ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Πραγματικά και Διανυσματικά Martingales

ΚΥΡΙΑΚΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ

Επιβλέπων: Αναπληρωτής Καθηγητής Πετράκης Μίνως

Χανιά

Μάιος 2025

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή:

Στην εργασία αυτή μελετούμε (διακριτά) martingales με τιμές σε ένα χώρο με νόρμα X.

Δίνουμε διαφορετική απόδειξη ειδικής περίπτωσης Θεωρήματος στο [GJ]

Αποδεικνύουμε το εξής θεώρημα: Αν $(\xi_n, \Sigma_n), \xi_n: [0,1] \to X$ είναι ένα martingale που δεν είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis τότε υπάρχει τελεστής $S: X \to c_0$ έτσι ώστε το martingale $S(\xi_n)$ να μην είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.

Στη γλώσσα των τελεστών το παραπάνω θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Αν $T: L^1 \to X$ είναι ένας τελεστής που δεν είναι Dunford-Pettis τότε $\exists$ τελεστής $S: X \to c_0$ έτσι ώστε ο τελεστής $ST: L^1 \to c_0$ να μην είναι D-P.

Επομένως παραθέτουμε γνωστά θεωρήματα από την θεωρία χώρων με νόρμα σχετικά με την ιδιότητα Radon – Nikodym (RNP).

Ορισμός 1

Έστω (Ω, Σ, λ) είναι χώρος πιθανότητας και X ένας χώρος Banach και ορίζουμε ως (Ω, Σ', P') τη πλήρωση του. Μια συνάρτηση s: Ω→X είναι μια απλή συνάρτηση αν η s μπορεί να γραφεί στη μορφή $\sum_{i=1}^{n} xiXAi$ για διακεκριμένα xi ∈ X , i = 1,…,n και για πεπερασμένη διαμέριση $\{A_i\}_{i=1}$ ∈ Σ του Ω. Για κάθε A ∈ Σ και για κάθε απλή συνάρτηση s ορίζουμε το Bochner ολοκλήρωμα της s πάνω στο A ως $\int_A sdP \; = \int \; \sum_{i=1}^{n} x_i X_{Ai} dP$

Γενικά μία συνάρτηση $f: \Omega \to X$ *καλείτε μετρήσιμη εάν υπάρχει μια ακολουθία απλών συναρτήσεων* $\{s_n: n = 1,2, \ldots\}$ *έτσι ώστε* $\lim_n \|s_n - f\| = 0$ *λ- σχεδόν παντού.*

Εάν η συνάρτηση:

$f: \Omega \to X$ *είναι μετρήσιμη και υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων* $(Sn)\ n \in \mathbb{N}$

Έτσι ώστε $\lim_n \int_\Omega \|s_n - f\| d\lambda = 0$ *τότε η f καλείται Bochner ολοκληρώσιμη. Σ' αυτή την περίπτωση το* $\int_E f d\lambda$ *ορίζεται* $\forall\ E \in \Sigma$ *σαν το όριο* $\lim_n \int_E s_n d\lambda$

<u>**Θεώρημα:**</u> *Έστω* $f: \Omega \to X$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι Bochner μετρήσιμη ανν* $\int_\Omega \| f \| \, d\lambda < \infty$.

Με $L_x^1(\lambda)$ *συμβολίζουμε τον χώρο Banach όλων των Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με νόρμα* $\|f\|_{L^1 x} = \int_\Omega \| f \| \, d\lambda$.

1. *Έστω* $(fn)\ n \in \mathbb{N}$ *μια ακολουθία από Bochner ολοκληρώσιμες συναρτήσεις* $f_n: \Omega \to x$. *Εάν* $\lim_n f_n = f$ *στο λ- μέτρο (δηλαδή εάν* $\lim_n \lambda(\{w \in \Omega: \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$ *)*

   και αν υπάρχει πραγματική Lebescue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g: \Omega \to \mathbb{R}$ *έτσι ώστε*

   $\|f_h\| \leq g$ *λ- σχεδόν παντού, τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη και*

   $\lim_h \int_E f_n d\lambda = \int_E f d\lambda \quad \forall \quad E \in \Sigma$.

2. *Εάν* $f \in L_x^1$ *τότε* $\left\|\int_E f d\lambda\right\| \leq \int_E \|f\| d\lambda \quad \forall \quad E \in \Sigma$.

3. *Εάν f,g* $\in L_x^1$ *και* $\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda \ \ \forall E \in \Sigma$ *τότε f=g λ- σχεδόν παντού.*

4. *Εάν* $f: [0,1] \to x$ *είναι Bochner ολοκληρώσιμη τότε για όλα σχεδόν τα* $s \in [0,1]$ *έχουμε* $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| \ \mathrm{dt} = 0$.

   Επίσης για όλα σχεδόν τα s έχουμε $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t)\mathrm{dt} = f(s)$.

5. *Έστω T ένας κλειστός τελεστής από τον χώρο Banach x στον χώρο Banach y. Εάν η* $f: \Omega \to x$ *και η* $Tf: \Omega \to y$ *είναι Bochner ολοκληρώσιμες τότε* $T\left(\int_E f d\lambda\right) = \int_E (Tf)\, d\lambda$.

6. *Εάν* $f \in L_x^1$ *και* $E \in \Sigma, \lambda(E) > 0$ *τότε* $\frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \in \overline{co}$ *(f(E)).*

Θεώρημα Μετρησιμότητας του Pettis

Έστω $f: \Omega \to x$ *μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι μετρήσιμη.*

2. $\forall \ x^* \in X^*$ *η πραγματική συνάρτηση* $x^* f: \Omega \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη και υπάρχει* $E \in \Sigma$, $\lambda(E) = 0$ *έτσι ώστε το σύνολο* $f(\Omega \backslash E)$ *είναι (norm) διαχωρίσιμη υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: $(1 \Rightarrow 2)$ *Ας υποθέσουμε ότι η* $f: \Omega \to x$ *είναι μετρήσιμη. Από το θεώρημα του Egoroff μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία* (f_n) *απλών συναρτήσεων έτσι ώστε* $\lim_n \|f_n - f\| = 0 \ \ \lambda -$ *σχεδόν ομοιόμορφα. Δηλαδή για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει ένα σύνολο* $E_n \in \Sigma$ *έτσι ώστε* $\lambda(E_n) < \frac{1}{n}$ *και*

