ΙΣΤΟΡΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
HISTORY OF SET THEORY

ΒΟΥΝΑΤΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΜΙΝΩΣ

January 29, 2023

Contents

1 Εισαγωγή

Από τα αρχαία χρόνια των μαθηματικών είχαν δημιουργηθεί πολλά ερωτηματικά για διάφορα προβλήματα απείρου σε διάφορες μορφές. Αυτή η έννοια είχε πρωτοεμφανιστεί στα χρόνια του μεγάλου Έλληνα Αριστοτέλη που μπορεί να μην ήταν μαθηματικός, αλλά ήταν κορυφαίος φιλόσοφος επιστήμονας. Ο όρος άπειρο είχε συμπεριληφθεί σε διάφορα θεωρήματα , όπου αφορούσε κυρίως θέματα φυσικής και μαθηματικών. Υπήρξε μία μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις δύο μορφές του απείρου: το Πραγματικό και το Δυνητικό άπειρο (actual and potential infinity). Σύμφωνα με αυτές τις έννοιες το πραγματικό άπειρο είναι απλά μία ιδέα η οποία μας λέει ότι: μπορούμε πάντα να προσθέτουμε έναν αριθμό επ' άπειρον και πάντα θα υπάρχει μεγαλύτερος από τον προηγούμενο. Από την άλλη πλευρά η ιδέα του δυνητικού απείρου μας λέει, ότι υπάρχει ένα σύνολο το οποίο τα στοιχεία του είναι άπειρα. Για παραδείγματος χάρη, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς που ποτέ δε τελειώνουν, πάντα θα υπάρχει ένας μεγαλύτερος.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ,.....$$

Το ίδιο σύνολο από τη πλευρά του πραγματικού απείρου είναι αρκετά κατανοητό, ότι παριστάνει ένα δοχείο (σύνολο) το οποίο έχει μέσα του μία άπειρη ποσότητα από στοιχεία.

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ,.....\}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο παραπάνω έννοιες του απείρου ο Cantor είπε:

«Εξ' αιτίας της σημαντικής διαφοράς μεταξύ των εννοιών του δυνητικού και πραγματικού απείρου, όπου το πρώτο είναι ένα μεταβλητό πεπερασμένο μέγεθος, που αυξάνεται πέρα κάθε ορίου, ενώ το δεύτερο είναι μια σταθερή ποσότητα ολοκληρωμένη στον εαυτό της αλλά μεγαλύτερο από όλα τα πεπερασμένα μεγέθη, συμβαίνει πολύ συχνά κανείς να μπερδεύει το ένα με το άλλο» (G. Cantor, σελ. 374)

Μέχρι τότε κανένας μαθηματικός δεν ασχολήθηκε ή δε τολμούσε να ασχοληθεί με το άπειρο. Η θεωρία συνόλων εμφανίστηκε για πρώτη φορά μέσω της εργασίας του μεγάλου μαθηματικού Georg Cantor το 1874. Η εργασία αυτή είχε ως κύριο στόχο τη μελέτη της έννοιας του πραγματικού απείρου και τοποθετήθηκε κάτω από το μικροσκόπιο για λεπτομερή εξήγηση και ερμηνεία αυτού. Τότε αυτή η άποψη ήρθε σε ρήξη με πολλές απόψεις των τότε μαθηματικών, αφού όλα όσα θεωρήματα που τότε πίστευαν και χρησιμοποιούσαν, έπρεπε να αναθεωρηθούν.

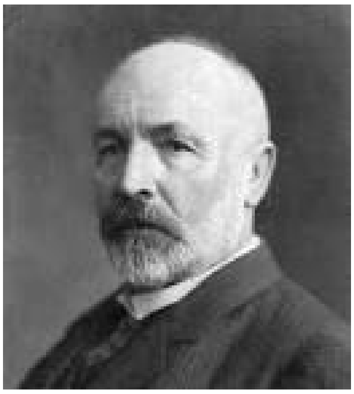
Μέχρι την τότε εποχή το άπειρο υπήρχε μόνο ως μία φιλοσοφική έννοια. Ο Cantor ήταν ο πρώτος ο οποίος πρόσθεσε και τη μαθηματική έννοια αυτού.Για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε από τον μεγάλο μαθηματικό John Wallis το 1655, χωρίς όμως να γνωρίζει την πλήρη σημασία του. Πριν τη μεγάλη ανατροπή που έφερε μέσω της μελέτης του ο Cantor, οι τότε μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν μόνο τα πεπερασμένα σύνολα αλλά και τα άπειρα από φιλοσοφικής όμως πλευράς.

Οι τότε επιστήμονες προσπάθησαν να μελετήσουν λίγο πιο εκτενέστερα το άπειρο χωρίς καμία ιδιαίτερη επιτυχία. Ο Cantor όμως με πολλή μελέτη και με αρκετές αποδείξεις κατάφερε να το εξετάσει από μία διαφορετική πλευρά και η προσπάθεια του αναγνωρίστηκε από τον μαθηματικό κόσμο. Απέδειξε ότι το άπειρο δεν είναι μοναδικό και αυτό με τη σειρά του διασπάται σε κατηγορίες. Αυτό το έδειξε μαθηματικά αποδεικνύοντας ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι "πιο μεγάλο" από αυτό των φυσικών. Με αυτή την απόδειξη έδειξε ότι η θεωρία συνόλων χρειάζεται περισσότερη μελέτη και μπορεί να δώσει τη βάση για την εξήγηση πολλών μαθηματικών εννοιών. Πολλοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να αποδεχτούν το άπειρο σαν μία πραγματική έννοια ή δε μπορούσαν να αντιληφθούν ότι το άπειρο διαμερίζεται σε αριθμήσιμο και σε μη. Σε όλα αυτά μέσω της εργασίας του ο Cantor επισήμανε τη σοβαρότητα του απείρου στα μαθηματικά, φέρνοντας ανατροπή σε όλα αυτά που μέχρι σήμερα εμείς μελετάμε.

Σε όλες αυτές τις μεγάλες εξελίξεις, υπήρχαν και τα λεγόμενα παράδοξα της θεωρίας. Το πρώτο ήρθε με τον Burali-Forti το 1897 λέγοντας ότι είχε διαπιστώσει μία ασάφεια με τους υπερπερασμένους αριθμούς. Το ισχυρότερο όμως παράδοξο ήρθε με τον Russell, με το οποίο έφερε μεγάλη σύγχυση στα μαθηματικά και μεγάλες αμφιβολίες για την ορθότητα σε όσα είπε ο Cantor.

Σε όλα αυτά πήρε θέση ο Zermelo ο οποίος έθεσε 7 αξιώματα για τη θεωρία συνόλων. Μετά από λίγο καιρό προστέθηκαν και άλλα δύο από τον Skolem και Neumann και με αυτό το τρόπο δημιουργήθηκε η **Αξιωματική θεωρία συνόλων Zermelo-Fraenkel και επιλογής (ZFC)**. Κάθε ένα από αυτά έγιναν θέμα για μεγάλες συζητήσεις για το αν θα γίνουν ή όχι αποδεκτά. Με το πέρας του χρόνου και της σωστής χρήσης αυτών τέθηκαν ως ένα ακλόνητο μαθηματικό κομμάτι. Στη συνέχεια υπήρξαν καινούργια αξιώματα, αλλά το ZFC αποδείχτηκε ορθό, επαρκές σε πολλές περιπτώσεις χωρίς να δίνει έναυσμα για καινούργια παράδοξα της θεωρίας. Στο κεφάλαιο τρία αναλύονται τα παράδοξα της θεωρίας αλλά και αναλυτική παρουσίαση των αξιωμάτων που δημιουργήθηκαν.

Τέλος με τη σειρά του και αυτό δημιούργησε κάποιο παράδοξο θεώρημα με την υπόθεση του συνεχούς που έθεσε ο Cantor: **Πόσα άπειρα τελικά υπάρχουν;** Υπήρξαν απαντήσεις για αυτό οι οποίες με τη σειρά τους δεν ήταν ούτε σωστές αλλά ούτε εσφαλμένες. Έτσι αυτό το ερώτημα έμεινε για τους μαθηματικούς αναπάντητο.



Gerorg Cantor

2 Διαγώνιο επιχείρημα Cantor

Ορισμός Cantor: Θεωρία συνόλων

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά διά της εμπειρίας μας ή της διανόησής μας, είναι καλώς ορισμένα και διακρίνονται ευκρινώς μεταξύ τους.

Μέχρι το 1918 ο μεγάλος μαθηματικός Cantor κατάφερε να βάλει τις βάσεις για τη θεωρία των συνόλων και να αλλάξει τη θεωρία ως προς αυτή. Σε κάθε σύνολο αριθμών (φυσικοί, πραγματικοί κλπ) συνεπάγεται ότι το πλήθος των υποσυνόλων τους έχει μεγαλύτερο εύρος από αυτό. Αυτό το θεώρημα που δημιούργησε, ίσχυε για τα πεπερασμένα σύνολα. Όταν έχω ένα σύνολο το οποίο έχει n στοιχεία, τότε τα υποσύνολα του θα έχουν εύρος 2^n. Προφανώς φαίνεται ότι $n < 2^n$, άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το εύρος των υποσυνόλων θα είναι πάντα μεγαλύτερο από το αρχικό σύνολο. Αυτό το θεώρημα όμως, ισχύει και για τα άπειρα.

Ένα ακόμα πρόβλημα που είχε προκαλέσει απορία στον Cantor είναι αν μπορούν τα άπειρα σύνολα να χωριστούν σε κατηγορίες ως προς τη πληθικότητα τους. Αν θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, τότε το άπειρο σύνολο θα μπορούσε να χωριστεί σε κατηγορίες και θα διαφέρουν μεταξύ τους ανάλογα με την πληθικότητα τους.

2.1 Ισοδύναμα

Ορισμός ισοδυναμίας
Δύο σύνολα A,B είναι ισοδύναμα (έχουν την ίδια πληθικότητα) αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση f: A→ B η οποία να είναι ένα προς ένα και επί.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο παραπάνω ορισμός χρησιμοποίησε το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα δωμάτιο με ανθρώπους και με καρέκλες. Το ερώτημα είναι αν φτάνουν όλες οι καρέκλες για όλους; Για να το λύσουμε αυτό πρέπει το κάθε άτομο να πάει σε μία καρέκλα. Αυτό δηλαδή που θέλουμε να κάνουμε είναι μία αντιστοίχηση 1-1 ανθρώπων με καρέκλες. Αυτή η ιδέα μπορεί να επεκταθεί και για τα άπειρα σύνολα όπου η αρίθμηση αυτών θα είναι παρόμοια με αυτή των πεπερασμένων συνόλων.

