



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ  
&  
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Εργαστήριο Συστημάτων Υποστήριξης Αποφάσεων

Μεταπτυχιακή Διατριβή

---

Ανάπτυξη νέας μεθοδολογίας πολυκριτήριας ανάλυσης με  
χρήση μεθευρετικών αλγορίθμων

---

Αλκαίος Σακελλάρης

Επιβλέπων: Νικόλαος Ματσατσίνης,  
Καθηγητής

Χανιά 2013

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Ανάπτυξη νέας μεθοδολογίας πολυκριτήριας ανάλυσης με  
χρήση μεθευρετικών αλγορίθμων.

Αλκαίος Σακελλάρης

Εξεταστική Επιτροπή:

Ματσατσίνης Ν. ,  
Καθηγητής  
(επιβλέπων)

Δούμπος Μ. ,  
Αναπληρωτής Καθηγητής

Γρηγορούδης Ε. ,  
Αναπληρωτής Καθηγητής

# Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά, από βάθους καρδιάς, τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νικόλαο Ματσατσίνη για την εμπιστοσύνη που έχει δείξει στις ικανότητές μου, για τις ευκαιρίες που μου έχει προσφέρει και για την άριστη συνεργασία μας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αναπληρωτές καθηγητές κ. Ευάγγελο Γρηγορούδη και κ. Μιχάλη Δούμπο για τις πολύτιμες συμβουλές τους και την καθοδήγηση που μου προσέφεραν προς την επιτυχή ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου.

Τέλος, ευχαριστώ τη σύντροφό μου και συνάδελφο Κωνσταντίνα Μιτελούδη για όλα. Μαζί κάνουμε ένα δυνατό team.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>7</b>
1.1	Σκοπός της εργασίας . . . . .	7
1.2	Δομή της εργασίας . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Θεωρητικό υπόβαθρο</b>	<b>9</b>
2.1	Εισαγωγή . . . . .	9
2.2	Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων . . . . .	9
2.2.1	Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση . . . . .	11
2.3	Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Μεθοδολογίες, Αλγόριθμοι και Διαδικασίες ελέγχου</b>	<b>15</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	15
3.2	Η Μέθοδος UTA . . . . .	15
3.2.1	Αρχές και Συμβολισμοί . . . . .	15
3.2.2	Ανάπτυξη της μεθόδου . . . . .	17
3.3	Παραλλαγή της μεθόδου UTA . . . . .	20
3.4	Η Μέθοδος UTASTAR . . . . .	21
3.5	Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO) . . . . .	23
3.5.1	Βελτιστοποίηση με Σμήνος Σωματιδίων με Εγγυημένη Σύγκλιση ΒΣΣ-ΕΣ (GCPSO) . . . . .	28
3.6	Αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης ΔΕ (DE) . . . . .	30
3.7	Διαδικασία ελέγχου Cross Validation . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Μοντελοποίηση και προτεινόμενη μεθοδολογία</b>	<b>35</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	35
4.2	Μοντελοποίηση . . . . .	35
4.3	Προς την προτεινόμενη μεθοδολογία . . . . .	38
4.3.1	Το διάλυμα λύσης . . . . .	38
4.3.2	Αντιμετώπιση των περιορισμών . . . . .	40
4.3.3	Βελτιστοποίηση με ΒΣΣ . . . . .	41
4.4	Προτεινόμενη μεθοδολογία . . . . .	44
4.4.1	Μια υβριδική προσέγγιση . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Υλοποίηση και Αποτελέσματα</b>	<b>49</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	49
5.2	Υλοποίηση . . . . .	49
5.3	Τα δεδομένα . . . . .	51
5.3.1	Ο πίνακας κατάταξης ανταγωνισμού χωρών (GCI) . . . . .	52
5.3.2	Ο πίνακας κατάταξης περιβαλλοντικής απόδοσης χωρών (EPI) . . . . .	53

5.4	Αποτελέσματα . . . . .	54
5.4.1	10-fold cross validation . . . . .	55
5.4.2	Χρονική μετακύλιση . . . . .	55
5.4.3	Εφαρμογή στον GCI και εξαγωγή μοντέλου. . . . .	56
5.4.4	Εφαρμογή στον EPI και εξαγωγή μοντέλου. . . . .	60
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα και Μελλοντικές προεκτάσεις</b>	<b>65</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

---

### 1.1 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η δημιουργία μιας νέας μεθόδου για τον υπολογισμό των συναρτήσεων αξίας του αποφασίζοντα. Γίνεται προσπάθεια βελτιστοποίησης του  $\tau$  του kendall με χρήση μεθευρετικού αλγορίθμου (differential evolution) σε αντίθεση με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων (μέθοδοι τύπου UTA), όπως συμβαίνει μέχρι τώρα. Κυριότερος στόχος είναι η επίλυση μεγάλων προβλημάτων που έχουν μεγάλες ασυμβατότητες και δεν υπάρχει η δυνατότητα ανάδρασης από τον αποφασίζοντα.

### 1.2 Δομή της εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 της εργασίας, παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο και παρατίθενται βασικές έννοιες της πολυκριτήριας ανάλυσης και των μεθευρετικών αλγορίθμων ώστε να μπορεί ο αναγνώστης να κατανοήσει τις μεθοδολογίες που αναλύονται στα επόμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 3 αναλύονται οι μεθοδολογίες οι αλγόριθμοι και οι διαδικασίες ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα περιγράφεται η μέθοδος UTA και η παραλλαγή της, η μέθοδος UTASTAR, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (BSS) και μια βελτιστοποίησή του, ο αλγόριθμος διαφορικής εξέλιξης καθώς και το cross validation. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η μαθηματική μοντελοποίηση της μεθοδολογίας. Αναλύεται η επίλυση της αρχικά με τον αλγόριθμο BSS και στη συνέχεια με τον αλγόριθμο διαφορικής εξέλιξης. Στο κεφάλαιο 5 περιγράφεται η υλοποίηση σε MATLAB καθώς και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της μεθόδου και παρατίθενται τα αποτελέσματα. Τέλος, στο κεφάλαιο 6, αναφέρονται τα συμπεράσματα από τη συγκεκριμένη διατριβή και προτείνονται ιδέες για μελλοντική επέκταση ή και βελτιώσεις της υπάρχουσας μεθοδολογίας.



# Κεφάλαιο 2

## Θεωρητικό υπόβαθρο

---

### 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία της πολυκριτήριας ανάλυσης αποφάσεων, καθώς και στους μεθευρετικούς αλγορίθμους.

### 2.2 Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων

Η αδυναμία των υπαρχόντων μοντέλων να αντιμετωπίσουν πολυδιάστατα πραγματικά προβλήματα με χρήση ενός μόνο κριτηρίου και μιας μονόπλευρης και μονοδιάστατης ανάλυσης, οδήγησε στην ανάπτυξη της Πολυκριτήριας Ανάλυση Αποφάσεων (Multiple Criteria Decision Aid).

Η σύνθεση όλων των παραμέτρων και των πολλαπλών διαστάσεων ενός προβλήματος είναι το βασικό αντικείμενο της πολυκριτήριας ανάλυσης και γίνεται πάντα σύμφωνα με τις προτιμήσεις, τις αρχές και τις αξίες του αποφασίζοντα. Η βασική της διαφορά από τις άλλες μεθόδολογίες είναι ότι ο αποφασίζων έχει ενεργητικό ρόλο, η αντιμετώπιση του προβλήματος έχει ως τελικό αποδέκτη τον αποφασίζοντα.

Τα προβλήματα λήψης αποφάσεων σε αυτό το μεθολογικό πλαίσιο χαρακτηρίζονται από αντικρουόμενα αποτελέσματα (μια απόφαση μπορεί να είναι βέλτιστη ως προς ένα κριτήριο αλλά όχι ως προς όλα) και αυτό έχει ως συνέπεια τη μη εύρεση μιας βέλτιστης λύσης (εξαρτάται από τον αποφασίζοντα).

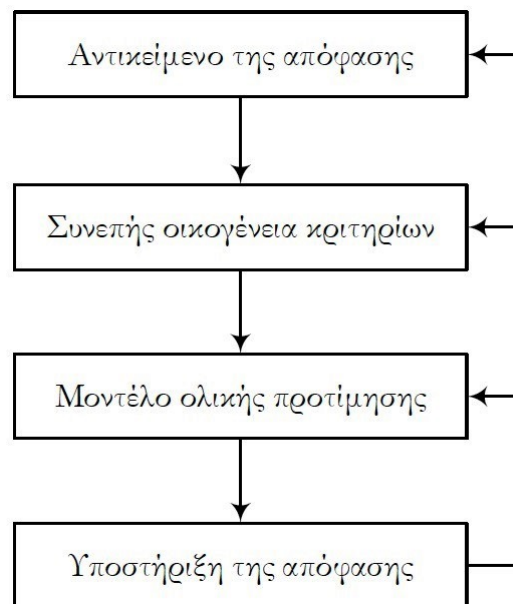
Οι βασικοί στόχοι της πολυκριτήριας λήψης αποφάσεων είναι:

- Να καθορισθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να υφίσταται το σύστημα αξιών.

- Να υποστηρίζει τον αποφασίζοντα ώστε να ανακαλύπτει μέσα από μια διαδικασία ένα σύστημα αξιών και να παίρνει τη σωστή απόφαση.
- Να βρίσκει ικανοποιητικές λύσεις.

Το γενικό πλαίσιο μοντελοποίησης που ακολουθείται (Roy 1996)είναι το ακόλουθο:

- Αντίληψη του αντικειμένου της απόφασης: προσδιορίζεται το σύνολο των εναλλακτικών ενεργειών (σταθερό, δυναμικό, ολοκληρωμένο, αποσπασματικό) και ορίζεται από τον αποφασίζοντα η προβληματική της ανάλυσης (προβληματική α-επιλογή, προβληματική β-ταξινόμηση, προβληματική γ-κατάταξη, προβληματική δ-περιγραφή).
- Συνεπής οικογένεια κριτηρίων: διαμορφώνεται από ένα σύνολο κριτηρίων το οποίο πρέπει απαραίτητως να διαθέτει τις ιδιότητες της μονοτονίας, της επάρκειας και του μη πλεονασμού.
- Μοντέλο ολικής προτίμησης: γίνεται η σύνθεση των κριτηρίων με τη βοήθεια ενός μοντέλου ολικής προτίμησης, με βάση το οποίο και λαμβάνοντας υπόψη την επιλεγείσα προβληματική, συγκρίνονται όλες οι εναλλακτικές ενέργειες.
- Υποστήριξη της απόφασης: γίνεται η επεξεργασία και η εφαρμογή σεναρίων και αναζητούνται απαντήσεις σε ερωτήματα του αποφασίζοντα.



Σχήμα 2.1: Το μεθοδολογικό πλαίσιο της Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων

Τέσσερις είναι σήμερα οι κυρίαρχες μεθοδολογίες στη πολυκριτήρια λήψη αποφάσεων:

- 1) Πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός

- 2) Θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας
- 3) Θεωρία των σχέσεων υπεροχής
- 4) Αναλυτική-Συνθετική προσέγγιση

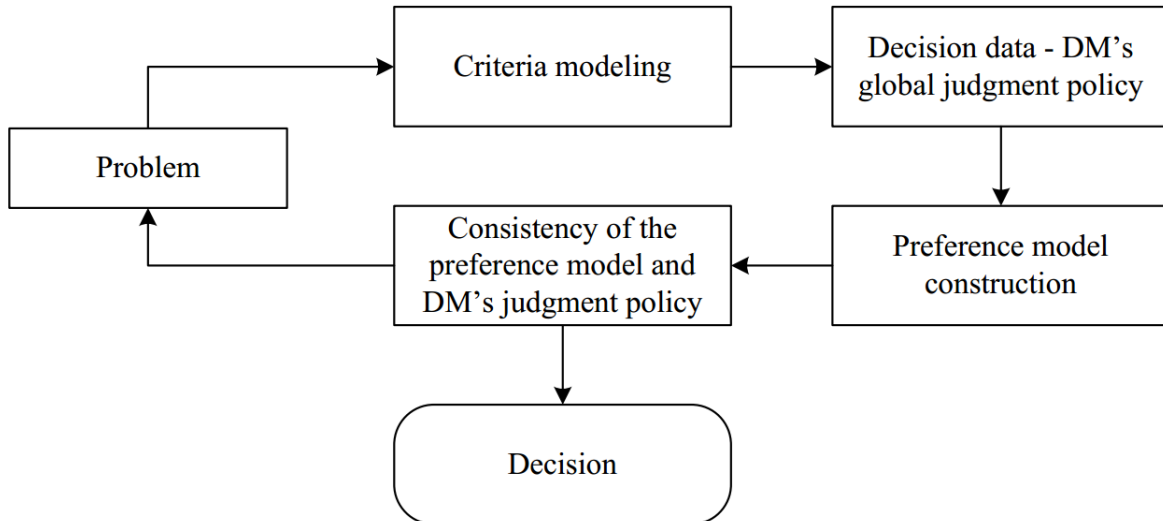
Η μέθοδος που αναπτύχθηκε και αναλύεται σε επόμενο κεφάλαιο ανήκει στην αναλυτική-συνθετική προσέγγιση.

### 2.2.1 Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση

Η αναλυτική-συνθετική προσέγγιση (ΑΣΠ) θεωρεί ότι ο αποφασίζων παίρνει αποφάσεις στηριζόμενος (συνειδητά ή ασυνειδητά) σε ένα σύστημα αξιών και προτιμήσεων. Αναλύει τη σχέση μεταξύ των αποφάσεων και των επιδόσεων των εναλλακτικών στα κριτήρια κι έτσι εντοπίζει τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνονται αυτές οι αποφάσεις, αναπτύσσοντας ένα υπόδειγμα σύνθεσης των κριτηρίων.

Η ουσιαστική διαφορά από τις άλλες πολυκριτήριες προσεγγίσεις (πολυκριτήρια αξία, σχέσεις υπεροχής) είναι ότι αυτές συνθέτουν τα δεδομένα ενός προβλήματος για να καταλήξουν στο τελικό αποτέλεσμα, ενώ η ΑΣΠ αναλύει τα δεδομένα για να εντοπίσει το υπόδειγμα που αναπαριστά όσο πιο πιστά γίνεται το σύστημα αξιών και προτιμήσεων του αποφασίζοντα.

Για το σαφή καθορισμό αυτού του υποδείγματος απαιτείται η συλλογή πληροφοριών σχετικών με το σύστημα αξιών και προτιμήσεων καθώς και η συγκέντρωση και η ανάλυση με κατάλληλο τρόπο ενός επαρκούς συνόλου παραδειγμάτων των αποφάσεων που παίρνει ο αποφασίζων. Οι πληροφορίες συνήθως είναι οι ίδιες οι αποφάσεις χωρίς καμία επιπλέον παράμετρο για το πώς ελήφθησαν και εκφράζονται σε διάφορες μορφές όπως μια μονότονη κλίμακα (κατάταξη ή ταξινόμηση των εναλλακτικών) ή ένας δείκτης (πόσες φορές μια εναλλακτική προτιμάται μιας άλλης). Τα παραδείγματα μπορεί να είναι παλαιότερες αποφάσεις του αποφασίζοντα, ένα μικρό αλλά αντιπροσωπευτικό σύνολο φανταστικών εναλλακτικών ή ένα μικρό αλλά αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των υπό εξέταση εναλλακτικών οι οποίες διατυπώνονται με σαφήνεια από τον αποφασίζοντα. Αυτό το σύνολο παραδειγμάτων ορίζει ουσιαστικά ένα σύνολο αναφοράς, έννοια αντίστοιχη με το δείγμα εκμάθησης (training sample) .



Σχήμα 2.2: Αναλυτική-Συνθετική Προσέγγιση (Siskos and Grigoroudis, 2010)

## 2.3 Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι αλγόριθμοι επίλυσης που συνδυάζουν διαδικασίες τοπικής αναζήτησης και υψηλότερου επιπέδου στρατηγικές για να δημιουργήσουν μια διαδικασία ικανή να ξεφύγει από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Σε αυτή την κατηγορία αλγορίθμων εξερευνάται το πεδίο λύσης με σκοπό να βρεθεί μια καλύτερη λύση.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των μεθευρετικών αλγορίθμων είναι:

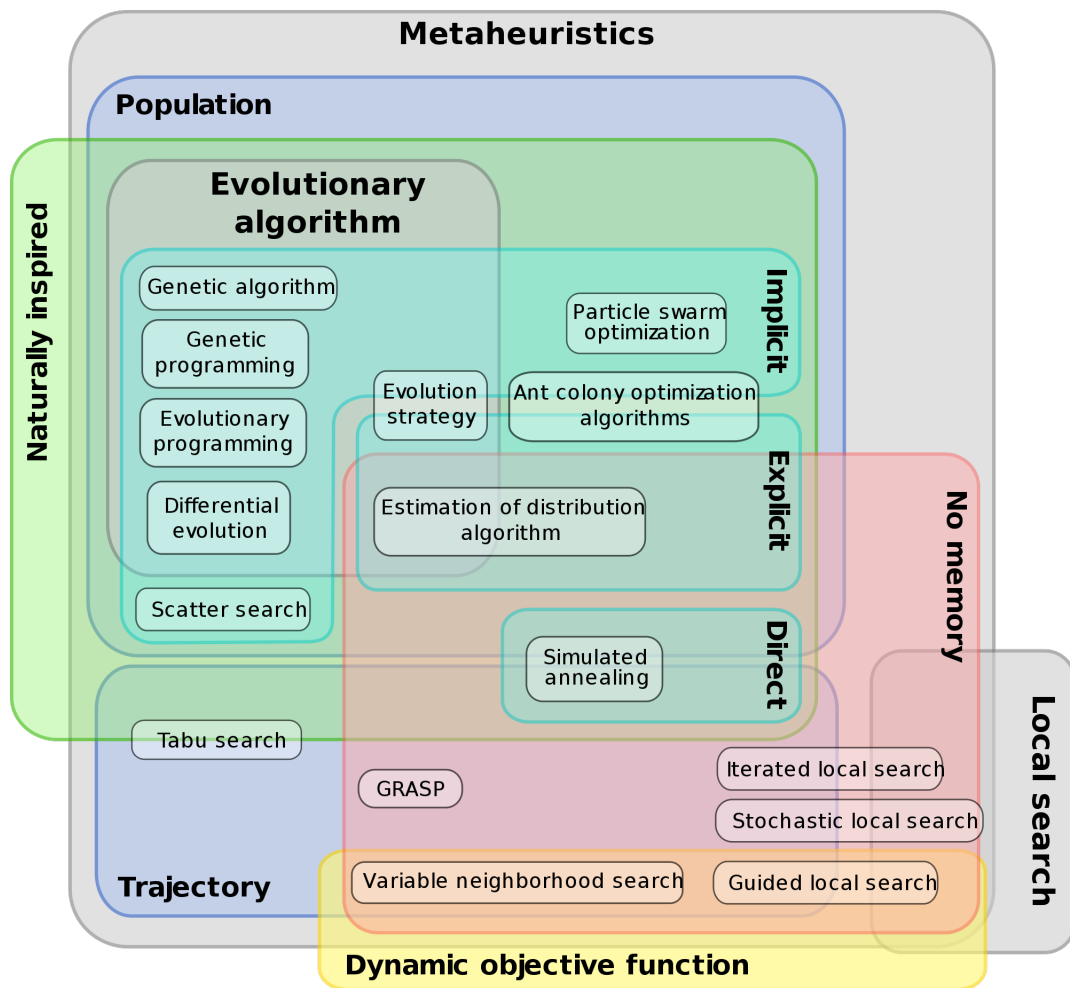
- μοντελοποίηση ενός φαινομένου που υπάρχει στη φύση.
- εύκολη παραλληλοποίηση.
- είναι αλγόριθμοι προσαρμοστικοί.

Γνωστοί μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι:

- Προσομοιώμενη ανόπτηση (Simulated Annealing)
- Περιορισμένη αναζήτηση (Tabu Search)
- Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization)
- Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms)
- Εξελεκτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms)
- Νευρωνικά δίκτυα (Neural Nets)

- Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης αποικίας μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization)
- Αλγόριθμος διασκορπισμένης αναζήτησης (Scatter Search)
- Διαδικασία άπληστης τυχαιοποιημένης προσαρμοστικής αναζήτησης (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure)
- Αλγόριθμος διαφορικής εξέλιξης (Differential Evolution)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κατηγοριοποίηση των μεθευρετικών αλγορίθμων.