$lim f_n = f$ *ομοιόμορφα στο* $\Omega \backslash E_n$. *Κάθε συνάρτηση* f_n *έχει πεδίο τιμών ένα φραγμένο υποσύνολο κάποιου υποχώρου του* X *που είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως το σύνολο* $f(\Omega \backslash E_n)$ *είναι ολικά φραγμένο (*totally bounded*) και διαχωρίσιμο. Το σύνολο*

$$f\left(\bigcup_{\eta=1}^{\infty}(\Omega \backslash En)\right) = \bigcup_{\eta=1}^{\infty} f(\Omega \backslash En)$$

είναι φανερό ότι είναι διαχωρίσιμο. Παρατηρούμε επίσης ότι το σύνολο

$$\frac{\Omega}{\bigcup_{\eta=1}^{\infty}(\Omega \backslash En)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

έχει $\lambda -$ *μέτρο μηδέν αφού* $\lambda(E_n) < \frac{1}{n}$. *Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι υπάρχει σύνολο* $E,\ \lambda(E) = 0$ *έτσι ώστε το σύνολο* $f(\Omega \backslash E)$ *είναι διαχωρίσιμο.*

Εάν $x^* \in X^*$ *τότε η συνάρτηση* $x^* f_n$ *είναι απλή αφού η* f_n *είναι απλή. Γνωρίζουμε ότι* $f_n(\omega) \to f(\omega)$ *για όλα σχεδόν τα* $\omega \in \Omega$ *. Επομένως* $x^* f_n(\omega) \to x^* f(\omega)$ *για όλα σχεδόν τα* $\omega \in \Omega$. *Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση* $x^* f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *είναι μετρήσιμη.*

$(2 \Rightarrow 1)$*: Έστω* $E \in \Sigma$, *με* $\lambda(E) = 0$ *και* $f(\Omega \backslash E)$ *διαχωρίσιμο υποσύνολο του* X. *Έστω* $\{x_n\}$ *ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του* $f(\Omega \backslash E)$. *Με την βοήθεια του θεωρήματος Hahn – Banach μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία* $\{x_n^*\}$ *συναρτησοειδών στον* X^* *έτσι ώστε* $x_n^*\{x_n\} = \|x_n\|$ *και* $\|x_n^*\| = 1$.

Εάν $\omega \in \Omega \backslash E$ *τότε* $\|f(\omega)\| = \sup_n |x_n^*\, f(\omega)|$. *Επομένως η συνάρτηση* $\|f(\cdot)\|$ *είναι μετρήσιμη. Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *η πραγματική συνάρτηση* $x = \|f(\cdot) - x_n\|$ *είναι μετρήσιμη.*

Έστω $\varepsilon > 0$. *Θεωρούμε τα σύνολα* $E_n = \{\omega \in \Omega \colon g_n(\omega) < \varepsilon\}$. *Εάν το μέτρο* λ *είναι πλήρες τότε κάθε* E_n *ανήκει στην Σ. Σε κάθε περίπτωση* $\exists Bn \in \Sigma$ *με* $\lambda(B_n \Delta E_n) = 0$. *Ορίζουμε την συνάρτηση* $g \colon \Omega \to X$ *ως εξής* $g(\omega) = x_n$ *εάν* $\omega \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m = 0$ *εάν* $w \notin Bn$.

Παρατηρούμε ότι $\|g(\omega) - f(\omega)\| < \varepsilon$ *για όλα σχεδόν το* $\omega \in \Omega$. *Δηλαδή η* f *μπορεί να προσεγγισθεί από μια συνάρτηση* g *που παίρνει αριθμήσιμο το πλήθος τιμών. Εάν πάρουμε* $\varepsilon = \frac{1}{n}$ *είναι φανερό ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία* $(g'n)$ *από συναρτήσεις που παίρνουν αριθμίσιμες το πλήθος τιμές και* $\|g'n - f\| < \frac{1}{n}$ *σχεδόν παντού.*

Κάθε $g'n$ *έχει την μορφή* $g'n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} X_{En,m}$ *με* $E_{n,i} \cap E_{n,j} = 0$ *εάν* $i \neq j$ *και*

$E_{n,m} \in \Sigma$. *Επειδή το μέτρο* λ *είναι πεπερασμένο είναι δυνατό να ''κόψουμε'' λίγο τις* $g'n$ *και να ορίσουμε μια ακολουθία* (f_n) *από απλές συναρτήσεις που να συγκλίνουν σχεδόν παντού στη* f. *Αυτό σημαίνει ότι η* f *είναι μετρήσιμη.*

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο, Σ ένα σ-άλγεβρα υποσύνολο του Ω και X ένας χώρος Banach.

Ορισμός: *Η απεικόνιση* $\vec{\mu} \colon \Sigma \to X$ *καλείται διανυσματικό μέτρο (vector measure) εάν*

$$\vec{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \vec{\mu}(A_n) \text{ για κάθε ακολουθία } (A_n)_n \in \mathbb{N}$$

ξένων συνόλων από την σ-άλγεβρα Σ.

Παρατήρηση: *Είναι φανερό ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(A_n)$ *όχι μόνο συγλίνει αλλά και κάθε αναδιάταξη των όρων της δίδει συγλίνουσα σειρά εάν το* $\vec{\mu}$ *είναι διανυσματικό μέτρο.*

Η κύμανση (variation) ενός διανυσματικού μέτρου $\vec{\mu}$ *είναι η (επεκτεταμένη πραγματική) συνάρτηση* $\left|\vec{\mu}\right| : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ *της οποίας η τιμή σ' ένα σύνολο* $E \in \Sigma$ *είναι* $\left|\vec{\mu}\right|(E) = \underset{\pi}{Sup} \sum_{A \in \pi} \left\|\vec{\mu}(A)\right\|$ *όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του Ε σε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανα δυο στοιχείων από την Σ.*

Εάν $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ *είναι ένας χώρος πιθανότητας, Χ ένας χώρος Banach και* $f \in L_x^1(\lambda)$ *μια Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu}: \Sigma \rightarrow X$ *ως εξής:*

$\vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda, \; E \in \Sigma.$

Το ότι το $\vec{\mu}$ *είναι αριθμήσιμο προσθετικό χρειάζεται απόδειξη (εάν* $E = \underset{n}{U} E_n$*)* $n \in N$ *ακολουθία ξένων ανά δυο συνόλων από τη Σ ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{En} f d\lambda$ *συγκλίνει απολύτως διότι κυριαρχείται από την συγκλίνουσα σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{En} \|f\| d\lambda$*. Παρατηρούμε ότι:*

$\| \int_{\underset{U}{\infty} En} f d\lambda - \sum_{n=1}^{m} \int_{En} f d\lambda \| = \| \int_{\underset{U}{\infty} En} f d\lambda \|$. Είναι φανερό ότι $\lim_{m} \lambda \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n \right) = 0$ και επομένως $\lim_{m} \| \int_{\underset{n=m+1}{\overset{\infty}{U}} En} f d\lambda \| = 0 \Rightarrow$

$\int_{\underset{n=1}{\overset{\infty}{U}} En} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{En} f d\lambda.$

Αυτό σημαίνει ότι $\vec{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\mu}(E_n)$.