Απόδειξη του Cantor

Δύο σύνολα λέγοντα ισοδύναμα, αρκεί να υπάρχει μία συνάρτηση $f : A- > B$, η οποία είναι 1 προς 1 και επί.Το δυναμοσύνολο του Α έχει μεγαλύτερο πληθικό αροθμό από το Α. Για να το αποδείξει αυτό θεώρησε ότι αν η συνάρτηση f:$A \to P(A)$ είναι επί θα καταλήξει σε άτοπο. Έστω:

$$B = \{x \in A \; x \notin f(x)\}$$

$$x \in B \iff x \in f(x) \quad \iff x \notin f(x) \quad \iff x \notin B$$

Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Χρήση του Διαγώνιου Επιχειρήματος για την παραπάνω απόδειξη:

Αρχικά παίρνουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ..\}$ το οποίο είναι άπειρα αριθμήσιμο. Υποθέτοντας ότι το N σαν σύνολο είναι ισοδύναμο με το σύνολο P το οποίο εμπεριέχει υποσύνολα του N καθώς και το κενό σύνολο :
$P\{\{\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 6, 8\} \dots\}$

Αφότου έχουμε καταλάβει ποια είναι τα δεδομένα μας, θα προσπαθήσουμε να κάνουμε την αντιστοιχία των στοιχείων προκειμένου να αποδείξουμε ότι τα δύο αυτά σύνολα είναι ισοδύναμα.

$$\mathbb{N}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \longleftrightarrow & \{\mathbf{4},\mathbf{5}\} \\ \mathbf{2} & \longleftrightarrow & \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\} \\ \mathbf{3} & \longleftrightarrow & \{\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\} \\ \mathbf{4} & \longleftrightarrow & \{\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{5}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right\} P(\mathbb{N}).$$

Ρίχνοντας μία ματιά στον παραπάνω πίνακα στις αντιστοιχίες, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το 2 στο υποσύνολο που αντιστοιχήθηκε υπάρχει και στα δύο μέλη. Σε αντίθεση με τον αριθμό 4 δε υπάρχει στο υποσύνολο που του έγινε η αντιστοίχηση. Αυτό το γεγονός μας φέρνει να ονομάσουμε τους αριθμούς που είναι και στα δύο σύνολα ιδιοτελείς και τους άλλους ανιδιοτελείς. Θα κάνουμε χρήση αυτής της κατάληξης σε ένα σύνολο των ανιδιοτελών αριθμών που θα το ονομάσουμε **K**. Το δυναμοσύνολο **P** εμπεριέχει όλα τα σύνολα των φυσικών αριθμών. Επομένως θα εμπεριέχει και το σύνολο των μη ιδιοτελών αριθμών **K**. Κάθε ένα τέτοιο σύνολο αντιστοιχίζεται με ένα φυσικό αριθμό $\boldsymbol{\varkappa}$ με αντιστοίχηση **1-1**. Αν το $\{\kappa \in K\}$, τότε το $\boldsymbol{\varkappa}$ είναι ένας ιδιοτελής αριθμός. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού είναι μέλος ενός συνόλου όλων των μη ιδιοτελών. Αν το $\{\kappa \notin K\}$ τότε είναι ιδιοτελής. Αλλά αφού είναι ένα μέλος του συνόλου K το οποίο περιλαμβάνει όλους τους ανιδιοτελείς αριθμούς, οδηγεί σε αντίφαση.

Μέσω του παραπάνω παραδείγματος καταλήξαμε ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν μπορούν να αντιστοιχήσουν όλα τα σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι η πληθικότητα του P(N) είναι μεγαλύτερη από αυτή του συνόλου N. Αυτό ισχύει ακόμα και αν το κάθε υποσύνολο του P εμπεριέχει έναν μόνο αριθμό. Έτσι επαληθεύεται το θεώρημα του Cantor, ότι δηλαδή τα δυναμοσύνολα όλων των συνόλων είναι αυστηρά μεγαλύτερα.

2.1.1 Αριθμήσιμο

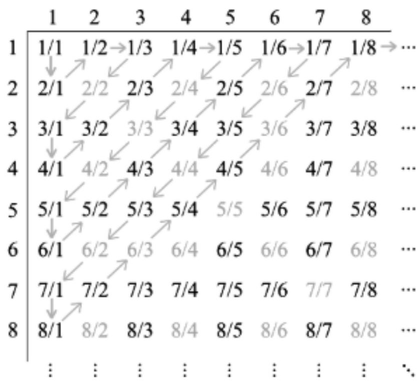
Ορισμός αριθμήσιμου συνόλου:

Ένα σύνολο S λέγεται αριθμήσιμο αν είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί) απεικόνιση των στοιχείων του στους φυσικούς αριθμούς.

Απόδειξη ρητών αριθμών ένα αριθμήσιμο σύνολο

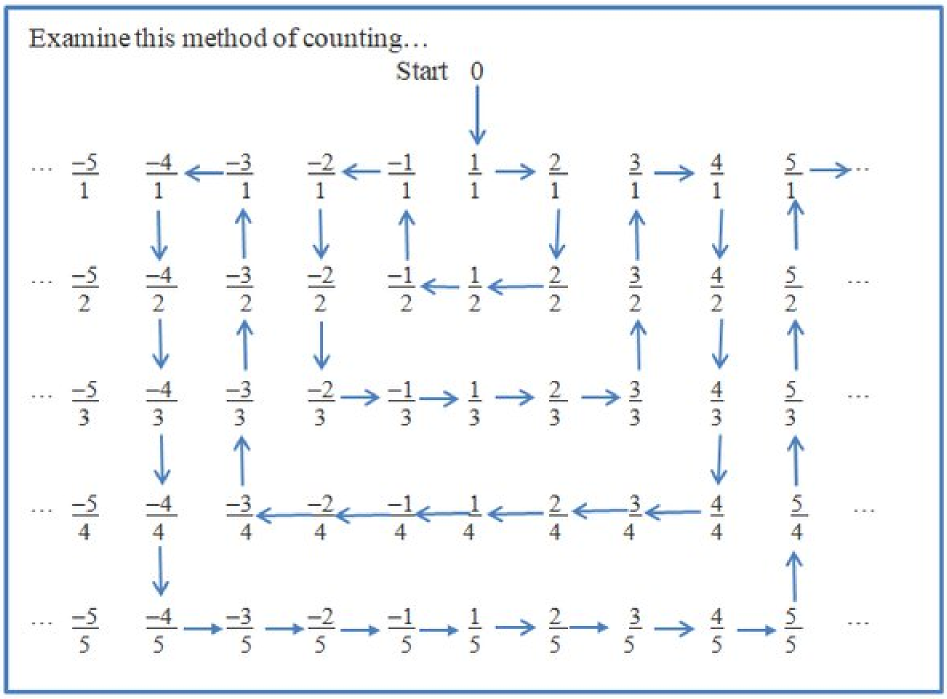
Γνωρίζουμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι το σύνολο των κλασμάτων με αριθμητή οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό και με παρανομαστή οποιονδήποτε ακέραιο εκτός από το μηδέν. Αυτό το σύνολο είναι αριθμήσιμο, εφόσον κάθε ένα στοιχείο του μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα φυσικό αριθμό.

Για να μπορέσουμε να το κατανοήσουμε θα γράψουμε όλα τα κλάσματα σαν μία λίστα όπως φαίνεται παρακάτω:



Όπως παρατηρούμε ο αριθμητής μας δίνει πληροφορίες σε ποια γραμμή βρίσκεται και ο παρανομαστής σε ποια στήλη αντιστοίχως. Όμως μπορούμε να κάνουμε μία αντιστοιχία κάθε ενός κλάσματος σε έναν φυσικό αριθμό; Αν ακολουθήσουμε την πορεία που μας δίνουν τα βελάκια (πορεία ενός φιδιού) θα μπορέσουμε να τοποθετήσουμε όλα τα στοιχεία σε μία λίστα αλλά υπό μία προϋπόθεση: Μερικά στοιχεία αν κάνουμε τη διαίρεση μας δίνουν τον ίδιο αριθμό και καταλήγουμε να το βάζουμε μία φορά μέσα στη λίστα. Το στοιχείο $1/1 = 2/2 = 3/3 = \ldots = 1$ θα μπει μία φορά μέσα στη λίστα και το ίδιο θα γίνει και με τα υπόλοιπα. Με αυτό τον τρόπο θα μπορεί να γίνει η ζεύξη κάθε ενός κλάσματος με τους φυσικούς αριθμούς. Επομένως, όλο αυτό το σύνολο γίνεται άπειρο αλλά και αριθμήσιμο.

Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε να γίνει όλη η παραπάνω διαδικασία τοποθετώντας μέσα στο παραπάνω πίνακα και όλους τους αρνητικούς αριθμούς. Το μόνο που αλλάζει είναι το μονοπάτι που θα ακολουθήσουμε:



2.2 Σχέση διαγωνίου θεωρήματος με τα άπειρα σύνολα

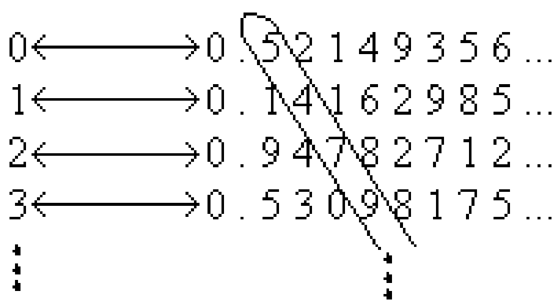
Όλα αυτά όμως που έχουμε προαναφέρει θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι εύκολα επιλήψιμα μόνο για τα πεπερασμένα σύνολα. **Ισχύει όμως αυτή η θεωρία για τα άπειρα σύνολα**; Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό αν αναρωτηθούμε πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στα διαστήματα (0,1) ή στο διάστημα R. Μπορούμε να πούμε ότι αφού το (0,1) είναι ένα υποσύνολο του

R τότε σίγουρα θα έχει λιγότερα στοιχεία. Όμως σκεπτόμενοι λογικά και τα δύο έχουν άπειρα μέλη, επομένως μπορούμε να πούμε ότι τελικά είναι ισοδύναμα. Άρα όλα τα απειροσύνολα πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αφού όλα είναι απειροσύνολα. Σε αυτό το συγκεκριμένο σημείο ο Cantor είχε μία τελείως διαφορετική άποψη πάνω στη θεωρία των απείρων. Υποστήριξε ότι κάθε ένα άπειρο είναι τελικά διαφορετικό με κάποιο άλλο ξεκινώντας με το μικρότερο «Φυσικούς Αριθμούς» και ανεβαίνοντας την πυραμίδα χωρίς να υπάρχει κάποιο τέλος.

2.3 Παραδείγματα θεωρίας Cantor

Απόδειξη πραγματικών αριθμών ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο

Για να πραγματοποιηθεί το παραπάνω, ας θεωρήσουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Ας πάρουμε το εύρος των αριθμών που κινούνται ανάμεσα στο [0-1].



Ας επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε έναν αριθμό ο οποίος θα έχει ως εξής: Παίρνοντας δεδομένο τη διαγώνιο κατασκευάζουμε έναν αριθμό ο οποίος θα έχει σε κάθε δεκαδικό ψηφίο όλους τους δυνατούς αριθμούς 0-9 εκτός από αυτόν που έχει η διαγώνιος.

$$Q = 0\ .\ \alpha 1\ \alpha 2\ \alpha 3\ \alpha 4\ .\ .\ .$$

$$\alpha 1 \notin 5,\ \alpha 2 \notin 4,\ \alpha 3 \notin 7,\ \alpha 4 \notin 9, ...$$

Προσπαθώντας να βρούμε έναν τέτοιο αριθμό μέσα σε ολόκληρο το σύνολο, καταλαβαίνουμε ότι τουλάχιστον ένα δεκαδικό ψηφίο θα είναι διαφορετικό. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι άπειρο και μη αριθμήσιμο.

Παράδειγμα του Διαγώνιου Θεωρήματος με Δυαδικούς Αριθμούς:

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των δυαδικών αριθμών δε μπορεί να είναι ούτε πεπερασμένο ούτε άπειρα αριθμήσιμο δηλαδή είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό που θέλω είναι το σύνολο των απεικονίσεων από τους φυσικούς αριθμούς στο $\{0,1\}$ Επομένως αυτό το σύνολο έχει μέσα του ακολουθίες με όρους κάθε ακολουθίας 0 ή 1.

$$E = \{f/f : N- > \{0,1\}\}$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το Ε σύνολο είναι αριθμήσιμο και μπορώ να το γράψω ως $E = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$. Κάθε όρος αυτού είναι μία ακολουθία :

$X_1 = \{X_1(1),\ X_1(2),\ X_1(3),\ \ldots.\}$
$X_2 = \{X_2(1),\ X_2(2),\ X_2(3),\ \ldots.\}$
$X_3 = \{X_3(1),\ X_3(2),\ X_3(3),\ \ldots.\}$
.
.
$X_n = \{X_n(1),\ X_n(2),\ X_n(3),\ \ldots.\}$
.

