cdot E(s)$$

Αναλογική δράση:

$$G_c = K_c \quad (4.1)$$

### 4.1.3 Ο ελεγκτής PI

Ο Ελεγκτής PI είναι αναλογικός και ολοκληρωτικός. Έχει την αναλογική δράση του P ελεγκτή αλλά παράλληλα περιλαμβάνει και μια ολοκληρωτική δράση (Proportional-Integral Action).

Ο ελεγκτής PI, αποτελείται από το αναλογικό κέρδος  $K_c$  και από το ολοκληρωτικό κέρδος  $K_i$  ή την χρονική ολοκληρωτική σταθερά  $\tau_I$

Όπου:

$$K_i = \frac{K_c}{\tau_I}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς  $G_c(s)$  του ελεγκτή είναι:

$$p(t) = p_s + K_c \cdot E(t) + \left(\frac{K_c}{\tau_I}\right) \cdot \int E(t)$$

Μετασχηματίζοντας το παραπάνω σε μορφή Laplace έχουμε:

$$P(s) = K_c \cdot \left[ 1 + \frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{s} \right] \cdot E(s)$$

όπου :

$\tau_i$  : ολοκληρωτική χρονική σταθερά ή χρόνος επαναφοράς.

Σε αντίθεση με τον αναλογικό ελεγκτή P , η ολοκληρωτική δράση του PI ελεγκτή μπορεί να εξαλείψει το σφάλμα.

Αναλογική-Ολοκληρωτική Δράση-Συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_c = K_c \cdot \left[ 1 + \frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{s} \right] \quad (4.2)$$

#### 4.1.4 Ο ελεγκτής PID

Ο Ελεγκτής PID είναι αναλογικός, ολοκληρωτικός και διαφορικός. Έχει την αναλογική δράση του P ελεγκτή, την ολοκληρωτική δράση του PI ελεγκτή αλλά παράλληλα περιλαμβάνει και μια διαφορική δράση (Derivative Action). Ο PID ελεγκτής αποτελείται από το αναλογικό κέρδος  $K_c$ , από το ολοκληρωτικό κέρδος  $K_i$  και από το διαφορικό κέρδος  $K_d$ .

Ισχύει:

$$K_d = K_c \cdot \tau_D$$

Η συνάρτηση μεταφοράς  $G_c(s)$  του ελεγκτή είναι:

$$p(t) = p_s + K_c \cdot E(t) + \left( \frac{K_c}{\tau_i} \right) \cdot \int E(t) + (K_c \cdot \tau_D) \cdot \frac{dE(t)}{dt}$$

Μετασχηματίζοντας το παραπάνω σε μορφή Laplace έχουμε:

$$P(s) = K_c \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{s} \right) + \tau_D \cdot s \right] \cdot E(s)$$

όπου :

$\tau_D$  : Διαφορική χρονική σταθερά ή αλλιώς, χρόνος διαφόρισης.

Αναλογική-Ολοκληρωτική-Διαφορική Δράση-Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$G_c = K_c \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{s} \right) + \tau_D \cdot s \right] \quad (4.3)$$

Έχοντας και αυτός ολοκληρωτική δράση, ο PID ελεγκτής μπορεί να εξαλείψει το σφάλμα.

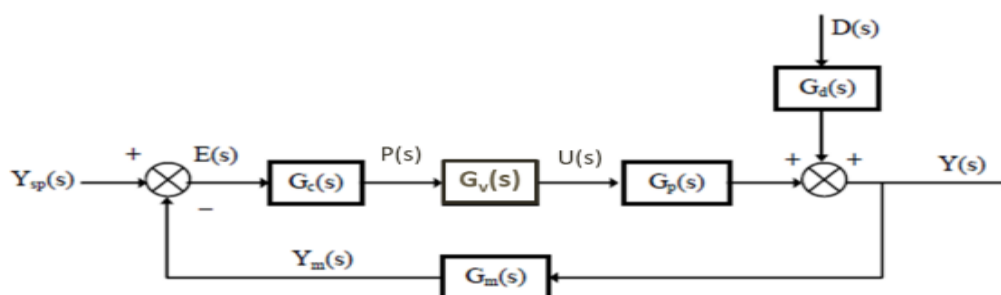
Λόγω της επιπλέον αύξησης στην χρονική σταθερά (του PID) στον κλειστό βρόχο που παρατηρείται , δημιουργείται μία πιο αργή απόκριση με αποτέλεσμα να βγάζει συνήθως καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τον PI ελεγκτή.

## 4.2 Γεωμετρικός τόπος ριζών

Ένα από τα κύρια προβλήματα σχεδίασης συστημάτων αυτόματου ελέγχου είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων ενός ελεγκτή (π.χ.  $K_c$ ,  $\tau_I$ ,  $\tau_D$ ), έτσι ώστε οι πόλοι του κλειστού συστήματος να καταλαμβάνουν νέες επιθυμητές θέσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Οι θέσεις των πόλων της χαρακτηριστικής εξίσωσης ενός συστήματος αυτόματου ελέγχου στο μιγαδικό επίπεδο καθορίζουν την ευστάθειά του και επηρεάζουν τη μεταβατική του απόκριση. Ο ελεγκτής στην απλούστερη του, μορφή (αναλογικός ελεγκτής) θα έχει μια παράμετρο, τη σταθερά ενίσχυσης,  $K_c$ . Η μεταβολή της σταθεράς  $K_c$ , έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση της θέσης των πόλων του κλειστού συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο. Ο γεωμετρικός τόπος των πόλων της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κλειστού συστήματος, που διαγράφεται στο μιγαδικό επίπεδο του  $s$  καθώς το  $K_c$  μεταβάλλεται, αποτελεί το θέμα μελέτης της παρούσης ενότητας.

Μετά την εύρεση του γεωμετρικού τόπου είναι δυνατόν να βρεθεί το κρίσιμο κέδρος ( $K_{cr}$ ) και η κρίσιμη περίοδος ταλάντωσης ( $P_{cr}$ ). Εφόσον βρέθηκαν οι κρίσιμες τιμές των παραμέτρων  $K_{cr}$  και  $P_{cr}$ , είναι εφικτό να γίνει η ανάπτυξη των ελεγκτών P, PI και PID, μέσω της μεθόδου Ziegler-Nichols, αλλά και των PI, PID μέσω της μεθόδου Tyreus Luyben που θα εξηγηθεί σε επόμενη ενότητα.

Αρχικά στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το διάγραμμα βαθμίδων κλειστού βρόχου που περιγράφει το μοντέλο της μονάδας ηλεκτρόλυσης νερού με συνάρτηση μεταφοράς η παραγόμενη ποσότητα υδρογόνου (συγκέντρωση υδρογόνου σε mole):



**Εικόνα 4.1:** Ισοδύναμο διάγραμμα βαθμίδων κλειστού βρόχου, για την PEM ηλεκτρόλυση.

Όπου,

$Y_{sp}(s)$ : Επιθυμητό σήμα αναφοράς ή (set point)

$Y(s)$ : Μεταβλητή εξόδου από την διεργασία ή αλλιώς σήμα εξόδου του συστήματος.

$E(s)$ : Σφάλμα ( $E(s) = Y_{sp}(s) - Y_m(s)$ )

$P(s)$ : Σήμα εξόδου από τον ελεγκτή

$U(s)$ : Σήμα εξόδου από τον ενεργοποιητή

$Y_m(s)$ : Μεταβλητή εξόδου από το μετρητικό στοιχείο

Και,

- $G_c(s)$  : Συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή
- $G_v(s)$  : Συνάρτηση μεταφοράς του ενεργοποιητή
- $G_p = G_{p_{31}}(s)$  : Συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας (συγκέντρωση παραγόμενου υδρογόνου)
- $G_d(s)$  : Συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής (μηδέν στην περίπτωση μας)
- $G_m(s)$  : Συνάρτηση μεταφοράς μετρητικού στοιχείου

Η εξίσωση που περιγράφει την έξοδο του συστήματος κλειστού βρόχου, του σχήματος 4.2 , είναι:

$$Y(s) = \frac{G_p(s) \cdot G_v(s) \cdot G_c(s)}{1 + G_p(s) \cdot G_v(s) \cdot G_c(s) \cdot G_m(s)} \cdot Y_{sp}(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_p(s) \cdot G_v(s) \cdot G_c(s) \cdot G_m(s)} \cdot D(s) \quad (4.4)$$

Δεδομένα: Πρακτικά έχουμε τέσσερεις συναρτήσεις μεταφοράς της διεργασίας:

$G_{p_{11}}$  = συνάρτηση μεταφοράς της παραγωγής οξυγόνου (  $G_{p_{11}} = \frac{Y_1(s)}{u(s)}$  )

$G_{p_{21}}$  = συνάρτηση μεταφοράς της συγκέντρωσης νερού στην άνοδο (  $G_{p_{21}} = \frac{Y_2(s)}{u(s)}$  )

$G_{p_{31}}$  = συνάρτηση μεταφοράς της παραγωγής υδρογόνου (  $G_{p_{31}} = \frac{Y_3(s)}{u(s)}$  )

$G_{p_{41}}$  = συνάρτηση μεταφοράς της συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο (  $G_{p_{41}} = \frac{Y_4(s)}{u(s)}$  )

Όπου  $u(s) = I$ .

Η συνάρτηση μεταφοράς της διεργασίας που μας ενδιαφέρει είναι του υδρογόνου οπότε, μέσω μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$G_{p_{31}} = \frac{3785516221790425}{(16384 \cdot (2251799813685248 \cdot s + 2772181262562339))} \Leftrightarrow G_{p_{31}} = \frac{0.8 \cdot 10^{-5}}{0.8 \cdot s + 1} \quad (4.5)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του μετρητικού στοιχείου, προσεγγιστικά είναι:

$$G_m = \frac{1}{30 \cdot s + 1} \quad (4.6)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ενεργοποιητή, προσεγγιστικά είναι:

$$G_v = \frac{1}{10 \cdot s + 1} \quad (4.7)$$

Την συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή την ορίζουμε ως εξής:

$$G_c = K_c \quad (4.8)$$

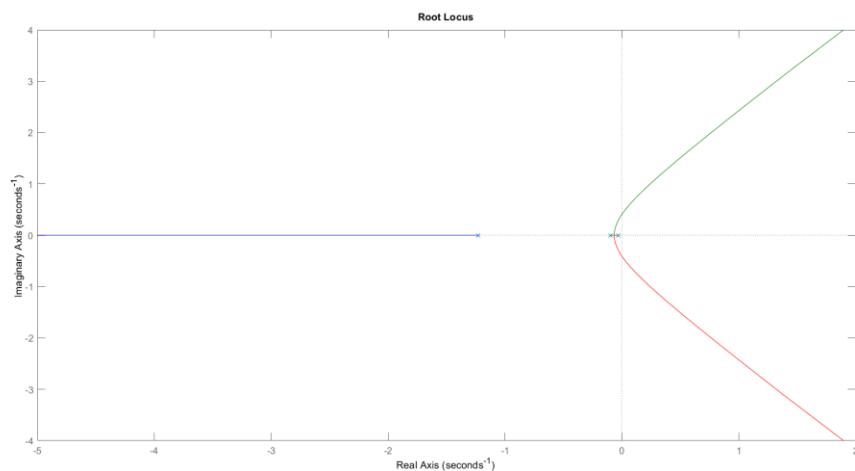
Ουσιαστικά, έγινε η υπόθεση ότι ο ελεγκτής που αναπτύχθηκε είναι ένας αναλογικός ελεγκτής P όπου περιέχει το αναλογικό κέρδος  $K_c$ . Ο σκοπός της συγκεκριμένης υπόθεσης είναι η εύρεση του γεωμετρικού τόπου του συστήματος μας με αποτέλεσμα την εύρεση του κρίσιμου κέρδους  $K_{cr}$  και του κρίσιμου πλάτους  $P_{cr}$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού βρόχου είναι:

$$G(s) = G_p(s) \cdot G_v(s) \cdot G_c(s) \cdot G_m(s) \quad (4.9)$$

θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του γεωμετρικού τόπου.

Με την βοήθεια του περιβάλλοντος MATLAB, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών περιγράφεται από το σχήμα 4.3. Ο οριζόντιος άξονας περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς ενώ ο κάθετος άξονας αναφέρεται στους φανταστικούς αριθμούς.