Το μέτρο $\vec{\mu}$*,* $\vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda$ *είναι φραγμένης κύμανσης (Bounded Variation) και απολύτως συνεχές ως προς το λ (δηλαδή εάν* $E \in \Sigma$ *και* $\lambda(E) = 0$ *τότε* $\left|\vec{\mu}\right|(E) = 0$*). Κάθε διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu}$ *που* *είναι φραγμένης κύμανσης και είναι απολύτως συνεχές ως προς λ* <u>*δεν*</u> *προέρχεται από μια* Bochner *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Παράδειγμα της πρότασης αυτής είναι: Έστω* $(\Omega, \Sigma, \lambda) \equiv ([0,1],$ $Lebesgue$ *μετρήσιμα σύνολα,* $Lebesgue$ *μέτρο). Έστω* X *ο* Banach *χώρος* $L^1[0,1]$. *Θεωρούμε το διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu}$: $\Sigma \to L^1[0,1]$ *που ορίζεται ως εξής* $\vec{\mu}(A) = X_A, \quad \forall \ A \in \Sigma$. *Επομένως μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το* $\vec{\mu}$ *είναι ένα διανυσματικό μέτρο πεπερασμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς* λ.

[RB]*Ας υποθέσουμε ότι* $\exists \ \ f \in L^1_{L^1}(\lambda)$ *έτσι ώστε* $\vec{\mu}(A) = \int_A f d\lambda$. *Άτοπο!*

Έστω $F \in L^\infty[0,1] = (L^1[0,1])^*$ *επομένως*

$\int_A \big(F, f(t)\big) d\lambda(t) = (F, \int_A f(t)) d\lambda(t)) = (F, X_A) = \int_A F(t)) d\lambda(t)$. *Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα σύνολο* $A(F) \in \Sigma$ *με* $\lambda\big(A(F)\big) = 0$ *έτσι ώστε*

$\big(F, f(t)\big) = F(t) \ \forall \ \ t \in [0,1] \backslash A(F)$.

Έστω (I_n) *η ακολουθία όλων των υποδιαστημάτων του* $[0,1]$ *με ρητά άκρα.* Έστω

$F_n = X_{I_n} \in L^\infty[0,1]$.

Έστω

$$A = \bigcup_{\eta=1}^{\infty} A(F_n)$$

και $x \in [0,1] \backslash A$. *Έχουμε ότι* $\int_{I_n} f(x)(s) d\lambda(s) = \int F_n(s) f(x)(s) d\lambda(s) = F_n(x)$.

Εάν $x \notin I_n$ *τότε* $F_n(x) = 0$ *επομένως* $f(x)(s) = 0$ *για όλα σχεδόν τα* $s \in [0,1]$ *εάν*

$x \in [0,1]\backslash A$. *Αυτό συνεπάγεται ότι η* $f: [0,1] \to L^1$ *μηδενίζεται σχεδόν παντού. Δεν είναι δυνατόν λοιπόν* $\int_A f d\lambda = X_A \ \forall A \in \Sigma$.

Κεφάλαιο 2

Η ιδιότητα RADON – NIKODYM

Ορισμός: *Ο χώρος Banach X λέμε ότι έχει την ιδιότητα Radon – Nikodym (RNP) εάν για κάθε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ *και για κάθε διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu}: \Sigma \to X$ *(το οποίο είναι φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το λ) υπάρχει Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση*

$f \in L_X^1(\lambda)$ *έτσι ώστε* $\vec{\mu}(E) = \int_E f d\lambda \;\; \forall\, E \in \Sigma$.

Ορισμός: *Έστω K ένα κλειστό φραγμένο κυρτό υποσύνολο του χώρου Banach X. Το σύνολο K έχει την Radon – Nikodym ιδιότητα εάν για κάθε χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ *και κάθε διανυσματικό μέτρο* $\vec{\mu}: \Sigma \to X$ *το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς λ είναι φραγμένης κύμανσης και που το "average range"* $A\left(\vec{\mu}\right) = \left\{\frac{\vec{\mu}(E)}{\lambda(E)},\; E \in \Sigma,\; \lambda E > 0\right\}$ *περιέχεται στο K υπάρχει* $f \in L_X^1(\lambda)$ *έτσι ώστε* $\vec{\mu}(A) = \int f d\lambda \;\; \forall\, A \in \Sigma$. *Ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο* $K \subset X$ *έχει την RNP εάν κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του K έχει την RNP. Οι χώροι* L^1, c_0, $c[0,1]$, l^∞, L^∞ *δεν έχουν την RNP. Κάθε αυτοπαθείς χώρος, κάθε δυικός που είναι διαχωρίσιμος (π.χ* l^1*) κάθε χώρος με boundedly complete βάση έχει την RNP. Έτσι εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:*

1. *Εάν* X, y *είναι ισομετρικοί χώροι Banach και ο X έχει την RNP τότε και ο* y *έχει την RNP.*

2. *Εάν ο X έχει την RNP τότε και κάθε υπόχωρος του X έχει την RNP.*

Ορισμός: *Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του X. Το A καλείται* <u>dentable</u> *εάν* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A$ *έτσι ώστε* $x \notin \overline{co}\,\big(A \backslash B_\varepsilon(x)\big)$. *(το $\overline{co}$ συμβολίζει την κλειστή κυρτή θήκη και* $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}$*). Εάν A είναι φραγμένο υποσύνολο του X, $\alpha > 0$ και* $f \in X^X$, $f \neq 0$ *τότε το* <u>slice του</u> *A που ορίζεται από το f και το α είναι το σύνολο* $S(A, f, \alpha) = \{x \in A : f(x) > \ sup\big(f(A)\big) - \alpha\}$. *Με την βοήθεια του Hahn – Banach εύκολα βλέπουμε ότι ένα σύνολο A είναι dentable Ανν $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο slice $S(A, f, \alpha)$ του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη από ε.*

Το 1967 ο Marc Aristide Rieffel εισήγαγε την έννοια της dentabilitty και απόδειξε το εξής θεώρημα: Έστω X ένας χώρος Banach. Εάν κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι dentable τότε ο X έχει την Radon – Nikodym ιδιότητα.