Επιλέγοντας τη διαγώνια ευθεία του πίνακα $(X_1(1),\ X_2(2),\ \ldots,\ X_n(n))$, παρατηρώ ότι και αυτή η ακολουθία είναι ένα στοιχείο του συνόλου Ε. Αν πάρω αυτή την ακολουθία και ο κάθε όρος αυτής θα αφαιρεθεί από τη μονάδα: $(1 - X_1(1), 1 - X_2(2)\ \ldots\ , 1 - X_n(n)\ )$, τότε και αυτό το στοιχείο είναι μία ακολουθία μέσα στο Ε. Μπορώ να βρω ένα στοιχείο μέσα στο Ε που θα μπορούσε να γραφτεί ακριβώς σαν το προηγούμενο διάνυσμα.

$X_n* \ = \ (1 - X_1(1), 1 - X_2(2)\ \ldots\ , 1 - X_n(n))$

Σε αυτή την ακολουθία παρατηρώ τη n* θέση που αυτή θα είναι :

$X_n * (n*) = 1 - X_n * (n*)$, όπου αυτό καταλήγει σε άτοπο, αφού όταν το $X_n * (n*)$ είναι 0 η ισότητα θα έχει ακριβώς το αντίθετο αποτέλεσμα. Καταλήγοντας ότι το σύνολο είναι υπεραριθμήσιμο και δε μπορώ να έχω ισοδυναμία με τους φυσικούς αριθμούς.

3 Παράδοξα θεωρίας συνόλων

Όπως έχουμε προαναφέρει , η θεωρία του Cantor έλεγε ότι η συγκέντρωση αφηρημένων ή διακριτών αντικειμένων αποτελεί ένα σύνολο. Αυτός ο ορισμός βρέθηκε αντιμέτωπος με κάποια παράδοξα και είχε ως αποτέλεσμα την αμφισβήτηση της ορθότητας του. Μερικά από αυτά έφεραν μεγάλες αντιφάσεις, δημιουργώντας μεγάλα προβλήματα στη θεωρία των συνόλων του Cantor.Ένα από τα μεγαλύτερα παράδοξα της θεωρίας ήταν του μεγάλου μαθηματικού Russell, μέσω του οποίου οδήγησε να διαγράψει οποιαδήποτε ελπίδα έτρεφε για τη θεμελίωση των μαθηματικών σε όρους λογικής.

3.1 Ερμηνεία του παράδοξου του Russell με την έννοια του συνόλου

Το παράδοξο του Russell δημοσιεύτηκε το 1901 από τον μεγάλο μαθηματικό Bertrand Russell. Αυτό είχε γίνει αντιληπτό και από τον Zermelo ο οποίος δε το ανάφερε ποτέ. Αυτό το παράδοξο το είχε καταλάβει και ο Cantor λέγοντας ότι παρόλο τα μεγάλα θεωρήματα που δίνει η θεωρία των συνόλων, μερικά οδηγούν σε αντιφάσεις.

Το παράδοξο έλεγε ότι ένα σύνολο είναι μία κλάση όλων των συνόλων τα οποία δεν ανήκουν στον εαυτό τους.Το συνολο ολων των Χ που δεν ανηκουν στον εαυτο τους οδηγει σε αντιφαση. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

$$X = \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow X \in X \iff X \notin X$$

- Το σύνολο $X \in X$ αν και μόνο εκπληρεί τη συνθήκη (1), δηλαδή $X \notin X$. **ΑΤΟΠΟ**

- Αν πληρείται το παραπάνω κριτήριο της συνθήκης (1) ότι το $X \notin X$ καθιστά το X ως σύνολο και θα ισχύει $X \in X$. **ΑΤΟΠΟ**

3.2 Ερμηνεία του παράδοξου του Russell

Για να γίνει πιο κατανοητό, θα σας αναφέρω το παρακάτω παράδειγμα: Έχουμε ένα χωριό που αποτελείται από άτομα και ένα κουρέα. Ο κουρέας ξυρίζει όλους τους ανθρώπους αλλά οι άνθρωποι δε μπορούν να ξυρίσουν τον κουρέα. Με αυτό το παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε δύο σύνολα. Εκείνο που μπορούν να ξυρίσουν τον κουρέα και εκείνο που ξυρίζονται από αυτόν. Το ερώτημα είναι το εξής: Ποιος ξυρίζει τον κουρέα; Επομένως ο Russell είπε για να διορθώσουμε αυτή την ιδέα πρέπει να ορίσουμε ότι για κάθε μία ιδιότητα που υπάρχει πρέπει να δημιουργήσουμε ένα σύνολο.

Όλα τα παραπάνω έφεραν σε σκέψη πολλούς μαθηματικούς και η θεωρία του Cantor καταρρίφτηκε.Πολλά χρόνια έκαναν οι μαθηματικοί να αντιμετωπίσουν τις διαφορετικές απόψεις τους και να βρουν ένα κοινό δρόμο μέσω της αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Συνόλων.

Σε όλες αυτές οι αντιφάσεις, ο Zermelo υποστήριξε ότι όλη θεωρία του Cantor δεν είναι τελείως λανθασμένη και προσπάθησε να δώσει βάση σε μερικά πράγματα που είναι απαραίτητα για την εδραίωση της θεωρίας. Για να επιτύχει αυτό το σκοπό, έδωσε εννιά απαραίτητα αξιώματα για να τεθούν ξανά τα θεμέλια της θεωρίας του Cantor.

3.3 Ιστορία αξιωμάτων της θεωρίας του Cantor

Στις αρχές του 19 αιώνα ο μεγάλος μαθηματικός Ernst Zermelo (1908) κατασκεύασε την πρώτη αξιωματική θεωρία συνόλων. Όπως και με τον Cantor, έτσι και με αυτόν δημιουργήθηκαν οι πρώτες αμφιβολίες για την ορθότητάς της. Το 1921 στάλθηκε επιστολή από τον Abraham Fraenkel λέγοντας ότι τα θωρήματα δεν είναι ικανά να εξηγήσουν όλες τις κατηγορίες συνόλων, αλλά και μερικά θεωρήματα που αφορούν τους πληθικούς αριθμούς είναι ήδη δεδομένα, αφού τα έχουν αποδείξει παλαιότεροι μαθηματικοί. Επίσης αμφισβητήθηκε ένας όρος "ορισμένης"-"definite" ιδιότητας, όπου η αντίληψη του στα θεωρήματα δεν γινόταν αρκετά κατανοητή.Το 1922, οι Fraenkel και Thoralf Skolem πρότειναν αυτή την έννοια να αντιμετωπιστεί σαν λογική πρώτης τάξης. Τέλος προσθέτοντας άλλα δύο αξιώματα στα αυτά που είχε προτείνει ο Zermelo :

1. Αξίωμα της κανονικότητας
2. Αξίωμα της επιλογής

δημιουργώντας έτσι τη λίστα αξιωμάτων της θεωρίας του συνόλου, **ZFC**

3.4 Αξιώματατα θεωρίας Cantor

1. Αξίωμα της έκτασης (Extensionality set)

2. Αξίωμα του κενού συνόλου (Empty set)

3. Αξίωμα ζεύγους (Pairing set)

4. Αξίωμα της ένωσης (Union set)

5. Αξίωμα του απείρου (Axiom of infinity)

6. Αξίωμα του δυναμοσυνόλου (Axiom of power set)

7. Αξίωμα της θεμελίωσης ή κανονικότητας (Axiom of regularity)

8. Αξιωματικό σχήμα της αντικατάστασης (Axiom of replacement)

9. Αξίωμα της επιλογής (Axiom of Choice)

1. **Αξίωμα της έκτασης (Extensionality set)**

   Τα A, B σύνολα για τα οποία ισχύει ότι:

   $$A \;=\; B \iff \forall\, x\, (x \;\in\; A \iff x \;\in\; B)$$

   Ισχύει λοιπόν ότι $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$. Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε αμφότερες τις σχέσεις: $A \subseteq B\; \kappa\alpha\iota\; B \subseteq A$).

2. **Αξίωμα του κενού συνόλου (Empty set)**

   Ένα σύνολο είναι κενό όταν δε έχει μέσα του στοιχεία:

   $$(A = \{\emptyset\})(\forall x \notin A)$$

3. **Αξίωμα ζεύγους (Pairing set)**

   Αν υπάρχουν δύο σύνολα (u, v), τότε υπάρχει ένα σύνολο A που έχει μέλη μόνο αυτά: u,v:

   $$z \in A \implies \Rightarrow\; z = u \; or \; z = v$$

4. **Αξίωμα της ένωσης (Union set)**

   Για $\forall\, a, b$ υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο τα στοιχεία του είτε ανήκουν στο α, είτε στο b, είτε και στα δύο ταυτόχρονα:

   $$\forall\, a, b\; \exists\, B,\; \forall\, x\, (x \;\in\; B \iff x \;\in\; a \; or \; x \;\in\; b)$$

5. **Αξίωμα του απείρου (Axiom of infinity)**

   Υπάρχει ένα σύνολο S που εμπεριέχει ∅ και με το X το διαδοχικό του X:

   $$\exists S(\emptyset \;\in\; S \;\wedge\; (X \;\in\; S \;\Rightarrow\; \{X\} \;\in\; S))$$

   Αυτό χρησιμοποιήθηκε για να δώσει μία σημασία στην έννοια των άπειρων συνόλων, ξεκινώντας από την κατασκευή του μικρότερου αριθμήσιμου άπειρου συνόλου, που είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Η κατασκευή ήταν έτσι:

- $0 = \emptyset$
- $1 = 0 \ \cup \ \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 = 1 \ \cup \ \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- ...
- ...

6. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου (Axiom of power set)**

   Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο $B = P(A)$ το οποίο είναι όλα τα υποσύνολα του A.

   $$\forall A \ \exists B \ \forall x \ (x \in B \ x \subseteq A)$$

7. **Αξίωμα της θεμελίωσης ή κανονικότητας (Axiom of regularity)**

   Ένα μη κενό σύνολο A έχει ένα στοιχείο B έτσι ώστε: $A \cap B = \emptyset$

   $$\forall S \ (S \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists x \in S \ \forall y \in S \ y \notin x)$$

8. **Αξιωματικό σχήμα της αντικατάστασης (Axiom of replacement)**

   Έστω f(x,y) είναι ο τύπος της θεωρίας των συνόλων. Τότε για κάθε x υπάρχει ένα μόνο y το οποίο αν αντικατασταθεί στον τύπο τον χρήζει αληθή. Αυτό μας λέει ότι αν έχουμε ένα τύπο θεωρίας συνόλων, τότε για κάθε σετ A υπάρχει ένα μόνο σετ B που τον χρήζει αληθή.

   $$\forall \ A \ \exists \ B(\forall \ y(y \ \exists \ B \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists \ x \ \in \ A) \ f(x,y)))$$

9. Αξίωμα της επιλογής (Axiom of Choice)

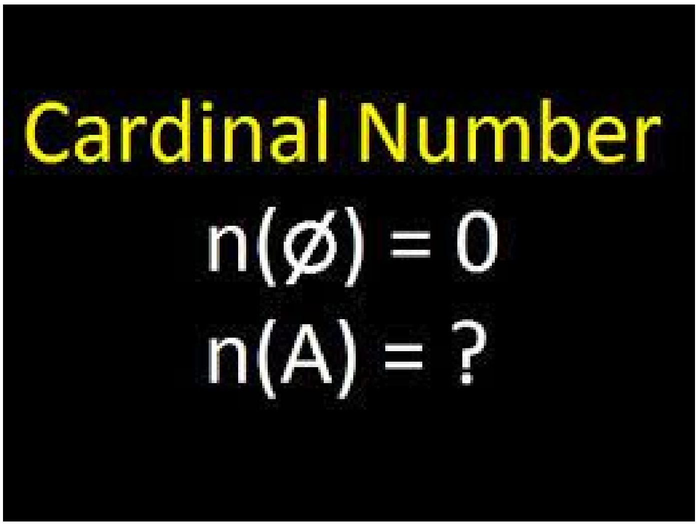
Αυτό το αξίωμα μας λέει ότι μπορώ σε οποιαδήποτε συλλογή από σύνολα τα οποία είναι μη κενά, να δημιουργήσω ένα νέο το οποίο θα έχει στοιχεία του ένα και μόνο ένα στοιχείο από τα παραπάνω, ακόμα και αν η συλλογή είναι άπειρη. Σε μερικές περιπτώσεις η επιλογή αντικειμένου μπορεί να γίνει και χωρίς τη χρήση αυτού του αξιώματος. Αν η συλλογή είναι πεπερασμένη ή υπάρχει κάποιος κανόνας επιλογής στοιχείου τότε το αξίωμα αυτό μπορεί να μην χρησιμοποιηθεί.