Σχήμα 2.3: Κατηγοριοποίηση των μεθευρετικών αλγορίθμων



# Κεφάλαιο 3

## Μεθοδολογίες, Αλγόριθμοι και Διαδικασίες ελέγχου

---

### 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύονται οι μεθοδολογίες, οι αλγόριθμοι και οι διαδικασίες ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν.

### 3.2 Η Μέθοδος UTA

Η Μέθοδος UTA (UTility Additives) των Jacquet-Lagrange and Siskos (1982) είναι από τις πιο γνωστές πολυκριτήριες μεθοδολογίες λήψης αποφάσεων και θέτει τις βάσεις της σύγχρονης Αναλυτικής-Συνθετικής προσέγγισης. Η μέθοδος αυτή αποσκοπεί στην ανάπτυξη μιας ή περισσότερων προσθετικών συναρτήσεων αξιών δεδομένου ενός συνόλου εναλλακτικών οι οποίες έχουν μια δοσμένη προ διάταξη από τον αποφασίζοντα. Χρησιμοποιεί ειδικές τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για να υπολογίσει τις συναρτήσεις αυτές, έτσι ώστε η κατάταξη που προκύπτει από αυτές να είναι όσο το δυνατόν πιο σύμφωνη με την ορισμένη προ διάταξη.

#### 3.2.1 Αρχές και Συμβολισμοί

Έστω,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  το σύνολο αναφοράς των εναλλακτικών, οι οποίες εκτιμώνται από μια οικογένεια κριτηρίων  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Το μοντέλο σύνθεσης των κριτηρίων στη UTA θεωρείτε ως μία προσθετική συνάρτηση αξίας της ακόλουθης μορφής (Jacquet-Lagrange and Siskos, 1982):

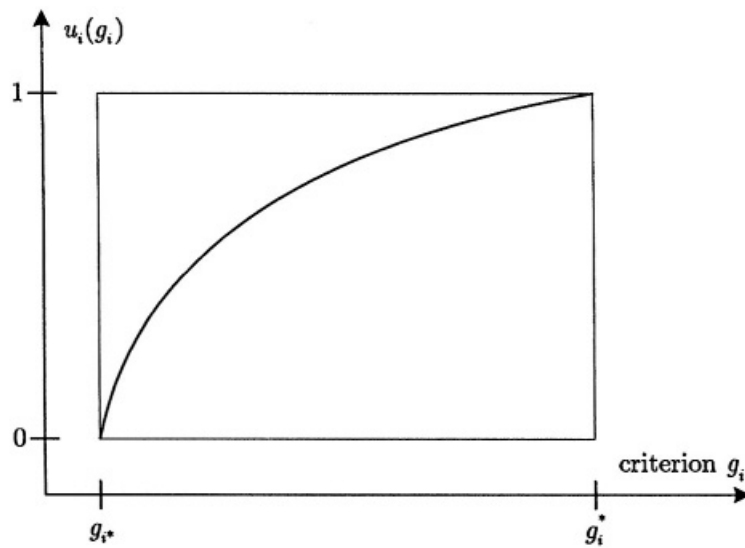
$$U(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u_i(g_i) \quad (3.1)$$

Υπό τους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$u_i(g_{i*}) = 0, u_i(g_i^*) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.2)$$

όπου  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι μερικές συναρτήσεις αξίας ή χρησιμότητας, κανονικοποιημένες στο διάστημα  $[0, 1]$  και  $p_i$  είναι τα βάρη των  $u_i$  (Σχήμα:3.1).



Σχήμα 3.1: Η περιθώρια συνάρτηση αξίας (Πηγή: Siskos et al. (2005))

Και οι μερικές και οι ολικές συναρτήσεις αξίας έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας του πραγματικού κριτηρίου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συνάρτησης ολικής αξίας ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$U(\mathbf{g}(a)) > U(\mathbf{g}(b)) \Leftrightarrow a \succ b$$

$$U(\mathbf{g}(a)) = U(\mathbf{g}(b)) \Leftrightarrow a \sim b \quad (3.3)$$

Η μέθοδος UTA θεωρεί μία μορφή της προσθετικής συνάρτησης αξίας χωρίς βάρη, ισοδύναμη της μορφής των σχέσεων (3.1) και (3.2):

$$U(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i) \quad (3.4)$$

Υπό τους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) &= 1 \\ u_i(g_{i_*}) &= 0, \forall i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (3.5)$$

Βέβαια, η ύπαρξη ενός τέτοιου μοντέλου προϋποθέτει την προτιμησιακή ανεξαρτησία των κριτηρίων για τον αποφασίζοντα (Keeney and Raiffa, 1976), καθώς και άλλες συνθήκες για να ισχύει η προσθετική μορφή όπως έχουν προταθεί από τον Fishburn (1966).

### 3.2.2 Ανάπτυξη της μεθόδου

Στη βάση του προσθετικού μοντέλου (3.4)–(3.5) και λαμβάνοντας υπόψιν τις συνθήκες (3.3), η αξία κάθε εναλλακτικής  $a \in A$ , μπορεί να γραφτεί ως:

$$U'(\mathbf{g}(a)) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i(a)) + \sigma(a) \quad \forall a \in A \quad (3.6)$$

όπου  $\sigma(a)$  είναι ένα πιθανό σφάλμα σε σχέση με την  $U'(\mathbf{g}(a))$ .

Επίσης, για την εκτίμηση των συναρτήσεων μερικών αξιών με τη μορφή κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων, οι Jacquet-Lagrange and Siskos (1982) προτείνουν τη χρήση γραμμικής παρεμβολής. Για κάθε κριτήριο, το διάστημα  $[g_{i_*}, g_i^*]$  χωρίζεται σε  $(a_i - 1)$  ίσα υποδιαστήματα, και ως εκ τούτου το τελικό σημείο  $g_i^j$  κάθε υποδιαστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$g_i^j = g_{i_*} + \frac{j-1}{a_i-1}(g_i^* - g_{i_*}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, a_i. \quad (3.7)$$

Η μερική αξία μιας εναλλακτικής  $a$  προσεγγίζεται με γραμμική παρεμβολή, και έτσι, για  $g_i(a) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$ :

$$u_i(g_i(a)) = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} (u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)) \quad (3.8)$$

Το σύνολο αναφοράς των εναλλακτικών  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  αναδιατάσσεται με τέτοιο τρόπο ώστε η εναλλακτική  $a_1$  να είναι η κεφαλή της κατάταξης και η εναλλακτική  $a_m$  η ουρά. Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη κατάταξη έχει τη μορφή μια προδιάταξης  $R$ , για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων  $(a_k, a_{k+1})$  ισχύει, είτε  $a_k \succ a_{k+1}$  (προτίμηση) είτε  $a_k \sim a_{k+1}$  (αδιαφορία). Έτσι, αν τεθεί

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = U'(\mathbf{g}(a_k)) - U'(\mathbf{g}(a_{k+1})) \quad (3.9)$$

τότε ισχύει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}\Delta(a_k, a_{k+1}) &\geq \delta \text{ εάν } a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) &= 0 \text{ εάν } a_k \sim a_{k+1}\end{aligned}\quad (3.10)$$

όπου  $\delta$  είναι ένας μικρός θετικός αριθμός που διαχωρίζει σημαντικά δύο διαδοχικές κλάσεις ισοδυναμίας της  $R$ .

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση σχετικά με την μονοτονία των προτιμήσεων, οι περιθώριες αξίες  $u_i(g_i)$  πρέπει να ικανοποιούν το σύνολο των ακόλουθων περιορισμών:

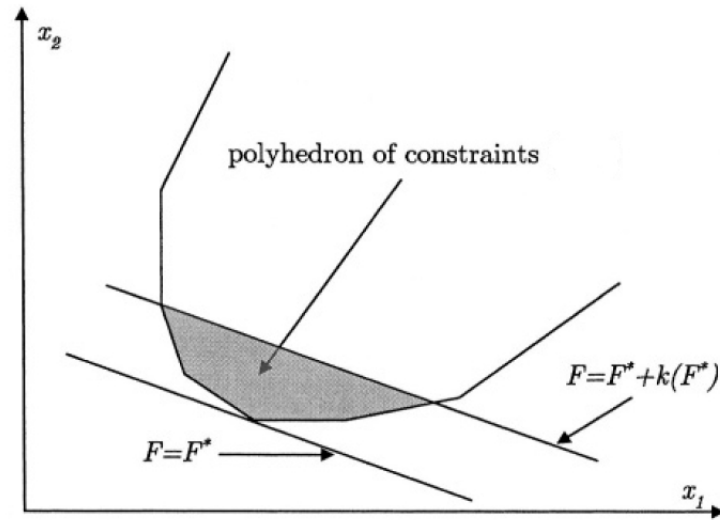
$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, a_{i-1}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

όπου  $s_i \geq 0$  είναι τα κατώφλια αδιαφορίας που ορίζονται για κάθε κριτήριο  $g_i$ . Τα συγκεκριμένα κατώφλια δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου UTA, αλλά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για την αποφυγή φαινομένων, όπου  $u_i(g_i^{j+1}) = u_i(g_i^j)$  όταν  $g_i^{j+1} \succ g_i^j$ .

Οι περιθώριες συναρτήσεις αξίας υπολογίζονται τελικά μέσω του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος (γ.π.), όπου ως περιορισμοί χρησιμοποιούνται οι σχέσεις (3.4), (3.5), (3.10) και (3.11), ενώ η αντικειμενική συνάρτηση είναι το συνολικό προκαλούμενο σφάλμα:

$$\begin{aligned}[\min] F &= \sum_{a \in A} \sigma(a) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) &\geq \delta \text{ εάν } a_k \succ a_{k+1} \quad \forall k \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) &= 0 \text{ εάν } a_k \sim a_{k+1} \quad \forall k \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) &\geq 0 \quad \forall i, j \\ \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) &= 1 \\ u_i(g_{i_*}) &= 0, \quad u_i(g_i^j) \geq 0, \quad \sigma(a) \geq 0 \quad \forall a \in A, \quad \forall i, j\end{aligned}\quad (3.12)$$

Η ανάλυση ευστάθειας των αποτελεσμάτων του γ.π.(3.12) αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Πράγματι, αν η βέλτιστη λύση δώσει  $F^* = 0$ , τότε το υπερπολύεδρο των αποδεκτών λύσεων για τα  $u_i(g_i)$  δεν είναι κενό, αλλά υπάρχουν πολλαπλές συναρτήσεις αξίας που είναι απόλυτα συνεπείς με την προδιάταξη  $R$ . Ακόμη και στην περίπτωση που η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μη μηδενική, υπάρχουν άλλες λύσεις, λιγότερο καλές για την  $F$ , που είναι σε θέση να βελτιώσουν άλλα εναλλακτικά κριτήρια βελτιστοποίησης (π.χ. τον συντελεστή συσχέτισης  $\tau$  του Kendall).



Σχήμα 3.2: Ανάλυση ευστάθειας στη μέθοδο UTA (Πηγή: Siskos et al. (2005))

Όπως φαίνεται στο σχήμα (3.2), ο χώρος των μεταβέλιτων λύσεων καθορίζεται από το υπερπολύεδρο:

$$F \leq F^* + k(F^*)$$

όλοι οι περιορισμοί του γ.π. (3.12) (3.13)

όπου  $k(F^*)$  είναι ένα θετικό (ή μηδέν) κατώφλι, το οποίο καθορίζεται ως ένα μικρό ποσοστό του σφάλματος  $F^*$ .

Υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός αλγορίθμων που είναι σε θέση να εξετάσουν τις λύσεις-κορυφές του υπερπολύεδρου (3.13), όπως μέθοδοι κλάδου και φράγματος, η μέθοδος αντίστροφης simplex και η μέθοδος των Manas & Nedoma. Οι Jacquet-Lagrange and Siskos (1982), στην αρχική μορφή της μεθόδου UTA, προτείνουν τη διερεύνηση του πολυέδρου (3.13), μέσω μιας ευρετικής μεθόδου αναζήτησης (ημι)βέλτιστων λύσεων, επιλύοντας τα ακόλουθα γ.π.:

$$\begin{array}{ll}
 [min]u_i(g_i^*) & [max]u_i(g_i^*) \\
 \text{στο} & \text{στο} \\
 \text{πολύεδρο (3.13)} & \text{πολύεδρο (3.13)}
 \end{array}
 \quad (3.14)$$

Ως τελική λύση του προβλήματος, υπολογίζεται η μέση τιμή των λύσεων των προηγούμενων γ.π., που είναι και αυτή (ημι)βέλτιστη, λόγω της κυρτότητας του υπερπολύεδρου. Σε περίπτωση αστάθειας, οι λύσεις των γ.π. (3.14) εμφανίζουν μεγάλη απόκλιση μεταξύ τους και η εκτιμώμενη μέση λύση είναι λιγότερο αντιπροσωπευτική. Σε κάθε περίπτω-

ση, οι επιμέρους αυτές λύσεις υποδεικνύουν τη διακύμανση των βαρών των κριτηρίων  $g_i$  και συνεπώς δίνουν μια ιδέα της σημαντικότητας αυτών των κριτηρίων στο σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντος.

### 3.3 Παραλλαγή της μεθόδου UTA

Αρκετές παραλλαγές της μεθόδου UTA εστιάζονται στη χρήση είτε εναλλακτικών κριτηρίων βελτιστοποίησης στα γ.π., είτε διαφορετικών μορφών ολικής προτίμησης του αποφασίζοντος.

Ένα εναλλακτικό κριτήριο βελτιστοποίησης αφορά την ελαχιστοποίηση του πλήθους των αντιστροφών ανάμεσα στην αρχική διάταξη του αποφασίζοντος  $R$  και εκείνη του μοντέλου, πράγμα που ισοδυναμεί με τη μεγιστοποίηση του συντελεστή συσχέτισης  $\tau$  του Kendall ανάμεσα στις δύο κατατάξεις.

Το μοντέλο αυτό δίνεται από το μικτό ακέραιο γ.π. (3.15), όπου ισχύουν:

1)  $\gamma_{ab} = 0$  αν  $U(g(a)) - U(g(b)) \geq \delta$  για ένα ζεύγος  $(a, b) \in R$  (υπάρχει συμφωνία με την προτίμηση του αποφασίζοντος)

2) αλλιώς  $\gamma_{ab} = 1$  (δεν υπάρχει συμφωνία με την προτίμηση του αποφασίζοντος)

$$[\min]F = \sum_{(a,b) \in R} \gamma_{ab} \Leftrightarrow [\max]\tau(R, R')$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^n (u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))) + M \cdot \gamma_{ab} \geq \delta \quad \forall (a, b) \in R$$

$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq s_i \quad \forall i, j$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$$

$$u_i(g_{i*}) = 0, \quad u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$\gamma_{ab} = 0, \quad \text{ή} \quad 1, \quad \forall (a, b) \in R \quad (3.15)$$

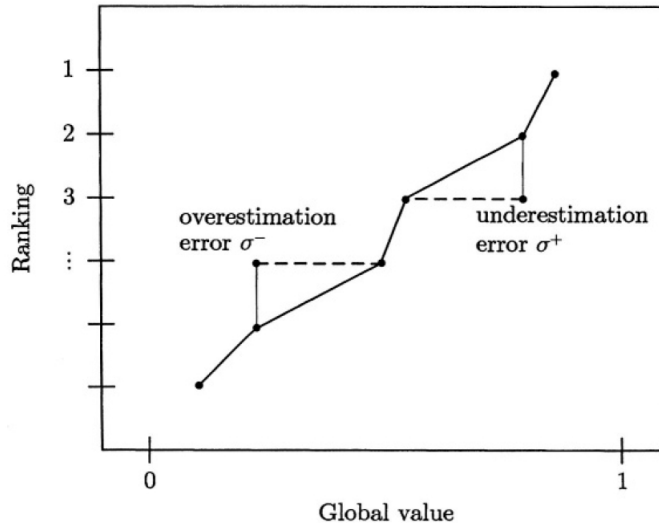
όπου  $M$  είναι ένας μεγάλος αριθμός. Φυσικά, οι σχέσεις προτίμησης και αδιαφορίας θα μοντελοποιηθούν στο γ.π. χωριστά, ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))) + M \cdot \gamma_{ab} &\geq \delta \text{ εάν } a \succ b \\
 \sum_{i=1}^n (u_i(g_i(a)) - u_i(g_i(b))) + M \cdot \gamma_{ab} &\geq 0 \text{ εάν } a \sim b \\
 \sum_{i=1}^n (u_i(g_i(b)) - u_i(g_i(a))) + M \cdot \gamma_{ba} &\geq 0 \text{ εάν } a \sim b
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Αυτή η μοντελοποίηση του γ.π. (3.15) χρειάζεται  $m(m-1)/2$  αριθμό δυαδικών μεταβλητών (Siskos et al., 2005). Γίνεται σαφές ότι για μεγάλο μέγεθος συνόλου αναφοράς  $A$ , δηλαδή εναλλακτικών, το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

### 3.4 Η Μέθοδος UTASTAR

Η μέθοδος UTASTAR προτάθηκε από τους Siskos and Yanacopoulos (1985) και αποτελεί μια βελτιωμένη έκδοση της πρωτότυπης μεθόδου UTA. Στην αρχική έκδοση της μεθόδου UTA (Jacquet-Lagrange and Siskos, 1982), για καθεμία δράση  $a \in A$  ορίζεται ένα μοναδικό σφάλμα  $\sigma(a)$ . Αυτή η συνάρτηση σφάλματος δεν είναι επαρκής για την ελαχιστοποίηση της ολικής διασποράς των σημείων στη μονότονη καμπύλη του σχήματος 3.3. Το πρόβλημα αφορά τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της καμπύλης, από τα οποία θα ήταν προτιμότερο να αφαιρεθεί μια ποσότητα αξίας χωρίς να αυξηθούν οι αξίες των άλλων.



Σχήμα 3.3: Καμπύλη μονότονης παλινδρόμησης (Πηγή: Siskos et al. (2005))

Στη μέθοδο UTASTAR, οι Siskos and Yanacopoulos (1985) εισάγουν μια διπλή θετική

συνάρτηση σφάλματος και έτσι ο τύπος (4.1) γίνεται:

$$U'(\mathbf{g}(a)) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i(a)) - \sigma^+(a) + \sigma^-(a) \quad \forall a \in A \quad (3.17)$$

όπου  $\sigma^+(a)$  και  $\sigma^-(a)$  είναι τα σφάλματα υποεκτίμησης και υπερεκτίμησης, αντίστοιχα.

Επιπρόσθετα, μια άλλη σημαντική τροποποίηση αφορά τους περιορισμούς μονοτονίας των κριτηρίων, οι οποίοι μοντελοποιούνται με τη βοήθεια των ακόλουθων μετασχηματισμών των μεταβλητών:

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 1, 2, \dots, a_i - 1 \quad (3.18)$$

Με αυτό τον τρόπο, οι συνθήκες μονοτονίας (3.11) μπορούν να αντικατασταθούν από περιορισμούς μη αρνητικότητας των μεταβλητών  $w_{ij}$ .

Συνεπώς, ο αλγόριθμος UTASTAR συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα:

**Βήμα 1:** Η ολική αξία των δράσεων  $U(g(a_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , εκφράζεται αρχικά ως συνάρτηση των περιθώριων αξιών  $u_i(g_i)$  και στη συνέχεια των μεταβλητών  $w_{ij}$ , σύμφωνα με την εξίσωση (3.18), μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\begin{aligned} u_i(g_i^1) &= 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ u_i(g_i^j) &= \sum_{t=1}^{j-1} w_{it} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 2, 3, \dots, a_i - 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Βήμα 2:** Εισάγονται δύο συναρτήσεις σφάλματος  $\sigma^+$  και  $\sigma^-$  στο  $A$ , γράφοντας για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων στην προδιάταξη τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = U(g(a_k)) - \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k) - U(g(a_{k+1})) + \sigma^+(a_{k+1}) - \sigma^-(a_{k+1}) \quad (3.20)$$

**Βήμα 3:** Σχηματίζεται το παρακάτω γ.π. προς επίλυση:

$$\begin{aligned}
 [\min]z &= \sum_{k=1}^m \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k) \\
 &\text{υπό τους περιορισμούς} \\
 \Delta(a_k, a_{k+1}) &\geq \delta \text{ εάν } a_k \succ a_{k+1} \quad \forall k \\
 \Delta(a_k, a_{k+1}) &= 0 \text{ εάν } a_k \sim a_{k+1} \quad \forall k \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} &= 1 \\
 w_{ij} &\geq 0, \quad \sigma^+(a_k) \geq 0, \quad \sigma^-(a_k) \geq 0 \quad \forall i, j, \text{ και } k
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

όπου  $\delta$  ένας μικρός θετικός αριθμός.