Απόδειξη: *Έστω $\vec{\mu} : \Sigma \to X$ ένα διανυσματικό μέτρο που είναι φραγμένης κύμανσης και απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο πιθανότητας λ. Εάν $|\vec{\mu}|$ είναι η variation του μ από το κλασικό Radon – Nikodym θεώρημα μπορούμε να βρούμε $h \in L^1_R(\lambda)$, $h \geq 0$ έτσι ώστε*

$|\vec{\mu}|\,(E) = \int h d\lambda,\ \forall\, E \in \Sigma$. *Εάν $F \in \Sigma$ με $A(F)$ συμβολίζουμε το σύνολο* $\left\{\frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)} : G \subset F, \lambda(G) > 0\right\}$.

Εάν η συνάρτηση h είναι φραγμένη στο F τότε το $A(F)$ είναι φραγμένο σύνολο διότι

$\left\|\frac{\vec{\mu}(G)}{\lambda(G)}\right\| \leq \frac{|\vec{\mu}|(G)}{\lambda(G)} = \frac{1}{\lambda(G)} \int_G h d\lambda$. *Η καρδιά της απόδειξης του Rieffel βρίσκεται στο επόμενο λήμμα.*

ΛΗΜΜΑ [H1] [H2]

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall E \in \Sigma$ με $\lambda(E) > 0$, $\exists f \in \Sigma$ με $F \subset E$ και $\lambda(F) > 0$ έτσι ώστε $\text{diam } A(F) \leq \varepsilon$. Για να αποδείξουμε το λήμμα ας υποθέσουμε ότι η h είναι φραγμένη στο E, και επομένως το σύνολο $A(E)$ είναι φραγμένο. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού

$$\bigcup_{n \in \mathrm{N}} \{w \in E : h(w) \leq n\}$$

και η h είναι φραγμένη στα σύνολα $\{w \in E : h(w) \leq n\}$.

Το σύνολο $A(E)$ είναι dentable επομένως $\exists$ $F_0 \subset E$, $\lambda F_0 > 0$ έτσι ώστε

$\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \notin \bar{co}(A(E) \backslash B_{\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)}\right) = Q$. Εάν $\text{diam } A(F) \leq \varepsilon$ τότε έχουμε αποδείξει το λήμμα.

Εάν $\text{diam } A(F_0) > \varepsilon$ τότε $\exists B \subset Fo$, $\lambda B > 0$ έτσι ώστε $\frac{\vec{\mu}(B)}{\lambda(B)} \in Q$. Πραγματικά εάν

$\frac{\vec{\mu}(k)}{\lambda(k)} \notin Q$ $\forall$ $k \subset F_0$, $\lambda k > 0$ τότε $\| \frac{\vec{\mu}(k)}{\lambda(k)} - \frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} \| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \text{diam } A(F_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Διαλέγουμε τώρα μια maximal (αναγκαστικά αριθμήσιμη) οικογένεια από ξένα ανα δυο σύνολα

$(Bn)_{n \in N}$, $\lambda(B_n) > 0$, $B_n \subset F_0$ και $\frac{\vec{\mu}(Bn)}{\lambda Bn} \in Q$ $\quad \forall$ $n \in N$. Θεωρούμε το σύνολο $F = F\circ \backslash (\cup Bn)$.

Εάν $\lambda F = 0$ τότε $\vec{\mu} F = 0$ και μπορούμε να γράψουμε ότι $\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)} = \frac{\vec{\mu}(U_n B_n)}{\lambda(UB_i)} = \sum_n \frac{\lambda(B_n)}{\lambda(UBi)} \cdot \frac{\vec{\mu}(B_n)}{\lambda(B_n)}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{\vec{\mu}(F_0)}{\lambda(F_0)}$ βρίσκεται στο Q πράγμα άτοπο. Δεν είναι λοιπόν δυνατόν να είναι $\lambda F = 0$. Επομένως $\lambda F > 0$. Από την maximality της (B_n) εάν $G \subset F$ και $\lambda G > 0$ τότε

$\frac{\vec{\mu} G}{\lambda G} \notin Q \Rightarrow \left\| \frac{\vec{\mu} G}{\lambda G} - \frac{\vec{\mu} F_0}{\lambda F_0} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\text{diam } A(F) \leq \varepsilon$ και το λήμμα έχει αποδειχθεί.

Οι επόμενες έννοιες και ορισμοί χρησιμοποιούνται στο επόμενο κεφάλαιο.

Έστω X, Y *χώροι με νόρμα. Η γραμμική απεικόνιση* $T: X \to Y$ *καλείται (φραγμένος) τελεστής ανν* $\exists\, M \geq 0$ *έτσι ώστε* $\|T(x)\| \leq M\|x\| \;\; \forall \;\; x \in X$. *Ο τελεστής* $T: X \to Y$ *καλείται συμπαγές αν* $T(Bx)$ *είναι συμπαγές υποσύνολο του* Y. *Εδώ* $B_x = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ *η μοναδιαία μπάλα του* X.

Με $L^1[0,1]$ *συμβολίζουμε το χώρο των* Lebesque *ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με νόρμα*

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt\ ,\ f \in L^1.$

Με c_0 *συμβολίζουμε τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *πραγματικών αριθμών με νόρμα* $\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

$l^2 = \left\{(x_n), x_n \epsilon \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ με νόρμα $\left||(x_n)|\right| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$

Είναι γνωστό ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert *είναι ισομετρικός με τον* l^2.

Αν $\xi_n: [0,1] \to X$ *είναι ένα φραγμένο* martingale *μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή*

$T: L^1 \to X,$ *με* $T(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi(t)\xi_n(t)\, dt$

Ισχύουν τα εξής:

Α) Αν το martingale (ξ_n) *είναι Cauchy στην νόρμα του* Pettis $\Leftrightarrow$ *ο τελεστής* Τ *απεικονίζει ασθενώς μηδενικές ακολουθίες στον* L^1 *σε νορμ-μηδενικές ακολουθίες στον* X.

Β) Αν ισχύει το Α) τότε ο $T: L^\infty \to X$ *είναι συμπαγές.*

(εδώ L^∞ = όλες οι μετρήσιμες φραγμένες συναρτήσεις με νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Κεφάλαιο 3

Χώροι Hilbert

Εισαγωγή:

Ορισμός: *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο καλείται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Ένας χώρος Hilbert θα συμβολίζεται με* $\mathcal{H}$.