Παράδειγμα:
Η επιλογή του μικρότερου στοιχείου από τα τα παρακάτω σύνολα φυσικών αριθμών:
$\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6\}$ Επομένως το σύνολο που ψάχνουμε είναι το $\{1, 4, 6\}$, χωρίς χρήση κάποιου αξιώματος.

Το αξίωμα επιλογής παίρνει βάση όταν η επιλογή σοιχείου γίνεται σε άπειρο σύνολο πραγματικών αριθμών.Εδώ χρίζεται απαραίτητο το αξίωμα επιλογής.

Αυτή η θεωρία ήρθε παρουσιάστηκε τον 20^{th} αιώνα, η οποία είναι ανεξάρτητη από τα υπόλοιπα αξιώματα. Για αυτό το λόγο η θεωρία των συνόλων ZFC και η θεωρία των συνόλων χωρίς αυτό το αξίωμα ZF αποτελούν και οι δύο αποδεκτές θεωρίες.

4 Πληθικοί Αριθμοί



4.1 Η έννοια του πληθικού αριθμού συνόλου

Ορισμός πληθικού αριθμού:

Οι πληθικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν το μέγεθος των συνόλων. Στα πεπερασμένα σύνολα είναι ένας φυσικός αριθμός: ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου. Οι άπειροι πληθικοί αριθμοί περιγράφουν τα μεγέθη των άπειρων συνόλων.

Ο Cantor μίλησε για τα σύνολα ως μία συλογή από αντικείμενα. Η συλλογή S μπορεί να διασπαστεί σε υποσύνολα S_1 και το κάθε ένα από αυτά θα αποτελούν μέρος του συνόλου που δημιουργήθηκαν. Με βάση τα παραπάνω κάθε σύνολο έχει ένα πλήθος στοιχείων όπου αυτό ονομάζεται "δύναμη" (power) ή πληθικός αριθμός (cardinal number).

Δύο σύνολα S, A λέγοντα ισοδύναμα ($S \sim A$) αν έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, δηλαδή αν μπορώ το ένα στοιχείο του συνόλου να να το αντιστοιχήσω με μία συνάρτηση 1-1 και επί. Αυτή η ιδιότητα αν ισχύει για τα σύνολα μπορεί να ισχύσει και για τα υποσύνολα $S_1 \sim A_1$.

Θεώρημα 1: $S \sim A \ \Rightarrow \ \overline{\overline{\mathrm{S}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}}$

4.2 Σχέσεις με πληθικούς αριθμούς

Από τη προηγούμενη ενότητα μπορούμε να πούμε ότι αν $S \sim S'$ και $A \sim A'$, τότε η ένωση αυτών των συνόλων θα είναι επίσης ισοδύναμη: $(S \cup A) \sim (S' \cup A')$, αρκεί η ένωση να μην έχει κοινά σημεία.

Αυτό μπορεί να αποδειχτεί και με τους πληθικούς αριθμούς αυτών. Αν $\overline{\overline{\mathrm{S}}} = s$ και $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = a$ τότε αυτό μας δείχνει ότι:

$$s + a = (\overline{\overline{\mathrm{S} \cup \mathrm{A}}})$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = a$ και $\overline{\overline{\mathrm{S}}} = s$ θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$s + a = a + s$$
$$a + (s + c) = (a + s) + c$$

O cantor μίλησε για τον πολλαπλασιασμό, λέγοντας ότι ένα σύνολο S μπορεί να θεωρηθεί δεσμευμένο από ένα άλλο αντικείμενο άλλου συνόλου A και με αυτό το τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο στοιχείο (s,a). Το γινόμενο ορίζεται ως εξής:

$$a * s = (\overline{\overline{\mathrm{S} * \mathrm{A}}})$$

Αν ισχύει $S \sim S'$ και $A \sim A'$ τότε θα ισχύει $(S * A) \sim (S' * A')$

Θα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $a * s = s * a$
- $a * (s + c) = (a * s) * c$
- $a * (s + c) = a * s + a * c$

όλα αυτά γιατί:

- $(S * A) \sim (A * S)$
- $(A * (S \cup C)) \sim ((A \cup S) * C)$
- $(A * (S \cup C)) \sim ((A \cup S) * (A \cup C))$

4.3 Οι πεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί

Για την καλύτερη αντίληψη της έννοιας του πραγματικού απείρου και των υπερπερασμένων πληθικών αριθμών,ξεκίνησε να μιλάει για τους πληθικούς αριθμούς των πεπερασμένων συνόλων.

- $A_0 = (a_0) \Rightarrow \overline{\overline{\mathrm{A}}} = 1$
- $A_0 = (a_0, a_1) \Rightarrow \overline{\overline{\mathrm{A}}} = 2$
- Στη γενική περίπτωση ισχύει: $\overline{\overline{\mathrm{A_{v-1}}}} = \nu$

Με βάση τα παραπάνω θα ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

1. Το σύνολο στοιχείων των πεπερασμένων συνόλων $1, 2, 3, 4, ..., \nu$ είναι άνισο μεταξύ τους,δε μπορεί να υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ δύο πεπερασμένων συνόλων με διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς.
2. Κάθε αριθμός σε ένα σύνολο πρέπει να έναι μικρότερος από τον επόμενο και μεγαλύτερος από τον προηγούμενο.
3. Δεν υπάρχουν πληθικοί αριθμοί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς $\nu + 1$,δηλαδή ανάμεσα σε 2 στοιχεία δε υπάρχουν άλλα.
4. Αν έχουμε ένα σύνολο S με πληθικό αριθμό $\overline{\overline{\mathrm{S}}} = s$, S_1 ένα υποσύνολοτου συνόλου, τότε ο πληθικός αριθμός του συνόλου του θα είναι ίσος με ένα από τα προηγούμενα $1, 2, 3, ..., s - 1$
5. Αν έχουμε ένα σύνολο S με διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς, τότε θα υπάρχει ένας πληθικός αριθμός s_1 που θα είναι ο μικρότερος όλων.

4.4 Ο μικρότερος υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός άλεφ-μηδέν

Ο cantor μετά από διάφορες αποδείξεις, έδειξε ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι το μικρότερο άπειρο σύνολο και το ονόμασε ($\aleph_0$, aleph-null) και για κάθε πληθικό αριθμό υπάρχει μεγαλύτερος.

Αν σε σύνολο με πληθικό αριθμό $\aleph_0$ προσθέσουμε ένα στοιχείο a_0, τότε η πληθικότητα δεν αλλάζει.

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω:

- Κάθε αριθμήσιμο άπειρο σύνολο θα έχει πληθικό αριθμό $\aleph_0$
- Αν έχουμε ένα αριθμήσιμο άπειρο υποσύνολο ενός συνόλου S τότε και αυτό θα έχει πληθικό αριθμό $\aleph_0$
- $\aleph_0$+$\aleph_0$=$\aleph_0$
- Κάθε αριθμήσιμο άπειρο σύνολο είναι ισοδύναμο με κάθε άπειρο υποσύνολο του

4.5 Υπόθεση του συνεχούς(Continuoum Hypothesis)

Πόσα άπειρα σύνολα υπάρχουν;

Ερώτημα του Cantor
Υπάρχει σύνολο του οποίου η πληθικότητα είναι ανάμεσα στις πληθικότητες του συνόλου των ακεραίων αριθμών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών;

Ο μικρότερος πληθικός αριθμός είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ο οποίος συμβολίζεται με $\aleph_0$. Η υπόθεση του συνεχούς λέει ότι ο πληθικός αριθμός του συνόλου των πραγματικών είναι $\aleph_1$.Αν όμως αυτή η υπόθεση είναι λάθος και υπάρχει ένα ενδιάμεσο σύνολο το οποίο είναι μεγαλύτερο από αυτό των φυσικών αριθμών και μικρότερο από αυτό των πραγματικών. Τότε το σύνολο των πραγματικών αριθμών θα έχει πληθικότητα τουλάχιστον $\aleph_2$.

Ο Kurt Gödel έδειξε το 1940 ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να κριθεί εσφαλμένη από τα τα αξιώματα της θεωρία των συνόλων ZFC, ακόμη και αν γίνει χρήση του αξίωματος της επιλογής (Axiom of Choice). Ο Paul Cohen έδειξε το 1963 ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα του Zermelo. Γι' αυτό, η υπόθεση του συνεχούς είναι ανεξάρτητη της θεωρίας συνόλων ZFC. Και τα δύο αυτά αποτελέσματα υποθέτουν ότι τα αξιώματα των Zermelo–Fraenkel είναι ορθά.

Η αξιωματική θεωρία ZFC δεν μπορεί να αποφανθεί αν ισχύει η υπόθεση του συνεχούς. Ακόμα και πριν την δημιουργία των αξιωμάτων ο Cantor προσπάθησε να αποδείξει την ορθότητα του θεώρηματος του : Ότι δεν υπάρχει κάποιο σύνολο ανάμεσα στους πραγματικούς και τους φυσικούς αριθμούς. Μάταια όμως, και με αυτό το τρόπο μπήκε στα είκοσι-τρία ανοικτά ερωτήματα του David Hilbert, που θέστηκαν στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών το έτος 1900 στο Παρίσι.

5 Μερική Διάταξη

5.1 Ιστορία των διατάξεων

Η διάταξη είναι μία έννοια η οποία εξηγείται στις μικρές τάξεις του σχολείου, κάνοντας αναφορά για τους φυσικούς αριθμούς: π.χ. το νούμερο 1 είναι μικρότερο από το 2. Αυτός ο όρος έχει επεκταθεί και σε μεγαλύτερα σύνολα αριθμών (ρητούς, ακέραιους, κλπ). Η ιδέα της ταξινόμησης ήταν η αρχή της δημιουργίας του συστήματος αρίθμησης (πρόσθεση, αφαίρεση,....).

Με τον όρο διάταξη, μας επιτρέπει να έχουμε ταξινόμηση στοιχείων για το αν κάποιο είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από κάποιο άλλο.

5.2 Μερικά διατεταγμένα σύνολα

Ορισμός: Μερικής διάταξης

Ένα σύνολο θα λέμε ότι είναι μερικώς διατεταγμένο αν τηρούνται οι τρεις (3) παρακάτω προϋποθέσεις:

1. $a \leq a$, **Ανακλαστική** ιδιότητα.
2. $a \leq b$ και $b \leq a$ τότε $a = b$, **Αντισυμμετρική** ιδιότητα.
3. $a \leq b$ και $b \leq c$ τότε και $a \leq c$, **Μεταβατική** ιδιότητα.

Έστω ένα σύνολο $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
Όταν πάρω τα παρακάτω υποσύνολα:

- $(P_1, \subseteq) = \{1,2\}$
- $(P_2, \subseteq) = \{2,3\}$

  Τα δύο παραπάνω υποσύνολα μπορεί να ανήκουν στο ίδιο σύνολο, αλλά δεν είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους. Αυτό γιατί το υποσύνολο P_1 δεν εμπεριέχει το στοιχείο 3 και με τη σειρά του το υποσύνολο P_2 δεν εμπεριέχει το στοιχείο 1.