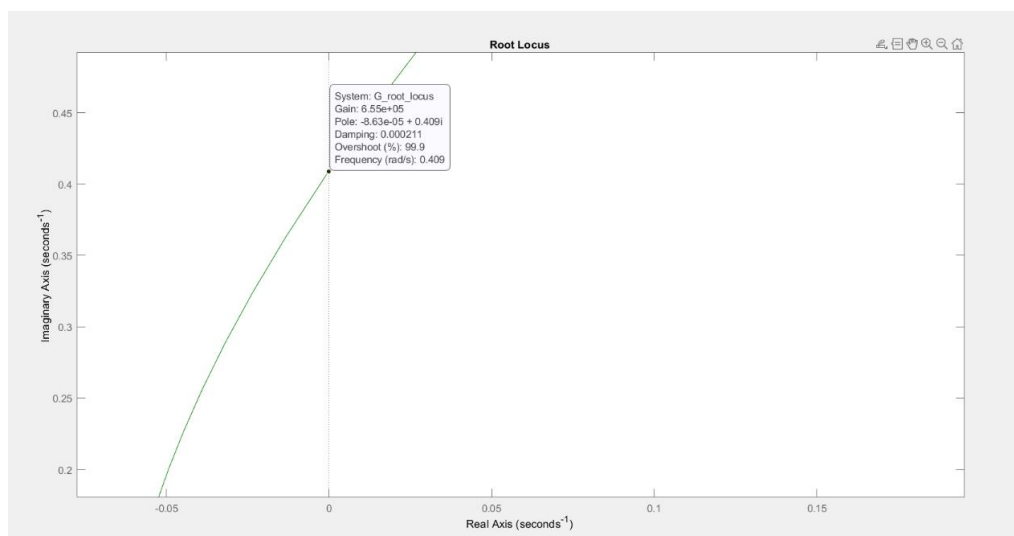
**Εικόνα 4.2:** Γεωμετρικός τόπος των ριζών



Σημαντικές διαπιστώσεις που εξήχθησαν είναι:

- Εφόσον η αρχή κάθε κλάδου βρίσκεται αριστερά από τον φανταστικό άξονα , δηλαδή οι ρίζες του συστήματος έχουν πραγματικό μέρος , τότε συμπεραίνεται ότι το, υπό μελέτη σύστημα, βρίσκεται σε κατάσταση ευστάθειας.
- Από το σχήμα 4.3 παρατηρούνται 3 κλάδοι. Ο αριθμός των ριζών περιγράφει τον αριθμό των κλάδων του γεωμετρικού τόπου. Οπότε ο αριθμός των ριζών της  $G(s)$  είναι,  $n=3$  . Οι ρίζες της συνάρτησης  $G(s)$  είναι:  $-0.0335, -0.1, -1,23$ .
- Ο αριθμός των μηδενικών θέσεων του συστήματος πρέπει να είναι μικρότερος από τον αριθμό των ριζών. Ο αριθμός των μηδενικών θέσεων στο σύστημα της μονάδας ηλεκτρόλυσης είναι  $m=0$ , άρα ισχύει η συνθήκη  $m < n$  και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $n-m=3$  κλάδοι του γεωμετρικού τόπου θα καταλήγουν σε μηδενικά τοποθετημένα στο άπειρο όπως και συμβαίνει.
- Παρατηρείται συμμετρία ως προς τον οριζόντιο άξονα των πραγματικών αριθμών

Στην συνέχεια παρατηρήθηκαν οι κλάδοι που τέμνουν τον φανταστικό άξονα και έγινε μια αυθαίρετη επιλογή ενός από αυτούς. Σκοπός η επιλογή του κρίσιμου κέρδους  $K_{cr}$  και του κρίσιμου πλάτους  $P_{cr}$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχτηκε το σημείο τομής του πράσινου κλάδου με τον φανταστικό άξονα, όπως παρατηρείται στην εικόνα 4.3 και οι παραγόμενες πληροφορίες είναι:



**Εικόνα 4.3:** Το σημείο όπου επιλέχτηκε από τον γεωμετρικό τόπο των ριζών, για την εύρεση των  $K_{cr}$  και  $P_{cr}$

Από τις πληροφορίες της εικόνας 4.3 μπορούν να παρθούν τα ζητούμενα αυτής της ενότητας δηλαδή , το κρίσιμο κέρδος  $K_{cr}$  και το κρίσιμο πλάτος  $P_{cr}$  και με τα οποία θα γίνει στην συνέχεια η ανάπτυξη των ελεγκτών:

- $K_{cr} = \text{Gain} = 6.55 \times 10^5$
- $\text{Pole} = 0 \pm 0.409 \cdot i$  όπου,  $\omega = 0.409$  άρα,  $P_{cr} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 15.35$

### 4.3 Ανάπτυξη ελεγκτών με την μέθοδο Ziegler-Nichols

Η μέθοδος Ziegler-Nichols όπως υποδηλώνει και το όνομά της δημιουργήθηκε από τους John G. Ziegler και Nathaniel B. Nichols το έτος 1942. Είναι από τις πλέον δημοφιλής τεχνικές για τον συντονισμό ελεγκτών ανάδρασης και συγκεκριμένα τους P, PI, PID.

Η Ρύθμιση Ziegler-Nichols είναι μια εμπειρική μέθοδος και βασίζεται σε μία ανάλυση ευστάθειας. Έχει εφαρμογή σε ευσταθή συστήματα, δηλαδή συστήματα των οποίων η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου έχει πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο. Συγκεκριμένα η μέθοδος αυτή, δουλεύει για συστήματα ανοικτού βρόχου αλλά και συστήματα κλειστού βρόχου. Εμείς εφόσον έχουμε σύστημα κλειστού βρόχου θα χρησιμοποιήσουμε την παραλλαγή της μεθόδου για ένα τέτοιο σύστημα.

Βασικά, είναι μια σχετικά απλή μέθοδος συντονισμού των ελεγκτών και λόγω του τρόπου λειτουργίας της (δηλαδή αποτελεί έναν ευρετικό κανόνα συντονισμού), μπορεί να προσαρμοστεί και να «τελειοποιηθεί» με σκοπό τις καλύτερες προσεγγίσεις αυτών. Στην συγκεκριμένη μέθοδο γίνεται χρήση δυο παραμέτρων, της κρίσιμης τιμής κέρδους ( $K_{cr}$ ) και της κρίσιμης περιόδου ταλάντωσης ( $P_{cr}$ ) όπου βρέθηκαν από το γεωμετρικό τόπο των ριζών.

Γενικά η Ziegler-Nichols επιχειρεί να παράξει καλές τιμές για τις παραμέτρους απολαβής PID και γνωρίζοντας τις τιμές των παραμέτρων  $K_{cr}$  και  $P_{cr}$ , μπορούν να υπολογιστούν οι παράμετροι  $K_c$ ,  $\tau_I$ ,  $\tau_D$ , μέσω του πίνακα 4.1.

**Πίνακας 4.1A:** Ρύθμιση Ziegler - Nichols

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
P	$0.5 \cdot K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$(\frac{1}{1.2}) \cdot P_{cr}$	0
PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot P_{cr}$	$0.125 \cdot P_{cr}$

Τελικά καταλήγουμε στο παρακάτω:

$$P: G_c = K_c \quad (4.10)$$

$$PI: G_c = K_c \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{\tau_I} \cdot \frac{1}{s} \right) \right] \quad (4.11)$$

$$PID: G_c = K_c \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{\tau_I} \cdot \frac{1}{s} \right) + \tau_D \cdot s \right] \quad (4.12)$$

Οπότε αντικαθιστώντας τα  $K_{cr}$  και  $P_{cr}$  στον πίνακα 4.1A έχουμε:

**Πίνακας 4.1B:** Ρύθμιση Ziegler – Nichols\*

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
P	$3.275 \times 10^5$	$\infty$	0
PI	$2.9475 \times 10^5$	12.792	0
PID	$3.93 \times 10^5$	7.675	1.91875

#### 4.4 Ανάπτυξη ελεγκτών με την μέθοδο Tyreus-Luyben

Η μέθοδος συντονισμού των Tyreus και Luyben δημιουργήθηκε το 1997 και ακολουθεί την ίδια διαδικασία με την Ziegler-Nichols, δηλαδή βασίζεται στην ανάλυση ευστάθειας. Ακολουθεί την ίδια διαδικασία μέχρι το σημείο λήψης του τελικού κέρδους και της τελικής περιόδου. Σε αντίθεση με την Ziegler-Nichols, η Tyreus-Luyben προτείνει μόνο ρυθμίσεις για τους ελεγκτές PI και PID. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι η μέθοδος φέρει τροποποιήσεις στις παραμέτρους των τύπων των ελεγκτών. Περιλαμβάνει πιο συντηρητικές ρυθμίσεις (υψηλότερος συντελεστής απόσβεσης κλειστού βρόχου) και θεωρείτε πιο ικανή σε συστήματα χημικών διεργασιών. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας 4.2 που υπολογίζει τις παραμέτρους απολαβής PI, PID:

$K_c$ (αναλογικό κέρδος) ,  $\tau_I$ (χρόνος ολοκλήρωσης) ,  $\tau_D$ (χρόνος παραγωγισής).

**Πίνακας 4.2A:** Ρύθμιση Tyreus Luyben

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
PI	$\frac{K_{cr}}{3.2}$	$2.2 \cdot P_{cr}$	0
PID	$\frac{K_{cr}}{2.2}$	$2.2 \cdot P_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{6.3}$

Οπότε αντικαθιστώντας τα  $K_{cr}$  και  $P_{cr}$  στον πίνακα 4.2 έχουμε:

**Πίνακας 4.2B:** Ρύθμιση Tyreus Luyben

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
PI	$2.047 \times 10^5$	33.77	0
PID	$2.977 \times 10^5$	33.77	2.437

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές των ελεγκτών P,PI,PID και για τις δύο ρυθμίσεις (Z-N , T-L) θα προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα με την προσομοίωση του συστήματος κλειστού βρόχου.

Όμως, πριν να γίνει η προσομοίωση του συστήματος κλειστού βρόχου, έγινε προσομοίωση συστήματος ανοικτού βρόχου με ταυτόχρονη αλλαγή σεναρίων, όπου συγκρίθηκε το μοντέλο στο πεδίο του χώρου κατάστασης με το αντίστοιχο μετασχηματισμένο σε ανοιχτό βρόχο με σκοπό να επαληθευτεί ότι η μοντελοποίηση έγινε σωστά. Αυτό στην συνέχεια θα γίνει σύστημα κλειστού βρόχου με την βοήθεια αντίστοιχων ελεγκτών που αναφέρθηκαν. Η προαναφερθείσα σύγκριση με τα απαραίτητα αποτελέσματα εμφανίζεται στο παράρτημα Α.

## **4.5 Προσομοίωση συστήματος κλειστού βρόχου με την βοήθεια των ελεγκτών ανάδρασης**

### **4.5.1 Εισαγωγικά στοιχεία**

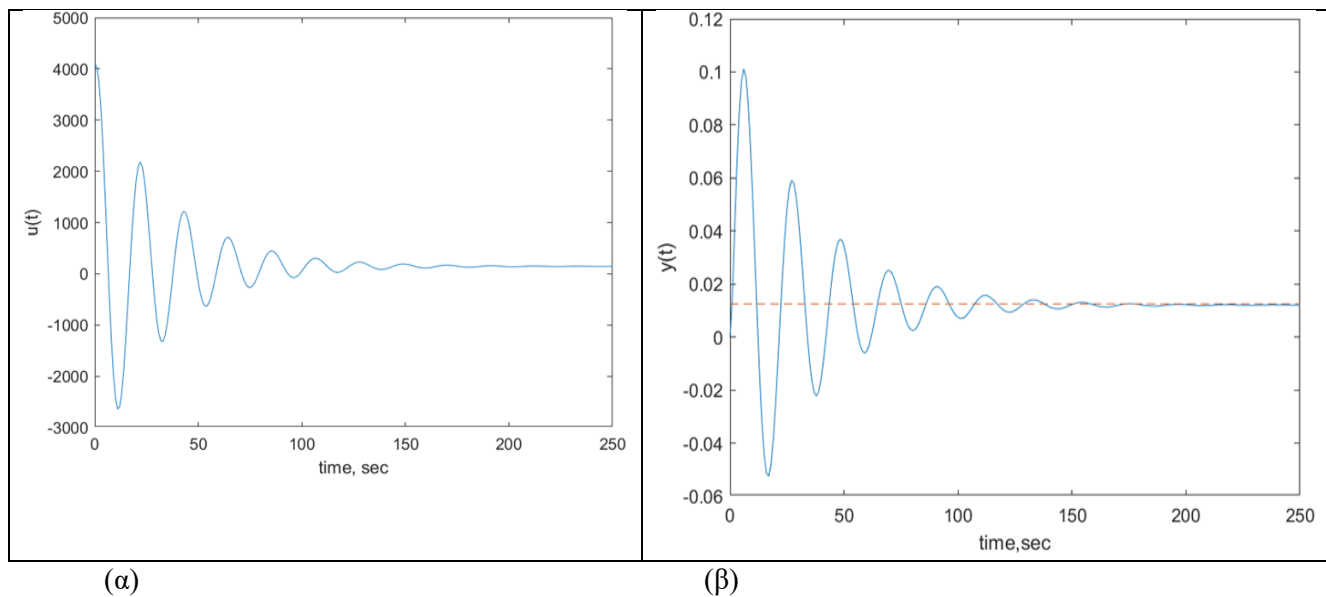
Στις προηγούμενες ενότητες (4.3,4.4), έγινε ο σχεδιασμός των πέντε ελεγκτών μέσω των μεθόδων των Ziegler-Nichols (P, PI, PID) και Tyreus-Luyben (PI, PID) που θα χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση αυτών, στο περιβάλλον της Matlab.

Το θέμα της ενότητας 4.5, θα είναι οι προσομοιώσεις των 5 ελεγκτών στο σύστημα της μονάδας ηλεκτρόλυσης και η σύγκριση αυτών, για να βρεθεί «ο καλύτερος» ελεγκτής που θα μπορεί να κατευθύνει τις τιμές του υδρογόνου στην θέση ισορροπίας (set point).

Ξεκινώντας την προσομοίωση θα εξαχθούν κάποια σημαντικά γραφήματα αλλά και παράλληλα οι τιμές κάποιων κριτηρίων αποδοτικότητας του ελεγκτή (είναι παράμετροι του σφάλματος που προκύπτει). Με βάση δηλαδή, των γραφικών παραστάσεων αλλά και κριτηρίων απόδοσης θα γίνει σύγκριση των ελεγκτών μεταξύ τους αλλά και θα παρθούν κάποια σημαντικά συμπεράσματα για τους ίδιους.

### **4.5.2 Προσομοίωση με την βοήθεια του P ελεγκτή Ziegler-Nichols**

Η αρχή θα γίνει με τους ελεγκτές της μεθόδου Ziegler-Nichols, οι οποίοι είναι οι πρώτοι που θα προσομοιωθούν. Με την βοήθεια του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της Matlab, ξεκινάει η διαδικασία προσομοίωσης του συστήματος κλειστού βρόχου με τον (απλούστερο) ελεγκτή: τον αναλογικό P (εξίσωση **4.10**). Τρέχοντας στο περιβάλλον της Matlab, την διαδικασία για τα πρώτα 250 δευτερόλεπτα, οι αποκρίσεις  $u(t)$  ,  $y(t)$  είναι ( Σχήμα 4.1 ):



**Σχήμα 4.1 :** (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή P Ziegler-Nichols και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή P Ziegler-Nichols

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1 (α) χειραγωγούμενη μεταβλητή (το ρεύμα) ταλαντώνεται/μεταβάλλεται για περίπου 150 δευτερόλεπτα έως ότου ξεκινήσει να προσεγγίζει τα 150 A, χωρίς βέβαια να μπορέσει να τα φτάσει ακριβώς. Σε μηδενικό χρόνο βρίσκεται στα 4093.75 A ρεύματος, αργώντας να πέσει κάτω των 1000 A. Προφανώς και τέτοιες τιμές δεν είναι επιτρεπτές (ρεαλιστικές) καθώς στην πραγματικότητα, υπάρχει ανώτατο όριο για προστασία των συσκευών και των εξαρτημάτων.