*Ως **Χώρος Hilbert** $(\mathcal{H})$ ονομάζεται ο χώρος των συναρτήσεων που χρησιμοποιείται στην Κβαντική Μηχανική.*

Η έννοια του Χώρου αυτού είναι καθαρά μαθηματική. Το πιο απλό παράδειγμα χώρου είναι ο τρισδιάστατος Ευκλείδιος_Χώρος $\mathbb{R}^3$, *ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλά προβλήματα της Φυσικής.*

Σε αντίθεση με τον χώρο $\mathbb{R}^3$, *ο χώρος Hilbert είναι απείρων διαστάσεων.*

Η ουσιώδης διαφορά του χώρου Hilbert από τους απλούς διανυσματικούς χώρους έγκειται στο ότι αυτός κατοικείται από συναρτήσεις αντί για διανύσματα. Δηλαδή η βάση του Χώρου και τα στοιχεία του αποτελούνται από συναρτήσεις.Ο Χώρος Hilbert μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός.

Παράδειγμα χώρου Hilbert αποτελεί ο l^2 *με εσωτερικό γινόμενο οριζόμενο από την σχέση* $(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \bar{y}_k$ *για κάθε* $x = (x_k), y = (y_k) \in l^2$. *Ωστόσο οι χώροι* l^p *, για* $p \neq 2$ *δεν είναι Hilbert καθώς οι νόρμες τους δεν ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου.*

ΘΕΩΡΗΜΑ (RIESZ). *Έστω* $\mathscr{H}$ *χώρος Hilbert. Τότε για κάθε* $f \in \mathcal{H}^*$ *υπάρχει μοναδικό*

$x \in \mathcal{H}$ *ώστε να ισχύει* $f = fx$ *δηλαδή* $f(y) = \langle y, x \rangle, \forall y \in \mathcal{H}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. *Αν* $f = 0$ *τότε θέτουμε* $x = 0$.

Έστω $f \neq 0$ *και* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Kerf} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$ *.Τότε ως γνωστόν ο* $\boldsymbol{M}$ *είναι γραμμικός υπόχωρος του* $\mathcal{H}$ *(η* f *είναι γραμμική) που είναι και κλειστός αφού η* f *είναι συνεχής. Επειδή* $f \neq 0$, *ο* $\boldsymbol{M}$ *είναι κλειστός γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του* $\mathcal{H}$. *Από την πρόταση 4.11, υπάρχει* $z \in \mathcal{H}$ *ώστε* $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{M}$ *και* $z = 0$. *Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο* x *είναι ένα πολλαπλάσιο του* z, *δηλαδή* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda z}$ *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ουσιαστικά κάθε χώρος Hilbert είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach. Προκειμένου να ορίσουμε τον συζυγή ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή T επί ενός χώρου Hilbert $\mathscr{H}$ *(δηλαδή ενός στοιχείου της L(*$\mathscr{H}$*)) θα χρειαστούμε το επόμενο*

Θεώρημα: *Έστω* $\mathscr{H}$ *χώρος Hilbert και* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. *Υπάρχει μοναδικός τελεστής* $T^* \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ *ώστε να ισχύει:*

$$(T^*(x), y) = \big(x, T(y)\big) \text{ για κάθε } x, y \in \mathscr{H}$$

Ορισμός: *Ο συζυγής* T^* *ενός φραγμένου γραμμικού τελεστή* T *σε έναν χώρο Hilbert H είναι ο μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής στον ίδιο χώρο που ορίζεται από την προηγούμενη σχέση.*

Ορισμός: *Έστω* $\mathscr{H}$ *χώρος Hilbert και* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. *Ο τελεστής καλείται*

(i) *αυτοσυζυγής αν* $T = T^*$

(ii) *φυσιολογικός αν* $T^*T = TT^*$

(iii) *ορθομοναδιαίος αν* $T^*T = I = TT^*$

(iv) *θετικός ή μη αρνητικός αν ισχύει* $\big(T_{x,x}\big) \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathscr{H}$

Martingales σε χώρους με νόρμα

Έστω (Ω,Σ,λ) είναι χώρος πιθανότητας και Σ' ⊆ Σ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλου του Ω. Αν $f, g \epsilon L_x^1(\lambda)$, $f, g: \Omega \to X$ *μετρήσιμη και η είναι Σ' μετρήσιμη και* $\int_E g\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda\ \forall\ E \epsilon \Sigma'$, *τότε η* g *καλείται conditional expectation της* f *και γράφουμε* $E(f|\Sigma') = g$

Ορισμός: *Έστω* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma$ *μία αύξουσα ακολουθία σ- αλγεβρών. Αν* ξ_n: $\Omega \to X$ *είναι* Σ_n*-μετρήσιμη* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *και* $E(\xi_{n+1}|\Sigma_n) = \xi_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *τότε λέμε ότι η ακολουθία* (ξ_n, Σ_n) *είναι martingale.*

Επειδή $\forall\ E \in \Sigma$ *το* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E \xi(t)\, d\lambda$ *υπάρχει θα υπάρχει και το* $\lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_\eta \varphi$ *για κάθε απλή συνάρτηση* φ^E *και επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή*

$T: L^1 \to X, T\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_n(t)\varphi(t) d\lambda(t),\ \varphi \in L^1$

Αν $f \in L_x^1$, $f: [0,1] \to X$ *ορίζουμε την όρμα του Pettis της* f *ως εξής*

$|||f||| = sup\left\{\int |x^* f|\, dt, x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\right\}$

Θα ασχοληθούμε με martingales (ξ_n, Σ_n), $\xi_n: [0,1] \to X$ *τα οποία είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.*

Θεώρημα: *Έστω ,* $\xi_n: [0,1] \to X$ *martingale και* $T: L^1 \to X$ *ο τελεστής* $T(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_\eta \varphi$

Αν το (ξ_n, Σ_n) *είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis τότε ο* T *απεικονίζει ασθενός μηδενικές ακολουθίες* $\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}$ *στον* L^1 *σε ακολουθίες* $T(\varphi_n)$ *στον* X *οι οποίες είναι μηδενικές στην νόρμα δηλαδή αν* $\varphi_n \to 0(\omega)$ *στον* $L^1 \Rightarrow \|T(\varphi_n)\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ *στον* X.

<u>Απόδειξη</u>: [PU] Petrakis –Uhl Differentiation in Banach spaces.