Παράδειγμα "a διαιρεί ακριβώς το b"

Έχουμε ένα σύνολο από τους θετικούς ακέραιους αριθμούς Z^+. Ορίζουμε ένα σύνολο **X** όπου ένα στοιχείο του συνόλου **a** διαιρεί ακριβώς ένα άλλο στοιχείο αυτού **b**: $a|b$

$$S \ = \ \{(a,b) \ \text{και υπρχει να} \ x \in Z^+ \ \text{τσι στε} \ a = xb \ \}$$

Αυτό το σύνολο είναι μερικής διάταξης αφού:

1. **Ανακλαστική**: $a \leq a$, εφόσον a | a, για κάθε $a \in P$

2. **Αντισυμμετρική**: Αφού, $\forall a, \ b \ \in \ P$, αν **a** | **b** και **b** | **a**, υπάρχουν **k**, **l** έτσι ώστε **b** = **k*a** και **a** = **l*b**. Αντικαθιστώντας το b από την πρώτη ισότητα στη δεύτερη, παίρνουμε **a** = **k*l*a** από όπου προκύπτει ότι **k**=**1, l**=**1**. Άρα, **a**=**b**.

3. **Μεταβατική**: Αν υπάρχει **a** | **b** και **b** | **c**. Τότε θα υπάρχει σίγουρα οι ακόλουθες σχέσεις $b = xa$ και $c = yb$, όπου αν γίνει η κατάλληλη αντικατάσταση θα έχουμε: $c = xya$.

Αν παίραμε το σύνολο A={1,2,3,4} τότε το σύνολο **S** που θα είναι μερικώς διατεταγμένο θα εμπεριέχει τα εξής ζεύγη:

$$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι από τη στιγμή που το στοιχείο 2 δεν διαιρεί το ακριβώς το στοιχείο 3: $2|3 \neq k \in Z^+$ δεν ικανοποιείται η συνθήκη της καθολικότητας ώστε να μπορούμε να μιλήσουμε για ολική διάταξη. Επομένως το σύνολο **S** ικανοποιεί τις συνθήκες της **Μερικής Διάταξης**.

5.3 Διάγραμμα HASSE

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διάγραμμα A το οποίο έχει μία σχέση διάταξης $\leq$. Αν δύο στοιχεία του συνόλου a,b όπου θα ισχύει $a < b$ ή $b < a$, τότε αυτή η σχέση μας υποδεικνύει ότι το στοιχείο a είναι προηγούμενο του στοιχείου b ή και το αντίστροφο. Αν όμως ίσχυε η σχέση $a \leq b$ ή $b \leq a$ τότε θα ίσχυε ότι ο a είναι αμέσως προηγούμενο στοιχείο του b ή το αντίστροφο και δε θα υπήρχε κάποιο άλλο στοιχείο ανάμεσα τους.

Όλα τα παραπάνως μας βοηθάνε να εξηγήσουμε το **Διάγραμμα Hasse - Διάγραμμα Σχέσης** το οποίο σχετίζεται με τον έννοια της **Μερικής Διάταξης**.

Μέσω αυτού του διαγράμματος μπορεί να γίνει γραφική αναπαράσταση τα στοιχεία του μερικού διατεταγμένου συνόλου. Αυτό μας επιτρέπει να δούμε πολλές ιδιότητες της μερικής διάταξης. Προκειμένου να γίνει σχεδίαση αυτού του διαγράμματος ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Σχεδιάζουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου και τα συνδέουμε μεταξύ τους με βελάκια, τα οποία πρέπει να έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω.

2. Γίνεται αφαίρεση όλων των δεικτών που έχουν τα βελάκια

3. Αυτά τα βελάκια τα οποία ξεκινούν και καταλήγουν στο ίδιο στοιχείο, είναι αυτονόητα ώστε να γίνεται παράλειψη αυτών.

4. Όταν ένα στοιχείο μπορεί να συνδεθεί με κάποιο άλλο μέσω κάποια μεταβατικής ιδιότητας, τότε μπορεί να γίνει εξάλειψη εκείνου της απευθείας σύνδεσης.

Το διάγραμμα **Hasse** μπορεί να απεικονίσει ακόμα και τα αριθμήσιμα σύνολα. Αυτό μπορεί να κατασκευαστεί και για την απεικόνηση του συνόλου των φυσικών αριθμών (N). Αυτό όμως δε μπορεί να γίνει για τους πραγματικούς αριθμούς (R), εφόσον δεν υπάρχει ένα στοιχείο το οποίο είναι αμέσως επόμενο από κάποιο άλλο.

Παράδειγμα

Παίρνοντας ένα σύνολο $A = \{a, b, c\}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε το παρακάτω δυναμοσύνολο του :

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

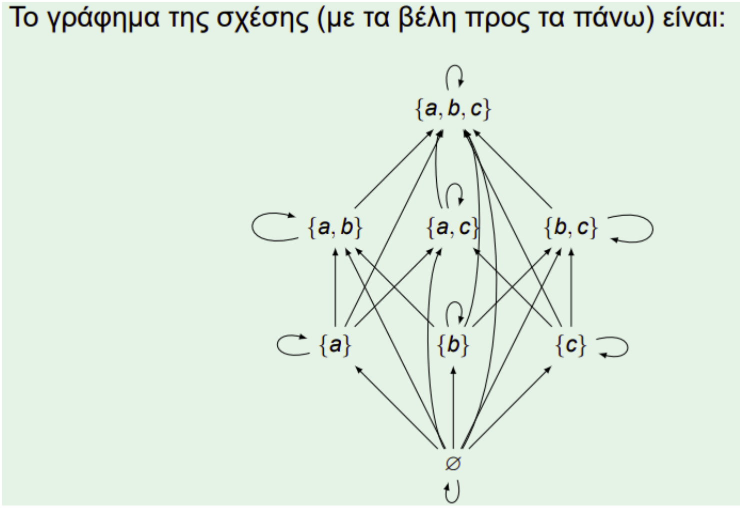
Μπορούμε να πάρουμε δύο υποσύνολα του δυναμοσυνόλου ώστε να αποδείξουμε ότι είναι μερικής διάταξης.

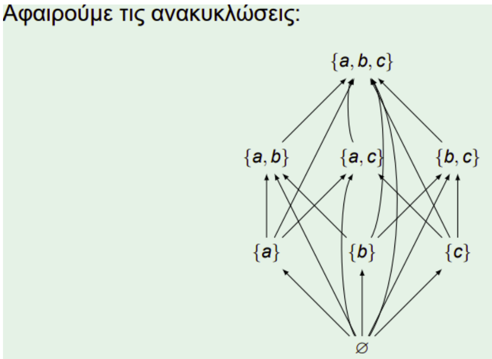
1. Είναι **ανακλαστική** αφού ισχύει για κάθε στοιχείο $a \leq a$

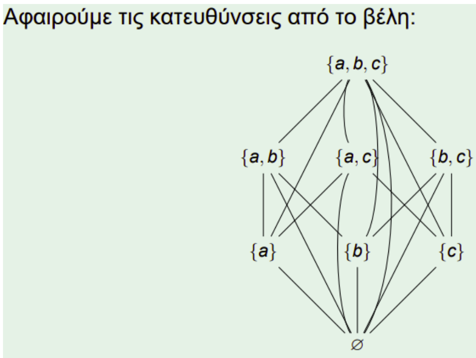
2. Είναι **αντισυμμετρική** αφού αν για τα υποσύνολα A,B ισχύει $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$

3. Είναι **μεταβατική** αφού αν έχουμε 3 υπσύνολα A,B,C και ισχύει $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ τότε θα ισχύει και $A \subseteq C$

Παρακάτω μπορούμε το διάγραμμα **Hasse** το οποίο εκπληρεί όλες τις ιδιότητες (απαραίτητες και μη)

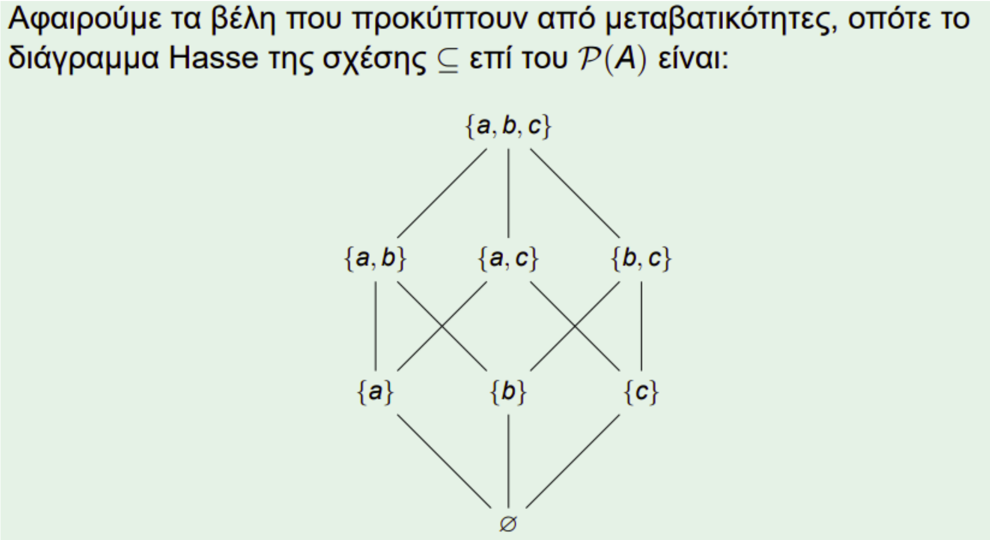






Αφαιρούμε τις ανακυκλώσεις

Αφαιρούμε τα βελάκια



Τελικό διάγραμμα Hasse του συνόλου

Σημείωση:

Η σύνδεση των στοιχείων $a \leq c$ δεν ισχύει, διότι οποιαδήποτε διαδρομή και αν ακολουθήσουμε, με αρχή το {a} και τέλος το {c}, θα έχει ένα τουλάχιστον ευθύγραμμο τμήμα με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω, γεγονός μη αποδεκτό. Για παράδειγμα, στη διαδρομή {a}→{a,c}→{c}, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σύνολα {a,c} και {c} έχει κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω.

5.4 Μέγιστα - ελάχιστα σημεία

Σε κάθε ολικά ή μερικώς διατεταγμένο σύνολο υπάρχουν τα ελάχιστα και τα μέγιστα σημεία.

- **Ελάχιστο** στοιχείο "a" (least element) σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$ είναι αυτό το οποίο είναι μικρότερο από οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του συνόλου $b \in A \ \Rightarrow a < b$
- **Μέγιστο** στοιχείο (greatest element) σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$ είναι αυτό το οποίο είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του συνόλου $b \in A \ \Rightarrow a < b$
- **Μεγιστικό** στοιχείο (maximal element): είναι ένα στοιχείο σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $a \in A$, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει στοιχείο $b \in A$ τέτοιο ώστε $a \leq b$.
- **Ελαχιστικό** στοιχείο (minimal element): είναι ένα στοιχείο σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $a \in A$, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει στοιχείο $b \in A$ τέτοιο ώστε $b \leq a$.

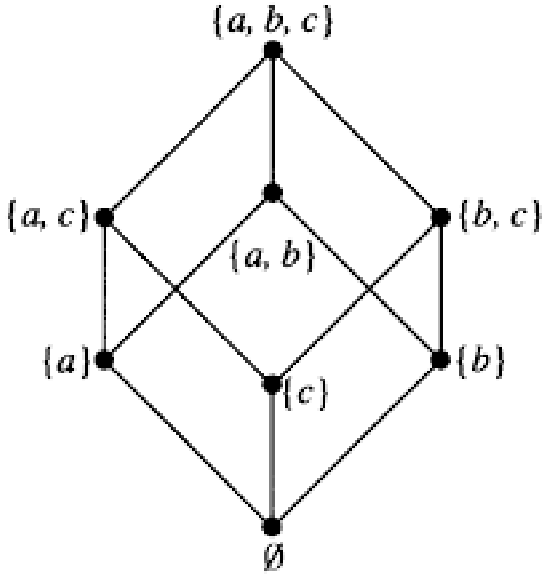
Αξίζει να σημειώσουμε τα εξής:

- Σε ένα μερικό διατεταγμένο σύνολο μπορεί να έχει κανένα, ένα ή πολλά πρώτα ή maximal σημεία.

- Σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο μπορεί το maximal και minimal σημείο αυτού να είναι το ίδιο. Το ίδιο μπορεί να ισχύει και για το πρώτο και το τελευταίο στοιχέιο του συνόλου.

Παράδειγμα 1

Θα πάρουμε το δυναμοσύνολου P(A) του συνόλου A ={a,b,c}



- Παρατηρούμε ότι το maximal στοιχείο του διαγράμματος είναι το {a,b,c} το οποίο είναι και το μοναδικό, επομένως είναι και το greatest.

- Το minimal στοιχείο του διαγράμματος είναι το $\emptyset$ που και αυτό επίσης είναι και το μοναδικό, επίσης είναι το least.

5.5 Άνω-κάτω φράγμα

Παίρνουμε ένα σύνολο A το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία διάταξη $\leq$ και ένα υποσύνολο αυτού A_1. Το υποσύνολο έχει **άνω φράγμα** αν και μόνο αν υπάρχει ένα στοιχείο $x \in A$ το οποίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε ένα στοιχείο του υποσυνόλου A_1, $(\forall y \in A_1 \leq x)$.

Το υποσύνολο έχει **κάτω φράγμα** αν και μόνο αν υπάρχει ένα στοιχείο $x \in A$ το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε ένα στοιχείο του υποσυνόλου A_1, $(x \leq \forall y \in A_1)$.

Ένα σύνολο το οποίο έχει **άνω** και **κάτω** φράγμα ονομάζεται **φραγμένο**.

Παράδειγμα

Η μερική διάταξη $\leq$ ορισμένη στο Z, δεν έχει κανένα **μέγιστο ή ελάχιστο** στοιχείο.

Επίσης ένα σύνολο μπορεί να έχει πολλά **άνω** ή **κάτω** φράγματα ή και τα δύο, αλλά μπορεί να έχει και κανένα από αυτά. Αυτό γίνεται διότι το **άνω** ή το **κάτω** φράγμα μπορεί ανήκε ή να μην ανήκει στο σύνολο αυτό.

Παράδειγμα

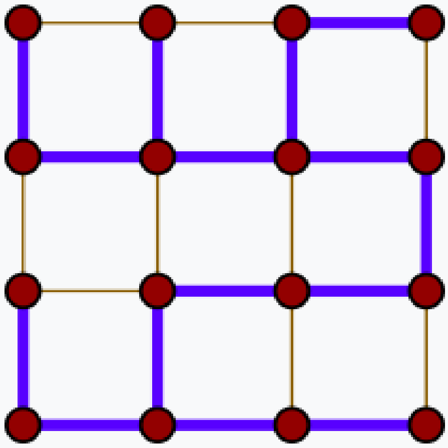
Πάιρνουμε ένα υποσύνολο των ακέραιων αριθμών Z, X={-2,-1,0,1,2}. Αυτό το υποσύνολο έχει πολλά άνω και κάτω φράγματα Αυτό γιατί οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου Z ($\forall x \in Z$) που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του X είναι άνω φράγμα. Το ίδιο ισχύει και το κάτω φράγμα. Μόνο ένα στοιχείο του συνόλου X ανήκει στην οικογένεια των άνω φραγμάτων το στοιχείο "2". Με τον ίδιο τρόπο το μοναδικό στοιχείο που ανήκει στην οικογένεια των κάτω φραγμάτων είναι το στοιχείο "-2".

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε ένα υποσύνολο των ακέραιων αριθμών που θα είναι όλοι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί Z^+. Αυτό το υποσύνολο έχει ένα ελάχιστο φράγμα το στοιχείο "0", ενώ δεν έχει κανένα μέγιστο στοιχείο.

5.6 Λήμμα του Zorn

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο το οποίο είναι **μερικά διατεταγμένο** $(P, \leq)$. Εάν κάθε **ολικά διατεταγμένο** υποσύνολο του συνόλου $X \subseteq P$ έχει **άνω φράγμα**, τότε το σύνολο P έχει τουλάχιστον ένα **maximal στοιχείο**.

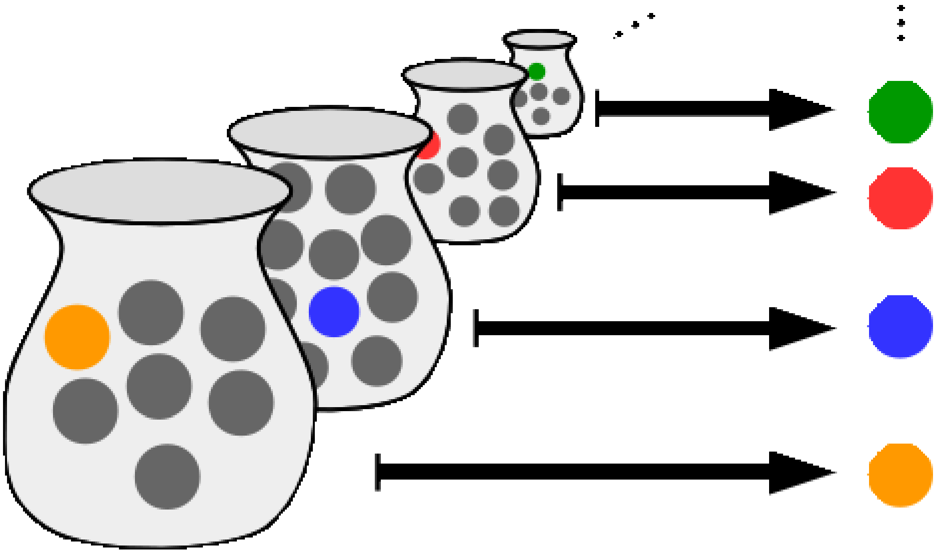
5.7 Αξίωμα της Επιλογής - Λήμμα του Zorn



Το λήμμα του Zorn μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι κάθε συνδεδεμένο γράφημα έχει ένα εκτεινόμενο δέντρο . Το σύνολο όλων των υπο-γραφημάτων που είναι δέντρα ταξινομείται κατά συμπερίληψη και η ένωση μιας αλυσίδας είναι ένα άνω όριο. Το λήμμα του Zorn λέει ότι πρέπει να υπάρχει ένα μέγιστο δέντρο, το οποίο είναι ένα εκτεινόμενο δέντρο αφού το γράφημα είναι συνδεδεμένο. [1] Το λήμμα του Zorn δεν χρειάζεται για πεπερασμένα γραφήματα, όπως αυτό που απεικονίζεται εδώ.

Το αξίωμα της επιλογής μπορεί να συνδιαστεί με το λήμμα του Zorn ως εξής:

Το **Αξίωμα Επιλογής** μας έλεγε ότι αν έχω ένα πλήθος από μη κενά σύνολα $S_{i,i \in I}$. Μπορώ να δημιουργήσω μία οικογένεια από στοιχεία $x_i \in S_i$. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται **Συνάρτηση Επιλογής** η οποία επιλέγει ένα στοιχείο από κάθε ένα σύνολο ξεχωριστά.



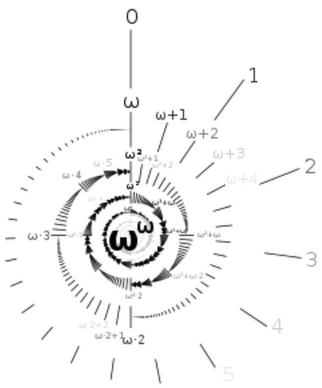
Αυτό που μπορούμε να κάνουμε με ένα πεπερασμένο σύνλο από βάζα, είναι να επιλέξουμε μέσω της συνάρτησης επιλογής ένα στοιχείο από κάθε ένα βάζο ξεχωριστά. Η συνάρτηση όμως δε είναι σε αυτή τη περίπτωση απαραίτητη και αυτη τη διαδικασία επιλογής μπορεί να γίνει και χωρίς αυτή.

Όταν όμως τα βαζάκια είναι άπειρα, τότε δε μπορώ να κάθομαι να επιλέγω ένα-ένα στοιχείο τη φορά από κάθε ένα, διότι αυτή η διαδικάσία θα είναι χωρίς τέλος. Εδώ η **συνάρτηση επιλογής** είναι απαραίτητη.

Το **Zorn lemma** μας λέει ότι αν πάρουμε ένα **μερικά διατταγμένο** σύνολο P, τότε κάθε ένα ολικά υποσύνολο αυτού θα έχει άνω φράγμα. Τότε το σύνολο P θα έχει τουλάχιστον ένα maximal στοιχείο.

Αποδηκνύεται ότι αυτά τα δύο **Zorn's Lemma - Axiom of Choice** είναι **ισοδύναμα**. Αυτά τα δύο δεν χρειάζονται για σύνολα τα οποία είναι πεπερασμένα. Όταν όμως είναι άπειρα, καθιστούνται πλήρως απαραίτητα, αφού για την εύρεση μερικών στοιχείων η διαδικασία είναι ακατόρθωτη.

6 Διατακτικοί Αριθμοί (Ordinal Numbers)



6.1 Διατακτικοί αριθμοί ενός διατεταγμένου συνόλου

Έστω $(E_1, \leq)$, $(E_2, \leq)$ διατεταγμένου σύνολο.Λέγονται ισόμορφα αν $\exists$f: $\mathrm{E}_1 \underset{\varepsilon\pi}{\overset{1-1}{\to}} E_2$ που διατηρεί τη διάταξη. Δηλαδή $x \leq y$ στο $E_1 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ *στο* E_2

Ορισμός διατακτικού τύπου (Order type)

Ο διατακτικός τύπος του E_1 είναι η κλάση των συνόλων Ε που είναι ισόμορφα με το E_1

Για παράδειγμα οι ακέραιοι αριθμοί και οι ζυγοί ακέραιοι αριθμοί έχουν τον ίδιο order type. Αυτό διότι παίρνοντας τη συνάρτηση f:$n \to 2n$ υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και παίρνοντας ένα αριθμό από το πρώτο σύνολο μπορούμε να βρούμε με ποιο στοιχείο αντιστοιχίζεται από το άλλο.

Ορισμός καλού διατεταγμένου συνόλου-

Ένα διατεταγμένο σύνολο $(E, \leq)$ καλείται καλό διατεταγμένο σύνολο αν $\forall\ A \subset E$ το Α έχει ελάχιστο σημείο. Ο διατακτικός τύπος ενός καλού διατεταγμένου συνόλου καλείται διατακτικός αριθμός.

Σε κάθε πεπερασμένο σύνολο κάθε ένα αντικείμενο έχει μία ετικέτα που λέει τον μικρότερο φυσικό αριθμό που δε έχει χρησιμοποιηθεί προηγουμένως. Τα άπειρα σύνολα διαφέρουν στο ότι κάθε ταξινομημένο σύνολο έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.Το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών είναι φυσικά διατεταγμένο: 1, 2, 3, 4, ... Αλλά αυτή δεν είναι η μόνη σειρά με την οποία μπορούν να ταξινομηθούν οι αριθμοί.

Αρχή καλής διάταξης

Αν ένα σύνολο $E \neq 0$ τότε $\exists$ διάταξη $\leq$ έτσι ώστε το $(E, \leq)$ να είναι καλά διατεταγμένο. Οι φυσικοί αριθμοί N με τη συνιθισμένη διάταξη είναι ένα καλό διατεταγμένο σύνολο. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη τέλεια επαγωγή

Υπάρχει μία διαφορά μεταξύ των **Διατακτικών** και **Πληθικών** αριθμών. Όταν σε ένα σύνολο αλλάξω τη σειρά των στοιχείων που βρίσκονται μέσα σε αυτό, τότε ο πληθικός αριθμός παραμένει πάλι σταθερός. Αυτό όμως δε ισχύει για τους διατακτικούς αριθμούς. Όταν σε αυτούς αλλάξει η σειρά, τότε η αντιστοίχησή τους με του φυσικούς αριθμούς αλλάζει, επομένως δημιουργούνται δύο σύνολα με ίδιο πληθικό αριθμό και με διαφορετική διάταξη.