**Βήμα 4:** Ελέγχεται η ύπαρξη πολλαπλών βέλτιστων ή ημιβέλτιστων λύσεων στο γ.π. (3.21), υπολογίζοντας το βαρύκεντρο των προσθετικών συναρτήσεων αξίας που μεγιστοποιούν τις ακόλουθες αντικειμενικές συναρτήσεις:

$$u_i(g_i^*) = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \tag{3.22}$$

στο υπερπολύεδρο των περιορισμών γ.π. (3.21) που περιορίζεται από τον επόμενο νέο περιορισμό:

$$\sum_{k=1}^m (\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)) \leq z^* + \varepsilon \tag{3.23}$$

όπου  $z^*$  είναι η βέλτιστη τιμή(σφάλμα) του γ.π. του βήματος 3 και  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός ή μηδέν.

Οι Siskos and Yanacopoulos (1985) απέδειξαν, σε ένα σύνολο πειραματικών δεδομένων, ότι η UTASTAR δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τον πρωτότυπο αλγόριθμο UTA .

### 3.5 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (PSO)

Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων ΒΣΣ (particle swarm optimization , PSO) είναι μια τεχνική που εντάσσεται στη λεγόμενη νοημοσύνη σμήνους (swarm intelligence). Πρόκειται για ένα στοχαστικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί ένα πληθυσμό σημείων βελτιστοποίησης.

Αρχικά, προτάθηκε από τους Kennedy and Eberhart (1995). Η ανάπτυξή του βασίστηκε

στην προσπάθεια προσομοίωσης της κίνησης ενός σμήνους πτηνών ή ενός κοπαδιού ψαριών ως μέρος μιας μελέτης πάνω στην ιδέα της συλλογικής νοημοσύνης των βιολογικών πληθυσμών. Έκτοτε η τεχνική έχει δεχθεί διάφορες τροποποιήσεις σε μια προσπάθεια βελτίωσης της σύγκλισής της και όχι μόνο (Poli et al., 2007), ενώ έχει εφαρμοστεί σε ποικίλα προβλήματα βελτιστοποίησης (Poli, 2008).

Ο αλγόριθμος ΒΣΣ έχει ως βάση ένα σμήνος (swarm) από σωματίδια (particles), όπου κάθε σωματίδιο αναπαριστά μια υποψήφια λύση (candidate solution) για το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τα σωματίδια αυτά κινούνται σε ένα πολυδιάστατο χώρο αναζήτησης, όπου η θέση του καθενός κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται τόσο από την ίδια του την εμπειρία όσο και από αυτή του υπόλοιπου σμήνους. Σε αναλογία με τους εξελικτικούς αλγορίθμους (EA, evolutionary algorithms), το σμήνος της ΒΣΣ αντιστοιχεί στον πληθυσμό (population) των EA, ενώ τα σωματίδια αντιστοιχούν στα άτομα (individuals). Ωστόσο, σε αντίθεση με τους EA, η ΒΣΣ δε χρησιμοποιεί εξελικτικούς τελεστές, όπως η διασταύρωση (crossover) και η μετάλλαξη (mutation).

Έστω,

$$f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

η αντικειμενική συνάρτηση και

$$\mathbf{S} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\},$$

ένα σμήνος αποτελούμενο από  $N$  σωματίδια. Προφανώς, κάθε σωματίδιο είναι ένα  $d$ -διάστατο διάνυσμα,

$$\vec{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}) \in S, \forall i = 1, \dots, N$$

Η ταχύτητα του  $i$ -οστού σωματιδίου είναι επίσης ένα  $n$ -διάστατο διάνυσμα,

$$\vec{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}) \in S, \forall i = 1, \dots, N$$

όπως και η καλύτερη θέση του,

$$\vec{pbest}_i = (pbest_{i1}, pbest_{i2}, \dots, pbest_{iD}) \in S, \forall i = 1, \dots, N$$

Έστω ότι  $gbest$  το καλύτερο σωματίδιο του σμήνους και  $t$  ο αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου. Τότε σύμφωνα με την πρώτη έκδοση της ΒΣΣ, σε κάθε επανάληψη το σμήνος ανανεώνεται σύμφωνα με τις σχέσεις (Eberhart et al., 1996):

$$v_i(t+1) = v_i(t) + cr_1(pbest_i(t) - x_i(t)) + cr_2(gbest(t) - x_i(t)) \quad (3.24)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (3.25)$$

όπου  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $c$  μια θετική σταθερά επιτάχυνσης (acceleration constant) και  $r_1, r_2 \sim U(0, 1)$  ομοιόμορφα κατανομημένα διανύσματα τυχαίων αριθμών.

Οι σχέσεις (3.24) και (3.25) αντιστοιχούν στην πρώτη έκδοση της ΒΣΣ. Η έκδοση αυτή δεν συμπεριλάμβανε κάποιο μηχανισμό ελέγχου των ταχυτήτων των σωματιδίων, με αποτέλεσμα παρά την γρήγορη εύρεση της περιοχής του ολικού ή τοπικού βέλτιστου, οι ταχύτητες μπορούσαν να πάρουν αυθαίρετα μεγάλες με αποτέλεσμα την απόκλιση του σμήνους και αδυναμία επίτευξης ικανοποιητικής ακρίβειας στην εύρεση της λύσης. Η πρώτη προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού ήταν η εισαγωγή φράγματος στο διάνυσμα της ταχύτητας, μέσω μιας νέας παραμέτρου,  $V_{max}$ . Έτσι, μετά τον καθορισμό της ταχύτητας γίνεται ο έλεγχος:

$$v_{ij} = \begin{cases} V_{max}, & \text{εάν } v_{ij} > V_{max} \\ -V_{max}, & \text{εάν } v_{ij} < -V_{max} \\ v_{ij}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

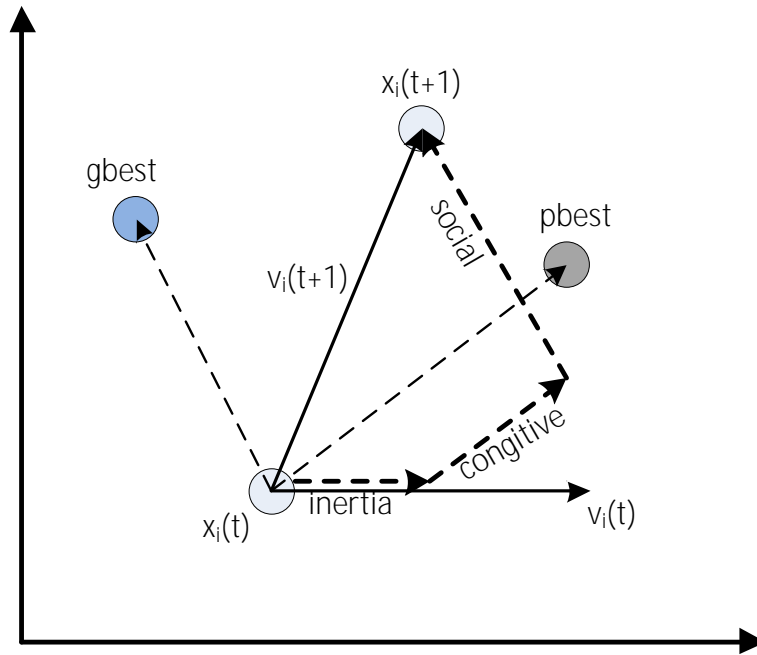
Με αυτό τον τρόπο υπάρχει έλεγχος στην ταχύτητα και αποφεύγονται οι εκρήξεις σμήνους (swarm explosions) που οδηγούν σε απόκλιση. Όμως δεν αποτελεί τρόπο προσαρμογής των ταχυτήτων που να βελτιώνει την απόδοση της μεθόδου.

Μία νέα έκδοση του αλγορίθμου προτάθηκε για να υπάρξει μεγαλύτερος έλεγχος στις ταχύτητες των σωματιδίων, ενσωματώνοντας μια νέα παράμετρο ελέγχου των ταχυτήτων και διαχωρίζοντας την σταθερά σε δύο ανεξάρτητες παραμέτρους. Έτσι, οι σχέσεις (3.24) και (3.25) έγιναν [(Eberhart and Shi, 1998), (Shi and Eberhart, 1998α), (Shi and Eberhart, 1998β)]:

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(pbest_i(t) - x_i(t)) + c_2r_2(gbest(t) - x_i(t)) \quad (3.26)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (3.27)$$

όπου  $w$  η νέα παράμετρος που καλείται βάρος αδράνειας (inertia weight), και  $c_1, c_2$  θετικές παράμετροι που προήλθαν από την σταθερά επιτάχυνσης και ονομάζονται γνωστική (cognitive) και κοινωνική (social) παράμετρος, αντίστοιχα.



Σχήμα 3.4: Διάνυσμα κίνησης του σωματιδίου στο χώρο αναζήτησης

Το βάρος αδράνειας  $w$ , χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της επίδρασης της ταχύτητας του προηγούμενο βήματος στην σύγκλιση της ΒΣΣ. Μεγάλες τιμές του  $w$  βοηθούν στην εξερεύνηση νέων περιοχών στο χώρο αναζήτησης, δηλαδή στην αναζήτηση του ολικού βέλτιστου, ενώ μικρές τιμές διευκολύνουν την λεπτομερέστερη τοπική αναζήτηση. Μια κατάλληλη τιμή του  $w$  παρέχει στον αλγόριθμο την απαραίτητη ισορροπία μεταξύ ολικής και τοπικής αναζήτησης.

Στα πρώτα πειράματα με αυτή την έκδοση της ΒΣΣ χρησιμοποιούνται σταθερά βάρη αδράνειας σε συγκεκριμένες τιμές. Όμως, εμπειρικές μελέτες έδειξαν ότι η απόδοση του αλγορίθμου ότι η απόδοση του αλγορίθμου ήταν καλύτερη όταν το βάρος αδράνειας μεταβαλλόταν δυναμικά κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, ξεκινώντας από μια μεγάλη τιμή κοντά στο 1 και μειωνόταν σταδιακά προς το 0 (Shi and Eberhart, 1998α),(Shi and Eberhart, 1998β). Μια στρατηγική είναι η γραμμική μείωση του  $w$  σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων:

$$w(t) = (w(0) - w(maxiter)) \frac{maxiter - t}{maxiter} + w(maxiter) \quad (3.28)$$

όπου  $maxiter$  ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και  $w(0) = 0.9$  αρχική τιμή,  $w(maxiter) = 0.4$  τελική τιμή (Suganthan, 1999). Σχετικά με τις παραμέτρους  $c_1$  και  $c_2$ , εμπειρικά αποτελέσματα υπέδειξαν τις τιμές  $c_1 = c_2 = 2$ , ως καλές τιμές σε περίπτωση που δεν υπάρχει πληροφορία σχετικά με την συνάρτηση που να υποδεικνύει κάτι διαφορετικό (Shi and Eberhart, 1998α),(Shi and Eberhart, 1998β).

Μια καινούργια έκδοση της ΒΣΣ προτάθηκε από τους Clerc and Kennedy (2002). Η νέα αυτή έκδοση είναι αλγεβρικά ισοδύναμη με την ΒΣΣ με βάρους αδράνειας, συνοδεύτηκε από μια εκτενή μελέτη σχετικά με την επιλογή των παραμέτρων της. Σύμφωνα με αυτή τα σωματίδια ανανεώνουν την ταχύτητα και τη θέση τους με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$v_i(t+1) = \chi [v_i(t) + c_1 r_1 (pbest_i(t) - x_i(t)) + c_1 r_2 (gbest(t) - x_i(t))] \quad (3.29)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (3.30)$$

όπου  $\chi$  θετική παράμετρος που καλείται παράγοντας περιορισμού (constriction factor). Ο ρόλος του παράγοντα περιορισμού είναι παρόμοιος με αυτόν του βάρους αδράνειας. Η διαφορά έγκειται στον τρόπο επιλογής της τιμής τους. Ενώ το βάρους αδράνειας προσδιορίζεται εμπειρικά, οι παράμετροι  $\chi$ ,  $c_1$  και  $c_2$  συνδέονται μεταξύ μέσω της σχέσης:

$$\chi = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|} \quad (3.31)$$

όπου  $\varphi = c_1 + c_2 > 4$ , η οποία προέκυψε από την μελέτη ευστάθειας της ΒΣΣ (Clerc and Kennedy, 2002).

Συνοψίζοντας ο βασικός αλγόριθμος της ΒΣΣ, για ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης  $f$  είναι:

---

**Algorithm 1** Basic PSO

---

*Initialization Phase*

```
for  $i = 1$  to  $N$  do  
  random position vector  $\mathbf{x}_i \sim \mathbf{U}(\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max})$   
  random velocity vector  $\mathbf{v}_i \sim \mathbf{U}(\mathbf{v}_{\min}, \mathbf{v}_{\max})$   
   $pbest_i \leftarrow x_i$   
  if  $f(pbest_i) < f(gbest)$  then  
     $gbest \leftarrow pbest_i$   
  end if  
end for
```

*Main loop*

```
while  $t \leq maxiter$  do  
  for  $i = 1$  to  $N$  do  
    for  $j = 1$  to  $D$  do  
      random numbers  $r_1, r_2 \sim U(0, 1)$   
      Update  $v_{ij}(t + 1)$  using Eq. 3.26  
      Update  $x_{ij}(t + 1)$  using Eq. 3.27  
       $j \leftarrow j + 1$   
    end for  
    if  $f(x_i) < f(pbest_i)$  then  
       $pbest_i \leftarrow x_i$   
      if  $f(pbest_i) < f(gbest)$  then  
         $gbest \leftarrow pbest_i$   
      end if  
    end if  
     $i \leftarrow i + 1$   
  end for  
   $t \leftarrow t + 1$   
end while  
return  $gbest$ 
```

---

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάστηκαν οι βασικές αρχές της ΒΣΣ καθώς και κάποιες παραλλαγές. Στη υποενότητα που ακολουθεί παρουσιάζεται μια παραλλαγή της ΒΣΣ που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη διατριβή.

### 3.5.1 Βελτιστοποίηση με Σμήνος Σωματιδίων με Εγγυημένη Σύγκλιση ΒΣΣ-ΕΣ (GCPSO)

Ο Van Den Bergh (2002) παρουσίασε μια νέα τροποποίηση της ΒΣΣ, την οποία ονόμασε Βελτιστοποίηση με Σμήνος Σωματιδίων με Εγγυημένη Σύγκλιση (ΒΣΣ-ΕΣ) (Guaranteed Convergence Particle Swarm Optimization). Η ιδέα για την ανάπτυξη της μεθόδου προήλθε από την παρατήρηση πως όταν η τρέχουσα θέση ενός σωματιδίου συμπίπτει με την καλύτερη θέση του και με την καλύτερη θέση όλου του σμήνους

$$x_i = pbest_i = gbest$$

τότε το σωματίδιο αυτό μπορεί να κινηθεί από τη θέση του μόνο αν η ταχύτητα του προηγούμενου βήματος του αλγορίθμου, δηλαδή ο όρος  $v_i(t)$  της εξίσωσης (3.26) δεν είναι ίση με το μηδέν και δεδομένου ότι το βάρος αδράνειας είναι μη μηδενικό. Άρα, ο αλγόριθμος καταλήγει σε πρόωρη σύγκλιση σε κάποιο σημείο, το οποίο μπορεί να μην είναι καν τοπικό ελάχιστο.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, προτάθηκε ένα νέο σχήμα το οποίο συνδυάζει την ΒΣΣ με τον αλγόριθμο τυχαίας αναζήτησης των Solis and Wets (1981). Σύμφωνα με αυτό το σχήμα, το καλύτερο σωματίδιο του σμήνους δεν ανανεώνει την ταχύτητα του χρησιμοποιώντας τη Σχέση (3.26), αλλά σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση (Van Den Bergh, 2002):

$$v_{gbest}(t+1) = -x_{gbest}(t) + gbest(t) + wv_{gbest}(t) + \rho(t)(1 - 2r_2) \quad (3.32)$$

Και η νέα θέση του καλύτερου σωματιδίου:

$$x_{gbest}(t+1) = gbest(t) + wv_{gbest}(t) + \rho(t)(1 - 2r_2) \quad (3.33)$$

όπου  $w$  είναι το βάρος αδράνειας,  $\rho$  είναι ένας παράγοντας διαβάθμισης (scaling factor), και  $r_2 \sim U(0, 1)$  μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανοημένη. Για τα υπόλοιπα σωματίδια του σμήνους χρησιμοποιούνται οι καθιερωμένες Σχέσεις (3.26) και (3.27).

Ο όρος με το παράγοντα διαβάθμισης υποχρεώνει την ΒΣΣ να εκτελέσει μια τυχαία αναζήτηση γύρω από το σημείο  $gbest$ , με διάμετρο η οποία καθορίζεται από το  $\rho$ . Η τιμή του οποίου μεταβάλλεται σε κάθε επανάληψη ως εξής (Van Den Bergh, 2002):

$$\rho(t+1) = \begin{cases} 2\rho(t), & \text{εάν } \#succ > s_c \\ 0.5\rho(t), & \text{εάν } \#fail > f_c \\ \rho(t), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

όπου  $\#succ$  και  $\#fail$  είναι το πλήθος των διαδοχικών επιτυχιών και αποτυχιών, αντίστοιχα. Σαν αποτυχία ορίζεται το γεγονός:

$$f(gbest(t)) = f(gbest(t-1))$$

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$\#succ(t+1) > \#succ(t) \Rightarrow \#fail(t+1) = 0$$

και

$$\#fail(t+1) > \#fail(t) \Rightarrow \#suc(t+1) = 0$$

Έτσι, σε περίπτωση επιτυχίας μηδενίζεται ο αριθμός των αποτυχιών, και αντίστοιχα μηδενίζεται ο αριθμός των επιτυχιών σε περίπτωση αποτυχίας.

Οι παράμετροι  $s_c$  και  $f_c$  λειτουργούν σαν κατώφλια και η βέλτιστη τιμή τους εξαρτάται από την εκάστοτε αντικειμενική συνάρτηση προς βελτιστοποίηση. Σε πολυδιάστους χώρους αναζήτησης, οι τιμές  $s_c = 15$  και  $f_c = 5$  αποδείχτηκαν καλές επιλογές. Εναλλακτικά, τα  $s_c$  και  $f_c$  μπορούν να καθορίζονται δυναμικά μέσα από τη διαδικασία του αλγορίθμου (Van Den Bergh, 2002).

### 3.6 Αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης ΔΕ (DE)

Η Διαφορική Εξέλιξη – ΔΕ (Differential Evolution – DE) αναπτύχθηκε από τους Storn and Price (1997). Δημιουργήθηκε καταρχήν για να δώσει λύση στο πρόβλημα πολυωνυμική προσαρμογής του Chebyshev, όμως αποδείχτηκε ικανότατη σαν τεχνική ολικής βελτιστοποίησης και σε άλλα προβλήματα (Price et al., 2005).

Ο αλγόριθμος ΔΕ χρησιμοποιεί έναν πληθυσμό:

$$\mathbf{P} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\},$$

$d$ -διάστατων διανυσμάτων, κάθε στοιχείο αντιπροσωπεύεται με πραγματικούς αριθμούς. Σε κάθε γενιά (επανάληψη) του αλγορίθμου, εφαρμόζονται στα άτομα του πληθυσμού οι τελεστές της μετάλλαξης, του ανασυνδυασμού (διασταύρωσης) και της επιλογής, για την παραγωγή του νέου πληθυσμού.