<u>Πρόταση:</u> *Έστω* $\xi_n : [0,1] \to c_0$ *martingale και* $T : L^1 \to c_0$ *ο τελεστής που αντιστοιχεί στο Martingale*

$$T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int \xi_n \varphi,\ \varphi \in L^1.$$

Έστω ότι $T\varphi = \left(\int f g_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$

Το martingale ξ_n *είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis αν και μόνο αν* $\|g_n\|_{L^1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

<u>Απόδειξη:</u> *Αν το* (ξ_n) *είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis τότε από* $[PU]$ *το σύνολο*

$K = \left\{\lim_{n\to\infty} \int \xi_n \varphi, |\varphi| \le 1\right\}$ *είναι συμπαγές υποσύνολο του* c_0 *άρα υπάρχει*

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in c_0$ *έτσι ώστε* $\forall\ \ y \in K$ *να έχουμε* $|Yi| \le |X_i|, i \in \mathbb{N}$

(εδώ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ *) και* $y_n = \int \varphi g_n,\ \ \varphi \in L^1$

Άρα $\left|\int \varphi g_n\right| \le x_n\ \ \forall \varphi$ *με* $|\varphi| \le 1$ *άρα* $\|g_n\|_1 \le x_n$. *Αφού* $x_n \to 0$ *έχουμε* $\|g_n\|_1 \to 0$

Αντίστροφα αν $\|g_n\|_1 \to 0$ *το* K *είναι συμπαγές στο* c_0 *και το* (ξ_n) *είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis* $[PU]$.

Θεώρημα: *Έστω X χώρος Banach και $\xi_n: [0,1] \to X$ martingale το οποίο δεν είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis τότε υπάρχει τελεστής $S: X \to c_0$ έτσι ώστε το martingale $S(\xi_n): [0,1] \to c_0$ να μην είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis.*

Απόδειξη: *Στο $[BB]$ έχει αποδειχθεί το εξής θεώρημα: Αν X, Y χώρος Banach και $T: X \to Y$ δεν είναι συμπαγής τελεστής και $T(X)$ πυκνό στο Y τότε $\exists\ S: Y \to c_0$ φραγμένος τελεστής έτσι ώστε ο τελεστής ST δεν είναι συμπαγής $(S \cdot T: X \to c_0)$*

Το martingale ξ_n ορίζει ένα τελεστή $T: L^1 \to X$ με $T_\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \int \xi_n \varphi$.

Επειδή το martingale δεν είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis το σύνολο $T(B_{L^\infty}) = \{T_\varphi: |\varphi| \leq 1\}$ δεν είναι συμπαγής $[PU]$.

Δηλαδή ο περιορισμός $\tilde{T}$ του T στον $L^\infty \subseteq L^1$ δεν είναι συμπαγής

Άρα $\exists\ S: X \to c_0$ έτσι ώστε $S_0\tilde{T}: L^\infty \to c_0$ όχι συμπαγής.

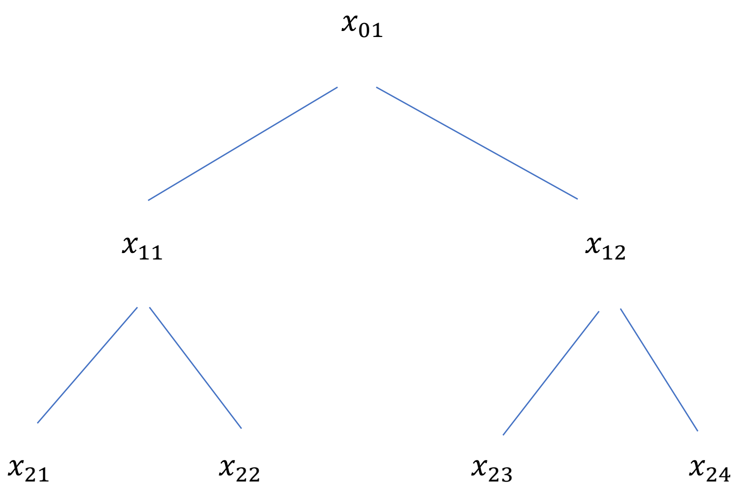
Άρα το martingale $S(\xi_n)$ δεν είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis $[PU]$.

(Εδώ χώρος βλάβη το γενικότητας είχαμε δεχθεί ότι ο $T: L^1 \to X$ έχει πυκνό στον X πεδίο τιμών)

Πόρισμα: *Αν ο S_0T στο προηγούμενο θεώρημα είναι της μορφής $ST: L^1 \to c_0$ $ST(\varphi) = \left(\int \varphi g_n\right)$ τότε $\|g_n\| \nrightarrow 0$*

Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα δέντρο στον X είναι σε ένα σύστημα $(x_{n,k}), k = 1, \dots, 2^n, n \in \mathbb{N}$ *έτσι*

ώστε $x_{n,k} = \frac{Xn+1,2k-1+Xn+1,2k}{2}$



Ένα δέντρο αν είναι φραγμένο ορίζει ένα martingale

$\xi_n: [0,1] \to X,\ I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right],\ \Sigma_n = \langle\, I_{n,k} \rangle =$

Η πεπερασμένη άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα $I_{n,k}$ *με τύπο*

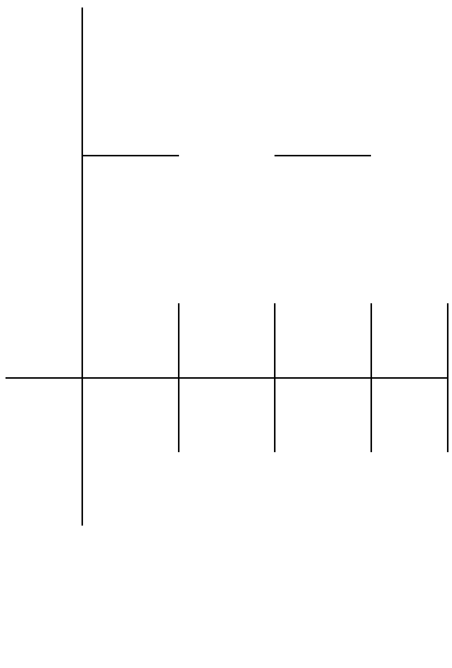
$\xi_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{I^n} h_{n,k}(t) \cdot x_{n,k}\ ,\ 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}$ *όπου* $h_{n,k}(t) = 2^n \cdot x_{I_{n,k}}$

Ο τελεστής που ορίζει το δέντρο είναι $T: L^1[0,1] \to x,\ T(\varphi) = lim \int \xi_n(t) \varphi(t)\, dt.$

Το δέντρο $(X_{n,k}),\ 1 \leq k \leq 2^n,\ n = 0,1,2, \dots$ *καλείται δ-Rademacher δέντρο αν*

$\exists\delta > 0 \ \ \frac{1}{2^n}\left\|\sum d_{n,k}\right\| \geq \delta,\ d_{n,k} = X_{n+1,2k-1} - X_{n+1,2k}$

Ο τελεστής T που αντιστοιχεί σε ένα δ-Rademacher δέντρο $T: L^1[0,1] \to X$ έχει την ιδιότητα $\|T(r_n)\| \geq \delta, n \in \mathbb{N}$ όπου (r_n) είναι η ακολουθία των Rademacher συναρτήσεων.