Στο σχήμα 4.1 (β) παρατηρούμε ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα για τον ελεγκτή P. Δηλαδή την αδυναμία του ελεγκτή να μηδενίσει πλήρως το σφάλμα. Συγκεκριμένα ενώ το σήμα της  $y(t)$  έπρεπε να καταλήγει στην τιμή του set point ίσο με  $0.0125 \text{ mol/m}^3$  υδρογόνου ο αναλογικός ελεγκτής στα 200 με 250 δευτερόλεπτα καταφέρνει να ισορροπήσει σε ένα μέσο όρο τιμών ίσο με 0.012047 δηλαδή 0.00045 μονάδες μακριά από την θέση ισορροπίας (set point). Αρνητικές τιμές ρεύματος δεν υφίστανται στην πραγματικότητα, παρόλο που στο περιβάλλον των μαθηματικών υφίστανται.

**Σημείωση I :** οι ταλαντώσεις που δημιουργούνται είναι οι αποκλίσεις της πραγματικής τιμής από την σταθερή τιμή που θέλουμε. ουσιαστικά η προσπάθεια του ελεγκτή να εξαλείψει το σφάλμα.

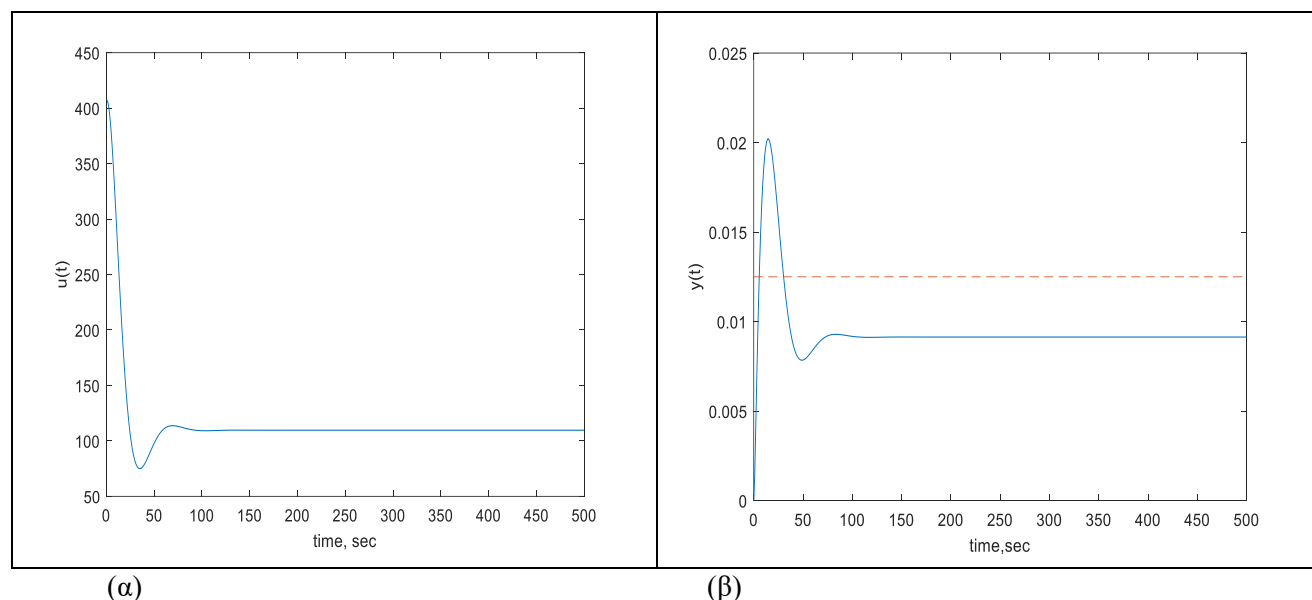
Από την στιγμή που έχουμε αρνητικές τιμές έντασης ρεύματος ,γίνεται κατανοητό ότι, τα αποτελέσματα είναι μη πραγματικά (μη-ρεαλιστικά). Επίσης (όπως αναφέρθηκε προηγουμένως) παρατηρούνται πάρα πολύ υψηλές τιμές με αποτέλεσμα την αύξηση της πιθανότητας να δημιουργηθεί πρόβλημα σε εξαρτήματα της μονάδας ηλεκτρόλυσής (λόγω της υψηλής έντασης ρεύματος) .

Για αυτό, με δοκιμή και σφάλμα και ορίζοντας επιτρεπτά όρια στην ένταση του ρεύματος έως 500 A, έγινε fine tuning στο ελεγκτή P, τροποποιώντας μονάχα την τιμή της  $K_c$ . Η νέα τιμή του  $K_c$  ορίζεται ως 10 φορές μικρότερη και οι παράμετροι του νέου P (P fine tuning) φαίνονται στον Πίνακα 4.3A :

**Πίνακας 4.3A :** Ρύθμιση Ziegler – Nichols με νέο P

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
P fine tuning	$\frac{0.5 \cdot K_{cr}}{10}$	$\infty$	0
P fine tuning	$3.275 \times 10^4$	$\infty$	0

Οπότε προσομοιώνοντας την διαδικασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab εμφανίστηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:



**Σχήμα 4.2 :** (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή P fine tuning Ziegler-Nichols και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή P fine tuning Ziegler-Nichols

Παρατηρώντας τις αποκρίσεις βλέπουμε:

Στην απόκριση του ρεύματος σχήμα 4.2 (α) καταφέραμε περιορίσουμε την τιμή του σε επιτρεπτά όρια, (μέγιστη κάτω από 450 A) αλλά και να μην υπάρχουν αρνητικές τιμές. Στην απόκριση της συγκέντρωσης υδρογόνου ( $y(t)$ ) δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές, και επίσης μειώθηκαν αρκετά οι ταλαντώσεις. Δυστυχώς βλέπουμε, ότι παρόλο που ο P fine tuning καταφέρνει να ισορροπήσει σε μία τιμή, δεν καταφέρνει να προσεγγίσει το set point. Συγκεκριμένα στο σχήμα 4.2 (α) ο ελεγκτής ισορροπεί στα 109.8 A ρεύματος. Στο σχήμα 4.2 (β) ο ελεγκτής ισορροπεί στα 0.009148 mol/m<sup>3</sup>

υδρογόνου. Οπότε γίνεται κατανοητό πως ο P ελεγκτής δεν ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του συστήματος.

**Σημείωση II :** Βασικά η παραγωγή υδρογόνου με την μέθοδο της ηλεκτρόλυσης του νερού, είναι κατά βάση μία σχετικά αργή διεργασία και για αυτό έχοντας χαμηλότερη τιμή της  $K_c$ , παράγει καλύτερα αποτελέσματα.

### 4.5.3 Προσομοίωση με την βοήθεια του PI ελεγκτή Ziegler-Nichols

Αλλάζοντας τον ελεγκτή από P σε PI (εξίσωση 4.11) παρατηρήθηκε μια υπερβολικά ταλαντωτική συμπεριφορά στις αποκρίσεις εισόδου και εξόδου. Η κατάσταση χειροτέρευε καθώς ο χρόνος της προσομοίωσης εξελισσόταν. Η ταλαντωτική συμπεριφορά συνεχώς αυξανόταν, με αποτέλεσμα ο ελεγκτής PI αύξανε την τιμή του σφάλματος συνεχώς.

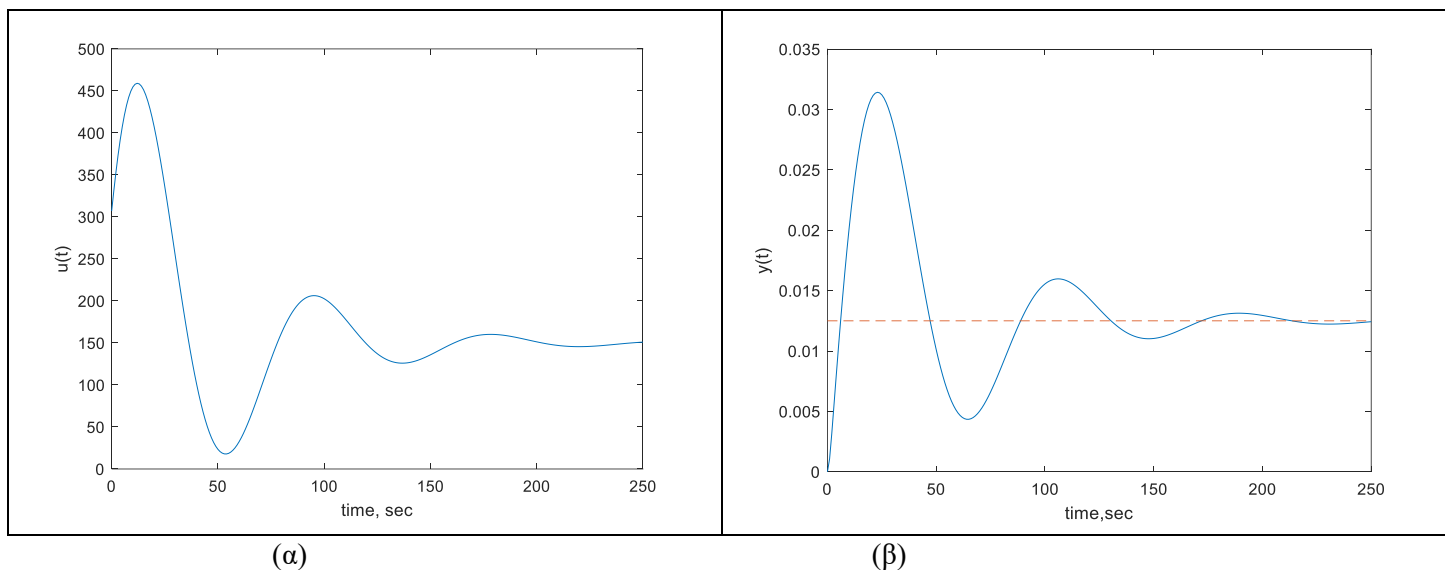
Τελικά οι προτεινόμενες παράμετροι που μας δίνει η ρύθμιση Zigler-Nichols για τον PI ελεγκτή δεν είναι καθόλου ικανοποιητικές, οπότε έγιναν μερικές αλλαγές στην σταθερά ενίσχυσης του ελεγκτή (gain) με σκοπό να βελτιωθούν τα σήματα εισόδου και εξόδου. Με την μέθοδο της δοκιμής και σφάλματος μειώθηκε σταδιακά η σταθερά ενίσχυσης, έχοντας στόχο την βελτίωση του ελεγκτή αλλά και ταυτόχρονα να ικανοποιεί τους περιορισμούς που τέθηκαν προηγουμένως.

Με την χρήση της μεθόδου δοκιμής και σφάλματος η νέα τιμή του  $K_c$  ορίζεται ως 12 φορές μικρότερη και οι παράμετροι και του νέου PI (PI fine tuning) φαίνονται παρακάτω :

**Πίνακας 4.3B :** Ρύθμιση Ziegler – Nichols με νέο PI

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
PI fine tuning	$\frac{0.45 \cdot K_{cr}}{12}$	$(\frac{1}{1.2}) \cdot P_{cr}$	0
PI fine tuning	$2.4563 \times 10^4$	12.792	0

Οπότε προσομοιώνοντας την διαδικασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab εμφανίστηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:



**Σχήμα 4.3 :** (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PI fine tuning Ziegler-Nichols και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή PI fine tuning Ziegler-Nichols

Παρόλο την ταλαντωτική συμπεριφορά που παρατηρείται στον PI, καταφέρνει να προσεγγίσει τα 150 A σε αντίθεση του P που δεν τα προσεγγίζει καθόλου (σχήμα 4.3 α). Στον χρόνο που πραγματοποιείται η προσομοίωση, ο ελεγκτής αδύνατη να ισορροπήσει στα 150 A, αλλά βρίσκεται σε αρκετά κοντινές τιμές. Συγκεκριμένα φτάνει σε τιμές  $150 \text{ A} \pm 1 \text{ A}$ .

Στο σχήμα 4.3 (β) παρατηρούμε, ένα καλύτερο αποτέλεσμα (ως προς την σύγκλιση της εισόδου στο set point) σε σύγκριση με τον P. Από την άλλη δεν καταφέρνει να εξαλείψει ακριβώς το σφάλμα στον χρόνο που γίνεται η προσομοίωση, αλλά μετά τα 200 δευτερόλεπτα φαίνεται να συγκλίνει στα  $0.0125 \text{ mol/m}^3$  που θέλουμε. Συγκεκριμένα φτάνει σε τιμές μέχρι και  $0.01243 \text{ mol/m}^3$ .