Στο στάδιο της μετάλλαξης, για κάθε άτομο  $x_i(t)$ , του πληθυσμού στην γενιά  $t$ , παράγεται ένα μεταλλαγμένο διάνυσμα (mutant vector)  $v_i(t+1)$ , χρησιμοποιώντας ένα από τα παρακάτω σχήματα (Storn and Price, 1997), (Price et al., 2005):

$$v_i(t+1) = x_{r_1}(t) + F(x_{r_2}(t) - x_{r_3}(t)) \quad (3.34)$$

$$v_i(t+1) = x_{best}(t) + F(x_{r_1}(t) - x_{r_2}(t)) \quad (3.35)$$

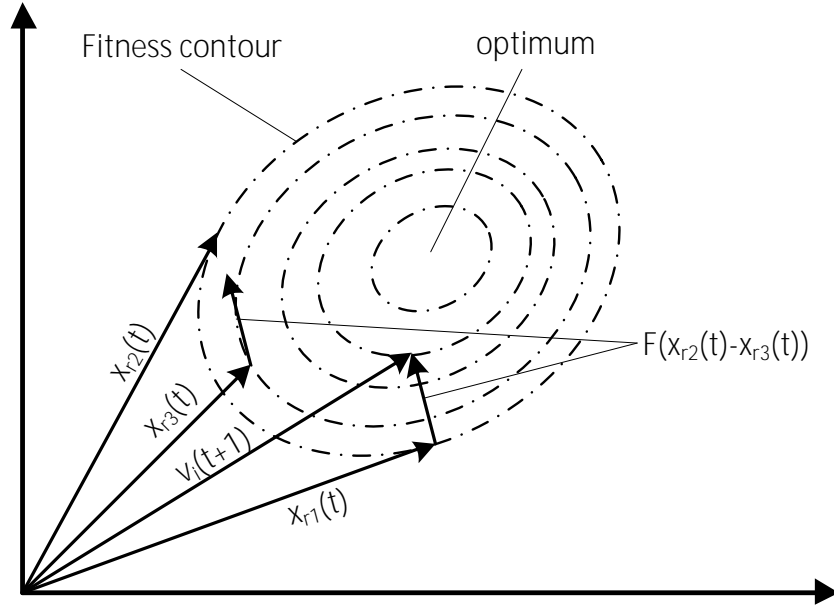
$$v_i(t+1) = x_i(t) + F(x_{best}(t) - x_i(t)) + F(x_{r_1}(t) - x_{r_2}(t)) \quad (3.36)$$

$$v_i(t+1) = x_{best}(t) + F(x_{r_1}(t) - x_{r_2}(t)) + F(x_{r_3}(t) - x_{r_4}(t)) \quad (3.37)$$

$$v_i(t+1) = x_{r_1}(t) + F(x_{r_2}(t) - x_{r_3}(t)) + F(x_{r_4}(t) - x_{r_5}(t)) \quad (3.38)$$

όπου  $x_{best}(t)$  είναι το καλύτερο άτομο στον πληθυσμό,  $F$  μια παράμετρος που καλείται σταθερά μετάλλαξης (mutation constant) και ελέγχει την επίδραση των διαφορών μεταξύ ατόμων στο μεταλλαγμένο διάνυσμα και συνήθως παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 1]$ . Τα  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5$  είναι αθέρατοι τυχαία επιλεγμένοι αριθμοί από το σύνολο  $\{1, 2, \dots, N\}$ , οι οποίοι διαφέρουν μεταξύ τους αλλά και από το  $i$ .

Το στάδιο της μετάλλαξης φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα (3.5) για την εξίσωση (3.34). Όπου φαίνεται πως λειτουργεί ο όρος της διαφοράς στη δημιουργία του μεταλλαγμένου διανύσματος.



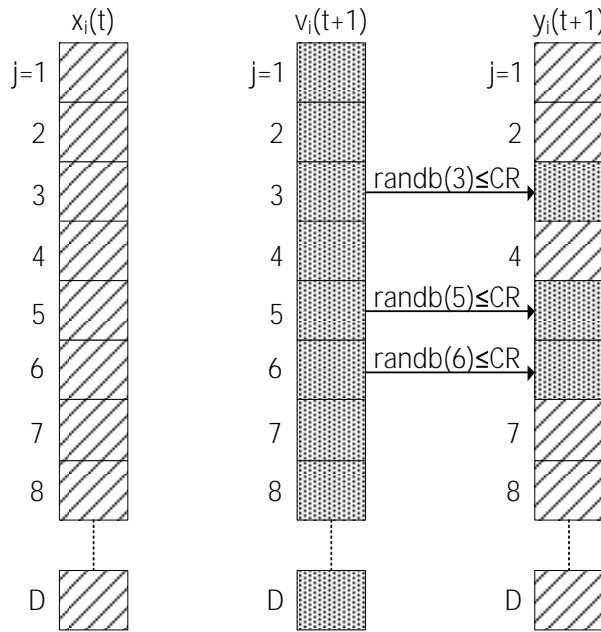
Σχήμα 3.5: Διαδικασία κατασκευής μεταλλαγμένου διανύσματος (mutant vector).

Το στάδιο της μετάλλαξης ακολουθεί αυτό του ανασυνδυασμού, όπου το αρχικό διάνυσμα  $x_i(t)$  συνδυάζεται με το μεταλλαγμένο διάνυσμα  $v_i(t+1)$ , και παράγεται το δοκιμαστικό διάνυσμα (trial vector)  $y_i(t+1)$ .

Για κάθε συνιστώσα,  $j = 1, 2, \dots, d$  του  $v_i(t+1)$  παράγεται ένας τυχαίος αριθμός  $r$  με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$ . Αν ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος ή ίσος από μια προκαθορισμένη σταθερά ανασυνδυασμού (recombination constant),  $CR \in [0, 1]$ , τότε η  $j$  συνιστώσα του  $v_{ij}(t+1)$  γίνεται συνιστώσα του δοκιμαστικού διανύσματος  $y_{ij}(t+1)$ , αλλιώς τη θέση της παίρνει η  $x_{ij}(t)$ . Η διαδικασία αυτή γίνεται καλύτερα κατανοητή από το Σχήμα (3.6). Οπότε το δοκιμαστικό διάνυσμα που παράγεται για κάθε μεταλλαγμένο είναι (Price et al., 2005):

$$y_{ij}(t+1) = \begin{cases} v_{ij}(t+1), & \text{εάν } (randb(j) \leq CR) \text{ ή } j = rnbr(i) \\ x_{ij}(t), & \text{εάν } (randb(j) > CR) \text{ και } j \neq rnbr(i) \end{cases} \quad (3.39)$$

όπου  $j = 1, 2, \dots, d$ ,  $randb(j)$  η  $j$ -οστή τιμή μιας ομοιόμορφης κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής εντός του  $[0, 1]$  και  $rnbr(i)$  ένας τυχαία επιλεγμένος δείκτης από το σύνολο  $\{1, 2, \dots, N\}$ .



Σχήμα 3.6: Διωνυμική διασταύρωση.

Τέλος, γίνεται η επιλογή, όπου το δοκιμαστικό διάνυσμα,  $y_i(t+1)$ , συγκρίνεται με το  $x_i(t)$  και το καλύτερο μεταξύ τους εισάγεται στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς.

$$x_i(t+1) = \begin{cases} y_i(t+1), & \text{εάν } f(y_i(t+1)) < f(x_i(t)) \\ x_i(t), & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Τα παραπάνω σχήματα της ΔΕ μπορούν να περιγραφούν χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό (Price et al., 2005):

$$DE/x/y/z$$

όπου

- $x$ : καθορίζει το διάνυσμα που θα μεταλλαχθεί και μπορεί να είναι είτε "rand" (τυχαία επιλεγμένο διάνυσμα του πληθυσμού) είτε "best" (το καλύτερο διάνυσμα του πληθυσμού).
- $y$ : είναι το πλήθος των διαφορών μεταξύ διανυσμάτων που εμφανίζονται στο σχήμα μετάλλαξης.
- $z$ : δηλώνει το σχήμα διασταύρωσης. Παραπάνω περιγράφηκε το σχήμα "bin" (δηλαδή ανασυνδυασμός μέσω ανεξάρτητων διωνυμικών πειραμάτων). Υπάρχει και το σχήμα "exp" που αναφέρεται σε εκθετική μορφή διασταύρωσης.

Για παράδειγμα, το σχήμα της Σχέσης (3.35) είναι το  $DE/best/1/bin$ , αυτό της Σχέσης (3.38) είναι το  $DE/rand/2/bin$ . Το βασικό σχήμα της μεθόδου θεωρείτε το  $DE/rand/1/bin$  της Σχέσης (3.34) (Price et al., 2005).

### 3.7 Διαδικασία ελέγχου Cross Validation

Το cross validation (Stone, 1974) είναι μια διαδικασία για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας υποδειγμάτων ταξινόμησης και παλινδρόμησης. Στόχος της διαδικασίας είναι η πραγματοποίηση αξιόπιστων εκτιμήσεων για την αποτελεσματικότητα των εξεταζόμενων υποδειγμάτων χρησιμοποιώντας ένα κοινό δείγμα τόσο για ανάπτυξη όσο για έλεγχο τους.

Η διαδικασία πραγματοποιείται επαναληπτικά σε  $k$  στάδια. Ανάλογα με το πλήθος  $k$  των επαναλήψεων και δεδομένου ενός συνόλου αναφοράς  $A$  αποτελούμενου από  $m$  εναλλακτικές, η διαδικασία υλοποιείται ως εξής:

- Βήμα 1 : Το σύνολο  $A$  χωρίζεται τυχαία σε  $A_1, A_2, \dots, A_k$  αλληλοαποκλειόμενα υποσύνολα.
- Βήμα 2 : Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, k$ :
  - Βήμα 2α : Χρησιμοποιείται το σύνολο  $A/A_i$  για την ανάπτυξη ενός μοντέλου  $V_i$ .
  - Βήμα 2β : Το μοντέλο  $V_i$  χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των εναλλακτικών του συνόλου  $A_i$  και υπολογίζεται η αποτελεσματικότητα  $a_i$  με κάποιο μέτρο αποτελεσματικότητας.

Βήμα 3 : Υπολογίζεται η αναμενόμενη αποτελεσματικότητα της μεθόδου ως:

$$E(a) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$$

Από την επαναληπτική αυτή διαδικασία μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα από την στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων τόσο όσον αφορά την αποτελεσματικότητα της χρησιμοποιούμενης μεθόδου, όσο και την ευστάθεια που παρουσιάζεται στις παραμέτρους του αναπτυσσόμενου υποδείγματος (βάρη κριτηρίων).



## Κεφάλαιο 4

# Μοντελοποίηση και προτεινόμενη μεθοδολογία

---

### 4.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν το θεωρητικό υπόβαθρο και όλες οι μεθοδολογίες της οικογένειας UTA, καθώς και οι αλγόριθμοι που θα βασιστεί η ανάπτυξη της προτεινόμενης μεθοδολογίας αυτή της διατριβής.

Συγκεκριμένα, στην επόμενη ενότητα θα αναπτυχθεί το μαθηματικό μοντέλο και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί ο τρόπος που επιλύεται με τους αλγόριθμους.

### 4.2 Μοντελοποίηση

Η προτεινόμενη μεθοδολογία βασίστηκε στις εργασίες των Jacquet-Lagreze and Siskos (1982) και Siskos and Yanacopoulos (1985). Η βασική ιδέα είναι η ίδια με τη μέθοδο UTA, δηλαδή η ανάπτυξη μιας προσθετικής συνάρτησης αξίας δεδομένου ενός συνόλου εναλλακτικών οι οποίες έχουν καταταχθεί από τον αποφασίζοντα από τις καλύτερες προς της χειρότερες.

Οι διαφορές τους είναι ότι ενώ στη UTA και στις παραλλαγές της χρησιμοποιούνται τεχνικές γραμμικού, στη προτεινόμενη μεθοδολογία χρησιμοποιούνται μεθευρετικοί αλγόριθμοι. Επίσης, χρησιμοποιούνται εναλλακτικά κριτήρια βελτιστοποίησης όπως ο συντελεστής συσχέτισης  $\tau$  του Kendall.

Έστω,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  το σύνολο αναφοράς των εναλλακτικών, οι οποίες εκτιμώνται από μια οικογένεια κριτηρίων  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Ισχύουν οι σχέσεις (3.4) και (3.5).

$$U(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i)$$

Υπό τους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) &= 1 \\ u_i(g_{i_*}) &= 0, \forall i = 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

Για κάθε κριτήριο, το διάστημα  $[g_{i_*}, g_i^*]$  χωρίζεται σε  $(a_i - 1)$  ίσα υποδιαστήματα, από τον τύπο (3.7).

$$g_i^j = g_{i_*} + \frac{j-1}{a_i-1}(g_i^* - g_{i_*}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, a_i.$$

Η αξία κάθε εναλλακτικής  $a \in A$ , μπορεί να γραφτεί ως:

$$U(\mathbf{g}(a)) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i(a)) \quad \forall a \in A \quad (4.1)$$

Η περιθώρια αξία μιας εναλλακτικής  $a$  προσεγγίζεται με γραμμική παρεμβολή από τον τύπο (3.8) που ξαναγράφεται:

$$u_i(g_i(a)) = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} (u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j))$$

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση σχετικά με την μονοτονία των προτιμήσεων, οι περιθώριες αξίες  $u_i(g_i)$  πρέπει να ικανοποιούν τον τύπο (3.18):

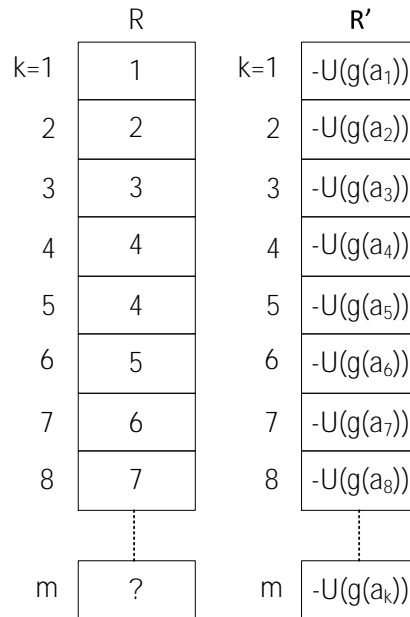
$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 1, 2, \dots, a_i - 1$$

Ουσιαστικά μέχρι αυτό το σημείο η διαδικασία είναι ίδια με το βήμα 1 του αλγορίθμου της UTASTAR, δηλαδή:

Η ολική αξία των δράσεων  $U(g(a_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , εκφράζεται αρχικά ως συνάρτηση των περιθώριων αξιών  $u_i(g_i)$  και στη συνέχεια των μεταβλητών  $w_{ij}$ , σύμφωνα με την εξίσωση (3.18), μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\begin{aligned} u_i(g_i^1) &= 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ u_i(g_i^j) &= \sum_{t=1}^{j-1} w_{it} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 2, 3, \dots, a_i - 1 \end{aligned}$$

Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθούν εκείνες οι εξισώσεις, οι οποίες θα δίνουν τη μεγαλύτερη δυνατή συσχέτιση μεταξύ της κατάταξης του αποφασίζοντα και την κατάταξη που δίνει η μέθοδος. Στο Σχήμα (4.1) φαίνονται οι δύο αυτές κατατάξεις, όπου  $R$  η προδιάταξη του αποφασίζοντος και  $\hat{R}$  η κατάταξη της μεθόδου. Η  $\hat{R}$  παίρνει τιμές  $-U(g(a_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , για κάθε εναλλακτική γιατί η μεγαλύτερη ολική χρησιμότητα σημαίνει καλύτερη εναλλακτική.



Σχήμα 4.1: Η προδιάταξη  $R$  του αποφασίζοντος και η κατάταξη  $\hat{R}$  της μεθόδου.

Για τη συσχέτιση των δύο αυτών κατατάξεων χρησιμοποιείται ο συντελεστής συσχέτισης  $\tau$  του Kendall. Οπότε το πρόβλημα προς επίλυση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & [max]\tau(R, \hat{R}) \\
 & \text{υπό τους περιορισμούς} \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} = 1 \\
 & w_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Δηλαδή, πρέπει να υπολογιστούν τα ίδια βάρη όπως στη μέθοδο *Utastar*, αλλά βελτιστοποιώντας το  $\tau$  Kendall. Όπου  $a_i - 1$  ο αριθμός εσωτερικών διαστημάτων για το κάθε  $n$  κριτήριο, και  $w_{ij}$  τα βάρη που πρέπει να υπολογιστούν ώστε μέσω των εξισώσεων (3.19) να υπολογιστεί η ολική χρησιμότητα.

### 4.3 Προς την προτεινόμενη μεθοδολογία

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε η μαθηματική μοντελοποίηση. Θα αναλυθούν κάποια ζητήματα ώστε αυτή να γίνει πιο κατανοητή, καθώς και προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν στην πορεία προς την προτεινόμενη μεθοδολογία.

#### 4.3.1 Το διάνυσμα λύσης

Για να μπορέσει να επιλυθεί το πρόβλημα (4.2) με τους αλγορίθμους που περιγράφηκαν στις ενότητες (3.5) και (3.6), πρέπει πρώτα να κατασκευαστεί το διάνυσμα λύσης με σκοπό να φτιαχτεί και ολόκληρος ο πληθυσμός. Αυτή η διαδικασία θα γίνει καλύτερα κατανοητή μέσα από ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Έστω το παράδειγμα επιλογής μεταφορικού μέσου από την εργασία των Siskos et al. (2005):

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$R$
$a_1$	3	10	1	1
$a_2$	4	20	2	2
$a_3$	2	20	0	2
$a_4$	6	40	0	3
$a_5$	30	30	3	4

Πίνακας 4.1: Πολυκριτήριος πίνακας παραδείγματος επιλογής μεταφορικού μέσου.

και έστω ο παρακάτω πίνακας με τα μεταδεδομένα για τα κριτήρια:

	$g_*$	$g^*$	$\alpha$
$g_1$	30	2	3
$g_2$	40	10	4
$g_3$	0	3	4

Πίνακας 4.2: Μεταδεδομένα για τα κριτήρια.

Τότε από την εξίσωση (3.7) τα διαστήματα χωρίζονται ως εξής:

$$[g_{1*}, g_1^*] \rightarrow [30, 16, 2]$$

$$[g_{2*}, g_2^*] \rightarrow [40, 30, 20, 10]$$

$$[g_{3*}, g_3^*] \rightarrow [0, 1, 2, 3]$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται γραμμική παρεμβολή και εξάγεται ο πίνακας συντελεστών

συμμετοχής των μερικών αξιών στη ολική χρησιμότητα για κάθε εναλλακτική:

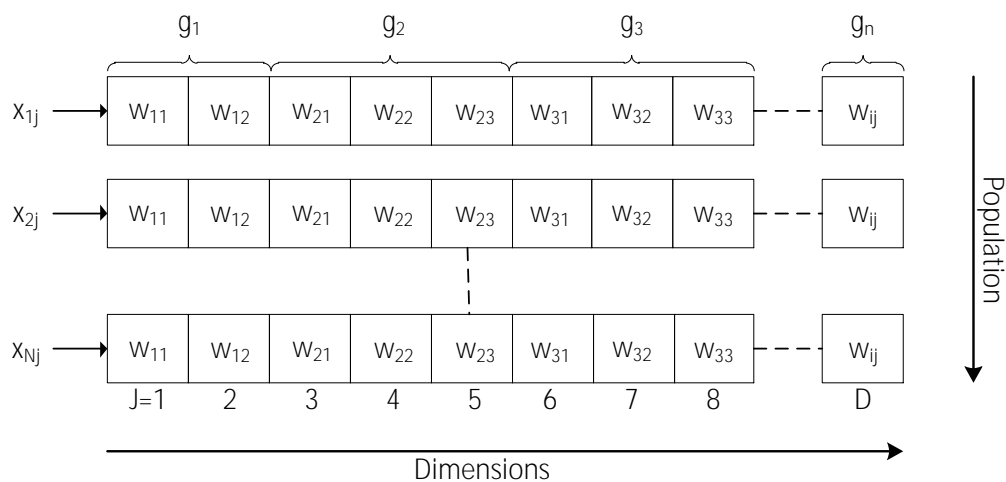
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.2857 & 0.7143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1429 & 0.8571 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0714 & 0.9286 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τον παραπάνω πίνακα εύκολα μπορεί να υπολογιστεί ο πίνακας  $C$  με τους συντελεστές συμμετοχής σε κάθε εναλλακτική των βαρών  $w_{ij}$ :

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9286 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0.8571 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0.7143 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Με όρους συνδυαστικής βελτιστοποίησης αυτός είναι ο πίνακας κόστους.