$r_n(t) = 1$ στο $I_{n,1}, I_{n,3}, \ldots, I_{n,2^n}$ διαστήματα και

$r_n(t) = -1$ στα $I_{n,2}, I_{n,4}, \ldots, I_{n,2^n-1}$

<u>**Πρόταση**</u>**:** *Αν $(X_{n,k}),\ k = 1, \cdots, 2^n,\ n \in \mathbb{N}$ είναι ένα δ-Rademacher δέντρο στον χώρο με νόρμα X τότε $\exists\ S: X \to c_0$ έτσι ώστε το martingale (ξ_n) που αντιστοιχεί στο δέντρο $S(X_{n,k})$ στον c_0 να μην είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.*

<u>**Απόδειξη**</u>***:*** *Ο τελεστής $T: L^1[0,1] \to x$ που αντιστοιχεί στο δέντρο $(x_{n,k})$ έχει την ιδιότητα $\|T(r_n)\| \geq \delta$ όπου $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των Rademacher συναρτήσεων. Αφού $r_n \to 0$ ασθενώς*

από προηγούμενο θεώρημα $\exists\ S: X \to c_0$ *έτσι ώστε το martingale που αντιστοιχεί στον τελεστή* $ST \cdot L^1 \to X$ *να μην είναι Cauchy στη νόρμα Pettis άρα το martingale που αντιστοιχεί στο δέντρο* $S(x_{n,k})$ *δεν είναι Cauchy στη νόρμα του Pettis.*

Είναι γνωστό ότι κάθε χώρος Hilbert H *έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym (RNP) και ότι κάθε martingale με τιμές στον* H *συγκλίνει στην νόρμα του Bochner και επομένως κάθε martingale με τιμές στον* H *είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.*

Δίνουμε μία ευθεία απόδειξη:

Πρόταση: *Αν* H *είναι χώρος Hilbert κάθε martingale με τιμές στον* H *είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.*

Απόδειξη: *Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι ο* H *είναι διαχωρίσιμος και άρα* $H \approx l^2$.

Έστω $\xi_n[0,1] \to l^2$ *ένα martingale. Θεωρούμε τον τελεστή* $T: L^1 \to l^2$, $T\varphi = lim \int \xi_n \varphi, \varphi \in L^1$.

Τότε $T\varphi = \left(\int g_n \varphi\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ *άρα* $\|g_n\|_2 \to 0 \ \Rightarrow\ \|g_n\|_1 \to 0$

Αν $S: l^2 \to c_0$ *είναι φραγμένος τελεστής τότε γράφουμε* $S\,T(\varphi) = \left(\int h_n \varphi\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. *Άρα*

$S\left(\left(\int g_n \varphi\right)_n\right) = \left(\int hn\varphi\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \forall \varphi \in L^1.$

Αν $\vec{g} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $\vec{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *παρατηρούμε ότι* $S(\vec{g}) = \vec{h}$ *άρα* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Ug_n)_{n\in\mathbb{N}}$

για κάποιον τελεστή U. Αφού $\|g_n\|_1 \to 0$ θα έχουμε ότι $\|h_n\|_1 \to 0$ επομένως το martingale $S(\xi_n)$ είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis. Από το θεώρημα το (ξ_n) είναι Cauchy στην νόρμα του Pettis.

Martingales με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς [W]

Το πάνω μέρος του σχήματος δείχνει ένα δείγμα διαδρομής $n \to X_n(\omega)$ *για μια διαδικασία X όπου* $X_n - X_{n-1}$ *αντιπροσωπεύει τα κέρδη σας ανά μονάδα στοιχηματισμού στο παιχνίδι* n. *Το κάτω μέρος της εικόνας απεικονίζει τη συνολική διαδικασία κερδών* $Y := C \cdot X$ *σύμφωνα με την προβλεπόμενη στρατηγική* C *που περιγράφεται ως εξής:*

Διαλέγουμε δύο αριθμούς a και b με $a < b$

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ

Περιμένουμε έως ότου το X πέσει κάτω από το a

Ποντάρουμε μέχρι το X να ξεπεράσει το b και σταματάμε να παίζουμε

ΕΩΣ ΛΑΘΟΥΣ (αυτό είναι για πάντα!)

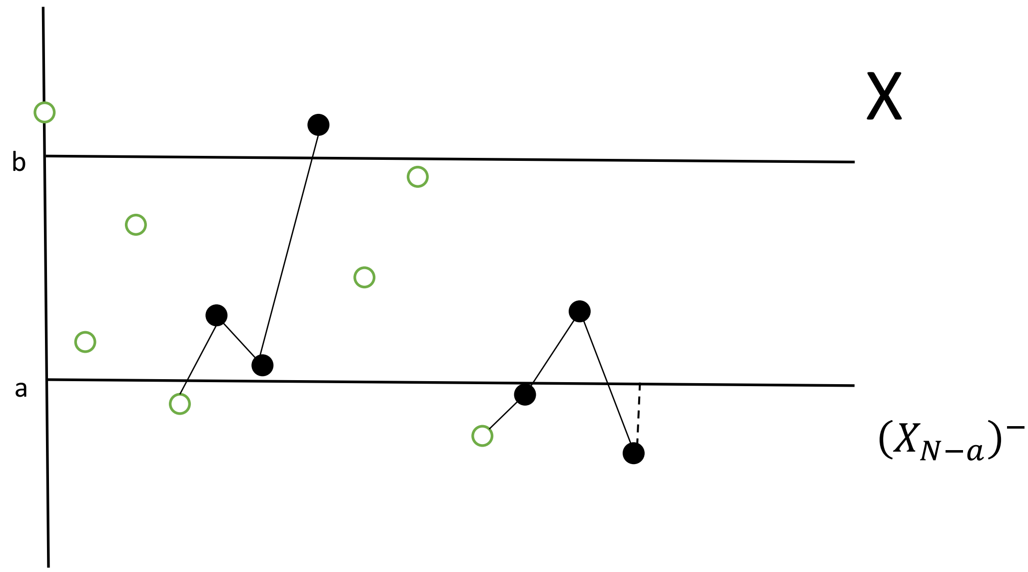
Οι μαύρες σταγόνες δηλώνουν όπου C = 1 και οι ανοιχτοί κύκλοι σημαίνουν όπου C = 0. Θυμηθείτε ότι το C δεν έχει οριστεί τη στιγμή 0.