#### 4.5.4 Προσομοίωση με την βοήθεια του PID ελεγκτή Ziegler-Nichols

Αλλάζοντας τον ελεγκτή από PI σε PID (εξίσωση 4.12) και τρέχοντας στο περιβάλλον του Matlab την διαδικασία για τα πρώτα 250 δευτερόλεπτα, παρατηρήθηκαν αρνητικές τιμές στις αποκρίσεις ( $u(t), y(t)$ ) αλλά και υψηλές τιμές του ρεύματος που ξεπερνάνε το όριο των 500 A. Έτσι παρόλο την μείωση των ταλαντώσεων και τον γρήγορο μηδενισμό του σφάλματος η προσομοίωση δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Τελικά οι προτεινόμενες τιμές των παραμέτρων που μας δίνει η μέθοδος Ziegler Nichols, καθίστανται μη αποτελεσματικές και δεν ανταποκρίνονται στις προδιαγραφές που τέθηκαν στην αρχή. Έτσι και εδώ έγινε fine tuning στον PID ελεγκτή για να βρεθεί ένας που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα αλλά και τις προδιαγραφές που τέθηκαν. Έτσι με δοκιμή και σφάλμα και θεωρώντας τα όρια στην ένταση του ρεύματος

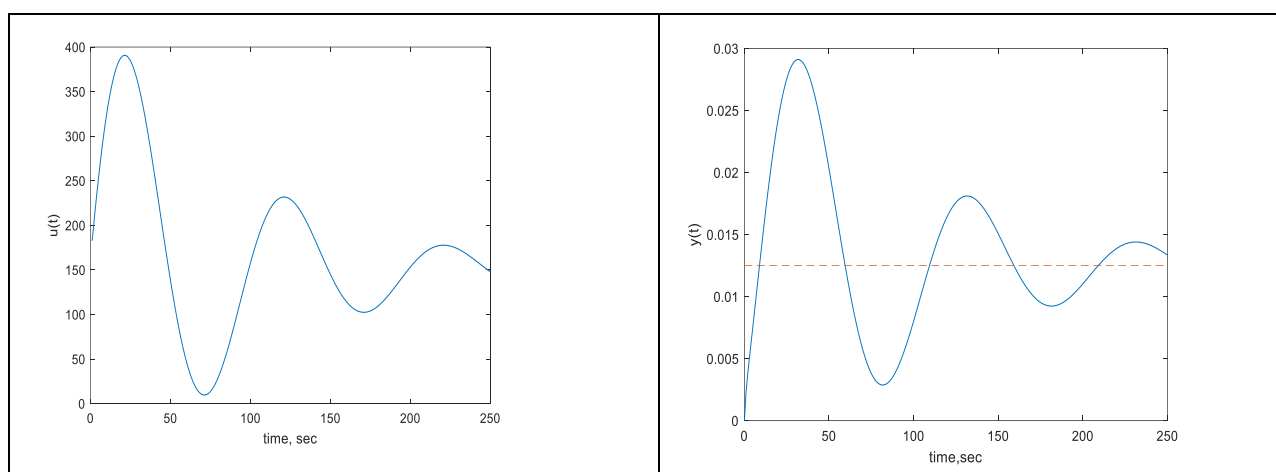


έως 500A, η νέα τιμή του  $K_c$  ορίζεται ως 30 φορές μικρότερη. Οπότε ο νέος ελεγκτής PID fine tuning φαίνεται στον πίνακα 4.3 Γ :

**Πίνακας 4.3Γ** : Ρύθμιση Ziegler – Nichols με νέο PID (PID fine tuning)

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
PID fine tuning	$\frac{0.6 \cdot K_{cr}}{30}$	$(0.5) \cdot P_{cr}$	$(0.125) \cdot P_{cr}$
PID fine tuning	$1.31 \times 10^4$	7.675	1.91875

Οπότε προσομοιώνοντας την διαδικασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab εμφανίστηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:



**Σχήμα 4.4** : (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PID fine tuning Ziegler-Nichols και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή PID fine tuning Ziegler-Nichols

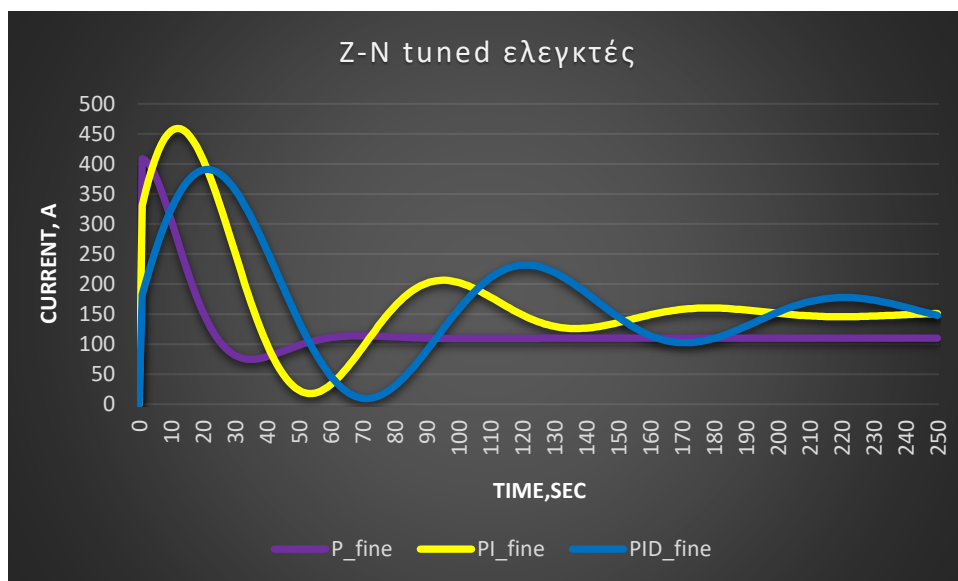
Στην απόκριση του ρεύματος σχήμα ( $u(t)$ ) η τιμή του περιορίστηκε σε επιτρεπτά όρια, (μέγιστη κάτω από 400 A) αλλά και εξαφανίστηκαν οι αρνητικές τιμές. Στην απόκριση της συγκέντρωσης υδρογόνου ( $y(t)$ ) δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές, και επίσης μειώθηκαν αρκετά οι ταλαντώσεις.

Δυστυχώς βλέπουμε ότι παρόλο που ο PID fine tuning καταφέρνει να μειώσει το ύψος των ταλαντώσεων η περίοδος ταλάντωσης αυξήθηκε, μη καταφέροντας να εξαλείψει το σφάλμα στο χρόνο της προσομοίωσης.

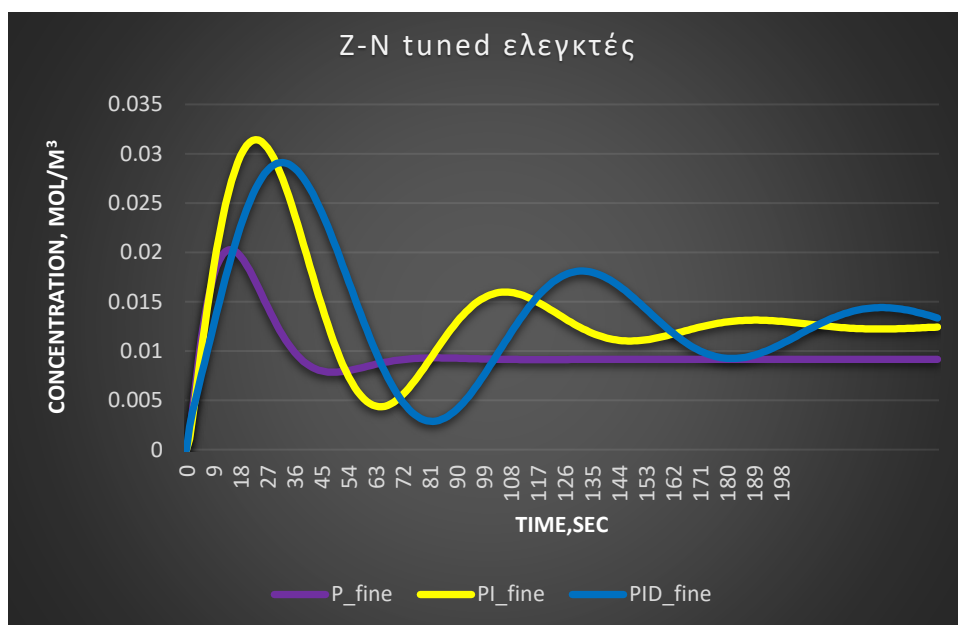
#### 4.5.5 Σύγκριση ελεγκτών της μεθόδου Ziegler Nichols

Στους πίνακες (4.3 Α,Β,Γ) έχουμε τους ελεγκτές τις μεθόδου Ziegler – Nichols P,PI, PID διορθωμένους (fine tuned) και για να βρεθεί ο καλύτερος από τους τρεις θα γίνει σύγκριση μεταξύ τους.

Έτσι, στα παρακάτω γραφήματα φαίνονται οι αποκρίσεις της εισόδου του συστήματος αλλά και της εξόδου για κάθε ελεγκτή ξεχωριστά. Με μωβ χρώμα είναι ο ελεγκτής P\_fine με κίτρινο χρώμα ο PI\_fine και με μπλέ ο PID\_fine.



**Σχήμα 4.5 (α) :** Σύγκριση γραφημάτων των P,PI PID (fine tuning) Ziegler-Nichols της εισόδου  $u(t)$



**Σχήμα 4.5 (β) :** Σύγκριση γραφημάτων των P,PI PID (fine tuning) της εξόδου  $y(t)$  Ziegler-Nichols

Αρχικά για το σχήμα 4.5(α) φαίνεται ότι η απόκριση του P για το σήμα της εισόδου μας, δεν ξεπερνάει τα 410 A και ο PI δεν ξεπερνάει τα 310 A.

Κανένας από τους τρεις ελεγκτές δεν καταφέρνει να ισορροπήσει στα 150 A στον χρόνο που έγινε η προσομοίωση με τον PI να φαίνεται να το προσεγγίζει γρηγορότερα.

Στο σχήμα 4.5(β) , δηλαδή την απόκριση της εξόδου, φαίνονται παρόμοια πράγματα. Ο PID ελεγκτής εδώ έχει μικρότερες μέγιστες τιμές από τον PI αλλά φαίνεται πως ο PI έχει ομαλότερη απόκριση και ομαλότερες ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας. Ξανά, κανένας από τους τρεις ελεγκτές δεν καταφέρνει να εξαλείψει το σφάλμα στον χρόνο που έγινε η προσομοίωση με τον PI να φαίνεται να το προσεγγίζει γρηγορότερα.

Τελικά καλύτερος ελεγκτής φαίνεται ο PI λόγω μια καλύτερης απόκρισης σε σχέση με τους υπόλοιπους . Για περαιτέρω αξιολόγηση πάνω στους ελεγκτές, εφαρμόζονται τα κριτήρια αποδοτικότητας ISE, IAE, ITSE και ITAE τα οποία εξηγούνται παρακάτω.

Όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι οι τιμές τους τόσο πιο κοντά σε αποτελεσματικότητα και ακρίβεια είναι ο αντίστοιχος ελεγκτής για το σύστημα που ελέγχει.

#### **Integral Square Error (ISE)**

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

#### **Integral Absolute Error (IAE)**

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

#### **Integral Time Squared Error (ITSE)**

$$ITSE = \int_0^{\infty} t * e^2(t) dt$$

#### **Integral Time Absolute Error (ITAE)**

$$ITAE = \int_0^{\infty} t * |e(t)| dt$$

Ακόμα γίνεται σύγκριση και των τιμών της εισόδου κάθε χρονική περίοδο. Συγκεκριμένα το  $U_{tot}$  όπου είναι το σύνολο των τιμών της εισόδου κατά απόλυτη τιμή. Ο πίνακας 4.4 δείχνει τα κριτήρια αποδοτικότητας και των τριών ελεγκτών(διορθωμένων).

**Πίνακας 4.4:** κριτήρια ελεγκτών Ziegler-Nichols

Performance Criteria	P_fine	PI_fine	PID_fine
ISE	0.0044	0.0027	0.0038
IAE	0.9459	0.4448	0.6827
ITSE	0.3598	0.0538	0.1424

IATE	105.4353	19.9024	47.8487
Utot	30570	4.26e+04	4.25e+04

Τις μικρότερες τιμές τις έχει ο PI με τον PID να έχει ελάχιστα μικρότερο Utot το οποίο δεν επηρεάζει στην επιλογή του καλύτερου. Εφόσον ο PI έχει τις ελάχιστες τιμές σε όλα τα κριτήρια αποδοτικότητας, τότε επιλέγεται ως ο καλύτερος μέχρι στιγμής.

Οπότε, ο PI fine tuning είναι μέχρι στιγμής ο αποτελεσματικότερος για την μονάδα που ασχολείται η παρών διπλωματική εργασία. Όμως οι συγκρίσεις δεν έχουν τελειώσει ακόμα.

Σημείωση III: Ο PI\_fine έχει ομαλότερη απόκριση από των PID\_fine και για αυτό οι τιμές των κριτηρίων αποδοτικότητας ήταν αναμενόμενο να είναι καλύτερες

#### 4.5.6 Προσομοίωση με την βοήθεια του PI ελεγκτή της μεθόδου Tyreus-Luyben

Οι συγκρίσεις των ελεγκτών της μεθόδου Ziegler-Nichols ολοκληρώθηκαν, με τον βέλτιστο αυτής, να βρέθηκε ο PI fine tuning.

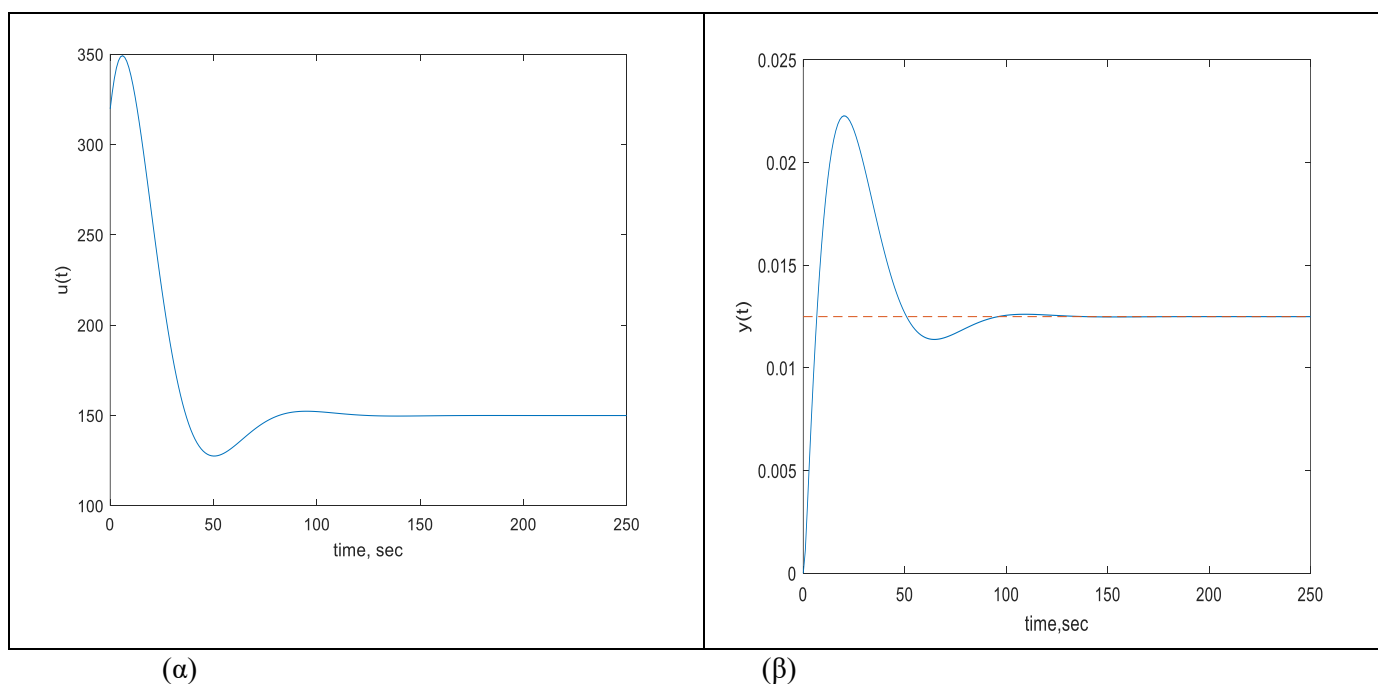
Στην συγκεκριμένη ενότητα, θα γίνουν οι συγκρίσεις των ελεγκτών που μας δίνει η μέθοδος Tyreus Luyben δηλαδή PI και PID. Η αρχή θα γίνει με την προσομοίωση του αναλογικού-ολοκληρωτικού ελεγκτή PI (εξίσωση 4.11). Έτσι με την βοήθεια του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της Matlab, ξεκινάει η διαδικασία προσομοίωσης του συστήματος κλειστού βρόχου. Τρέχοντας πάλι την διαδικασία για τα πρώτα 250 δευτερόλεπτα, παρατηρήθηκαν αρνητικές τιμές στις αποκρίσεις  $u(t)$ ,  $y(t)$  αλλά και υψηλές τιμές έντασης του ρεύματος που ξεπερνάνε το όριο των 500 A. Έτσι παρόλο την μείωση των ταλαντώσεων και τον γρήγορο μηδενισμό του σφάλματος του PI, η προσομοίωση δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Έτσι χρησιμοποιώντας πάλι την μέθοδο της δοκιμής και σφάλματος έγινε fine tuning στο ελεγκτή PI Tyreus-Luyben, τροποποιώντας μονάχα την τιμή της  $K_c$ . Τελικά νέα τιμή του  $K_c$  ορίζεται ως 8 φορές μικρότερη και οι παράμετροι του νέου PI (PI fine tuning) φαίνονται στον πίνακα 4.5A :