Το διάνυσμα λύσης και η δημιουργία πληθυσμού για τους αλγόριθμους φαίνεται στο Σχήμα (4.2) για το παραπάνω παράδειγμα. Με τη βοήθεια ενός λεξικού μπορεί να γίνει η αντιστοιχία των δεικτών των βαρών και των κριτηρίων με τους αντίστοιχους της κάθε λύσης του πληθυσμού.



Σχήμα 4.2: Το διάνυσμα λύσης και η δημιουργία πληθυσμού.

Πιο αναλυτικά, η κάθε γραμμή είναι ένα άτομο στο πληθυσμό του μεθυστικού αλγορίθμου και περιέχει τα βάρη που πρέπει να υπολογιστούν και αποτελούν τις διαστάσεις  $D$  του διανύσματος. Ο υπολογισμός των βαρών γίνεται ευρετικά από τον αλγόριθμο ενώ οι

βαθμολογίες (ολική αξία) για τις εναλλακτικές προκύπτουν εύκολα για όλο το πληθυσμό ως εξής:

$$U = X * C^T$$

όπου για το συγκεκριμένο παράδειγμα ο  $U$  θα έχει 5 γραμμές για τις 5 εναλλακτικές και  $N$  στήλες με τη βαθμολογία των εναλλακτικών για κάθε άτομο στο πληθυσμό.

### 4.3.2 Αντιμετώπιση των περιορισμών

Οι μεθερευτικοί και πιο συγκεκριμένα οι πληθυσμιακοί αλγόριθμοι ΒΣΣ και ΔΕ είναι από τη φύση τους φτιαγμένοι για βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς. Για να αντιμετωπιστούν οι περιορισμοί του προβλήματος έπρεπε να χρησιμοποιηθεί κάποια τεχνική ελέγχου ώστε να μην παραβιάζονται. Στην εργασία των Michalewicz and Schoenauer (1996) γίνεται ο διαχωρισμός των μεθόδων αντιμετώπισης των περιορισμών στις εξής κατηγορίες:

- 1) Μέθοδοι βασισμένες στη διατήρηση εφικτών λύσεων,
- 2) Μέθοδοι βασισμένες σε συναρτήσεις τιμωρίας,
- 3) Μέθοδοι διαχωρισμού εφικτών λύσεων και ανέφικτων λύσεων, και
- 4) υβριδικές μέθοδοι.

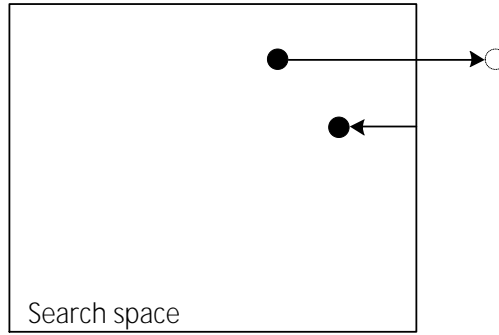
Στη διατριβή χρησιμοποιήθηκε η πρώτη μέθοδος με τον εξής τρόπο: σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, το διάνυσμα λύσης έχει κανονικοποιηθεί με την παρακάτω εξίσωση:

$$x_i^{norm} = \left| \frac{x_i}{\|x_i\|_1} \right| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

όπου

$$\|x_i\|_1 = \sum_{j=1}^D |x_{ij}| \quad (4.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν δύο ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για τη λειτουργία του αλγορίθμου. Η πρώτη είναι ότι κάθε φορά το άθροισμα του διανύσματος λύσης  $x$  αθροίζει στη μονάδα και η δεύτερη είναι ότι για αρνητικές τιμές κάποιας διάστασης του  $x$  επαναφέρει αυτή τη διάσταση εντός του χώρου αναζήτησης σε απόσταση είτε μικρότερη από την απόλυτη τιμή είτε μεγαλύτερη και οι μηδενικές τιμές δεν επηρεάζονται. Επομένως, τα όρια του χώρου αναζήτησης λειτουργούν ως ένας τοίχος που επαναφέρουν της αρνητικές διαστάσεις του διανύσματος λύσης ξανά εντός του χώρου αναζήτησης.



Σχήμα 4.3: Διαδικασία επανατοποθέτησης εντός του χώρου αναζήτησης.

### 4.3.3 Βελτιστοποίηση με ΒΣΣ

Η ΒΣΣ ήταν ο πρώτος αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος (4.2). Η ΒΣΣ επιλέχθηκε ως ένας γρήγορος βελτιστοποιητής που έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλά διαφορετικά προβλήματα. Το σχήμα του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε αρχικά ήταν το βασικό:

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(pbest_i(t) - x_i(t)) + c_1r_2(gbest(t) - x_i(t))$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

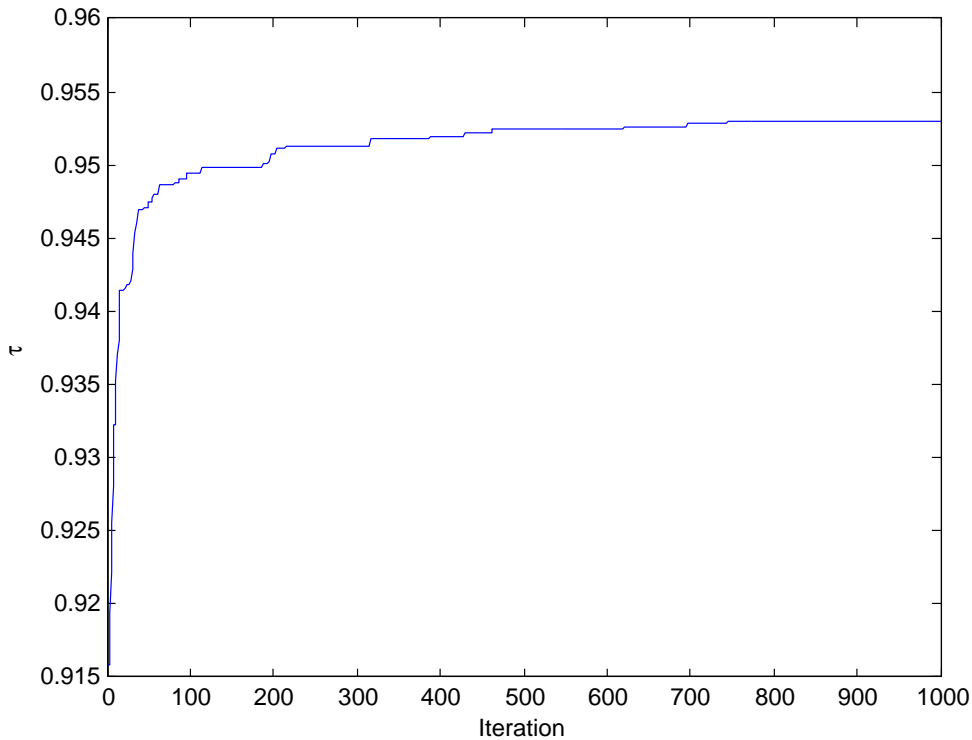
με γραμμική μεταβολή του βάρους αδράνειας

$$w(t) = (w(0) - w(maxiter)) \frac{maxiter - t}{maxiter} + w(maxiter)$$

και παραμέτρους  $c_1 = c_2 = 1.49$  και  $w(0) = 0.9$ ,  $w(maxiter) = 0.4$ . Επίσης χρησιμοποιήθηκε και περιορισμός της ταχύτητας:

$$v_{ij} = \begin{cases} V_{max}, & \text{εάν } v_{ij} > V_{max} \\ -V_{max}, & \text{εάν } v_{ij} < -V_{max} \\ v_{ij}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

όπου ορίστηκε  $V_{max} = 0.1 * \frac{1}{D}$ . Ο αλγόριθμος αυτός είχε σύγκλιση αλλά η βελτιστοποίηση του  $\tau$  Kendall δεν ήταν ικανοποιητική, αφού δεν ξεπέρασε ποτέ την  $Utastar$ .



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα σύγκλισης της βασικής ΒΣΣ.

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω γράφημα ο αλγόριθμος έφτανε γρήγορα σε ένα επίπεδο και μετά δεν μπορούσε να ξεφύγει από αυτό. Η λύση αυτή μπορεί να μην είναι ούτε καν τοπικό βέλτιστο.

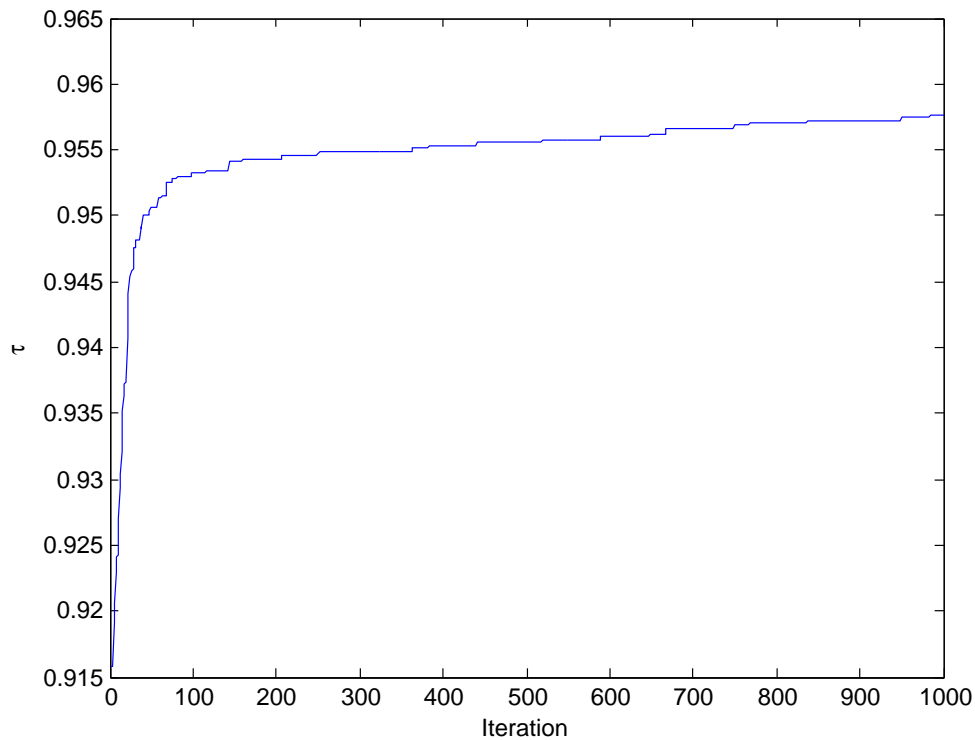
Γνωρίζοντας ότι το ολικό βέλτιστο για τη συνάρτηση που βελτιστοποιείται είναι η μονάδα χρησιμοποιήθηκε η παραλλαγή με εγγυημένη σύγκλυση που παρουσιάστηκε στην ενότητα (3.5.1) με τις παρακάτω εξισώσεις για ανανέωση της ταχύτητας:

$$v_{gbest}(t+1) = -x_{gbest}(t) + gbest(t) + wv_{gbest}(t) + \rho(t)(1 - 2r_2)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

όπου  $w$  είναι το βάρος αδράνειας, που αλλάζει πάλι γραμμικά με κάθε επανάληψη,  $\rho$  είναι ένας παράγοντας διαβάθμισης (scaling factor), και  $r_2 \sim U(0, 1)$  μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανοημένη. Για τα υπόλοιπα σωματίδια του σμήνους χρησιμοποιούνται οι καθιερωμένες Σχέσεις (3.26) και (3.27).

Ο όρος με το παράγοντα διαβάθμισης υποχρεώνει την ΒΣΣ να εκτελέσει μια τυχαία αναζήτηση γύρω από το σημείο  $gbest$ , με διάμετρο η οποία καθορίζεται από το  $\rho$ . Οπότε, ο αλγόριθμος αλλάζει τη θέση του καλύτερου σωματιδίου ώστε να αποφύγει στασιμότητα και σύγκλιση όλου του πληθυσμού σε μία λύση μη βέλτιστη. Η λειτουργία αυτή φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα (4.5). Οι υπόλοιπες παράμετροι κρατήθηκαν ίδιες, όπως και στην εκτέλεση της βασικής ΒΣΣ.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα σύγκλισης της ΒΣΣ-ΕΣ.

Παρατηρείται ότι η ΒΣΣ-ΕΣ, δουλεύει καλύτερα από το βασικό αλγόριθμο ΒΣΣ. Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα σε μια λύση με καλό  $\tau$  Kendall, και στη συνέχεια φαίνεται η λειτουργία της τυχαίας αναζήτησης της ΒΣΣ-ΕΣ να δουλεύει και να οδηγεί το σμήνος σε καλύτερες λύσεις. Όμως η ταχύτητα σύγκλισης, από αυτό το επίπεδο (όπου η λύση έχει καλό  $\tau$  Kendall) της αντικειμενικής συνάρτησης, είναι πάρα πολύ μικρή με αποτέλεσμα η μέθοδος να χρειάζεται πολλές επαναλήψεις για να βρει μία λύση. Όμως, η λύση αυτή και πάλι με δυσκολία ξεπερνά τη μέθοδο Utastar.

## Αιτίες αποτυχίας αντιμετώπισης του προβλήματος με ΒΣΣ

Οι αιτίες αποτυχίας αντιμετώπισης του προβλήματος με βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Η μέθοδος έχει πολλές παραμέτρους που πρέπει να ρυθμιστούν για να επιτύχει ο αλγόριθμος καλά αποτελέσματα. Από μόνο του αυτό αποτελεί ξεχωριστό πρόβλημα βελτιστοποίησης.
- Η μέθοδος δεν δουλεύει καλά για πολλές διαστάσεις στο διάνυσμα λύσης.
- Η ίδια η φύση του αλγορίθμου δεν ταιριάζει στο πρόβλημα προς επίλυση.

και οι τρεις παραπάνω λόγοι οδήγησαν την έρευνα με τη ΒΣΣ σε αδιέξοδο. Δεν προτείνεται η χρησιμοποίησή της για παρόμοια προβλήματα.

## 4.4 Προτεινόμενη μεθοδολογία

Η προτεινόμενη μεθοδολογία για την απόκτηση των συναρτήσεων αξιών είναι η χρησιμοποίηση του αλγορίθμου Διαφορικής Εξέλιξης. Το σχήμα της ΔΕ που χρησιμοποιήθηκε ήταν το  $DE/rand/1/bin$ .

Από την ανάλυση που έγινε στις προηγούμενες ενότητες έγινε κατανοητό πώς δημιουργείται ο πληθυσμός για την ΔΕ. Έπειτα, αναλύονται τα βήματα της μεθόδου:

**Βήμα 1:** Η αρχικοποίηση του πληθυσμού της ΔΕ γίνεται τυχαία με την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια κάποια διανύσματα λύσης οδηγούνται σε ακραία σημεία του χώρου αναζήτησης, ώστε ο αλγόριθμος να καλύψει όλες της πιθανές περιοχές. Στη συνέχεια κάθε άτομο στο πληθυσμό κανονικοποιείται με τη σχέση:

$$x_i^{norm} = \left| \frac{x_i}{\|x_i\|_1} \right| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι ολικές χρησιμότητες,

$$U = X * C^T$$

και ο συντελεστής συσχέτισης των δύο κατατάξεων

$$\tau_{init} = \tau(R, \hat{R})$$

. Εδώ τελειώνει η φάση της αρχικοποίησης.

Τα βήματα που ακολουθούν είναι επαναληπτικά.

**Βήμα 2:** Υπολογίζονται τα  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ . Στο στάδιο της μετάλλαξης, για κάθε άτομο  $x_i(t)$ , του πληθυσμού στην γενιά  $t$ , παράγεται ένα μεταλλαγμένο διάνυσμα (mutant vector):

$$v_i(t+1) = x_{r_1}(t) + F(x_{r_2}(t) - x_{r_3}(t))$$

Η σταθερά μετάλλαξης δεν είναι πλέον σταθερά όπως στην αρχική ΔΕ αλλά υπολογίζεται:

$$F = 0.5 + 0.4 * rnd(0, 1)$$

Από το στάδιο της μετάλλαξης μπορεί να προκύψουν αρνητικές τιμές για κάποια διάσταση ( $w_{ij}$ ) του ατόμου που μεταλλάχθηκε.

**Βήμα 3:** Το στάδιο της μετάλλαξης ακολουθεί αυτό της διωνυμικής διασταύρωσης:

$$y_{ij}(t+1) = \begin{cases} v_{ij}(t+1), & \text{εάν } (randb(j) \leq CR) \text{ ή } j = rnbr(i) \\ x_{ij}(t), & \text{εάν } (randb(j) > CR) \text{ και } j \neq rnbr(i) \end{cases}$$

όπου  $j = 1, 2, \dots, d$ ,  $randb(j)$  η  $j$ -οστή τιμή μιας ομοιόμορφης κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής εντός του  $[0, 1]$  και  $rnbr(i)$  ένας τυχαία επιλεγμένος δείκτης από το σύνολο  $\{1, 2, \dots, N\}$  και ο συντελεστής διασταύρωσης. Το δοκιμαστικό διάνυσμα που δημιουργείται μπορεί να περιέχει αρνητικές τιμές και το άθροισμά του να μην είναι μονάδα. Σε αυτό το σημείο και πριν το στάδιο της επιλογής αυτό δεν γίνεται αποδεκτό και το δοκιμαστικό διάνυσμα κανονικοποιείται.

$$y_i^{norm} = \left| \frac{y_i}{\|y_i\|_1} \right| \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Η διαδικασία αυτή εκτός ότι επαναφέρει τη λύση εντός του εφικτού χώρου λύσεων λειτουργεί και ως μια μικρού βαθμού μετάλλαξη.

**Βήμα 4:** Ακολουθεί το βήμα της επιλογής όπου για το δοκιμαστικό διάνυσμα,  $y_i(t+1)$  υπολογίζεται:

$$U = Y * C^T$$

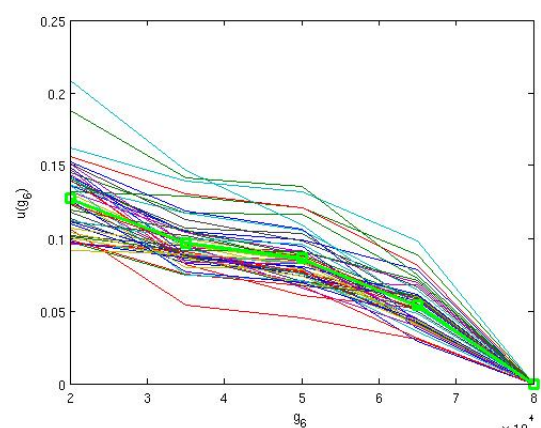
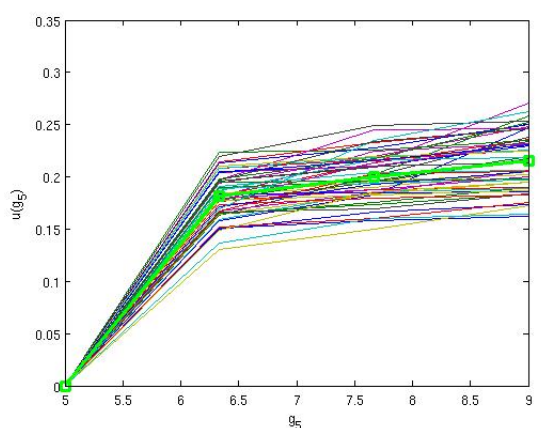
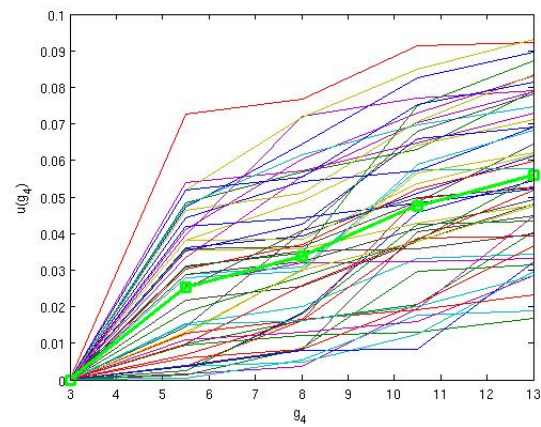
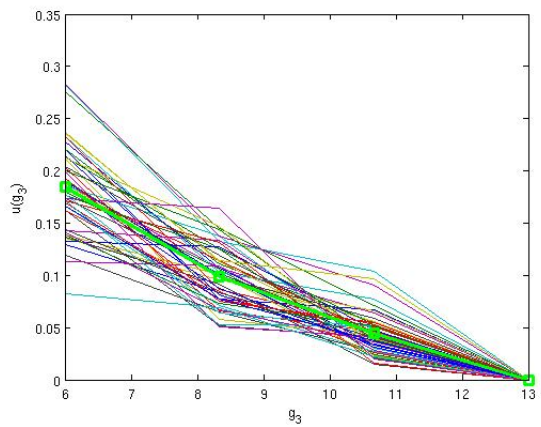
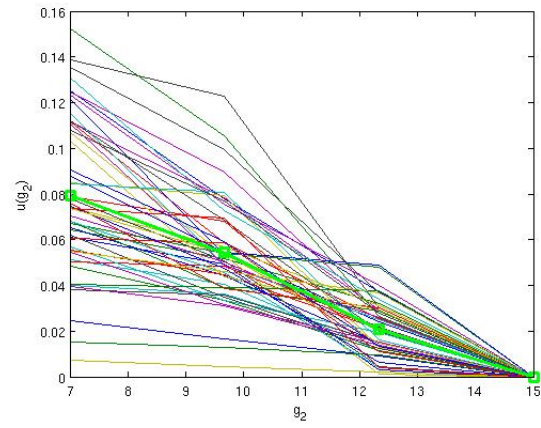
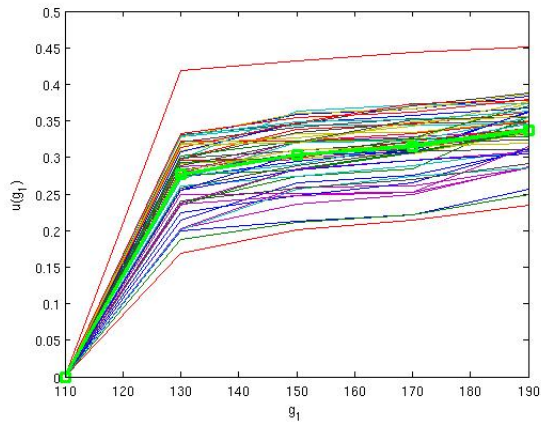
$$\tau_{trial} = \tau(R, \hat{R})$$

συγκρίνεται με το  $x_i(t)$  εάν  $\tau_{trial} \geq \tau_{init}$  εισάγεται στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς.