Για να είναι πιο επίσημο (και να αποδεικνύει διαισθητικά ότι το C είναι προφανές) ορίζω

$C_1 := I\{x_{0<\alpha}\}$ και για $n \geq 2$ $\;C_n = I_{\{C_{n-1=1}\}} I_{\{X_{n-1} \leq b\}} + I_{\{C_{n-1}=0\}} I_{\{X_{n-1} < a\}}$

Ο αριθμός $U_N[\alpha, b](\omega)$ *των διασταυρώσεων* $[a, b]$ *από* $n \to x_n(\omega)$ *έως το χρόνο N ορίζετε ως το μεγαλύτερο* k *στο* Z^+ *έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε*

$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_k < t_k \leq N$ *με* $X_{si}(\omega) < \alpha,\; X_{ti}(\omega) > b \;\; (1 \leq i \leq k)$



Η θεμελιώδης ανισότητα (θυμηθείτε ότι $Yo(\omega) := 0$)

$Y_N(\omega) \geq (b-\alpha)U_N[\alpha, b](\omega) - [X_N(\omega) - \alpha]^-$ *είναι εμφανής από την εικόνα. Κάθε διασταύρωση* $[a, b]$ *αυξάνει την τιμή Y κατά τουλάχιστον* $(b-a)$ *ενώ τα* $[X_N(\omega) - a]^-$ *υπερτονίζουν την απώλεια κατά το τελευταίο διάστημα του παιχνιδιού.*

<u>**Το δίλλημα διασταύρωσης του Doob**</u>

Έστω X είναι ένα supermartingale. *Έστω* $U_N[\alpha, b]$ *είναι ο αριθμός των διασταυρώσεων των* $[\alpha, b]$ *ως τον χρόνο* N. *Τότε* $(b-\alpha)EU_N[a, b] \leq E[(X_N - a)^-]$

<u>**Απόδειξη:**</u> *Η διαδικασία* C *είναι προβλέψιμη, φραγμένη και* ≥ 0 *και* $Y = C \cdot X$.

Ως εκ τούτου η Y *είναι* supermartingale *και* $E(Y_N) \leq 0$*. Το αποτέλεσμα τώρα ακολουθεί από* $Y_N(\omega) \geq (b-\alpha)U_N[\alpha,b](\omega) - [X_N(\omega)-\alpha]^-$.

Πόρισμα*: Έστω X είναι* supermartingale *φραγμένο στο* L' *όπου* $\sup_n E(|X_n|) < \infty$.

Έστω $\alpha, b \in R$ *με* $a < b$*. Τότε με*

$$U_\infty[a,b] := \uparrow \lim_N U_N[\alpha,b], (b-\alpha)EU_\infty[a,b] \leq |a| + \sup_n E(|x_n|) < \infty$$

έτσι ώστε $P(U_\infty[\alpha,b] = \infty) = 0$.

Απόδειξη: *Σύμφωνα με το δίλλημα διασταύρωσης του* Doob, *έχουμε, για κάθε*

$$N \in N, (b-x)EU_N[a,b] \leq |a| + E(|X_n|) \leq |\alpha| + \sup_n E(|X_n|).$$

Έστω τώρα $N \uparrow \infty$

Το θεώρημα σύγκλισης του Doob

Έστω X είναι supermartingale *φραγμένο στο* L' : $\sup_n E(|X_n|) < \infty$*. Τότε, σχεδόν παντού,* $X_\infty := \lim X_n$ *υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*

Για οριστικότητα ορίζουμε $X_\infty(\omega) := \lim\sup X_n(\omega)$, $\forall\omega$*, έτσι ώστε* X_∞ *είναι* F_∞ *μετρήσιμο και* $X_\infty = \lim X_n$

Απόδειξη (Doob): *Γράφουμε (σημειώνοντας την χρήση του* $[-\infty,\infty]$*):*

$\Lambda := \{\omega : X_n(\omega)$ *δεν συγκλίνει σε όριο στο* $[-\infty,\infty]\}$

$$= \{\omega : lim\,inf X_n(\omega) < lim\,sup X_n(\omega)\}$$

$$= \underset{\{\alpha, b \in Q : a < b\}}{U} \{\omega : lim\,inf X_n(\omega) < a < b < lim\,inf X_n(\omega)\}$$

$$=: U_{\Lambda\alpha,b}$$

Αλλά $\Lambda\alpha, b \subseteq \{\omega : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$, *έτσι ώστε βάση του πιο πάνω πορίσματος, έχουμε* $P(\Lambda\alpha, b) = 0$. *Δεδομένου ότι το Λ είναι μια μετρήσιμη ένωση των συνόλων* $\Lambda\alpha, b$ *βλέπουμε ότι* $P(\Lambda) = 0$, *από όπου* $X_\infty := lim X_n$ *υπάρχει σχεδόν παντού στο* $[-\infty, \infty]$.

Όμως το δίλλημα του Fatou *μας δείχνει ότι*

$E(|X_\infty|) = E(lim\,inf |X_n|) \leq lim\,inf E(|X_n|) \leq sup E(|X_n|) < \infty$, *έτσι ώστε*

$P(X_\infty$ *είναι πεπερασμένο*$) = 1$.

<u>Πόρισμα:</u> *Εάν το Χ είναι μη αρνητικό* supermartingale *τότε* $X_\infty := lim X_n$ *υπάρχει σχεδόν παντού.*

<u>Απόδειξη:</u> *Το Χ προφανώς φραγμένο στο* L^1 *αφού* $E(|X_n|) = E(X_n) \leq E(X_0)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[DU] J. Diestel and J. JUhl, Jr., Vector Measures, Math Surveys, mo.15 AMS,

Providence R.I. 1977

[D] J Diestel, Sequences and series in Banach spaces. Graduate Texts in Math, ral

92, Springer-Verlang New York – Berlin, 1984

[H1] Huff R.E. Dentability and the Radom – Nikodym Property

Duke Mathematical Journal 41, (1974) 111-114

[H2] Huff R.E The Radom – Nikodym Property for Banach spaces – A Survey of

Geometric aspects.

K.D. Biestedt, B. Fuchssteiner (eds.)

Functional Analysis: Survey and Recent Results North – Holland Publishing Company

(1977), 1-13

[GJ] M. Girardi and W. Johnson Universal Non-Completely Continuous Operators,

Israel Journal of Mathematics99, (1997), 207-219

[BB] Iryna Banach and Taras Banach, Constructing non compact operators into c0 archive:1006:3089-1 [Math FA] 15 June 2010

[W] D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press, 1991

[RB] R. Bourgin Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon Nikodym Property

(Lecture Notes in Mathematics 993)

[PU] Petrakis- Uhl Differentiation in Banach Spaces - Συνέδριο στην ανάλυση Singapore 1986, εκδόσεις north - holland