**Πίνακας 4.5Α:** Ρύθμιση Tyreus-Luyben με νέο PI

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$\tau_I$	$\tau_D$
PI fine tuning	$\frac{K_{cr}}{3.2 \cdot 8}$	$2.2 \cdot P_{cr}$	0
PI fine tuning	$2.559 \times 10^4$	33.77	0

Οπότε προσομοιώνοντας την διαδικασία στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab εμφανίστηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα:



**Σχήμα 4.6 :** (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PI fine tuning Tyreus Luyben και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή PI fine tuning Tyreus Luyben

Παρατηρώντας τις αποκρίσεις βλέπουμε:

Στην απόκριση του ρεύματος ( σχήμα 4.6 (α)) καταφέραμε να έχουμε τις τιμές στα επιτρεπτά όρια (μέγιστη κάτω από 350 A) αλλά και να μην υπάρχουν αρνητικές τιμές.

Στην απόκριση της συγκέντρωσης υδρογόνου (σχήμα 4.8 (β)) δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές, και επίσης μειώθηκαν αρκετά οι ταλαντώσεις. Επίσης ο PI fine tuning καταφέρνει να εξαλείψει το σφάλμα λίγο μετά τα 100 δευτερόλεπτα, αλλά το ξανά χάνει λίγο πριν τα 200 δευτερόλεπτα (πολύ μικρή απόκλιση της τάξεως 0.00001 μονάδες) μέχρι να ξανά ισορροπήσει μια και καλή στα 212 δευτερόλεπτα και μετά.

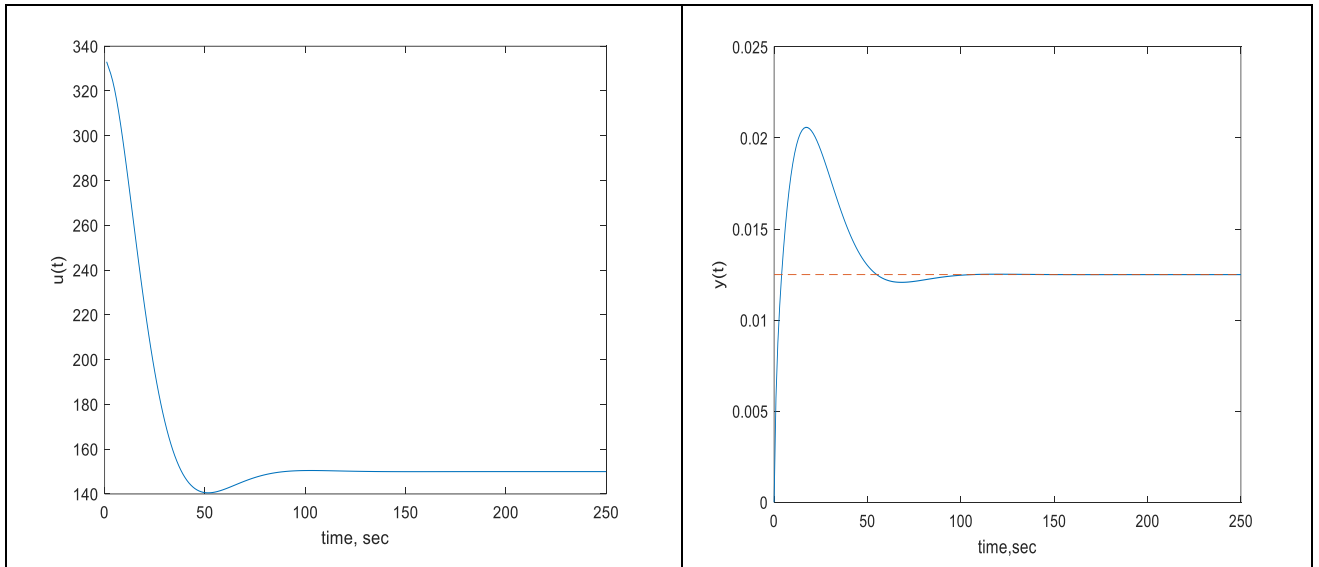
#### 4.5.7 Προσομοίωση με την βοήθεια του PID ελεγκτή της μεθόδου Tyreus-Luyben

Αλλάζοντας τον ελεγκτή από PI σε PID (εξίσωση 4.12) και τρέχοντας στο περιβάλλον του Matlab την διαδικασία για τα πρώτα 250 δευτερόλεπτα, παρατηρήθηκαν και εδώ, αρνητικές τιμές στις αποκρίσεις ( $u(t), y(t)$ ) αλλά και τιμές ρεύματος που ξεπερνάνε κατά πολύ, το όριο των 500 A.

Τελικά οι προτεινόμενες τιμές των παραμέτρων που μας δίνει η μέθοδος Tyreus Luyben, καθίστανται μη αποτελεσματικές και δεν ανταποκρίνονται στις προδιαγραφές που τέθηκαν στην αρχή. Έτσι και εδώ έγινε fine tuning στον PID ελεγκτή για να βρεθεί ένας που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα αλλά και τις προδιαγραφές που τέθηκαν. Με δοκιμή και σφάλμα και αλλάζοντας μόνο την τιμή  $K_c$ , η νέα τιμή του ορίζεται ως 11 φορές μικρότερη. Στον πίνακα 4.5.B φαίνονται οι τιμές του νέο ελεγκτή:

**Πίνακας 4.5 B:** Ρύθμιση Tyreus-Luyben με νέο PID (PID fine tuning)

Είδος Ελεγκτή	$K_c$	$T_i$	$T_d$
PID(TL) fine tuning	$\frac{K_{cr}}{2.2 \cdot 11}$	$(2.2) \cdot P_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{6.3}$
PID(TL) fine tuning	$2.7064 \times 10^4$	33.77	2.437



**Σχήμα 4.7 :** (α) Απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PID fine tuning Tyreus Luyben και (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση του ελεγκτή PID fine tuning Tyreus Luyben

Παρατηρώντας τις αποκρίσεις βλέπουμε:

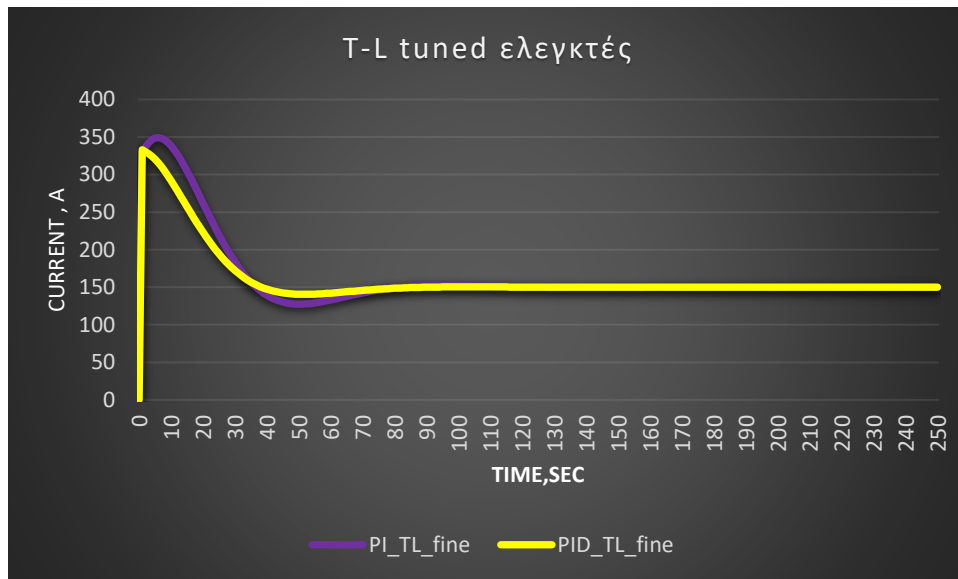
Στην απόκριση του ρεύματος ( σχήμα 4.7 (α)) καταφέραμε να έχουμε τις τιμές στα επιτρεπτά όρια (μέγιστη κάτω από 340 A) αλλά και να μην υπάρχουν αρνητικές τιμές.

Στην απόκριση της συγκέντρωσης υδρογόνου (σχήμα 4.8 (β)) δεν παρατηρούνται αρνητικές τιμές, και οι ταλαντώσεις είναι ελάχιστες. Επίσης ο PID fine tuning καταφέρνει να εξαλείψει το σφάλμα λίγο μετά τα 100 δευτερόλεπτα , αλλά το ξανά χάνει μέχρι τα 190 δευτερόλεπτα (πολύ μικρή απόκλιση της τάξεως 0.00001 μονάδες) ισορροπώντας και εξαλείφοντας το σφάλμα μετά τα 190 δευτερόλεπτα.

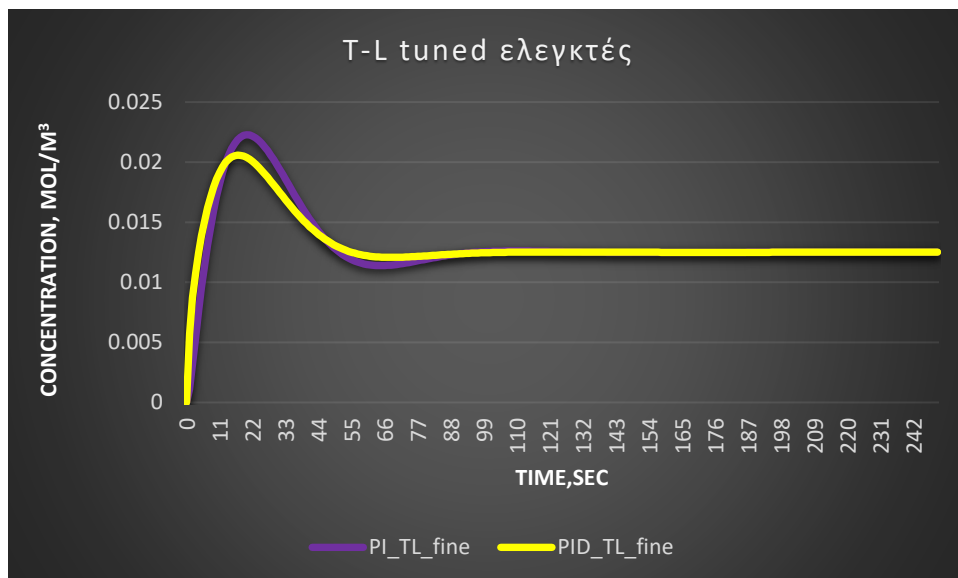
#### 4.5.8 Σύγκριση ελεγκτών της μεθόδου Tyreus Luyben

Τελικά στους πίνακες (4.5 A,B) έχουμε τους ελεγκτές της Ρύθμισης Tyreus Luyben PI, PID διορθωμένους (fine tuned) και για να βρεθεί ο καλύτερος από τους δύο θα γίνει σύγκρισή μεταξύ τους.

Έτσι, στα παρακάτω γραφήματα φαίνονται οι αποκρίσεις της εισόδου και εξόδου του συστήματος για κάθε ελεγκτή ξεχωριστά. Με μωβ χρώμα είναι ο ελεγκτής PI\_fine με κίτρινο χρώμα ο PID\_fine



Σχήμα 4.8 (α) : Σύγκριση γραφημάτων των PI, PID (fine tuning) της εισόδου  $u(t)$  Tyreus Luyben.



Σχήμα 4.8 (β) : Σύγκριση γραφημάτων των PI, PID (fine tuning) της εξόδου  $y(t)$  Tyreus Luyben

Αρχικά για το σχήμα 4.8 (α) ( $u(t)$ ) φαίνεται ότι η απόκριση του PI για το σήμα της εισόδου μας, δεν ξεπερνάει τα 329 A και ο PID δεν ξεπερνάει τα 334 A.

Παρατηρώντας τις αποκρίσεις των ελεγκτών ο PID ισορροπεί στα 150 A γρηγορότερα από τον PI και αυτό φαίνεται και στις τιμές του excel(οι οποίες πράχθηκαν μέσω του matlab) για την προσομοίωση αυτών των ελεγκτών. Συγκεκριμένα ο PID φτάνει τα 150 A κοντά στα 90-100 δευτερόλεπτα ενώ ο PI μετά τα 110.

Στο σχήμα 4.8 (β) , δηλαδή την απόκριση της εξόδου, εμφανίζει παρόμοια αποτελέσματα. Ο PID ελεγκτής εδώ έχει μικρότερες μέγιστες τιμές από τον PI και



επίσης έχει, ομαλότερη απόκριση και ομαλότερες ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας. Δηλαδή ισορροπεί γρηγορότερα και ταυτόχρονα έχει λιγότερες ταλαντώσεις από τον PI. Έτσι καλύτερος ελεγκτής φαίνεται ο PID λόγω της καλύτερης απόκρισης σε σχέση με τον PI .

Για την επιλογή τελικά του καλύτερου από τους δύο, πρέπει πάλι να ανατρέξουμε στις τιμές των κριτηρίων αποδοτικότητας.