6.2 Πράξεις με διατακτικούς τύπους

6.2.1 Ένωση

Γνωρίζω ότι η ένωση $\cup$ δύο καλά διατεταγμένων συνόλων (S,A) μπορεί να μας δώσει σαν αποτέλεσμα ένα μεγαλύτερο διατεταγμένο σύνολο $(S \cup A)$. Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ισχύει είναι ότι κάθε ένα στοιχείο του ενός συνόλου πρέπει να είναι μικρότερο από του άλλου. Με αυτό το τρόπο τα δύο αυτά σύνολα S,A διατηρούν την σειρά που έχουν ήδη.

6.2.2 Πρόσθεση

Παίρουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς και τους τοποθετούμε σε μία λίστα. Τη θέση του τελευταίου φυσικού αριθμού που βρίσκεται μέσα στη λίστα θα το συμβολίσουμε $\boldsymbol{\omega}$.

Όταν προσθέσουμε τον αριθμό 3 στο $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}$+3), εννοούμε ότι τοποθετήθηκε τρεις θέσεις μετά το $\boldsymbol{\omega}$.Αυτή τη διαδικασία μπορούμε να τη κάνουμε συνεχώς. Να προσθέτουμε στοιχεία μετά το $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{\omega}$+1, $\boldsymbol{\omega}$+2, $\boldsymbol{\omega}$+3 κτλπ.Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ είναι ότι μπορεί να προσθέσαμε ένα στοιχείο στο σύνολο, αλλά ακόμα η πληθικότητα αυτού παραμένει $\boldsymbol{\omega}$.

Προσοχή:

- $\boldsymbol{\omega}$+3 είναι διαφορετικό με το 3+$\boldsymbol{\omega}$

  3+$\boldsymbol{\omega}$ μπορούμε να το γράψουμε και σαν $3+\infty = \infty$.Αν προστεθεί το τρία μπροστά τότε αυτό θα χαθεί.

6.2.3 Πολλαπλασιασμός

Ας πάρουμε δύο ζεύγη καλά διατεταγμένα $(A, <)$ και $(B, <)$. Τότε το σύνλο S=AxB είναι το καρτεσιανό σύνολο του οποίου η διάταξη του ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $(x_1, x_2) \in A$ και $(y_1, y_2) \in B$ ισχύει:

- Αν $x_1 < x_2$και $y_1 < y_2$ τότε $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$
- Αν $x_1 = x_2$ τότε τα ζεύγη (x_1, y_1) και (x_2, y_2) μπορύν να συγκριθούν με τον ίδιο τρόπο που μπορεί να συγκριθεί το y_1 με y_2.

Όπως στη πρόσθεση μπορούμε να προσθέσουμε πρέπει να προσέξουμε τη σειρά που βάζουμε τα στοιχεία $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, έτσι και στον πολλπλασιασμό συμβαίνει το ίδιο ακριβώς.

Επίσης ο διατακτικός πολλαπλασιασμός μπορεί να δοθεί και επαγωγικά ως προς το b:

- $a * 0 = 0$
- a*b = a*(b-1) +a, αρκεί το b-1 να είναι ο προηγούμενος του b
- a*b = $\cup(a * d)$ αν το b είναι οριακή τιμή

Έχουμε ένα παράδειγμα σε περίπτωση του ω*2 το οποίο είναι το ίδιο με το ω+ω:

$$0_0 < 1_0 < 2_0 < .... < 0_1 < 1_1 < 2_1 < ...$$

Σε αντίθετη περίπτωση 2*ω ισχύει το εξής:

$$0_0 < 1_0 < 0_1 < 1_1 < 0_3 < 1_3 < ...$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι το παραπάνω έχει πληθικότητα ω. Με αυτό το παράδειγμα καταλαβαίνουμε ότι η αλλαγή των στοιχείων πολλαπλασιασμού δε γίνεται εφικτή: $2 * \omega \neq \omega * 2$

6.2.4 Εκθεσιμότητα (Exponentiation)

Για την κατασκευή ενός συνόλου τύπου a^b πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όλες τις συναρτήσεις από το b $\sigma\tau o$ α, όπου παίρνοντας στοιχεία από το σύνολο b μας οδηγούν σε μη κενά σύνολα του a.

Τα παραπάνω μπορούν να εξηγηθούν και λέγοντας τα επαγωγικά:

- $a^0 = 1$
- $a^b = a^{b-1} + a$ αρκεί ο $b - 1$ να είναι ο προηγούμενος του b
- $a^b = \cup(a^d)$ αν το b είναι οριακή τιμή

Σε περίπτωση που ο εκθέτης είναι ένας αριθμός ο οποίος είναι πεπερασμένος τότε το μπορεί να γρφτεί πολύ απλά, μέσω της προηγούμενης ορισμένης πράξης των διατακτικών συνόλων του πολλαπλασιασμού. Για παράδειγμα το $\omega^2 = \omega * \omega$:

$$(0,0) < (1,0) < (2,0) < (3,0) < ... < (0,1) < (1,1) < (2,1) < ...$$

Όταν όμως κάνουμε λόγο για εκθέτες άπειρης τάξης το αποτέλεσμα αυτών δεν είναι προφανή.Παίρνοντας το ω^ω, συμβολίζει το ανώτερο στοιχείο όλων των μικρότερων διατεταγμένων συνόλων.Αυτό μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο όλων των ακολουθιών των φυσικών αριθμών.Η διάταξη αυτού του συνόλου δε μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν καλά διατεταγμένη (well order). Για να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, ορίζουμε ότι το ω^ω είναι το σύνολο όλων των ακολόυθιών που είναι μη μηδενικές και ένα πεπερασμένο αριθμό ορισμάτων.

$\omega^\omega = \cup\omega^n$ με (ω<n), αφού το ω είναι ένας οριακός αριθμός

7 Von Neumann ordinals

Ο Von Neumann ήταν ένας μεγάλος μαθηματικός ο οποίος του $20^{ου}$ αιώνα,ο οποίος έφερε μεγάλα αποτελέσματα σε πολλούς κλάδους, όπως μαθηματικά και φυσική. Ανέφερε για το **Αξίωμα της Κανόνικότητας**, ότι για τη δημιουργία ενός συνόλου πρέπει να ξεκινάμε από τ υποσύνολα του και πηγαίνουμε ανοδικά. Το σύνολα που δημιουργήσαμε να είναι υποσύνολο του επόμενου συνόλου που δημιουργούμε, ώστε η σύνδεση αυτών να είναι αλυσιδωτή. Ένας δεύτρος τρόπος που προσέγγισε το πρόβλημα ήταν όταν όρισε το σλυνολο ως μία κλάση και ισχυρίζονταν ότι οι κλάσεις δημιουργούνται από άλλες κλάσεις. Στη πραγματικότητα όμως, ο σωστός ορισμός της κλάσης λέει ότι μία τέτοια δεν απαρτίζει κάνενα μέλος άλλης κλάσης. Με τον Zermelo–Fraenkel δημιουργήθηκε ένα εμπόδιο στη δημιουργία ενός συνόλου στο οποίο τα υποσύνολα του δεν θα ανήκουν σε αυτό. Αντίθετα με τον Von Neumann μπορεί να δημιουργηθεί το σύνολο που τα υποσύνολα του δεν θα ανήκουν στον εαυτό τους αλλά δε θα ονομαστεί αυτό ως σύνολο αλλά ως "κατάλληλη κλάση".

Ένα άλλο θέμα που τέθηκε για τη θεωρία συνόλων είναι ότι υπήρχαν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να αναπαρασταθούν οι φυσικοί αριθμοί. Σε όλους αυτούς συμπεριλαμβάνεται και ο τρόπος του **Von Neumann** ο οποίος χρησιμοποιείται αρκετά στην αξιωματική θεωρία (**ZFC**) και σε ένα σύστημα που υπάρχει αντιστοιχία **ένα προς ένα (1-1)** μεταξύ δύο (2) συνόλων, το οποίο προτάθηκε από τον **Gottlob Frege & Bertrand Russell**

7.1 Επεξήγηση πρότασης του Von Neumann

Στη θεωρία των συνόλων, οι φυσικοί αριθμοί αναπαρίστανται ως : $n = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n-1\}$ για κάθε ένα φυσικό αριθμό. Κάθε στοιχείο **n**, είναι ένα σύνολο το οποίο εμπεριέχει **n** στοιχεία.

Οι πρώτοι φυσικοί αριθμοί που ορίζονται με αυτό το τρόπο είναι οι εξής:

- **0** = **{ }** $= \emptyset$
- **1** = **{ 0 }** $= \{\emptyset\}$
- **2** = **{ 0,1 }** $= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **3** = **{ 0,1,2 }** $= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

7.2 Von Neumann vs Zermelo

Η διαφορά των μοντέλων που χρησιμοποιούσαν για την αναπαράσταση των φυσικών αριθμών είναι ευκόλως αντιληπτή. Το μοντέλο του Zermelo αντιπροσώπευε το **n+1** ως **n**. Αντίθετα το μοντέλο του Von Neumann αντιπροσώπευε κάθε **n** ως σύνολο των μικρότερων αριθμών.Το στοιχείο 3 από τον Zermelo ως: $3 = 2 \cup \{2\}$, ενώ ο Neumann το αντιπροσωπεύει στο μοντέλο του ως $3 = \{0, 1, 2\}$. Το μοντέλο του Von Neumann το βλέπουμε συχνότερα από το άλλο μοντέλο λόγω της πληθώρας των ανέσεων που παρέχει.

Η κατασκευή του Von Neumann είναι αρκετά κατανοητή, αφού είναι εύκολη η αναπαράσταση των διατακτικών αριθμών. Σε αντίθεση, ο Zermelo δεν τους αναπαριστά απευθείας και ο τρόπος του $\{\{\{\}\}\}$ δεν έχει κάποια βάση στην αθροιστική ιεραρχία (cumulative hierarchy) στη θεωρία των συνόλων. Παρατηρούμε ότι είναι πιο φυσικό να ορίζουμε τους διατακτικούς αριθμούς και μετά να ορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς ως αριθμήσιμο άπειρο. Επίσης, με τον Von Neumann μπορούμε εύκολα να ορίσουμε το $a < b$ το οποίο μπορεί να ορισθεί καιως $a \in b$. Διαφορετικά για να ορίσουμε τη σχέση $<$ μπορεί να γίνει επαγωγικά, το οποίο μπορεί να αναιρέσει κάποια πλεονεκτήματα της απλότητας του το οποίο εμπεριέχεται στο τρόπο του Zermelo.

Τέλος ο αριθμός τρία (3), κάθε ένας μπορεί να τον αντιληφθεί ως φυσικό αριθμό, ως πραγματικό αριθμό , ως μιγαδικό αριθμό. Μπορεί να γίνει αντιλήπτό σαν μία διακριτή οντότητα στον μαθηματικό κόσμο.Όταν όμως γίνει η ερώτηση: **Μπορεί να είναι μέλος του φυσικού αριθμού 5;**. Αυτή η ερώτηση μπορεί να απαντηθεί θετικά αν είναι Von Neumann φυσικός αριθμός, ενώ όχι αν είναι Zermelo φυσικός αριθμός.

8 Όλα ανάγονται στη Θεωρία Συνόλων

8.1 Εσωτερική Πράξη

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 3 σύνολα (Α-Β-Γ). Διμελείς σχέση των στοιχείων του συνόλου Α - Β και το αποτέλεσμα θα είναι στο Γ, κάθε απεικόνηση η οποία μπορεί να γραφτεί στη μορφή $AxB \to \Gamma$. Αν η πράξη συμβολίζεται με το σύμβολο "*" τότε θα έχουμε "*": $AxB \ni (a, b) \to c \in \Gamma$.