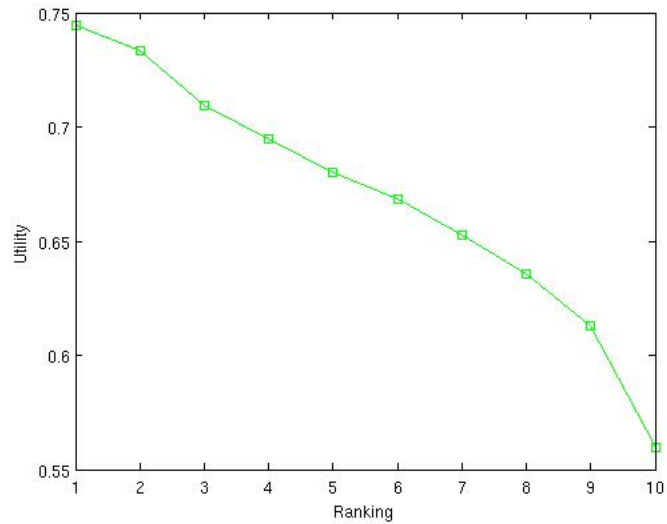
**Βήμα 5:** Το τελευταίο βήμα είναι ένα βήμα επιπλέον σε σχέση με τη βασική μέθοδο ΔΕ. Υπολογίζεται η μέση λύση και εάν ο συντελεστής  $\tau$  είναι μεγαλύτερος από το χειρότερο άτομο στο πληθυσμό, τότε η μέση λύση εισάγεται στο πληθυσμό. Η διαδικασία αυτή δίνει δυο πλεονέκτημα στην προτεινομένη μεθοδολογία: η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου αυξάνεται δηλαδή χρειάζονται πολύ λιγότερες επαναλήψεις και η τελική λύση έχει μεγαλύτερη ευστάθεια.

## Παράδειγμα εφαρμογής

Το παράδειγμα επιλογής αυτοκινήτου από την εργασία των Jacquet-Lagreze and Siskos (1982). Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι μερικές χρησιμότητες για ένα μέγεθος πληθυσμού  $N = 50$ , καθώς και η μέση λύση που βγάζει ο αλγόριθμος.



Όλες οι λύσεις έχουν συντελεστή  $\tau = 1$ . Η κατάταξη φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.6: Η κατάταξη των εναλλακτικών.

#### 4.4.1 Μια υβριδική προσέγγιση

Μια υβριδική προσέγγιση που προτείνεται είναι η εισαγωγή στο πληθυσμό της  $\Delta E$  της λύσης που προέρχεται από την Utastar. Έτσι ο αλγόριθμος έχει καλύτερο σημείο εκκίνησης και μπορεί να βελτιστοποιήσει ακόμα περισσότερο το συντελεστή  $\tau$  kendall.



# Κεφάλαιο 5

## Υλοποίηση και Αποτελέσματα

---

### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται η υλοποίηση σε MATLAB καθώς και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της μεθόδου και παρατίθενται τα αποτελέσματα.

### 5.2 Υλοποίηση

Η υλοποίηση έγινε στο MATLAB . Για τις ανάγκες της έρευνας υλοποιήθηκαν η μέθοδος Utastar για λόγους σύγκρισης , η μέθοδος με την ΒΣΣ και οι παραλλαγές της, καθώς και η προτεινόμενη μέθοδος με τη χρήση της ΔΕ.

Σε όλες τις υλοποιήσεις η είσοδος, ο έλεγχος των δεδομένων καθώς και η δημιουργία του πίνακα συντελεστών  $c_{ij}$  των βαρών  $w_{ij}$

#### Η είσοδος

Η είσοδος των δεδομένων γίνεται με μορφή αρχείων .txt όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες. Επιλέχθηκε αυτό ο τρόπος για ευκολία χειρισμού των δεδομένων και για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ρουτίνες που φτιάχτηκαν και από τρίτους. Δύο αρχεία δέχονται όλες οι ρουτίνες, ένα αρχείο με τον πολυκριτήριο πίνακα μαζί με την κατάταξη, όπως φαίνεται στην Σχήμα (5.1), όπου κάθε γραμμή είναι μια εναλλακτική, οι στήλες είναι τα κριτήρια και η τελευταία στήλη είναι η κατάταξη των εναλλακτικών από τον αποφα-σίζοντα.

*test_siskos_10x6.txt							
1	173	11.4	10.01	10	7.88	49500	1
2	176	12.3	10.48	11	7.96	46700	2
3	142	8.2	7.3	5	5.65	32100	3
4	148	10.5	9.61	7	6.15	39150	4
5	178	14.5	11.05	13	8.06	64700	5
6	180	13.6	10.4	13	8.47	75700	6
7	182	12.7	12.26	11	7.81	68593	7
8	145	14.3	12.95	11	8.38	55000	8
9	161	8.6	8.42	7	5.11	35200	9
10	117	7.2	6.75	3	5.81	24800	10

Σχήμα 5.1: Αρχείο εισόδου δεδομένων σε μορφή \*.txt .

Στο Σχήμα (5.2) φαίνεται το αρχείο εισόδου για τα μεταδεδομένα που χαρακτηρίζουν τα κριτήρια, κάθε γραμμή είναι ένα κριτήριο.

- Η πρώτη στήλη χαρακτηρίζει την μονοτονία των κριτηρίων, δηλαδή για τιμές 0 το κριτήριο θεωρείτε αύξων, ενώ για τιμές 1 θεωρείτε φθίνων.
- Η δεύτερη στήλη περιγράφει το είδος του κριτηρίου δηλαδή εάν είναι ποιοτικό ή ποσοτικό, η στήλη παίρνει τιμές 1 ή 0 αντίστοιχα.
- Η τρίτη και η τέταρτη στήλη είναι το διάστημα που κυμαίνεται το κριτήριο, δηλαδή  $[g_*, g^*]$  αντίστοιχα.
- Ενώ η τελευταία στήλη ορίζει με πόσα διαστήματα θα διακριτοποιηθεί το κάθε κριτήριο.

metatest_siskos_10x6.txt					
1	0	0	110	190	5
2	1	0	15	7	4
3	1	0	13	6	4
4	0	0	3	13	5
5	0	0	5	9	4
6	1	0	80000	20000	5

Σχήμα 5.2: Αρχείο εισόδου δεδομένων σε μορφή \*.txt .

Η προσπέλαση των παραπάνω αρχείων γίνεται με τη συνάρτηση `dlmread` του MATLAB.

## Φίλτρο μεταδεδομένων

Μετά την προσπέλαση των αρχείων εισόδου γίνεται έλεγχος μέσα από τη ρουτίνα **datafilter**. Τα στοιχεία των δεδομένων δεν πρέπει να περιέχουν κενά, ενώ για τα μεταδεδομένα ισχύουν τα εξής:

- Για την πρώτη και τη δεύτερη στήλη οι τιμές 0 μπορούν να παραληφθούν, δηλαδή το μόνο απαραίτητο είναι να επισημανθούν τα κριτήρια με φθίνουσα μονοτονία και τα διακριτά, αντίστοιχα.
- Οι στήλες με το άνω και κάτω όριο του διαστήματος ορισμού του κάθε κριτηρίου είναι επίσης προαιρετικές, αν μείνουν κενές, το διάστημα  $[g_*, g^*]$  υπολογίζεται από τον πολυκριτήριο πίνακα για κάθε κριτήριο ως εξής  $[min(g_i), max(g_i)]$ , αναλόγως τη μονοτονία του κριτηρίου  $i$ .
- Η τελευταία στήλη είναι υποχρεωτική και δεν πρέπει να έχει κενά.

## Δημιουργία πίνακα συντελεστών των βαρών

Στην υπορουτίνα **par-util-construction** υλοποιούνται οι βασικές εξισώσεις 3.7 και 3.19, δηλαδή η δημιουργία των σημείων διακριτοποίησης σε ίσα διαστήματα και η έκφραση της ολικής χρησιμότητας πρώτα σε συνάρτηση των περιθώριων αξιών και σε συνέχεια στα βάρη  $w_{ij}$ . Για να είναι εύκολη η κατασκευή όλων αυτών των μεγεθών από το διάνυσμα λύσης (βλ. Σχήμα (4.2)) υλοποιήθηκε μία υπορουτίνα με την ονομασία **pointers** που ανάλογα σε πιο κριτήριο βρίσκεται ο αλγόριθμος δίνει τους δείκτες αρχής και τέλους στο διάνυσμα λύσης του μεθρευρετικού. Η μοντελοποίηση αυτή στο κώδικα κάνει εύκολη τη μεταφορά της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε γλώσσες προγραμματισμού πιο γρήγορες από το Matlab όπως οι C/C++ που έχουν ενσωματωμένες στη λογική τους τέτοιες διαδικασίες.

Συνοψίζοντας, η **par-util-construction** δέχεται ως είσοδο τα δεδομένα, δηλαδή των πολυκριτήριο πίνακα και τον πίνακα με τα χαρακτηριστικά των κριτηρίων, και με τη βοήθεια της **pointers**, εξάγει τους πίνακες συντελεστών συμμετοχής της περιθώριας αξίας στην ολική χρησιμότητα, των βαρών στην ολική χρησιμότητα και τα διαστήματα διακριτοποίησης. Με αυτά τα δεδομένα κοινά και για τις τρεις μεθόδους.

## 5.3 Τα δεδομένα

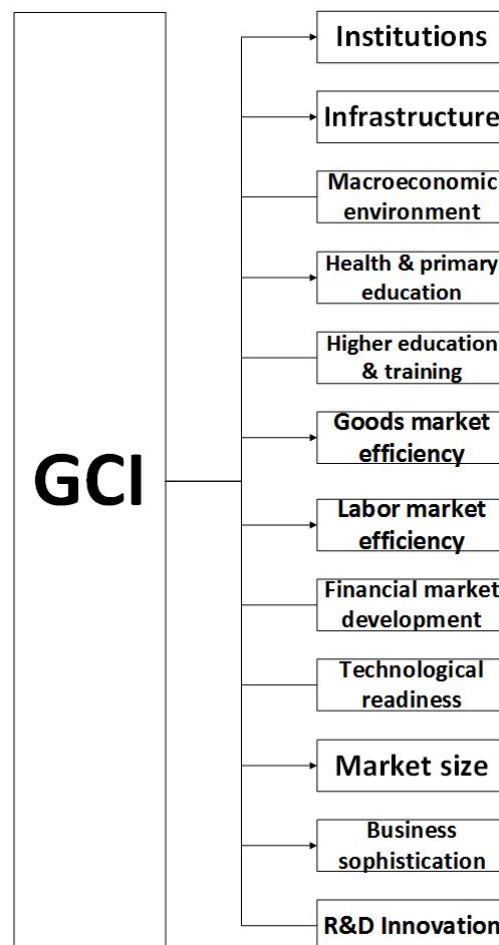
Τα δεδομένα που επιλέχθηκαν για την εφαρμογή της μεθόδου είναι δύο πίνακες κατάταξης χωρών. Ο πίνακας παγκόσμιας κατάταξης ανταγωνισμού χωρών Global Competitiveness Index (GCI) από το Παγκόσμιο Οικονομικό Φόρουμ και ο πίνακας κατάταξης περιβαλλοντικής απόδοσης χωρών Enviromental Perfomance Index (EPI) από το Πανεπιστήμιο

Γέηλ.

Ο λόγος που χρησιμοποιήθηκαν οι συγκεκριμένες συλλογές είναι ότι δεν υπάρχουν εύκολα προσβάσιμα ανοιχτά δεδομένα, και ένα από τα βασικά σημεία της έρευνας αυτής είναι ο έλεγχος της μεθοδολογίας σε μεγάλες συλλογές δεδομένων. Επίσης, οι συγκεκριμένες συλλογές είχαν και την κατάταξη και πολυκριτηριακή μορφή. Στη συνέχεια αναλύεται η κάθε μία ξεχωριστά.

### 5.3.1 Ο πίνακας κατάταξης ανταγωνισμού χωρών (GCI)

Από τον πίνακα (GCI) αφαιρέθηκαν οι χώρες με ελλιπή στοιχεία και δημιουργήθηκε ένα σύνολο δεδομένων από 138 χώρες με τα 12 κριτήρια που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



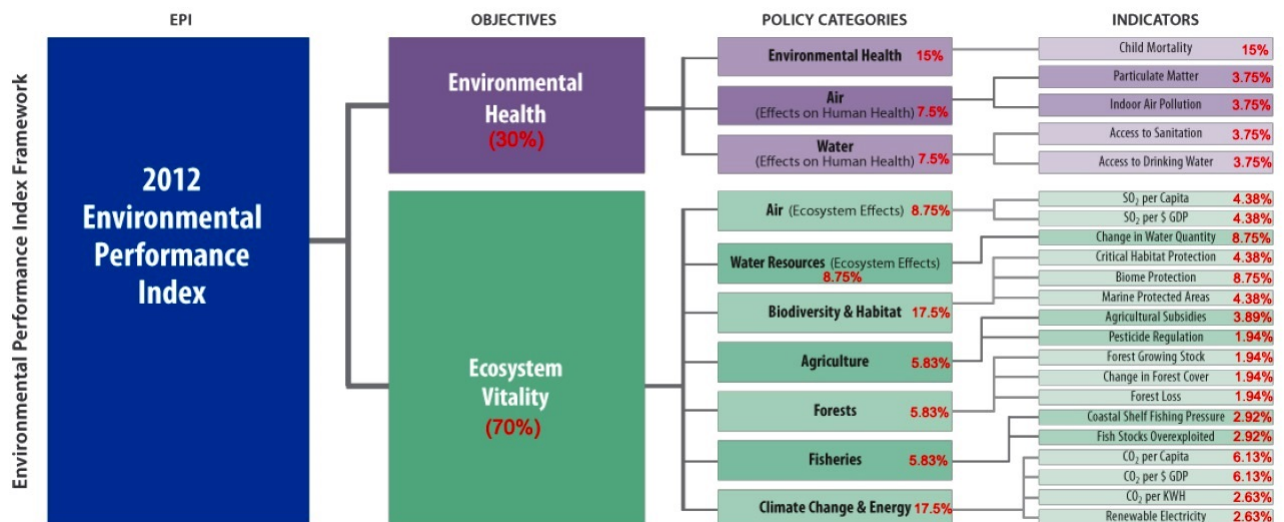
Σχήμα 5.3: Πολιτικές του GCI

### 5.3.2 Ο πίνακας κατάταξης περιβαλλοντικής απόδοσης χωρών (EPI)

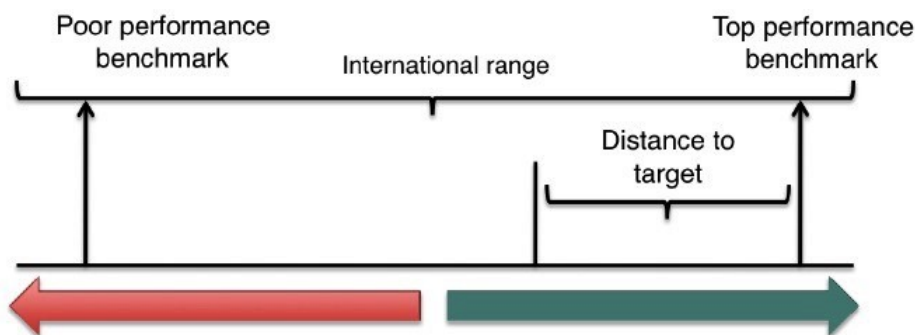
Το EPI του 2012 στηρίζεται σε δύο βασικούς στόχους της περιβαλλοντικής πολιτικής: την Περιβαλλοντική Υγεία, που μετράει περιβαλλοντικές πιέσεις στην ανθρώπινη υγεία και τη Ζωτικότητα των Οικοσυστημάτων, που μετράει την υγεία των οικοσυστημάτων και τη διαχείριση των φυσικών πόρων. Η EPI αξιολογεί τις χώρες πάνω σε 22 δείκτες απόδοσης και έτσι εκτείνει σε δέκα τις πολιτικές που απεικονίζουν τη δημόσια περιβαλλοντική υγεία και τη ζωτικότητα του οικοσυστήματος. Οι πολιτικές αυτές είναι:

- Περιβαλλοντική Υγεία
- Νερό (επιδράσεις στην ανθρώπινη υγεία)
- Ατμοσφαιρική Ρύπανση (επιδράσεις στην ανθρώπινη υγεία)
- Ατμοσφαιρική Ρύπανση (επιδράσεις στο οικοσύστημα)
- Υδάτινοι Πόροι (επιδράσεις στο οικοσύστημα)
- Βιοποικιλότητας και οικότοποι
- Δάση
- Αλιεία
- Γεωργία
- Κλιματική Αλλαγή και Ενέργεια

Κάθε πολιτική αποτελείται από έναν ή περισσότερους περιβαλλοντικούς δείκτες. Ορισμένοι δείκτες αντιπροσωπεύουν άμεσα μέτρα των προβλημάτων των περιοχών, ενώ άλλοι αποτελούν προσεγγιστικά μέτρα που προσφέρουν μια πρόχειρη μέτρηση της προόδου της πολιτικής μέσω της παρακολούθησης συσχετιζόμενων μεταβλητών. Για κάθε χώρα και κάθε δείκτη, υπολογίζεται μια τιμή κοντά στο στόχο με βάση τη διαφορά μεταξύ των σημερινών αποτελεσμάτων μιας χώρας και την πολιτική-στόχο. Από τον πίνακα EPI αφαιρέθηκαν οι χώρες με ελλιπή στοιχεία και δημιουργήθηκε ένα σύνολο δεδομένων από 106 χώρες με τα 10 κριτήρια-πολιτικές που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα. Τα δεδομένα αυτά έχουν χρονικό εύρος από το 2000 έως το 2010.



Σχήμα 5.4: Το Indicator Framework για το 2012 των δεικτών περιβαλλοντικής απόδοσης. Τα ποσοστά δείχνουν τους συντελεστές που χρησιμοποιούνται για aggregation.



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα που απεικονίζει την εγγύτητα ως προς το στόχο της μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δεικτών επίδοσης. ‘Καλύτερα’ και ‘χειρότερα’ είναι σχετικοί όροι και αναφέρονται μόνο στην απόσταση από το στόχο.