Ο πίνακας 4.6 δείχνει τα κριτήρια αποδοτικότητας και των δύο ελεγκτών (διορθωμένων).

**Πίνακας 4.6:** κριτήρια ελεγκτών Tyreus-Luyben

Performance Criteria	PI_fine	PID_fine
ISE	0.0021	<b>0.0018</b>
IAE	0.2528	<b>0.2228</b>
ITSE	0.0166	<b>0.0131</b>
IATE	4.1523	<b>3.087</b>
Utot	4.1474e+04	<b>4.0451e+04</b>

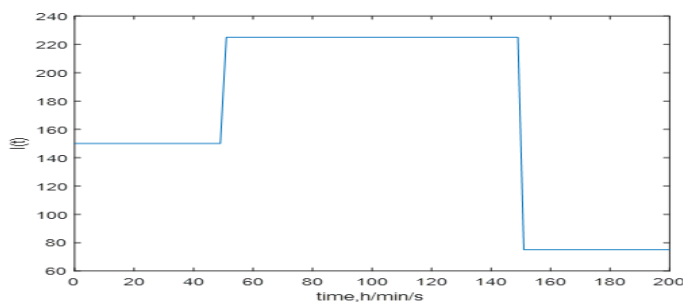
Τις μικρότερες τιμές τις έχει ο PID ακόμα και στο Utot, Έτσι με διαφορά ο καλύτερος ελεγκτής είναι ο PID fine tuning (της ρύθμισης Tyreus Luyben).

Τελικά ο PID fine tuning ελεγκτής αποδείχτηκε ως ο πιο αξιόπιστος για την μέθοδο Tyreus Luyben και ο PI fine tuning για την μέθοδο Ziegler Nichols .

Για να βρεθεί ο πιο αξιόπιστος, πρέπει να δούμε την αντίδραση των ελεγκτών PID fine tuning της μεθόδου Tyreus Luyben και ο PI fine tuning της Ziegler Nichols στο σενάριο που η τιμή του ρεύματος μεταβάλλεται σε ένα ( $t_o$ ) χρονικό διάστημα.

#### 4.6 Σενάριο εναλλαγής έντασης ρεύματος

Πριν ξεκινήσει η σύγκριση των καλύτερων ελεγκτών για Z-N και T-L, είναι απαραίτητο να γίνει μία αναφορά στο παράρτημα Α. Η αναφορά είναι αναγκαία για να θυμηθούμε πώς μεταβάλλεται η τιμή του ρεύματος με την βοήθεια μαθηματικών μεθόδων.



η αλλιώς :

$u(s)=I \Leftrightarrow$  σε βηματική μορφή :  $u(s)=150 \cdot H(t)+75 \cdot H(t-50)-150 \cdot H(t-150)$

Ορίστηκε ότι στα 50 δευτερόλεπτα θα γίνει αύξηση ρεύματος από τα 150 A στα 225 A δηλαδή αύξηση κατά 75 A. Στην συνέχεια θα γίνει μείωσή κατά 150 A με σκοπό τελική τιμή στα 75 A.

**Εικόνα 4.4:** Παράρτημα Α: Χρήση της βηματικής συνάρτησης στην εναλλαγή ρεύματος

Στην εικόνα 4 βλέπουμε, πώς με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης είναι δυνατόν να γίνουν οι απαιτούμενες αλλαγές στην είσοδο του συστήματος.

Με χρήση λοιπόν της βηματικής και ταυτόχρονα του μετασχηματισμού Laplace, για την συνάρτηση του σήματος αναφοράς ( $y_{sp}(t)$ ), καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο :

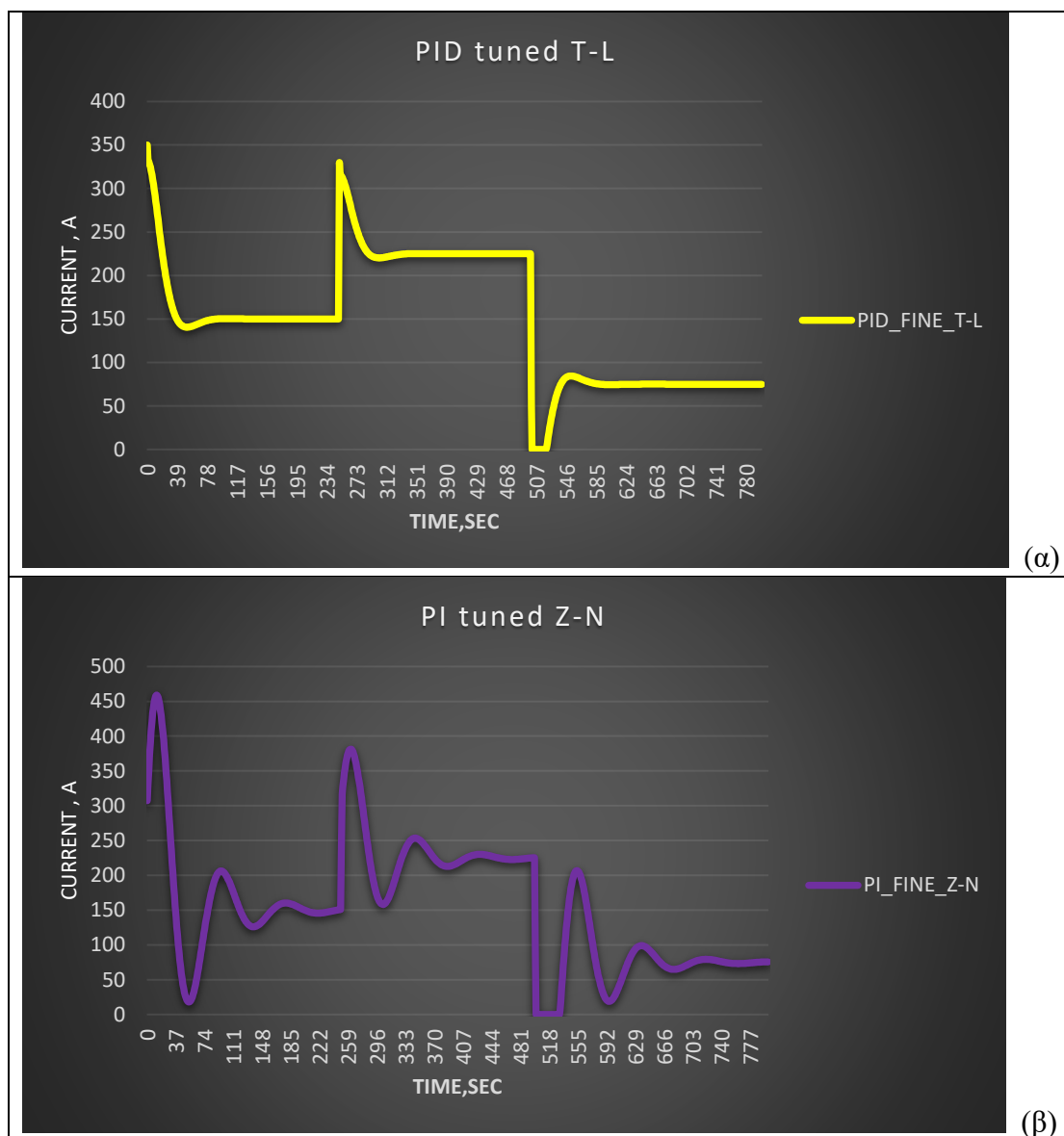
$$Y_{sp}(t) = 0.0125 \cdot H(t) + 0.00625 \cdot H(t-250) - 0.0125 \cdot H(t-500) \quad \text{Laplace} \Leftrightarrow$$

$$Y_{sp}(s) = \frac{1}{s} (0.0125 + 0.00625 \cdot e^{-250 \cdot s} - 0.0125 \cdot e^{-500 \cdot s})$$

Όπου 0.0125, 0.01875, 0.00625 είναι οι θέσεις ισορροπίας της ποσότητας υδρογόνου για τις αντίστοιχες τιμές ρεύματος (150 A, 225 A, 75 A).

Αρχικά αποφασίστηκε να πραγματοποιείται αλλαγή ρεύματος ανά 250 δευτερόλεπτα. Τα πρώτα 250 δευτερόλεπτα στα 150 A από 250-500 δευτερόλεπτα, βήμα συν 75 A οπότε συνολικά 225 A και στα 500 δευτερόλεπτα κι μετά, βήμα μείον 150 A στα 75 A. Στην συνέχεια έτρεξε η προσομοίωση για 800 δευτερόλεπτα και τα αποτελέσματα αποθηκεύτηκαν στο περιβάλλον του excel.

Τελικά παρατίθενται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του σεναρίου εναλλαγής ρεύματος σε μορφή γραφημάτων ( γράφημα εισόδου , εξόδου  $u(t)$ ,  $y(t)$  αντίστοιχα ) :



**Σχήμα 4.9:** (α) απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PID fine tuning της μεθόδου Tyreus Luyben. (β) απόκριση της εισόδου  $u(t)$ /ένταση ρεύματος του ελεγκτή PI fine tuning της μεθόδου Ziegler Nichols .

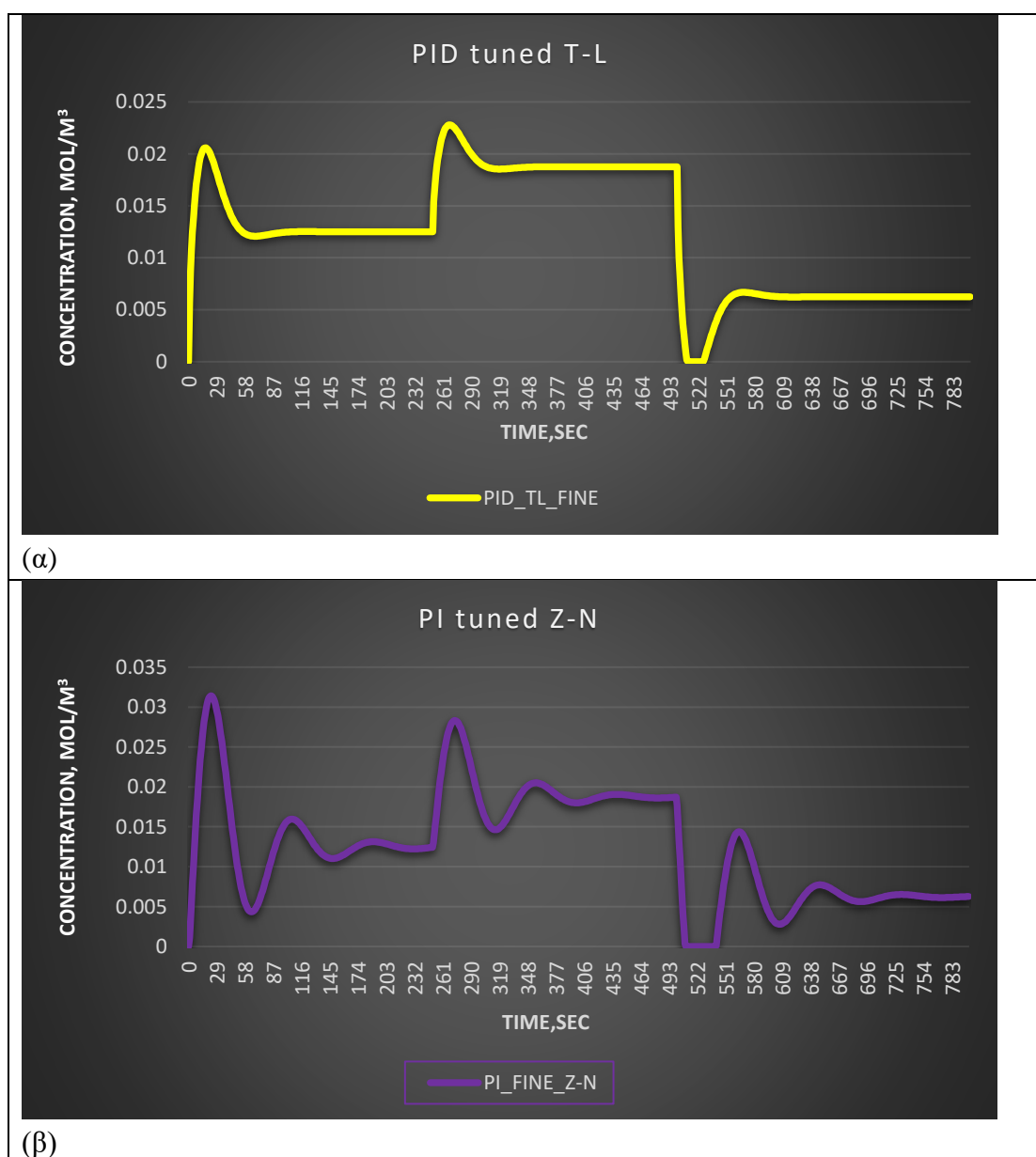
Αρχικά στο σχήμα 4.9 (α) ( $u(t)$ ) παρατηρούνται τα εξής:

Μικρή ταλαντωτική συμπεριφορά και επιτυχία στην εξάλειψή του σφάλματος για τον χρόνο προσομοίωσης που δόθηκε (ουσιαστικά δόθηκαν 250 δευτερόλεπτα για κάθε τιμή ρεύματος ). Συγκεκριμένα ο PID φτάνει τα 150 A στα 90-100 δευτερόλεπτα περίπου και η μέγιστη τιμή που φτάνει το ρεύμα είναι τα 350 A.

Για το σχήμα 4.9 (β) ( $u(t)$ ) παρατηρούνται τα εξής:

Μεγάλη ταλαντωτική συμπεριφορά και αδυναμία εξάλειψης του σφάλματος για το χρόνο της προσομοίωσης που ορίστηκε. Η μέγιστη τιμή που παίρνει το ρεύμα είναι τα 460 A.

Τα παραπάνω δείχνουν πως ο PID fine tuning της μεθόδου Tyreus Luyben είναι ικανότερος για την συγκεκριμένη διεργασία.



**Σχήμα 4.10 :** (α) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση υδρογόνου του ελεγκτή PID fine tuning της μεθόδου Tyreus Luyben. (β) απόκριση της εξόδου  $y(t)$ /συγκέντρωση υδρογόνου του ελεγκτή PI fine tuning της μεθόδου Ziegler Nichols .

Στο σχήμα 4.10, δηλαδή την απόκριση της εξόδου έχουμε το ίδιο έργο.