Ορισμός εσωτερική πράξης

Αν στη παραπάνω πράξη τα σύνολο ήταν ίσα μεταξύ τους Α=Β=Γ, τότε αυτή η πράξη ονομάζεται εσωτερική πράξη με a,b,c στοιχεία του συνόλου Α. Αυτό το σύνολο αποκαλείται κλειστό στη πράξη αυτή.

Ιδιότητες εσωτερική πράξης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το μη κενό σύνολο Α με την εσωτερική πράξη:

- Προσεταιρεστική: $x * (y * z) = (x * y) * z \ \forall x, y, z \in A$

- Αντιμεταθετική: $x * y = y * x \ \forall x, y \in A$

Παραδείγματα

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στη σύνολο των φυσικών αριθμών.

- Οι πράξεις της πρόσθεσης , του πολλαπλασιασμού και της αφαίρεσης στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

- Οι πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της αφαίρεσης στο σύνολο των ρητών αλλά και των πραγματικών αριθμών.

8.2 Ομάδα

Ορισμός ομάδας

Ομάδα καλέιται ένα ζεύγος στο μη κενό σύνολο A με τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η πράξη είναι προσεταιρεστική; $x * (y * z) = (x * y) * z \ \forall \ x, y, z \in A$
- Υπάρχει το μονδιαίο στοιχείο $e \in A$ τέτοιο ώστε: $x * e = e * x = x \ \forall x \in A$
- Για κάθε στοιχείο $a \in a$ υπάρχει και το αντίστροφο στοιχείο αυτού $a^{-1} \in A$ τέτοιο ώστε: $a * a^{-1} = e$
- Η πράξη είναι αντιμεταθετική: $x * y = y * x \ \forall x, y \in A$

Παρατηρήσεις

Όταν η αναπαράσταση της πράξης γίνεται με το σύμβολο "*" τότε ονομάζεται **πολλαπλασιαστική ομάδα**.Όταν πράξη συμβολίζεται με το συμβολο "$+$" τότε ονομάζεται **προσθετική ομάδα**.

Παραδείγματα

- Τα σύνολα R,C,Z,Q με τη πράξη της πρόσθεσης αποτελούν αντιμεταθετικές ομάδες.
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών δε είναι ομάδα, αφού δεν έχει το στοιχείο μηδέν $0 \notin N$ και με αυτό το τρόπο δεν ικανοποιείται η δεύτερη παραπάνω συνθήκη .

8.3 Δακτύλιος

Ο δακτύλιος είναι μία αλγεβρική δομή η οποία γενικεύει τις αριθμητικές πράξεις και ειδικότερα τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης. Αυτός ο όρος αναλύεται από τον κλάδο των μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε αρκετούς τομείς αυτού, όπως στη γεωμετρία και στη μαθηματική ανάλυση. Δίνει τη δυνατότητα σε μαθηματικούς να μπορούν να χρησιμοποιούν αυτό τον όρο σε αρκετές θεωρίες, σε όρους οι οποίοι είναι μη-αριθμητικοί, όπως πολυώνυμα και συναρτήσεις.

Ορισμός δακτυλίου
Ο δακτύλιος είναι μία αλγεβρική δομή η οποία αποτελείται από ένα σύνολο R και από δύο διμελείς πράξεις $+ : RxR \longrightarrow R \; και \; * : RxR \longrightarrow R$

Αυτές οι πράξεις αποκαλούνται **πρόσθεση - πολλαπλασιασμός** και ακολουθούν τα παρακάτω αξιώματα:

1. Η δομή (R,+,0) είναι μία αντιμεταθετική ομάδα:
   - (x+y) + z = x + (y+z) για κάθε $x, y, z \in R$ (προσεταιριστικότητα)
   - Υπάρχει ένα στοιχείο μηδέν "0" στο οποίο ισχύει $x+0 = 0+x = x$ για κάθε $x \in R$ (ύπαρξη προσθετικού ουδέτερου στοιχείου).
   - Για κάθε $x \in R$ υπάρχει ένα $-x \in R$ στο οποίο ισχύει $(-x)+x = x + (-x) = 0$ (ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου)
   - $x + y = y + x$ (Αντιμεταθετικότητα)

2. Η δομή (R,*) είναι μονοειδές:
   - (x*y) * z = x * (y*z) για κάθε $x, y, z \in R$ (προσεταιριστικότητα)

- Υπάρχει ένα στοιχείο "1" στο οποίο ισχύει $x * 1 = 1 * x = x$ για κάθε $x \in R$ (ύπαρξη πολλαπλασιαστικού ουδέτερου στοιχείου).

3. Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση:

   - $x*(y+z) = x*y+x*z$ για κάθε $x, y, z \in R$ (αριστερός επιμεριστικός νόμος)

   - $(x+y)*z = x*z+y*z$ για κάθε $x, y, z \in R$ (δεξιός επιμεριστικός νόμος)

Παραδείγματα

- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών με τη συνήθη πρόσθεση και το συνήθη πολλαπλασιασμό είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

- Το μονοσύνολο που περιέχει το μηδέν είναι δακτύλιος κατά τετριμμένο τρόπο

8.4 Διανυσματικός χώρος

Ορισμός διανυσματικού χώρου

Ο Διανυσματικός ή Γραμμικός χώρος ονομάζεται το σύνολο διανυσμάτων τα οποία είναι εφοδιασμένα με τις πράξεις της πρόσθεσης και του εξωτερικού πολλαπλασιασμού.

Τα διανύσματα αυτού του χώρου ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Για κάθε 2 στοιχεία του χώρου (V) του ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης: $u, v \in V \rightarrow u + v \in V$

- Για κάθε στοιχείο του χώρου (V) του ορίζεται η πράξη του πολλαππλασασμού:$u \in V$ και για κάθε $\lambda \in K$, όπου K είναι ένα σώμα όπως R, C ισχύει $\lambda * u \in V$

- Για την πράξη της πρόσθεσης ισχύει:
  1. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $u + v = v + u \ \forall u, v \in V$
  2. Προσεταιρεστική ιδιότητα: $(u+v)+w = u+(v+w) \ \forall u, v, w \in V$
  3. Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης "0" όπου ισχύει: $u + 0 = u \ \forall u \in V$
  4. Για κάθε ένα στοιχείο του χώρου υπάρχει το αντίθετο του: $v + (-v) = (-v) + v = 0 \ \forall v \in V$
- Για την πράξη του πολλαπλασιασμού ισχύει:
  1. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση: $\lambda * (u + v) = \lambda * u + \lambda * v \ \forall u, v \in V \ \kappa\alpha\iota \ \lambda \in K$
  2. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό: $(\lambda+\mu)*v = \lambda * v + \mu * v \ \forall v \in V \ \kappa\alpha\iota \ \lambda, \mu \in K$
  3. Υπάρχει ο ουδέτερο στοιχείο "1": $1 * v = v * 1 = v \ \forall V \in V$
  4. $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v \ \forall v \in V$

Παραδείγματα

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ικανοποιεί όλες τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλάπλασιασμού, επομένως είναι ένας διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο διανυσμάτων στο επίπεδο αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο αφού, ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

8.5 Μετρικός Χώρος

Ορισμός μετρικού χώρου

Μετρικός χώρος είναι ένα ζευγάρι (X,d) όπου X είναι ένα σύνολο και μία συνάρτηση (η μετρική) d:X x X→ $[0,+\propto)$ τέτοια ώστε για κάθε $x.y.z \in X$ ισχύουν τα παρακάτω:

- $d(x,y)=0 \iff x=y$

- $d(x,y)=d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,w)+d(w,y)$ τριγωνική ανισότητα

Παραδείγματα

1. Έστω ένα X ένα σύνολο στο οποίο ισχύει:

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{x=y}\\ 1, & x \neq y\end{cases}$$

   Τότε η d είναι μία μετρική. Αυτή την απόσταση μπορεί κάποιος να την ορίσει ως μία απόσταση δύο διακεκριμένων σημείων. Αν x=y τότε $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$. Αν $x \neq z$ τότε δε μπορεί $d(x,z)=d(y,z)=0$ γιατί τότε θα είχαμε x=y=z. Επομένως κάποιο από τα δύο θα ισούται με 1, το οποίο συνεπάγεται: $d(x,y)=1 \leq d(x,z)+d(z,y)$

2. Αν $x,y \in R$ τότε $d(x,y)=|x-y|$. Τότε η d είναι μία μετρική.

8.6 Τοπολογικός χώρος

Τοπολογικός Χώρος (Topological space)

Τοπολογικός χώρος είναι ένα σύνολο Χ και μια συλλογή Τ από υποσύνολα του Χ ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

- Το κενό σύνολο και το Χ ανήκουν στο Τ.
- Η ένωση οποιωνδήποτε συνόλων του Τ ανήκει στο Τ.
- Η τομή οποιωνδήποτε συνόλων, που ανήκουν σε πεπερασμένη οικογένεια του Τ, ανήκει στο Τ.
- Η συλλογή Τ λέγεται τοπολογία στο Χ.
- Τα σύνολα του Τ λέγονται ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματά τους στο Χ λέγονται κλειστά σύνολα.

Για κάθε μετρικό χώρο Χ μπορούμε να πούμε τα εξής:

1. Ο Χ γίνεται τοπολογικός χώρος.Το $A \subset X$ καλείται ανοιχτό αν για $\forall x \in A$ υπάρχει δίσκος με κέντρο το Χ και ακτίνα r, D(x,r) που περιέχεται εξολοκλήρου το Α.
2. Κάθε ανοιχτός δίσκος D(x,r) είναι ανοιχτό σύνολο γιατί για κάθε $y \in D(x,r)$ έχουμε: $D(y, r - d(x,y) \subset D(x,r)$
3. Ένα σύνολο λέγεται κλειστό όταν το συμπλήρωμα του είναι ανοιχτό.

Αναφορές

http://ikee.lib.auth.gr/record/313954/files/GRI-2020-26627.pdf
https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/frontend/file/lib/default/data/2887177/theFile
https://www.youtube.com/watch?v=raVhNGDazUY&ab_channel=RahulMapar
https://www.quora.com/Why-is-the-set-of-rational-numbers-countably-infinite
https://www.youtube.com/watch?v=H_-2E6B6OrY&t=694s&ab_channel=DrPeyam
https://en-m-wikipedia-org.translate.goog/wiki/Axiom_of_choice?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=el&_x_tr_hl=el&_x_tr_pto=sc
https://mathologic.gr/rwhwlpilnd/paradojo-toy-bernard-Russelll/
https://www.youtube.com/watch?v=C56WoZoag2w&ab_channel=ChristopherThomas
https://users.auth.gr/epsom/introalg/intro/Orders.htm
https://people.iee.ihu.gr/~antoniou/docs/math_III/Relations_slides.pdf
https://users.auth.gr/epsom/introalg/intro/Orders.htm
http://www.softlab.ntua.gr/~fotakis/discrete_math_2014_2015/data/11_Orderings.pdf
https://users.auth.gr/~hara/courses/LinearAlgebra/LinearAlgebraI2004/theory/Zornlemmabasistheorem.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann
https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B6%CE%BF%CE%BD_%CF%86%CE%BF%CE%BD_%CE%9D%CF%8C%CE%B9%CE%BC%CE%B1%CE%BD
https://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_definition_of_natural_numbers
https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-Von-Neumann-and-Zermel
http://euclid.mas.ucy.ac.cy/~georgios/courses/mas121/ap1.pdf
https://mathologic.gr/algebra/dimeleiw-prajeiw/
https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%94%CE%B1%CE%BA%CF%84%CF%8D%CE%BB%CE%B9%CE%BF%CF%82_(%CE%AC%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2%CF%81%CE%B1)

https://www.youtube.com/watch?v=S9eBCymVbI0&ab_channel=MathStudies%CE%A0%CE%B1%CE%BD%CE%B5%CF%80%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%B7%CE%BC%CE%B9%CE%B1%CE%BA%CE%AC%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1

http://users.math.uoc.gr/~costakis/MitsisMetric.pdf