Ο γενικός τύπος για τον υπολογισμό του δείκτη εγγύτητας ως προς το στόχο στο πλαίσιο του παγκόσμιου EPI έχει ως εξής:

$$\frac{(internationalrange)-(distancetotarget)}{(internationalrange)} * 100$$

## 5.4 Αποτελέσματα

Τα δεδομένα του GCI χωρίστηκαν σε τυχαία, ίσα διαστήματα και έγινε cross validation όπως περιγράφηκε παραπάνω. Στα δεδομένα του EPI έγινε train για κάθε προηγούμενη χρονιά και με το μοντέλο που εξήχθη έγινε validation για κάθε επόμενη χρονιά.

### 5.4.1 10-fold cross validation

Για το έλεγχο της αποτελεσματικότητας της μεθόδου χρησιμοποιήθηκε 10-fold cross validation διαδικασία, όπως έχει περιγραφεί στην ενότητα (3.7).

Στον παρακάτω πίνακα με  $m$  συμβολίζεται ο αριθμός των εναλλακτικών, με  $n$  συμβολίζεται ο αριθμός των κριτηρίων και με  $a$  συμβολίζεται ο αριθμός διακριτοποίησης των διαστημάτων.

m/n/a		fold	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GCI/138/12/7	Utastar	train	0.9580	0.9536	0.9572	0.9591	0.9544	0.9628	0.9573	0.9569	0.9612	0.9588
		test	0.8974	0.9121	0.8974	0.9780	0.8974	0.7802	0.8901	0.8974	0.9121	0.9560
	DE	train	<b>0.9714</b>	<b>0.9712</b>	<b>0.9726</b>	<b>0.9732</b>	0.9691	0.9751	0.9719	0.9716	<b>0.9738</b>	0.9740
		test	0.9560	0.9560	0.8974	0.9121	0.9780	0.7802	0.8974	0.8974	0.8681	0.9341
	UtastarDE	train	0.9709	0.9698	0.9721	<b>0.9732</b>	<b>0.9704</b>	<b>0.9759</b>	<b>0.9732</b>	<b>0.9726</b>	<b>0.9738</b>	<b>0.9764</b>
		test	0.9780	0.9560	0.8974	0.9121	0.9780	0.7802	0.8681	0.8462	0.8901	0.9341
GCI/138/12/12	Utastar	train	0.9649	0.9643	0.9688	0.9672	0.9630	0.9722	0.9643	0.9662	0.9714	0.9712
		test	0.9560	0.9121	0.8974	0.9780	1.0000	0.7582	0.8681	0.9231	0.8681	0.8901
	DE	train	0.9756	0.9769	0.9750	<b>0.9774</b>	0.9751	0.9809	<b>0.9785</b>	0.9773	0.9790	0.9824
		test	0.9780	0.8901	0.9231	0.9341	1.0000	0.8022	0.8681	0.8974	0.8901	0.8901
	UtastarDE	train	<b>0.9772</b>	<b>0.9780</b>	<b>0.9791</b>	0.9772	<b>0.9764</b>	<b>0.9843</b>	0.9767	<b>0.9783</b>	<b>0.9830</b>	<b>0.9830</b>
		test	1.0000	0.8901	0.8974	0.9780	1.0000	0.8242	0.8681	0.8718	0.8901	0.8901

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα διαδικασίας 10-fold cross validation στα δεδομένα του GCI για 12 κριτήρια.

Παρατηρείται ότι η προτεινόμενη μέθοδος έχει καλύτερα αποτελέσματα από τη UTA-STAR. Όταν αυξάνεται ο αριθμός των διαστημάτων, φαίνεται ότι η υβριδική τεχνική δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

m/n/a		fold	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GCI/138/22/7	Utastar	train	0.9706	0.9727	0.9685	0.9753	0.9664	0.9788	0.9743	0.9703	0.9712	0.9712
		test	0.9560	0.8462	0.8974	0.9560	0.9560	0.7802	0.8242	0.9231	0.8681	0.9121
	DE	train	<b>0.9814</b>	0.9785	0.9804	0.9843	<b>0.9780</b>	0.9835	0.9816	0.9806	0.9814	0.9803
		test	0.9560	0.9121	0.8974	0.9560	1.0000	0.8242	0.8242	0.9487	0.8022	0.8462
	UtastarDE	train	0.9809	<b>0.9827</b>	<b>0.9809</b>	<b>0.9874</b>	0.9772	<b>0.9853</b>	<b>0.9830</b>	<b>0.9835</b>	<b>0.9858</b>	<b>0.9806</b>
		test	0.9560	0.8901	0.8718	0.9121	0.9780	0.8681	0.8462	0.8974	0.8681	0.9341
GCI/138/22/12	Utastar	train	0.9955	0.9921	0.9935	0.9997	0.9879	0.9966	0.9940	0.9894	0.9937	0.9942
		test	0.8901	0.8901	0.9231	0.8901	1.0000	0.8022	0.9341	0.8974	0.8022	0.8462
	DE	train	0.9895	0.9874	0.9879	0.9887	0.9885	0.9885	0.9858	0.9863	0.9900	0.9879
		test	0.9560	0.9341	0.9231	0.9121	0.9780	0.7802	0.8901	0.9231	0.9341	0.8901
	UtastarDE	train	<b>0.9961</b>	<b>0.9953</b>	<b>0.9956</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.9921</b>	<b>0.9976</b>	<b>0.9969</b>	<b>0.9948</b>	<b>0.9958</b>	<b>0.9958</b>
		test	0.8901	0.8681	0.8974	0.8901	1.0000	0.8022	0.9121	0.8974	0.7802	0.8462

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα διαδικασίας 10-fold cross validation στα δεδομένα του GCI για 22 κριτήρια.

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, για μεγαλύτερο αριθμό κριτηρίων, υπερέχει η υβριδική μέθοδος.

### 5.4.2 Χρονική μετακύλιση

Στα δεδομένα του EPI εφαρμόστηκε χρονική μετακύλιση. Παρατηρείται ότι η υβριδική μέθοδος υπερέχει και εδώ.

m/n/a		year	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
EPI/106/10/5	Utastar	train	0.9644	0.9612	0.9626	0.9687	0.9687	0.9723	0.9659	0.9712	0.9716	0.9730	–
		test	–	0.9526	0.9558	0.9572	0.9619	0.9666	0.9612	0.9666	0.9677	0.9655	0.9684
	DE	train	0.9795	0.9745	0.9792	0.9810	0.9838	0.9799	0.9792	0.9810	0.9820	0.9845	–
		test	–	0.9587	0.9576	0.9619	0.9655	0.9644	0.9601	0.9644	0.9705	0.9698	0.9756
	UtastarDE	train	0.9792	0.9752	0.9777	0.9799	0.9842	0.9824	0.9770	0.9802	0.9824	0.9849	–
		test	–	0.9590	0.9547	0.9605	0.9633	0.9669	0.9587	0.9684	0.9705	0.9723	0.9795

Πίνακας 5.3: Χρονική μετακύλιση στα δεδομένα του EPI .

### 5.4.3 Εφαρμογή στον GCI και εξαγωγή μοντέλου.

Η εφαρμογή έγινε στα δεδομένα για 138 χώρες με 12 κριτήρια.

Το μοντέλο από τη Utastar :

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{x}) = & 0.2056u_1(g_1) + 0.0732u_2(g_2) + 0.1225u_3(g_3) + 0.0958u_4(g_4) \\
& + 0.0556u_5(g_5) + 0.0737u_6(g_6) + 0.0675u_7(g_7) + 0.0291u_8(g_8) \\
& + 0.0253u_9(g_9) + 0.1090u_{10}(g_{10}) + 0.0663u_{11}(g_{11}) + 0.0762u_{12}(g_{12})
\end{aligned}$$

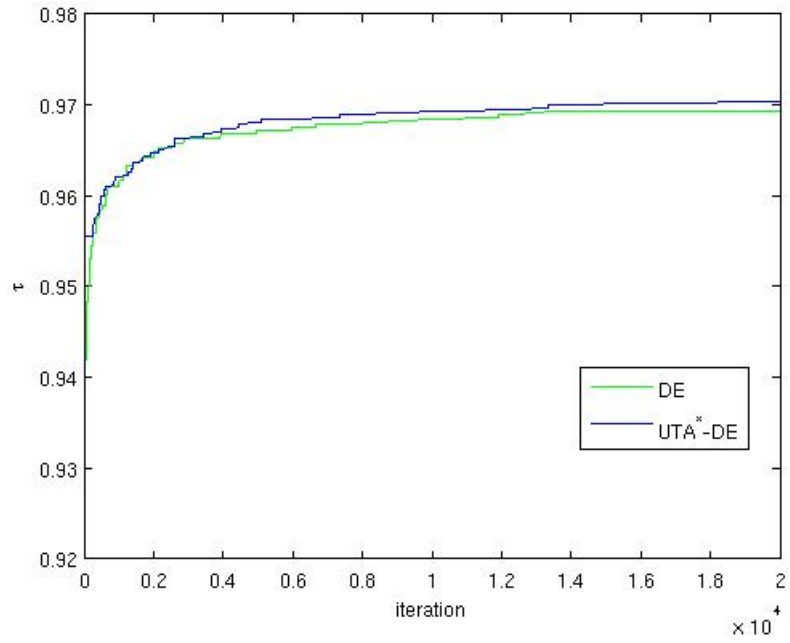
Το μοντέλο από τη ΔΕ:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{x}) = & 0.0740u_1(g_1) + 0.0646u_2(g_2) + 0.1410u_3(g_3) + 0.0659u_4(g_4) \\
& + 0.0969u_5(g_5) + 0.1195u_6(g_6) + 0.0953u_7(g_7) + 0.0505u_8(g_8) \\
& + 0.0337u_9(g_9) + 0.0621u_{10}(g_{10}) + 0.0853u_{11}(g_{11}) + 0.1112u_{12}(g_{12})
\end{aligned}$$

Το μοντέλο από τη UtastarDE:

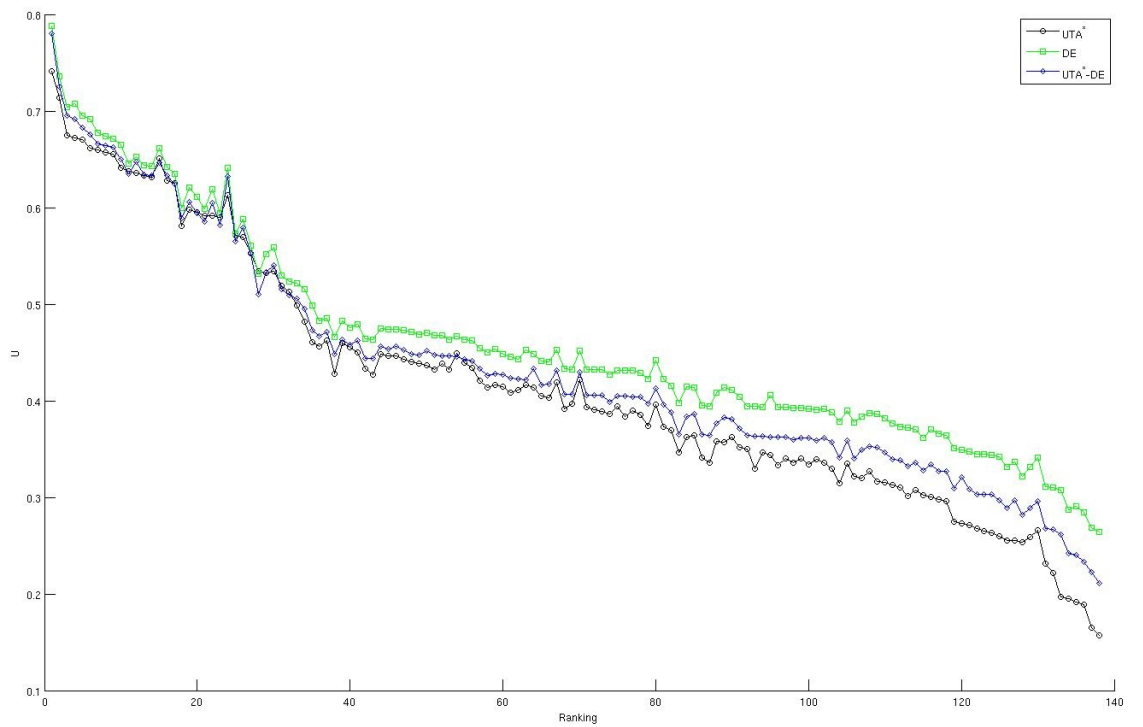
$$\begin{aligned}
U(\mathbf{x}) = & 0.0823u_1(g_1) + 0.0762u_2(g_2) + 0.1323u_3(g_3) + 0.0667u_4(g_4) \\
& + 0.1112u_5(g_5) + 0.0797u_6(g_6) + 0.0851u_7(g_7) + 0.0663u_8(g_8) \\
& + 0.0378u_9(g_9) + 0.0626u_{10}(g_{10}) + 0.0943u_{11}(g_{11}) + 0.1055u_{12}(g_{12})
\end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ταχύτητα σύγκλισης.

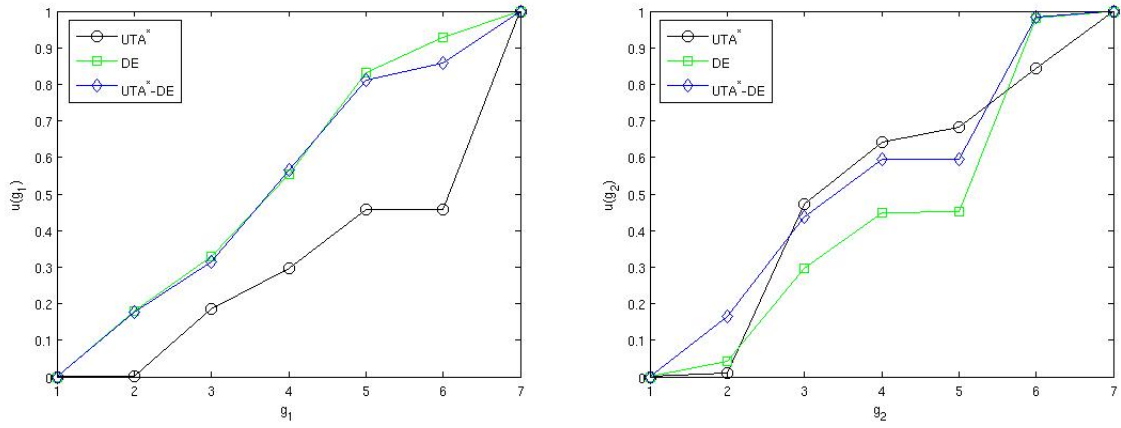


Σχήμα 5.6: Διάγραμμα Σύγκλισης.

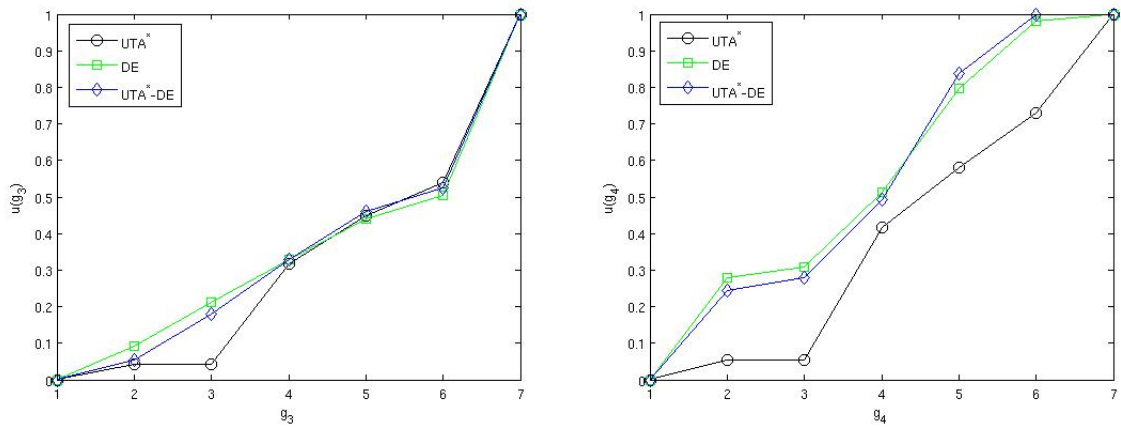
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κατάταξη για τις τρεις μεθόδους.



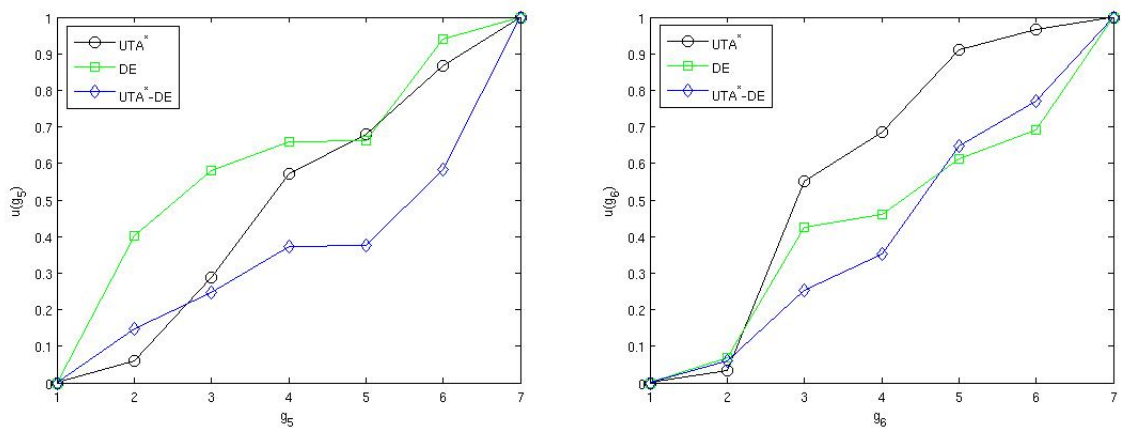
Σχήμα 5.7: Η κατάταξη.