Ο PID fine της μεθόδου Tyreus Luyben, ανταποκρίνεται αποτελεσματικότερα στις αλλαγές του ρεύματος οπότε και της συγκέντρωσης υδρογόνου. Συγκεκριμένα φαίνεται η ομαλότερη απόκριση που έχει σε σχέση με τον PI fine της μεθόδου Ziegler Nichols καταφέρνοντας να ισορροπήσει στα εκάστοτε set point που έχουμε\* κάτι που δεν το κατάφερε PI fine της Ziegler Nichols στον χρόνο που του δόθηκε. Επίσης λαμβάνοντας υπόψιν και τις μέγιστες τιμές των γραφημάτων παρατηρούμε πως ο PID

fine της Tyreus Luyben υπερτερεί ακόμα και εκεί σε σχέση με τον PI fine της Zigler Nichols. Συγκεκριμένα η μεγαλύτερη τιμή που παρουσιάζει ο PID fine της Tyreus Luyben 0.0228 συγκέντρωση υδρογόνου  $\text{mol/m}^3$ , ενώ ο PI fine Zigler Nichols στα 0.0314 συγκέντρωση υδρογόνου  $\text{mol/m}^3$ .

Τελικά ο PID fine της Tyreus Luyben φαίνεται ως ο αποτελεσματικότερος, αλλά πριν παρθεί η τελική απάντηση είναι καλό να δοθούν και τα κριτήρια αποδοτικότητας, τα οποία αναμένεται να δείξουν τον PID fine της Tyreus Luyben καλύτερο σε σχέση με τον PI fine της Zigler Nichols.

**Πίνακας 4.7:** κριτήρια ελεγκτών PID fine (TL), PI fine (ZN).

Performance Criteria	PI_fine (ZN)	PID_fine (TL)
ISE	0.0058	<b>0.0039</b>
IAE	1.1056	<b>0.5476</b>
ITSE	1.5459	<b>0.9680</b>
IATE	325.2068	<b>143.045</b>
Utot	1.12368e+05	<b>1.19266e+05</b>

Πράγματι ο πίνακας 4.7 δείχνει ότι και τα τέσσερα κριτήρια του PID fine της Tyreus Luyben έχουν μικρότερες τιμές σε σχέση με τα κριτήρια του PI fine της Zigler Nichols, όπως και το Utot.

Έτσι αποδεικνύετε πως ο PID fine της Tyreus Luyben είναι ο αποτελεσματικότερος σε σχέση με τον PI fine της Zigler Nichols.

\*Σημείωση IV : Τα set point για την περίπτωση εναλλαγής ρεύματος είναι:

150 A -> 0.0125 concentration, ( $\text{mol/m}^3$ )

225 A -> 0.01875 concentration, ( $\text{mol/m}^3$ )

75 A -> 0.00625 concentration, ( $\text{mol/m}^3$ )

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup> :Συμπεράσματα και επόμενα βήματα.

Στην παρούσα διπλωματική έγινε σχεδιασμός και προσομοίωση ενός αποκεντρωμένου συστήματος ελέγχου για μονάδα ηλεκτρόλυσης τύπου PEM. Σκοπός της εργασίας αυτής, είναι η εμβάθυνση των συστημάτων ελέγχου στον τομέα παραγωγής υδρογόνου με την ηλεκτρόλυση του νερού.

Καταρχάς γίνεται μία βιβλιογραφική αναδρομή των πρώτων πειραμάτων ανακάλυψης του υδρογόνου μέχρι και το σήμερα, κλείνοντας με τους στόχους του μέλλοντος και τους τρόπους εκμετάλλευσης του υδρογόνου. Στην συνέχεια αφού αναλύθηκαν τα μέρη στα οποία απαρτίζεται μια μονάδα ηλεκτρόλυσής τύπου PEM ξεκίνησε η διαδικασία μαθηματικής μοντελοποίησης και σχεδιασμού του συστήματος ελέγχου.

Η διαδικασία του συστήματος αυτού, περιγραφικά σε ένα μη γραμμικό μοντέλο και με την βοήθεια του αναπτύγματος Taylor πραγματοποιήθηκε γραμμικοποίηση αυτού. Τελικά μετατράπηκε σε ένα μοντέλο χώρου κατάστασης (state-space model) το οποίο χρησίμευσε μετέπειτα (μαζί με τις αντίστοιχες συναρτήσεις μεταφοράς εισόδου-εξόδου). Για να καταστεί δυνατόν η συνέχιση της διπλωματικής, έπρεπε να αποδειχθεί η ισοδυναμία και των τριών μοντέλων. Τελικά με την βοήθεια του προγραμματιστικού περιβάλλοντος matlab αποδείχθηκε η ισοδυναμία τους, είτε σε μορφή γραφημάτων, είτε σε μαθηματική μορφή (τύποι παραγωγής υδρογόνου, οξυγόνου).

Μετά την επαλήθευση της ισοδυναμίας, το μοντέλο χώρου κατάστασης χρησιμοποιήθηκε για τον σχεδιασμό ελεγκτών ανάδρασης με σκοπό τη ρύθμιση της παραγωγής υδρογόνου μέσω του χειρισμού του ηλεκτρικού ρεύματος. Οι μέθοδοι που αποφασίστηκαν να χρησιμοποιηθούν είναι: η μέθοδος Ziegler Nichols και η μέθοδος Tyreus Luyben. Ο κύριος στόχος η εύρεση αξιόπιστων ελεγκτών για το σύστημα που ασχολήθηκε η παρούσα διπλωματική.

Κατά την διάρκεια των προσομοιώσεων και για σταθερή ένταση ρεύματος 150A, παρατηρήθηκε ότι η προτεινόμενες τιμές στις παραμέτρους των ελεγκτών και για τις δύο μεθόδους, παρουσίαζαν αποτελέσματα μη αποδεκτά προς την πραγματικότητα. Αυτό οδήγησε στην ρύθμιση των ελεγκτών, κάνοντας fine tuning.

Τελικά με την παρατήρηση των αποτελεσμάτων σε μορφή γραφημάτων αλλά και την βοήθεια που παρείχαν τα κριτήρια αποδοτικότητας όπως ISE, IAE, ITAE και ITSE επιλέχθηκαν δύο ελεγκτές. Ο PI fine της μεθόδου Ziegler Nichols και ο PID fine της μεθόδου Tyreus Luyben επιλέχθηκαν από τους υπόλοιπους. Βασικό σημείο για την εύρεση του βέλτιστου ελεγκτή ήταν η προσπάθεια να κρατηθεί η χρήση του ρεύματος χαμηλή (επομένως και χαμηλή ισχύς) με ταυτόχρονη υψηλή απόδοση (παραγωγή H<sub>2</sub> ανά ισχύ). Στην τελευταία σύγκριση αποφασιστικό να γίνει προσομοίωση με ταυτόχρονη εναλλαγή έντασης ρεύματος. Συγκεκριμένα 150 A, 225 A, 75 A.

Εν κατακλείδι δημιουργήθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την βασική δυναμική ενός electrolyzer. Για τους περιορισμούς, τα δεδομένα της παρούσας διπλωματικής αλλά και για τα σενάρια που έτρεξε η προσομοίωση, αποδείχθηκε ότι ο

PID fine της μεθόδου Tyreus Luyben είναι ο πλέον αξιόπιστος για μια τέτοια διεργασία. Γενικά οι ρυθμίσεις της μεθόδου Tyreus Luyben, θεωρούνται πιο συντηρητικές και συνήθως είναι πιο αξιόπιστες για συστήματα ελέγχου που έχουν σχέση με χημικές διεργασίες .

Έχοντας βάση τα επιτεύγματα της παρούσας διπλωματικής, κάποιες μελλοντικές επεκτάσεις που θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν είναι οι εξής:

- Εφαρμογή άλλων σεναρίων (π.χ. προσθέτοντας διαφόρου είδους εξωτερικές διαταραχές)
- Εφαρμογή σύγχρονων και προηγμένων ελεγκτών (π.χ. IMC, MPC)
- Έμφασή και στην παροχή ενέργειας (χρήση ΑΠΕ) με περισσότερες προσομοιώσεις για την αξιολόγηση μιας πιο ρεαλιστικής διεργασίας.
- Εξακρίβωση πραγματικών δεδομένων με το θεωρητικό μοντέλο.

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική

1. Κακαραντζάς Νικόλαος (2020) . «Μέθοδοι παραγωγής, αποθήκευσης και χρήσης υδρογόνου», Διπλωματική εργασία, Τμήμα θετικών επιστημών και τεχνολογίας, Ελληνικό ανοικτό πανεπιστήμιο.
2. Ελευθέριος Στέλιος (2023) . «Εφαρμογή και σύγκριση μεθόδων συντονισμού παραμέτρων ενός PID ελεγκτή», Διπλωματική εργασία, Τμήμα ΜΠΔ, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανία.
3. Ακριβός Γ. Κακαμπέγκας (2014) . «Αξιολόγηση συστημάτων αυτόματου ελέγχου βάσει κριτηρίων απόκρισης και βέλτιστης απόδοσης», Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Θεωρητική πληροφορική και θεωρία συστημάτων και ελέγχου», ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.
4. Σπεραλάκη Αντωνία (2024) , «Εφαρμογή του Προβλεπτικού Ελέγχου σε συστήματα σερβομηχανισμών και βιομηχανικών αντιδραστήρων» Διπλωματική εργασία, Τμήμα ΜΠΔ, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανία.
5. Στρατάκη Κ.Χρυσάνθη (2012) . «Παραγωγή υδρογόνου ως εναλλακτικού καυσίμου από Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας και χρήση του ως εναλλακτική πηγή ενέργειας», Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, ΕΜΠ , ΔΠΜΣ «Συστήματα αυτοματισμού», Αθήνα.
6. Λάμπρου Ευάγγελος, Σιακούλης Ορέστης «ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ», Διπλωματική εργασία, Τμήμα Ηλεκτρολόγων μηχανικών και τεχνολογία Ηλεκτρονικών Υπολογιστών , Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών.
7. Βαλιάντζα Χρήστου (2018) , «ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ ΜΕΣΩ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΠΡΟΠΑΝΙΟΥ ΣΕ ΥΠΟΣΤΗΡΙΓΜΕΝΟΥΣ ΚΑΤΑΛΥΤΕΣ ΜΕΤΑΛΛΩΝ» Διπλωματική εργασία, Τμήμα ΜΠΔ, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανία.
8. Ιωάννης Βλάχος, «Τεχνολογίες υδρογόνου για χρήση σε οχήματα με έμφαση στις κυψέλες καυσίμου», ΤΕΙ κεντρικής Μακεδονίας, Σέρρες.
9. Αναστάσιος Πουλιέζος. «Περί Συστημάτων Ελέγχου, Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου», Εκδόσεις Τζιόλα.

### Αγγλική μετάφραση

10. Rohrs C.E.,Melsa J.L.& D.G.Schulz (1996). «Γραμμικά συστήματα αυτόματου ελέγχου», μετ. Μ. Αλεξίου, Τζιόλας, Θεσ/νίκη.



## Αγγλική

11. Soares, D. M., Teschke, O. & Torriani, I. (1992). Hydride Effect on the Kinetics of the Hydrogen Evolution Reaction on Nickel Cathodes in Alkaline Media, *Journal of the Electrochemical Society*, 139, (1), 98-105.
12. Stojic, D. L., Marceta, M. P., Sovilj, S. P. & Miljanic, S. S., (2003). Hydrogen generation from water electrolysis--possibilities of energy saving, *Journal of Power Sources*, 118, (1-2), 315-319.
13. Turner, J. A., (2004). Sustainable hydrogen production, *Science*, 305, (5686), 972-974.
14. Zeng, K. & Zhang, D. (2010). Recent progress in alkaline water electrolysis for hydrogen production and applications. *Progress in Energy and Combustion Science*, 36(3): p. 307-326.
15. Züttel, A. (2003). Materials for hydrogen storage. *Mater. Today*, 6, no. 9, pp. 24-33.
16. Varkaraki, E., Lymberopoulos, N. & Zachariou, A., (2003). Hydrogen based emergency back-up system for telecommunication applications, *Journal of Power Sources*, 118, (1-2), 14-22.
17. Contreras, A. et al. (2007) Design and simulation of the power control system of a plant for the generation of hydrogen via electrolysis, using photovoltaic solar energy. *International Journal of Hydrogen Energy*. 32 4635-4640. Elsevier Ltd
18. Åström, K.J., Hägglund, T., The future of PID control, *Control Engineering Practice*, 9 (11), 2001, pp. 1163-1175
19. High-efficiency series-cell electrolyzer (2006). [tero.ranta@bigfoot.com](mailto:tero.ranta@bigfoot.com) Hydrogen Production. Electrolytic Processes. Available from: [http://www1.eere.energy.gov/hydrogenandfuelcells/production/electro\\_processes.html](http://www1.eere.energy.gov/hydrogenandfuelcells/production/electro_processes.html)
20. Hydrogen Storage. U.S. Department of Energy. Available from: [http://www1.eere.energy.gov/hydrogenandfuelcells/storage/hydrogen\\_storage.html](http://www1.eere.energy.gov/hydrogenandfuelcells/storage/hydrogen_storage.html)
21. Zhang, H. et al. (2010) Evaluation and calculation on the efficiency of a water electrolysis system for hydrogen production. *International Journal of Hydrogen Energy*. 35 10851-10858. Elsevier Ltd
22. Haluk Gorgun, Dynamic modelling of a proton exchange membrane (PEM) electrolyzer, *International Journal of Hydrogen Energy*, 31 (2006), 29-38

## Παράρτημα Α

### Προσομοίωση του συστήματος ανοικτού βρόχου με ταυτόχρονη αλλαγή σεναρίων

Για να τεθεί ικανή η προσομοίωση του κλειστού συστήματος, πρέπει πρώτα να αξιολογηθεί το σύστημα ανοικτού βρόχου με σκοπό να προσομοιώσουμε την μεταβλητή εξόδου δηλαδή της  $Y_3$  = συγκέντρωση υδρογόνου.

Χρησιμοποιώντας μόνο την  $G_{p_{31}}$  εφόσον είναι η συνάρτηση μεταφοράς της παραγωγής υδρογόνου και παράλληλα ισχύει:  $Y(s) = G_p \cdot u(s)$  όπου  $u(s)$  σήμα εξόδου από τελικό στοιχείο ενεργοποίησης όπου στην περίπτωση μας η ένταση του ρεύματος.

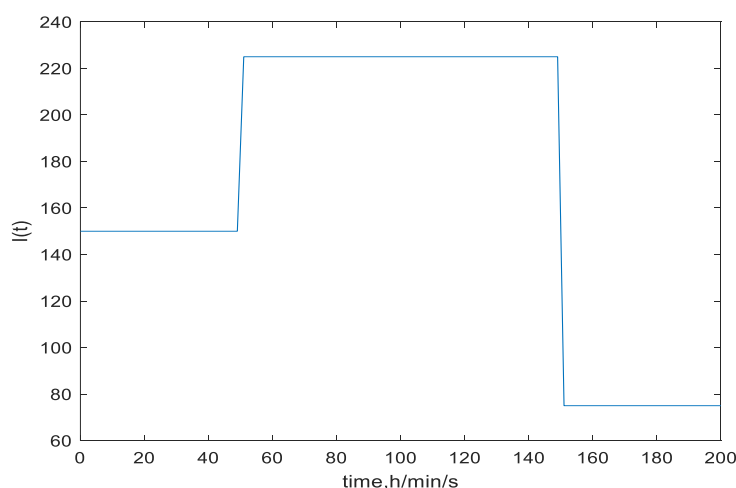
Οπότε για  $G_{p_{31}}$  ισχύει:

$$Y_3(s) = G_{p_{31}} \cdot u(s)$$

Όπου :

$Y_3(s)$  σήμα εξόδου από την διεργασία και συγκεκριμένα η ποσότητα του υδρογόνου που παράχθηκε για δοσμένη ένταση ρεύματος.

Με την βοήθεια της βηματικής συνάρτησης και ορίζοντας αυθαίρετες χρονικές περιόδους που το σύστημα θα αλλάζει την ποσότητα ρεύματος που προσδίδει καταλήγουμε στο διάγραμμα έντασης ρεύματος-χρόνου (εικόνα ΠΑ1):



**Εικόνα ΠΑ1:** απόκριση εισόδου  $u(t)$  στην περίπτωση εναλλαγής ρεύματος

η αλλιώς :

$u(s)=I \Leftrightarrow$  σε βηματική μορφή :  $u(s)=150 \cdot H(t)+75 \cdot H(t-50)-150 \cdot H(t-150)$

Ορίστηκε ότι αρχικά θα εφαρμοσθεί ρεύμα 150 A και στα 50 δευτερόλεπτα θα γίνει αύξηση ρεύματος από τα 150 A στα 225 A δηλαδή αύξηση κατά 75 A. Στην συνέχεια θα γίνει μείωση κατά 150 A (σε χρόνο 150s) με σκοπό την τελική τιμή στα 75 A.

Αρχικά θα συγκριθούν τα αποτελέσματα του μοντέλου χώρου κατάστασης αλλά και του μετασχηματισμένου και όλες τις εξόδους δηλαδή με στόχο την επαλήθευσή της ισότητας του μοντέλου χώρου κατάστασης και του μετασχηματισμένου:

$$Y_1(s) = G_{p_{11}} \cdot u(s)$$

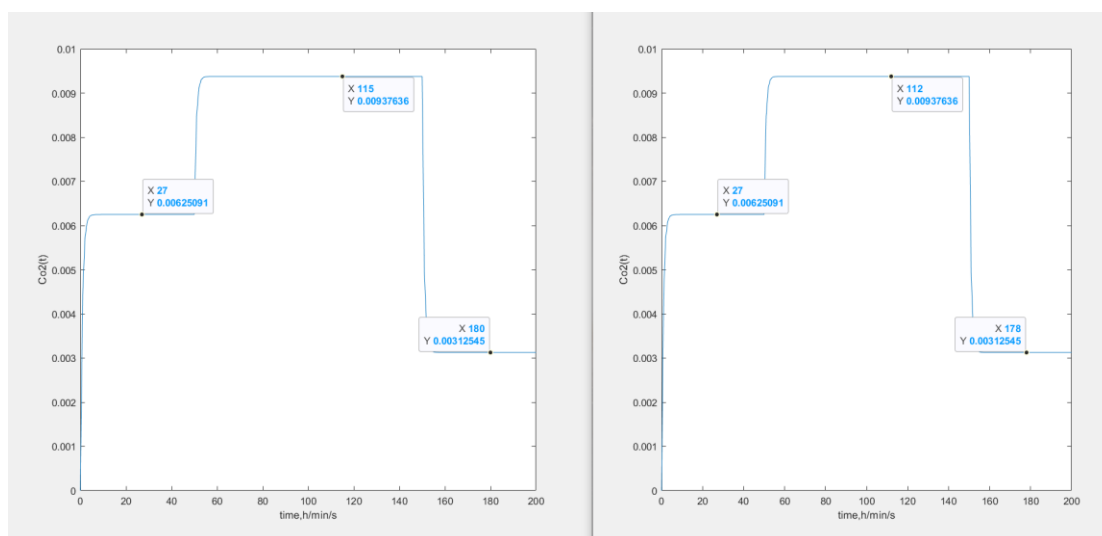
$$Y_2(s) = G_{p_{21}} \cdot u(s)$$

$$Y_3(s) = G_{p_{31}} \cdot u(s)$$

$$Y_4(s) = G_{p_{41}} \cdot u(s)$$

Δηλαδή πρέπει να πάρουμε τα ίδια σήματα εξόδου για να φανερωθεί η ορθότητα του μετασχηματισμού. Αυτό θα φανεί με την σύγκρισή των διαγραμμάτων των εξόδων. Παρακάτω παρουσιάζεται η σύγκριση των διαγραμμάτων όπου δεξιά είναι το γράφημα του μετασχηματισμού (εικόνα ΠΑ2).

- **Συγκέντρωση οξυγόνου**

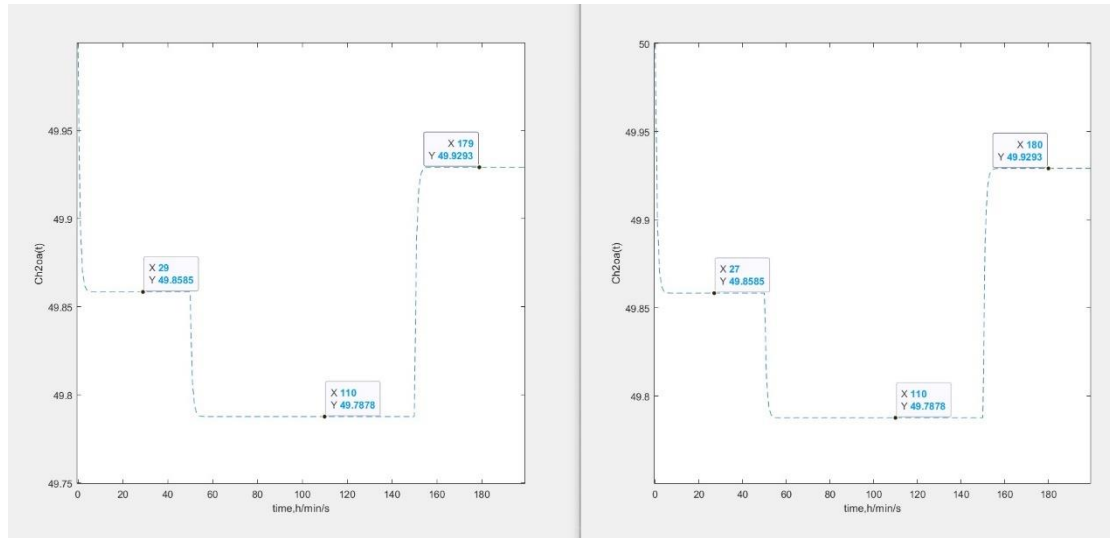


**Εικόνα ΠΑ2:** απόκριση εξόδου  $y(t)$  συγκέντρωσης οξυγόνου στην άνοδο μετασχηματισμένου κι μη (περίπτωση εναλλαγής ρεύματος)

Το πρώτο πράγμα που είναι δυνατόν να παρατηρηθεί είναι η μορφή των δύο γραφημάτων όπου στην παραπάνω περίπτωση η μορφή είναι ίδια. Το δεύτερο πράγμα είναι οι τιμές που ισορροπεί το σύστημα. Όπως φαίνεται στην εικόνα, οι τιμές είναι ίδιες μέχρι και στα μεγαλύτερα δεκαδικά ψηφία.

Τελικά μπορούμε να πούμε ότι τα σήματα εξόδου είναι ίδια.

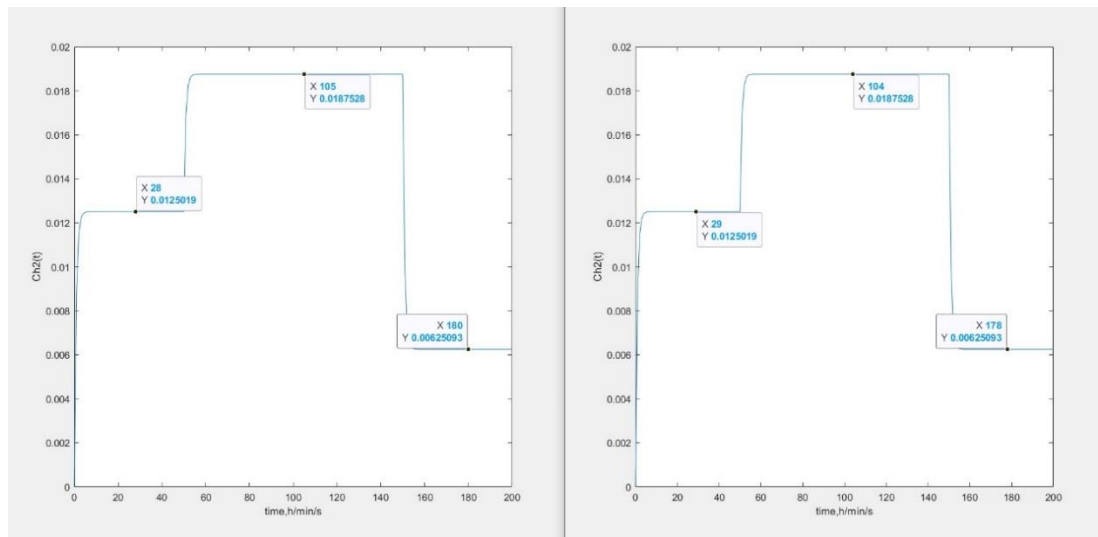
- Συγκέντρωση νερού στην άνοδο



**Εικόνα ΠΑ3:** απόκριση εξόδου  $y(t)$  συγκέντρωσης νερού στην άνοδο μετασχηματισμένου κι μη (περίπτωση εναλλαγής ρεύματος)

Προχωρώντας έχουμε τα σήματα της συγκέντρωσης νερού στην άνοδο. Παρατηρώντας την εικόνα 2 βλέπουμε ίδια μορφή διαγραμμάτων αλλά και τιμών στις χρονικές περιόδους που ισορροπεί το σύστημα. Οπότε τα σήματα εξόδου είναι ίδια.

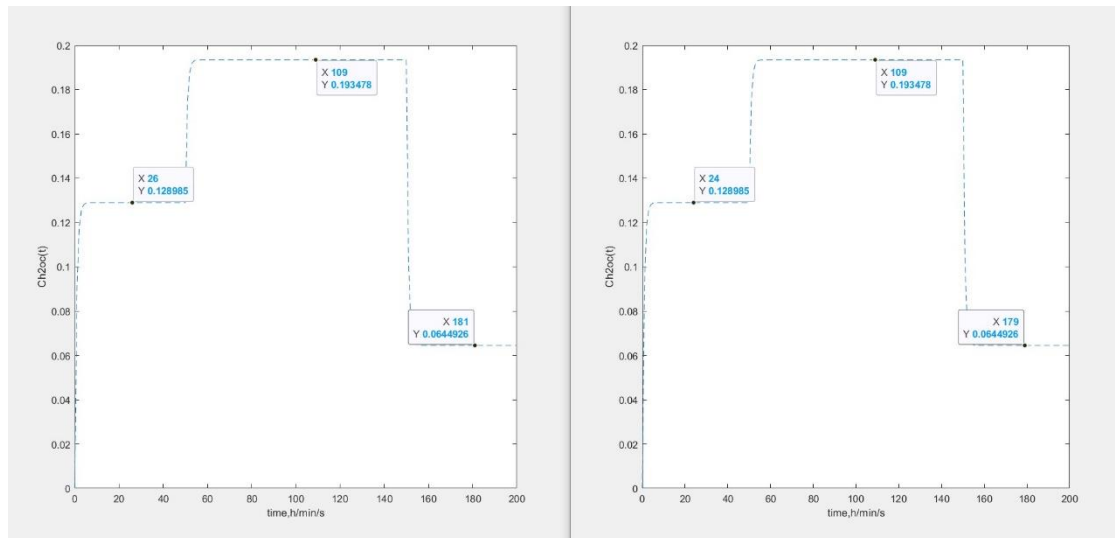
- Συγκέντρωση υδρογόνου



**Εικόνα ΠΑ4:** απόκριση εξόδου  $y(t)$  συγκέντρωσης υδρογόνου στην κάθοδο μετασχηματισμένου κι μη (περίπτωση εναλλαγής ρεύματος)

Τώρα για την περίπτωση της συγκέντρωσης του υδρογόνου, έχουμε την ίδια ιστορία. Δηλαδή η μορφή των γραφημάτων είναι ίδια αλλά και οι τιμές στις χρονικές περιόδους που ισορροπεί το σύστημα. Οπότε τα σήματα εξόδου είναι ίδια.

- **Συγκέντρωση νερού στην κάθοδο**



**Εικόνα ΠΑ5:** απόκριση εξόδου  $y(t)$  συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο μετασχηματισμένου κι μη (περίπτωση εναλλαγής ρεύματος)

Τέλος για την περίπτωση της συγκέντρωσης νερού στην κάθοδο, η μορφή των γραφημάτων είναι ίδια αλλά και οι τιμές στις χρονικές περιόδους που ισορροπεί το σύστημα. Οπότε τα σήματα εξόδου είναι ίδια.

Να σημειωθεί ότι οι τιμές στις χρονικές περιόδους που ισορροπεί το σύστημα είναι αντίστοιχες με αυτές που βρήκαμε στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο για τις τρεις διαφορετικές τιμές στην ένταση ρεύματος  $I$ . Έτσι λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι ο μετασχηματισμός που πραγματοποιήθηκε, είναι απόλυτα σωστός.