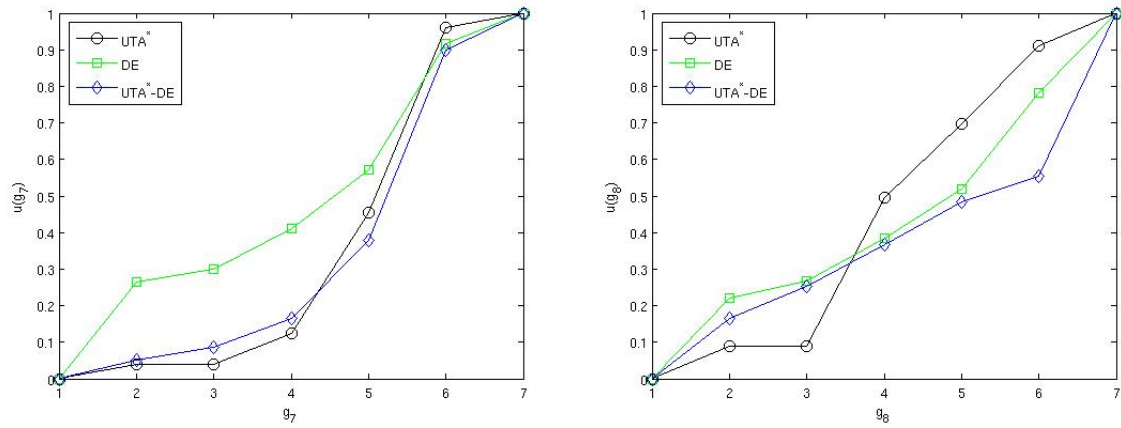
Σχήμα 5.8



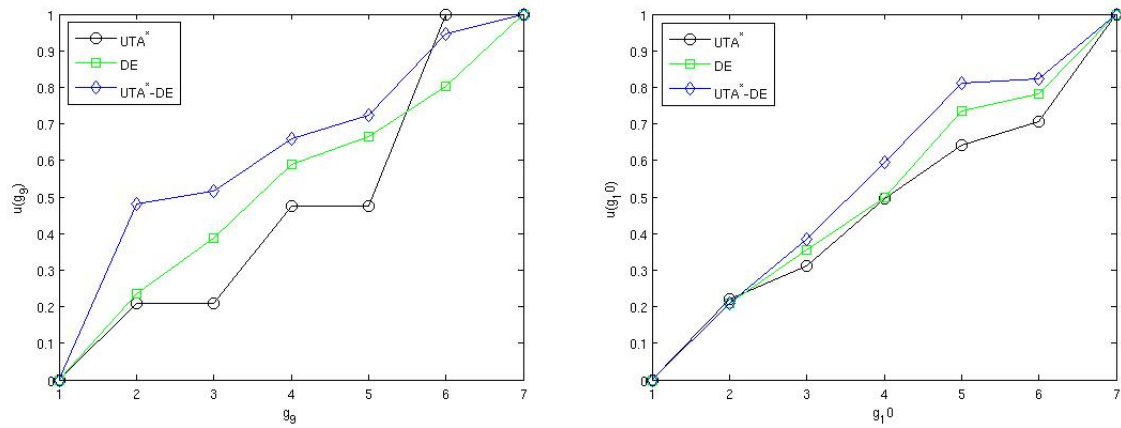
Σχήμα 5.9



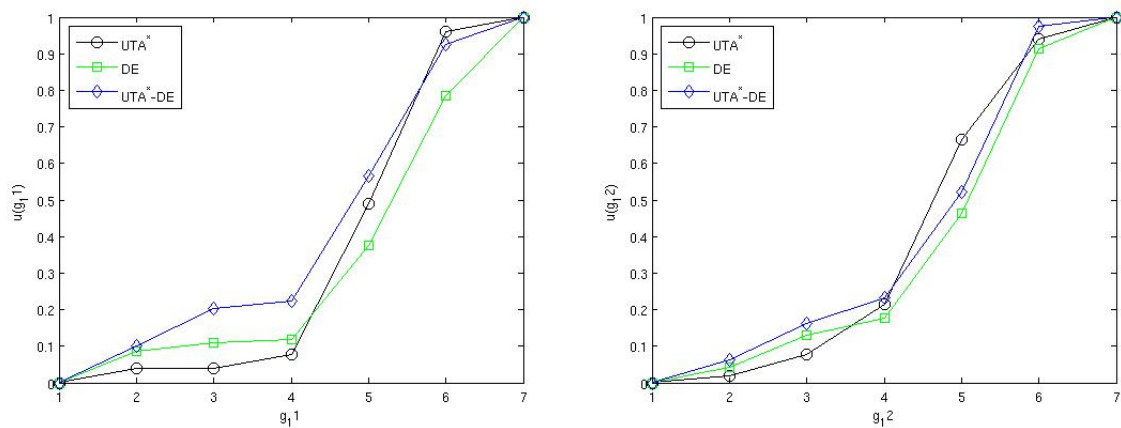
Σχήμα 5.10



Σχήμα 5.11



Σχήμα 5.12



Σχήμα 5.13

#### 5.4.4 Εφαρμογή στον ΕΠΙ και εξαγωγή μοντέλου.

Η εφαρμογή έγινε στα δεδομένα για 106 χώρες με 10 κριτήρια.

Το μοντέλο από τη Utastar :

$$\begin{aligned}U(\mathbf{x}) = & 0.1424u_1(g_1) + 0.0909u_2(g_2) + 0.0814u_3(g_3) + 0.1868u_4(g_4) \\ & + 0.0518u_5(g_5) + 0.0910u_6(g_6) + 0.0418u_7(x_7) + 0.0728u_8(g_8) \\ & + 0.0533u_9(g_9) + 0.1878u_{10}(g_{10})\end{aligned}$$

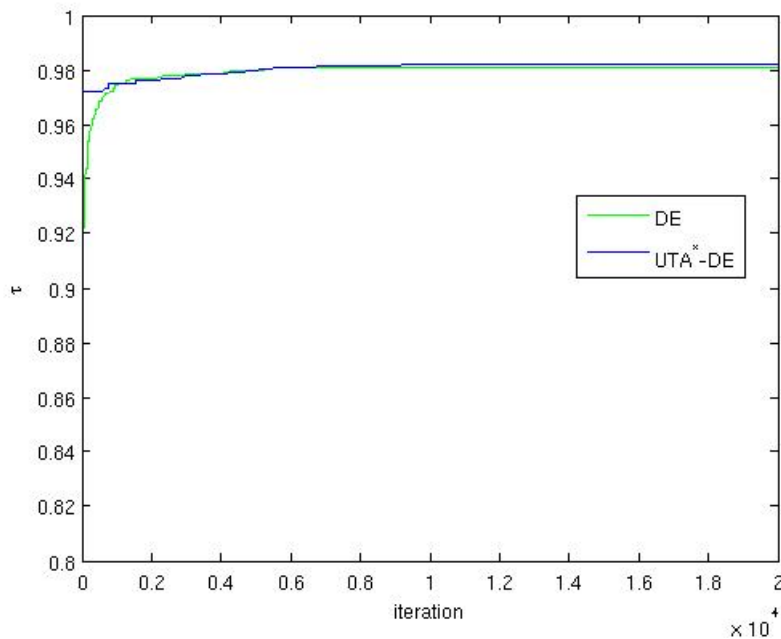
Το μοντέλο από τη DE :

$$\begin{aligned}U(\mathbf{x}) = & 0.1355u_1(g_1) + 0.0875u_2(g_2) + 0.0925u_3(g_3) + 0.1891u_4(g_4) \\ & + 0.0590u_5(g_5) + 0.0799u_6(g_6) + 0.0366u_7(x_7) + 0.0819u_8(g_8) \\ & + 0.0593u_9(g_9) + 0.1788u_{10}(g_{10})\end{aligned}$$

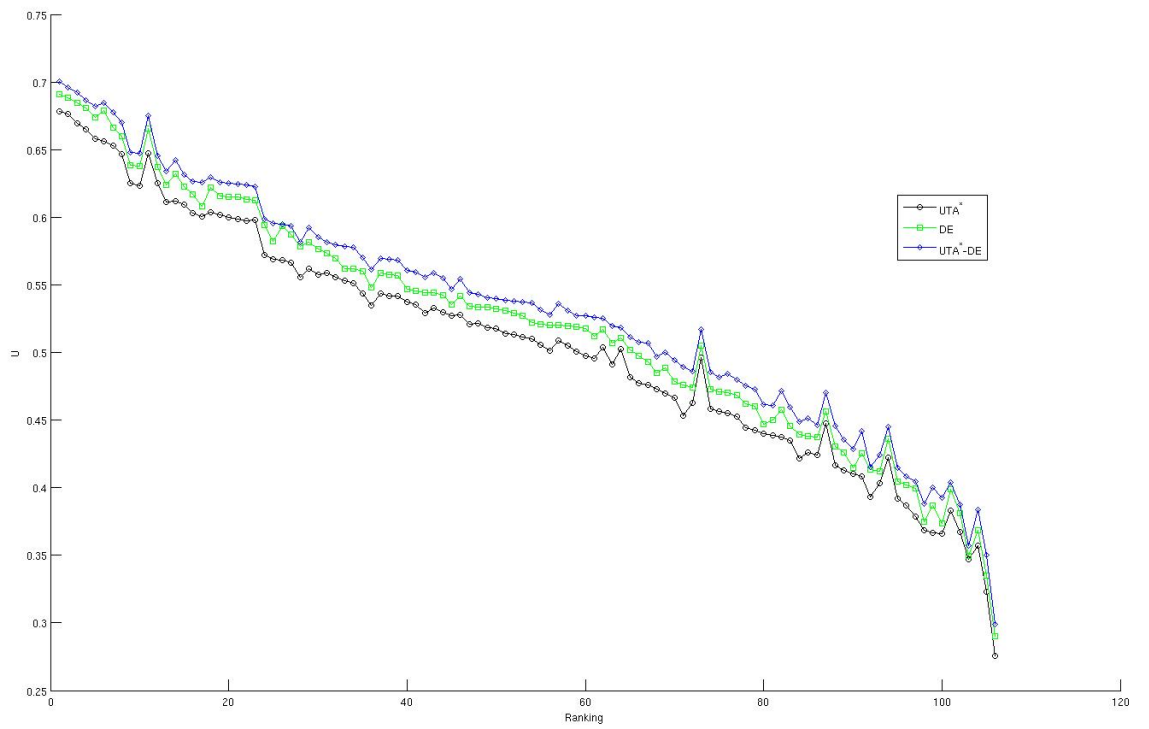
Το μοντέλο από τη UtastarDE :

$$\begin{aligned}U(\mathbf{x}) = & 0.1356u_1(g_1) + 0.0927u_2(g_2) + 0.0860u_3(g_3) + 0.1837u_4(g_4) \\ & + 0.0711u_5(g_5) + 0.0875u_6(g_6) + 0.0384u_7(x_7) + 0.0656u_8(g_8) \\ & + 0.0546u_9(g_9) + 0.1847u_{10}(g_{10})\end{aligned}$$

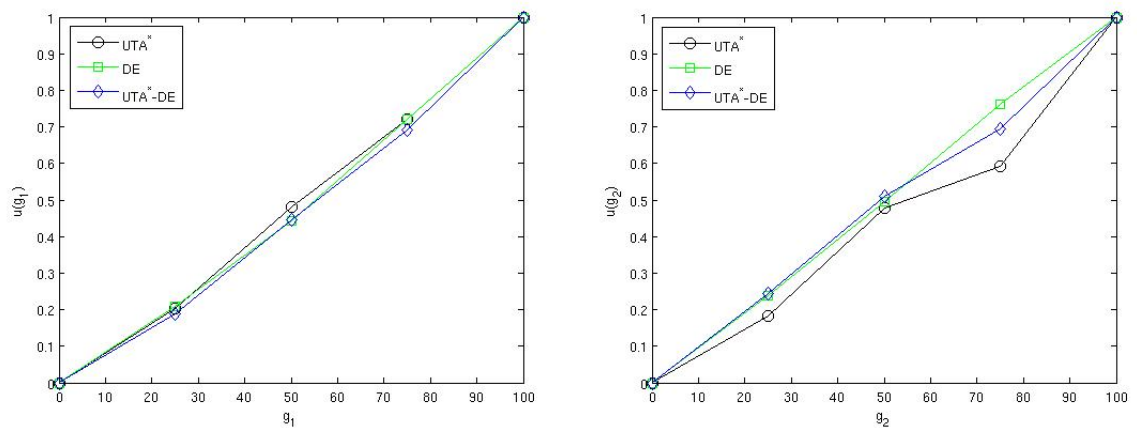
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η ταχύτητα σύγκλισης.



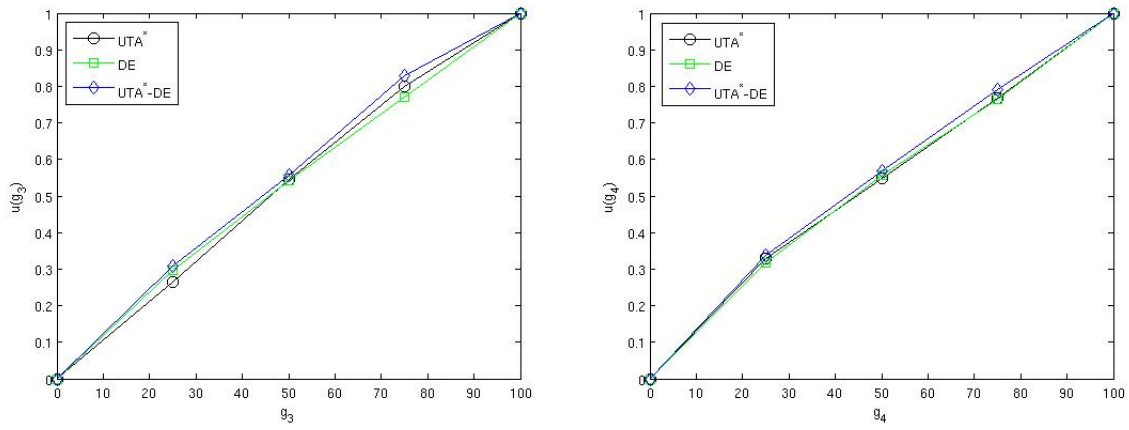
Σχήμα 5.14: Διάγραμμα Σύγκλισης.



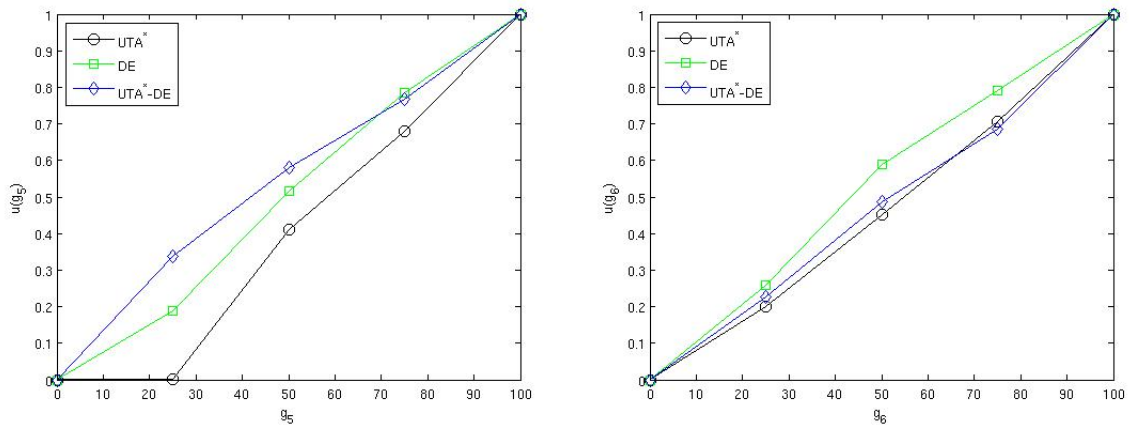
Σχήμα 5.15: Η κατάταξη.



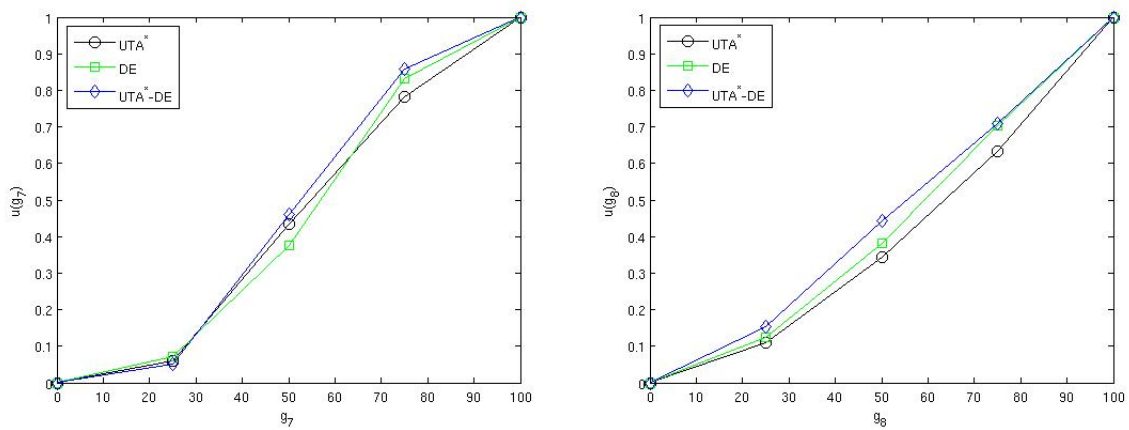
Σχήμα 5.16



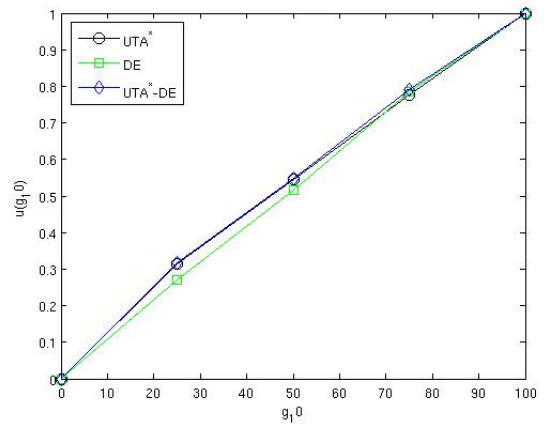
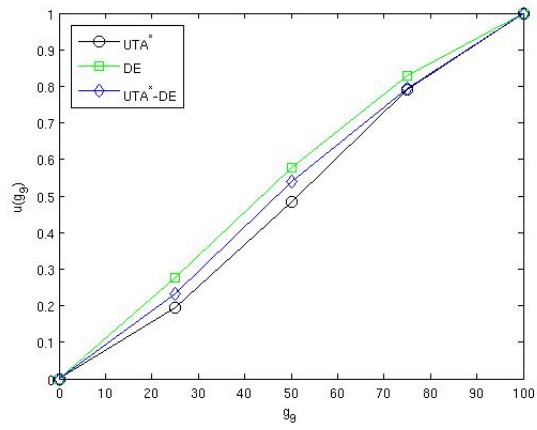
Σχήμα 5.17



Σχήμα 5.18



Σχήμα 5.19



Σχήμα 5.20



## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα και Μελλοντικές προεκτάσεις

---

Η εργασία πέτυχε το σκοπό της, που ήταν να δημιουργηθεί μια πολυκριτήρια μέθοδος για προβλήματα μονότονης παλινδρόμησης με χρήση μειθευρετικών αλγόριθμων που να βελτιστοποιεί το  $\tau$  kendall.

Τα πρώτα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά για τη συνέχιση της έρευνας. Η μέθοδος πρέπει να αξιολογηθεί με πιο δύσκολα προβλήματα από αυτά που επιλύθηκαν στη παρούσα διατριβή.



# Βιβλιογραφία

- Clerc, M., Kennedy, J., 2002. The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on* 6 (1), 58–73.
- Eberhart, R., Shi, Y., 1998. Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization. In: Porto, V., Saravanan, N., Waagen, D., Eiben, A. (Eds.), *Evolutionary Programming VII*. Vol. 1447 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 611–616.
- Eberhart, R., Simpson, P., Dobbins, R., 1996. *Computational intelligence PC tools*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA.
- Fishburn, P., 1966. A note on recent developments in additive utility theories for multiple-factor situations 14 (6), 1143–1148.
- Jacquet-Lagrange, E., Siskos, Y., 1982. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the uta method. *European Journal of Operational Research* 10 (2), 151 – 164.
- Keeney, R., Raiffa, H., 1976. *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*. J. Wiley, New York.
- Kennedy, J., Eberhart, R., 1995. Particle swarm optimization. In: *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*. Vol. 4. pp. 1942–1948 vol.4.
- Michalewicz, Z., Schoenauer, M., 1996. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation* 4, 1–32.
- Poli, R., Jan. 2008. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation. *J. Artif. Evol. App.* 2008, 3:1–3:10.
- Poli, R., Kennedy, J., Blackwell, T., 2007. Particle swarm optimization. *Swarm Intelligence* 1 (1), 33–57.

- Price, K., Storn, R. M., Lampinen, J. A., 2005. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization (Natural Computing Series)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- Shi, Y., Eberhart, R., 1998a. A modified particle swarm optimizer. In: *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence.*, The 1998 IEEE International Conference on. pp. 69–73.
- Shi, Y., Eberhart, R., 1998b. Parameter selection in particle swarm optimization. In: Porto, V., Saravanan, N., Waagen, D., Eiben, A. (Eds.), *Evolutionary Programming VII*. Vol. 1447 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 591–600.
- Siskos, Y., Grigoroudis, E., 2010. New trends in aggregation-disaggregation approaches. In: Zopounidis, C., Pardalos, P. M. (Eds.), *Handbook of Multicriteria Analysis*. Vol. 103 of *Applied Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 189–214.
- Siskos, Y., Grigoroudis, E., Matsatsinis, N., 2005. Uta methods. In: *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Vol. 78 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer New York, pp. 297–334.
- Siskos, Y., Yanacopoulos, D., 1985. Utastar - an ordinal regression method for building additive value functions. *Investigacao Operational* 5, 39–53.
- Solis, F. J., Wets, R. J.-B., 1981. Minimization by random search techniques. *Mathematics of Operations Research* 6 (1), 19–30.
- Stone, M., 1974. Cross-validation and multinomial prediction. *Biometrika* 61 (3), 509–515.
- Storn, R., Price, K., 1997. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization* 11 (4), 341–359.
- Suganthan, P., 1999. Particle swarm optimiser with neighbourhood operator. In: *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*. Vol. 3. pp. –1962 Vol. 3.
- Van Den Bergh, F., 2002. An analysis of particle swarm optimizers. Ph.D. thesis, Pretoria, South Africa, South Africa, aAI0804353.